UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY

Class 506
Book RAFM
Volume ser. 3 v. 2

Ja09-20M

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXV

1877-78

SERIE TERZA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME II.

LYNCÆI

ROMA
COI TIPI DEL SALVIUCCI
1878

506
RAFM
ser 3
v. 2

Intorno alle condizioni idrauliche del Danubio a Buda-Pest dopo i lavori di rettificazione del 1872.

Nota dell' ing. PAULO FAMBRI

letta nella seduta del 6 maggio 1877.

Sul principio del 1876, precisamente in febbraio e marzo, una terribile inondazione del Danubio richiamò vivamente gli studî dell' ingegnere I. I. Revy intorno ad alcune recenti operazioni alle quali era stato sottoposto il gran fiume immediatamente a valle di Buda-Pest.

Egli impiegò lungamente tutto il suo tempo e il suo specialissimo ingegno a mettere bene in chiaro ogni aspetto dell' inatteso fenomeno ed ogni fatto ad esso prossimamente anteriore che potesse comunque illustrarlo. La quale cosa, necessaria sempre, diventa più che mai tale quando esistano persone e corpi morali ai cui errori possa venire in qualche modo attribuito un sinistro e cui prema per conseguenza di abbuiare notizie, sviare argomenti, e arruffare a un modo o ad un altro la matassa attraversando la infesta ricerca della verità scientifica.

Il Danubio però non poteva certamente serbare dei segreti di fronte ad un ingegnere idraulico come il Revy il quale aveva saputo, un dieci anni prima, strapparne tanti al Paranà, all' Uraguay e al Plata medesimo. Laonde non andò guari che il paziente quanto acuto indagatore fu non solo in possesso della verità, ma in grado di dimostrarla, come fece in una importantissima relazione mandata il 30 giugno 1876 al conte Andrassy il quale, come è non meno naturale che debito in lui, professa un interesse al tutto speciale per quanto risguardi il nobile fiume che costituisce la massima arteria della Monarchia. E in ciò l'opinione pubblica sta tutta dietro a lui, pronta, ov' egli si arrestasse, anche a sospingerlo.

La notizia dell'inondazione del 1876 aveva profondamente costernato l'Ungheria. I cittadini di Buda-Pest si chiedevano angosciosamente se gli ingegneri imperiali non avessero fatto per avventura il bel lavoro di cambiare per essi in un pericoloso nemico quel fiume che era stato sin allora l' ornamento e la fortuna del loro bel paese.

Le osservazioni sulle quali avrò l' onore di intrattenere questo illustre consesso si limiteranno ad un cento chilometri di corso sopra e sotto al punto obbiettivo, Buda-Pest. In questo tratto verranno considerate le oscillazioni altimetriche comparative della sua superficie prima e dopo i grandi lavori, dai quali (se in bene o in male si vedrà poi) dovevano a ogni modo immancabilmente venire importanti modificazioni al regime del fiume.

Gioverà intanto prendere dalla Memoria dell' autore e, dove è possibile, condensare come si trattasse d'un imballaggio, le notizie indispensabili all' intelligenza dei fatti e all'apprezzamento dei giudizî.

158972

Il fiume. — Da Esztergom a Duna-Foldvar il canale del Danubio andò per lo passato assai poco soggetto ad alterazioni.

Sopra e sotto Gönyö esso riceve parecchi tributarî i quali all'occasione influiscono sul suo livello. Però tra Komorn e Buda-Pest essi possono riguardarsi come assai poca cosa in rapporto all'ordinario volume delle acque.

A Visegrad il fiume esce d'in fra una catena di montagne per entrare nelle grandi pianure ungheresi.

Quivi il ramo principale si biforca. Le sue due lunghe braccia corrono pressochè parallelamente a 33 chilometri di distanza, convergendo poi e formando l'isola di sant'Andrea bella di parecchi villaggi. Di là si uniscono ricostituendo un corso unico di circa 15 chilometri, salvo, qua e là qualche breve isola, ma ritenendo fin sotto a Buda-Pest il carattere di ramo unico. Ivi, dopo le strette di Gellert, si rifa, come a Visegrad, una grande biforcazione, e ciascuno dei due rami forma un grande canale secondario sparso di isolette come il principale. Sotto Gellert, il Soroksar e il Promontor, che così si chiamano questi due rami, continuano ciascuno il proprio corso per 57 chilometri formando l'isola di Csepel, larga cinque, bella anch' essa di molti villaggi. Tornano poi a unirsi e fondersi in canale primario per lunghissimo tratto, oltre al quale il soggetto della presente Memoria non ha che vedere. L'andamento del Danubio dunque, fra Esztergom e Duna-Foldvar, è questo che, a parte le brevi isole che ne sono gli accidenti minori, e' si biforca due volte, cioè sotto Visegrad e sotto il colle di Gellert.

E se così faceva non era davvero per desiderio che avesse di abbracciare Csepel o di imprigionare sant'Andrea ma, come il Revy assiomaticamente afferma, per delle *profonde ragioni idrauliche* le quali non possono non avere a poco a poco *determinato il suo regime,* in virtù e in funzione del quale esso ha per lo passato mantenuto l'*equilibrio* fra le innumerevoli ragioni fisico-meccaniche le quali ne hanno costituito le dimensioni, la forma, le altezze e la direzione.

Di coteste ragioni egli non accenna che a talune principali: il volume di acqua, a cagion d'esempio, durante le piene, e la formazione geologica del terreno sul quale si è formato il canale e la pendenza.

Era ben sicuro che, tagliando fuori un braccio come quello di Soroksar, cotesto equilibrio, già stabilito, non poteva non essere perturbato, sebbene a nessuno fosse dato prevedere fino a dove si sarebbero spinte le conseguenze di tale rottura, la quale doveva necessariamente modificare il regime delle acque. Anche prescindendo da peregrine considerazioni, non bisognava dimenticarsi che si trattava di un ramo vitale, che in tempo di piena rappresenta un terzo della potenza e della massa. Avrebbe, secondo il Revy, dovuto bastare questa sola cifra *ad impensierire seriamente coloro alle cure dei quali il fiume era affidato e a distorli da un passo che, quanto a gravità di conseguenze, non ha uguale in nessuno dei fiumi conosciuti, e non avrebbe dovuto mai essere approvato.*

Intorno alla grande operazione, egli narra essere stato chiesto il voto di un chiaro ingegnere d'un paese amico, ma che ciò venne fatto soltanto quando il taglio era cominciato, e questi per conseguenza avrebbe messo sossopra ogni cosa, suscettività e interessi, se avesse provocata una sospensione dei lavori. Non osò farlo ed è naturalissimo. I consultori, se vogliasi averne un coscenzioso parere, bisogna interrogarli a tempo,

e nella maggiore possibile serenità dei loro spiriti, e non quando riguardi d'ogni natura debbono inceпparli e, soprattutto, quando, lasciando correre le cose, non incontrino che una responsabilità suddivisa e riversabile sempre su coloro che le hanno, senza loro partecipazione, iniziate — mentre, interrompendone il corso, vadano incontro ad una tutta personale e di impossibile giustificazione pratica. È certo infatti che, se i disastri rimangono impediti dal voto di un consultore, il costui *voto* non può rimanere legittimato agli occhi dei più da fatti che non accadono; mentre esso può venire e viene, non foss'altro che per necessità di difesa, impugnato da tutti coloro i quali vedono per esso attraversati gli imaginarî vantaggi che promettevano e sentono moltiplicarsi contro dai proprî amministrati l'accusa delle prodigate spese e delle frustrate speranze.

Ci vorrebbero degli arbitri singolarmente belligeri per metterli a simili prove. Non si ottiene pertanto lo scopo pressochè mai, quando si propongono loro questioni di troppo pregiudicate.

Bisogna mettere i giudici, per quanto rispettabili, in condizioni tali che la verità del giudizio non sia loro per costare eccessivamente, e la reticenza nulla. Al famoso bivio ha esitato lo stesso Ercole, e non è davvero il caso di metterci la gente mezzana.

Registrazione idrometrica. — Il regime d'un fiume non si scopre certamente *a priori*. Esso non può essere indotto e conosciuto che per successive e costanti osservazioni idrometriche coscienziosamente ed immancabilmente deposte in giornalieri registri, i quali dovrebbero essere avuti in conto di sacri come le leggi del paese. Al Danubio cotesti debitissimi riguardi non furono usati mai. Il Revy si trovò di fronte al dubbio o all'ignoto quando si diede a tutt'uomo a voler mettere insieme un accertato parallelo del passato col presente regime del fiume, nei due periodi che hanno, l'uno per punto di arrivo e l'altro di partenza il giorno dell'interramento del Soroksar.

Egli visitò le varie stazioni sopra e sotto Buda-Pest per ispezionare i registri idrometrici. Trovò le osservazioni di certe stazioni pubblicate dai giornali. Ma non erano, è tosto obbligato ad aggiungere, dei dati presi regolarmente. Al contrario, e proprio nei paesi i quali dovevano maggiormente subire gli effetti della rettificazione, essi erano deficientissimi e ricavati e coordinati nella più strana forma. Ad Ercsény, per esempio, a mezzo circa il ramo Promontor, il registro idrometrico era saltuario e non comprendeva che alcuni anni. La staza, levata e portata via dai ghiacci del 24 febbraio 1876, non era stata più rimessa per due mesi, e così mancavano le più importanti osservazioni, cioè precisamente quelle sul livello della piena.

A Duna-Foldvar, importante città e stazione della compagnia di navigazione del Danubio, i registri idrometrici durante gli ultimi 19 anni erano stati tenuti da un veterano.

Durante cotesti 19 anni, il buon uomo non aveva messo giù neanche una misura diretta (no quite at all) nel suo diario dei livelli, ma soltanto registrate delle differenze di elevazione del pelo senza riferimento ad alcun punto fisso, salvo il caso di qualche singolare fenomeno. Allora soltanto gli balenava la felice idea di mettere nel suo diario una nota come per esempio la seguente: « Addì 26 febb. 1876, a mezzogiorno il Danubio era due centimetri più basso che il 31 dec. 1875, nel qual giorno arrivò a due pollici sotto la chiave del ponte vicino all'angolo di Langer ».

È così che il Revy ebbe, ma soltanto a larghi intervalli, qualche lume sul regime del suo Danubio.

Non è se non da due anni che si ordinò al soldato di scrivere nel suo registro delle *letture* anzichè delle *differenze* giornaliere di alzata o discesa. Ma, aggiunge l'autore, sebbene ciò davvero occorresse, egli è un povero diavolo, mal pagato, sfornito di strumenti e non può in nessun modo cavarsene.

Nel dicembre del 1875 egli ebbe una reprimenda perchè scrisse che l'acqua era alta, senza poter dire quanto sopra lo zero, non ci avendo l'asta graduata.

Allora egli fece un' istanza all' autorità municipale perchè lo volesse in qualche modo aiutare a porvela, e questa gli prestò trenta fiorini austriaci coi quali egli fece fare due idrometri, uno per le alte e l' altro per le basse acque. Eseguito il primo, egli lo mise a posto da sè, fissando di suo capo a 6 metri il livello del 1876, senza che nessun ingegnere del dipartimento idraulico lo istruisse o sorvegliasse comunque in così delicata operazione.

Tornato in giugno, il Revy trovò messo a posto anche l' altro idrometro per le basse acque, ma questa seconda volta pure il buon veterano s'era dovuto ingegnare da sè! E così si potrà dire che nel mese di gennaio del 1876 a Duna-Foldvar, vale a dire a 11 miglia e mezzo dalla capitale dell'Ungheria, fu messo giù nel Danubio, e determinatone lo zero, il primo idrometro, e in quello di marzo il secondo per mano di un disgraziato invalido del terzo reggimento ...... pazienza del Genio o dell'Artiglieria, ma degli Usseri!

Esso Revy, nel citato rapporto al conte Andrassy, entra nei più minuti particolari in proposito, e fa benissimo. Senza di ciò non sarebbe stata creduta una così deplorabile noncuranza degli interessi idraulici di un paese, la produttività e sicurezza del quale dipendono principalmente dal regime di coteste non punto studiate acque.

Egli del resto trovò le stesse difficoltà anche negli altri posti. Fu anzi il governo che gli dichiarò netto che dei dati poteva fornirgliene a piacere, ma che egli però si guardasse dal farci troppo a fidanza.

Entrato oramai in cotesto impiccio, bisognava bene che egli a qualche parte si volgesse, e a qualche uscio picchiasse. Picchiò da ultimo, e per sua gran ventura, a quello del sig. Cassian, direttore generale della compagnia per la navigazione del Danubio, e n'ebbe tutte le note idrometriche delle diverse stazioni lungo il corso del fiume. Tali note davano, giorno per giorno, le altezze del fiume alle principali stazioni, per un periodo di 15 anni, vale a dire delle migliaia di numeri, che sarebbero però riusciti impossibili a maneggiarsi senza lo spediente delle rappresentazioni geometriche. Allora egli vi mise subito mano. Costruiti i diagrammi, si cominciò a formare una idea del valore assoluto e dei rapporti delle cifre raccolte.

Col mezzo di essi, dice, si cominciò finalmente a poter vedere ed apprezzare il valore di tutti cotesti dati, che le sole e disgiunte cifre non sarebbero mai riuscite a mostrarci. Si potè inoltre convincersi che nella scelta dei posti e dei momenti pei confronti dei varî livelli del fiume era necessaria la massima precauzione, essendo molte le cause perturbatrici (gli influenti per primi), che disturbavano l'armonia che sarebbe altrimenti emersa dai diagrammi delle diverse stazioni.

Gli fu pertanto giuocoforza limitare i proprî riscontri ai diagrammi di quei periodi nei quali l'azione di tali cause perturbatrici essendo nessuna o poca, il fenomeno veniva ad informarsi soltanto a leggi generali, necessarie e perciò essenzialmente costitutive del regime idraulico del fiume.

I diagrammi dei periodi più soggetti all'azione d'influenza, di rigurgito, vorticosità od altro non avrebbero potuto che aggiungere qualche filo di traverso all'arruffìo delle tante incomposte opinioni esistenti.

Egli ricusò il saltuario e contingente ribelle ad ogni riscontro, e presentò il normale il quale, lucidamente coordinandosi di per sè, può dirsi non solo che offra ma che a dirittura si imponga ai riscontri.

Quella pertanto del Revy non fu la scelta di uno scienziato partigiano il quale ricusi di prendere in considerazione i dati che militano contro alla sua tesi, ma l'intelligente e necessario rifiuto di tutto il materiale di sua natura refrattario all'analisi e all'induzione, e l'allontanamento di quelle complicazioni, sotto l'informe rete delle quali si sarebbero perdute di vista le semplici e grandi linee della legge scientifica.

Il preciso dovere di un ingegnere è per l'appunto quello di rimuovere con sapiente critica le contingenze, e rappresentare le cose nella maggiore normalità e semplicità possibile, mettendo in grado la gente di cogliere col ragionamento, e possibilmente anzi coll'occhio, la verità non accidentale nella più schietta ed evidente delle sue forme.

I DIAGRAMMI. — Essi rappresentano le oscillazioni del Danubio a Buda-Pest durante due periodi.

Il 1° quello che precedette l'interramento del Soroksar. — È la rappresentazione del vecchio regime.

Il 2° quello immediatamente posteriore, cioè dal 1872 al 1876. — È il nuovo.

Nel 1° il Danubio corre biforcato tra Soroksar e Promontor.

Nel 2° è confinato in un ramo solo, il Promontor.

I sei dispari rappresentano il primo periodo, i sei pari il secondo.

Le serie sono accostate a due a due; una linea verticale le divide. Le cifre del vecchio regime sono a sinistra, quest'altre a destra.

I diagrammi sono tutti costruiti allo stesso modo. L'orizzontale è lo zero dell'idrometro, le verticali rappresentano i giorni del mese. — In esse, secondo una scala a piacere, è segnata l'altezza in piedi e pollici alle 8 del mattino. I diversi punti congiunti con una linea rappresentano graficamente le vicende idrometriche durante il dato periodo.

Il diagramma n. 3, per esempio, rappresenta l'agosto 1870; la linea di Buda-Pest sta sopra, quella di Komorn sotto.

È singolare l'armonia fra le due linee spezzate BB e KK. — Se a Komorn il livello si eleva, a Buda-Pest fa il medesimo; così se cala. Vi è nesso, quasi parallelismo. Ciò accusa dipendenza, funzione, come in matematica si dice.

Quante volte noi troviamo che il nesso anzi l'armonia, che tale realmente appare, non è disturbata, possiamo francamente dire *che è in quistione il Danubio solo,* il Danubio *sincero,* diremo così, e che le cifre non esprimono che il suo regime in ordine alle sue altezze.

Un'altra cosa è da notare, un'altra vera armonia. È a un dipresso con 24 ore di ritardo che a Buda-Pest segue l'alzata o la scesa delle acque.

Ciò non è disturbato che dai tributarî o dai ghiacci, nei quali casi la dipendenza fra le due stazioni è talvolta esagerata, tal'altra attenuata, obliterata e perfino invertita.

C'è il caso, per esempio, che un influente, la Waag, tanto per nominarne uno, sia in piena mentre il Danubio si trova basso.

Una tale circostanza sarà ad un punto rilevata dai livelli di Gönyö, di Komorn e di Buda-Pest, perchè in tal caso non solo mancherà il notato parallelismo, ma si avrà talvolta niente meno che una inversione di andamento nella linea, prova evidente che l'acqua del Danubio, la quale passa a Pozsony o a Gönyö, non è sempre la sola a determinare i livelli di Buda-Pest.

Il ghiaccio fa ancora peggio talvolta, perchè produce elevazioni o depressioni improvvise.

Non è da dire che anche i diagrammi dei periodi influenzati da cotesti fenomeni non potessero tornare anch'essi istruttivi e fors'anco preziosi quando che sia, ma la moltiplicità e complicazione dei fattori ne allontana per ora gli studiosi, i quali hanno più vitali e sopratutto più razionali problemi coi quali misurare le loro forze induttive.

Oggi la parte seria dell'idraulico è la ricerca della legge delle velocità, delle portate e dei rapporti di livello fra le diverse stazioni *quando il fiume è sincero.*

Le perturbazioni possono dar lume in appresso, ma bisogna cominciare dal conoscere e formulare la normalità.

« Io ho omesso, dice l'autore nell'ultima parte del suo capitolo intitolato *Diagrams,* tutti i diagrammi invernali per non aver che fare con tutte le perturbazioni prodotte sia dagli influenti che dai ghiacci ; e tra le migliaia di cifre ho scelto quelle che si riferivano a periodi o non punto disturbati, o pochissimo ».

E quantunque di queste schiette dichiarazioni possano giovarsi gli avversarî, la buona fede impone di riconoscere che soltanto seguendo un tale sistema era possibile giungere a quelle nette conclusioni induttive le quali, come si vedrà in appresso, conducono con evidenza irresistibile ad una rigorosa valutazione degli effetti idraulici degli ultimi lavori.

L'Analisi dei diagrammi. — Il diagramma n. 1 si riferisce all'anno 1871, anteriore all'interramento del Soroksar. Durante questo, dal 22 ottobre al 6 novembre, il livello a Komorn decresceva da 2,5 a 1,8.

È segnato con un doppio cerchio il periodo durante il quale il Danubio rimase costante a 2′ 1″ 0‴ dal 27 al 30 ottobre.

A questo periodo ne corrisponde un altro a Buda-Pest, anch'esso racchiuso fra doppî cerchi, durante il quale il livello fu costante a 3′ 4″ 6‴ e precisamente col ritardo di un giorno, cioè dal 28 al 31 ottobre.

La differenza fra Komorn e Buda per questi periodi è 1′ 3″ 6‴; e il livello di Komorn è 1′ 3″ 6‴ sotto quello di Buda.

Il diagramma n. 2 rappresenta il 1873, posteriore all'interramento del Soroksar. Abbiamo a Komorn egualmente un lento ed uniforme decrescere da 2′ 5″ 0‴ il 9 novembre a 1′ 1″ 0‴ il 24 novembre, e a Buda da 4′ 4″ 0‴ a 3′ 4″ 0‴.

Sono segnati con doppio cerchio a Komorn dal 13 al 19 novembre, durante il quale il livello varia di poco, e a Buda dal 14 al 18.

La differenza fra i due livelli è 1′ 9″ 9‴.

Paragonando i diagrammi n. 1 e n. 2 per quasi identiche acque misuranti 2′ 0″ 10‴ sull'idrometro, si vede che il livello a Buda è cresciuto di 6″ 3‴, come risulta dal confronto dei due diagrammi.

Il diagramma n. 3 rappresenta le variazioni di livello nell'agosto del 1870.

A Komorn, dal 2 al 7 agosto, livello quasi identico cioè 6′ 4″ 10‴ e a Buda dal 3 all'8 livello pure identico cioè 5′ 9″ 9‴.

Qui la differenza è 7″ 1‴ e questa volta è la linea di Komorn che sta sopra a quella di Buda.

Nel diagramma n. 4 vi è una differenza di 2′ 3″ 5‴, della quale il livello di Buda si è alzato su quello del 1870.

Nel diagramma n. 5 del 1870 in novembre e dicembre Komorn torna sopra Buda di 9″ 5′.

Nel n. 6 (luglio 1875) Buda è di 1′ 3″ 2‴ sopra Komorn.

Egualmente dunque con una media di acque a Komorn di 8′ 8″ 5‴ abbiamo a Buda fra la media del 1870 e quella del 1875 un aumento di 2′ 5″ 7‴.

Così il confronto fra il diagramma n. 7 e n. 8 ci dà che, a parità di acque nel Danubio cioè 10′ 8″ 11‴ a Komorn nel 1871 e nel 1873, il livello di Buda nel 1873 è cresciuto di 2′ 9″ 2‴.

Nel diagramma n. 7 il Revy introduce un' altra linea di variazioni, quella di Pozsony.

Si hanno così nel diagramma tre linee le quali si seguitano in perfetta armonia.

Una elevazione od una depressione di livello a Pozsony si verifica dopo 24 ore a Komorn e dopo 48 a Buda.

Inoltre, cotesta terza linea corre parallela alle altre. A prima vista sembra una complicazione di intersezioni, ma a guardarci bene si trova che le oscillazioni armonizzano.

Infatti, a ciascun punto del livello di Pozsony risponde nell' ordinata successiva quello di Komorn e quello di Buda nell'altra appresso. Le linee di collegamento pigliano direzioni pressochè identiche.

Qui l'autore richiama lo studio sulla relativa posizione della linea per Pozsony e per Buda la quale, nei periodi già indicati sul diagramma n. 7, colloca il medio livello di Buda di 2′ 3‴ sopra quello di Pozsony pel 1868.

Egli osserva che le due linee mantengono la loro posizione rispettiva fino a non sgarrare d'un quarto di pollice, sebbene ci sieno di mezzo tre anni: l' una essendo del 1871, l'altra del 1868.

Egli insiste giustamente a richiamare l'attenzione su questi riscontri, perchè amendue le date si riferiscono all'antico regime danubiano, quando cioè il fiume correva pei suoi due rami naturali.

Ciò premesso, egli viene a dare le ragioni per le quali nel diagramma n. 7 introdusse la linea della stazione di Pozsony.

L'esame di numerosi diagrammi gli aveva dimostrato che quando il livello di Buda si eleva di tre piedi, il livello del Danubio se ne risente fin su a Gönyö, e che per

conseguenza il riferimento a Komorn, aumentato alla sua volta, viene a diminuire della propria aliquota di elevazione l'effettivo della differenza del livello di Buda. — Gli è perciò che nei diagrammi da 9 a 12 è preso Pozsony in luogo di Komorn. Essendo conosciute le graduazioni delle stazioni intermedie, l'influenza dei tributarî che passano Pozsony può al tutto trascurarsi.

Nel diagramma n. 9 del maggio e giugno 1868 abbiamo a Pozsony 12′ 0″ 4‴ e a Buda 12′ 3″ 0‴, cioè una differenza di 2″ 8‴.

Nel diagramma n. 10 del marzo e aprile 1876 abbiamo a Pozsony 12′ 0″ 0‴ e a Buda 16′ 10″ 9‴, cioè una differenza di 4′ 10″ 9‴.

Osserviamo. Nel 1868 il livello a Buda era soltanto di 2″ 8‴ più alto che Pozsony e nel 1876, con un'identica quantità d'acqua passante da Pozsony, a Buda esso era più elevato di 4′ 10″ 9‴.

È dunque cresciuta la differenza di 4′ 8″ 1‴.

Andiamo innanzi.

I diagrammi n. 11 e n. 12 rappresentano le due grandi piene del 1862 e del 1876.

Abbiamo quivi i profili delle due piene in entrambe coteste città.

Sono per di più segnati i più alti livelli anche a Duna-Foldvar.

Qui ci abbiamo un fatto capitale.

La piena del 1862 a Pozsony fu più grossa che quella del 1876.

E non basta. Nel 1862 inoltre il ghiaccio faceva barra e muoveva poi innanzi fra l'1 e il 2 febbraio producendo grandi oscillazioni di livello per 24 ore, dopo di che venne la grande piena e il livello del fiume crebbe gradatamente il 7 febbraio fino a 22 piedi, calando poi fino al 21.

Nel 1876 il ghiaccio non produsse oscillazioni che durante una giornata. La piena avrebbe dovuto dunque essere minore di quella del 1862 come quella che era preceduta da minori accumulazioni (1).

Ebbene, a Duna-Foldvar la piena del 1862 passò quella del 1876 di 6″ 3‴

Le quote di Orsoon provano la stessa cosa.

Ora invece se noi consideriamo le due piene del 1862 e del 1876 a Buda troviamo che il più alto livello del 1862 fu 16′ 4″ 6‴ e nel 1876 fu 24′ 6″ 7‴.

Il Danubio a Buda-Pest risulta cresciuto di 8′ 2″ 1‴.

Ma siccome la piena del 1862 superò quella del 1876 di 6″ 3‴, il totale aumento di quota del Danubio a Buda-Pest risulta di 8′ 8″ 4‴.

Confrontando invece i punti di permanenza anzichè i colmi delle piene risulta sempre che la differenza è di più che 8 piedi, differenza la quale può, anche senza

(1) Si guardi egualmente a Duna-Foldvar nel 1862 e nel 1876 ed egualmente si trova quest'ultima piena minore della prima.

Il Revy fa anche giustamente notare come Duna-Foldvar fornisca la diretta ed assoluta misura della relativa importanza delle due piene, sia perchè tutta l'acqua che la tocca deve passare da Buda-Pest, sia perchè essa non ebbe a risentire effetto alcuno dalla chiusura del ramo di Soroksar, poichè sta circa quattro miglia sotto la antica e soppressa biforcazione. Aggiungasi inoltre che non vi era piena la quale inondasse un tratto di paese a Duna-Foldvar la quale potesse avere distrutta una massa anche grossa d'acqua del Danubio esercitando l'influenza di scemare la durata della prima.

Le quote di Pozsony come quelle di Duna-Foldvar provano che la piena del 1862 fu maggiore di quella del 1876.

computi, graficamente cogliersi sui diagrammi, misurando senz'altro con un compasso le distanze fra i livelli medî dei rispettivi periodi.

Tale indiscutibile analisi è seguita da un

SOMMARIO DEI DIAGRAMMI. — Nell'analisi dei diagrammi il Revy li considerò sempre a due a due, uno anteriore e l'altro posteriore alla rettificazione del 1872 e da ciascuno dei paralleli emerse questo fatto capitale che il livello del Danubio si elevò in seguito a cotesto da lui deplorato lavoro.

Tali risultamenti sono graficamente rappresentati nella figura sommaria n. 13 che li raccoglie tutti.

Sono sei paia di diagrammi che determinano come risultamenti sei punti i quali vengono rappresentati nel seguente modo.

Sopra la orizzontale OX si marcano delle distanze uguali che, rappresentando dei piedi, vanno da 0 a 18.

I numeri rappresentano le profondità a Buda-Pest durante il vecchio regime del fiume, cioè prima del 1872.

S'è veduto che i diagrammi n. 1 e n. 2 hanno determinato che il livello del fiume a Buda crebbe di 6″ 3‴ sopra una profondità di 3′ 4″ 4‴ di acque prima del 1872.

Ebbene, sulla OX alla distanza di 3′ 4″ 4‴ dallo zero si innalza una verticale e su questa si prende una lunghezza eguale a 6″ 3‴, e si ottiene il punto A.

Con un simile processo si ottengono B, C, D, E ed F del diagramma sommario n. 13.

La curva che passa per questi punti rappresenta la legge che ha regolato l'aumento di livello del Danubio a Buda-Pest in seguito alla rettificazione del 1872.

Il Revy confessa di avere trovato altri punti parecchi collo stesso metodo e che alcuni di questi avrebbero fatto alquanto cambiare direzione alla curva.

Ad ogni modo, e con una onesta approssimazione, la AF rappresenta incontestabilmente la legge effettiva sotto la quale il livello del Danubio nelle varie profondità ebbe ad elevarsi dopo l'interramento del Soroksar.

Essa presenta i seguenti fatti:

Quando l'idrometro segna da zero a due piedi, gli è come se il Soroksar non fosse stato interrato. Il livello non se ne risente.

Come siamo a tre, il Danubio comincia a turbarsi per la perdita di cotesto braccio, ed il suo livello si eleva di un 3 pollici per compensarne la mancanza.

Da tre a cinque piedi, sopra lo zero dell'idrometro, la chiusura del Soroksar influisce maggiormente e il livello deve alzarsi di 2′ 1″.

Quando si monta tra i 5 e i 10, il Danubio accusa ognora più la necessità del Soroksar, ma il livello non sorge di molto, perchè il Promontor è ancora abbastanza largo perchè un aumento di 2′ 6″ sul livello di prima basti a contenere tutto quel maggior volume di acque che prima erano convogliate dall'altro braccio.

Ma al di sopra dei 10 piedi non c'è più nè compensi nè temperamenti che valgano e la linea monta uniformemente colla direzione di circa 45°.

Dai 10 piedi in su, la mancanza del Soroksar è così terribilmente sentita, che quelle acque le quali prima del 1872 a Buda-Pest avrebbero avuto un'altezza di 18 piedi, la superano di 10′ 6″ montando a 28 ½!!!

Il dilemma. — È bene che lo studioso possa intanto vedere a colpo d' occhio e confrontare successivamente, e in ordine ai diversi stadî idrometrici del fiume, gli effetti dell'antico e del nuovo regime sul livello delle acque a Buda-Pest.

Tutte le cose pari, vale a dire con una identica quantità di acqua passante per l'ora unico canale (*for identical water passing*, dice l'autore) si hanno oggi delle formidabili differenze.

Eccone la tavola comparativa nella quale non occorre dire come la posizione dello zero ai varî idrometrici di Pozsony, Komorn e Buda rimanga al tutto senza importanza, essendochè i diagrammi marchino le differenze indipendentemente dalle altezze assolute. È però coscienzioso nuovamente avvertire che i dodici diagrammi presentati vennero scelti fra ventiquattro, come quelli le cui circostanze si presentavano più favorevoli a far risaltare le differenze con precisione maggiore. Del resto, si fossero anche presi quegli altri, la variazione non avrebbe oltrepassato un paio di pollici.

Antico regime — Altezze idrometriche a Buda-Pest prima del 1872			**Nuovo regime** — Altezze idrometriche a Buda-Pest dopo il 1872			**Elevazione** del livello del Danubio a Buda-Pest dopo il 1872		
piedi	pollici	linee	piedi	pollici	linee	piedi	pollici	linee
0	0	0	0	0	0	Impercettibile		
1	0	0	1	0	0	id.		
2	0	0	2	0	0	id.		
3	0	0	3	3	0	0	3	0
4	0	0	5	3	0	1	3	0
5	0	0	7	1	0	2	1	0
6	0	0	8	4	0	2	4	0
7	0	0	9	4	6	2	4	6
8	0	0	10	5	6	2	5	6
9	0	0	11	6	6	2	6	6
10	0	0	12	8	6	2	8	6
11	0	0	14	5	6	3	5	6
12	0	0	16	5	6	4	5	6
13	0	0	18	5	6	5	5	6
14	0	0	20	6	0	6	6	0
15	0	0	22	6	0	7	6	0
16	0	0	24	6	0	8	6	0
17	0	0	26	6	0	9	6	0
18	0	0	28	6	0	10	6	0

Questa tavola la quale ricapitola ogni cosa e conchiude da sè, non si può dire lavoro della mente del Revy ma della sua mano. Essa è scritta, per così dire, sotto la dettatura del fiume e ne contiene le confessioni.

Il dilemma è netto oramai.

O vanno negate le cifre o va ammessa la conclusione, che l' ultima disastrosa piena non è stata che una protesta della natura troppo leggermente contrariata dalla passione dei rettifili, e che i lavori del 1872 creano un grave e costante pericolo alla capitale dell'Ungheria, pericolo che naturalmente risale a non poche tra

le più importanti città danubiane, è ciò in una proporzione la quale viene attenuata dalle distanze assai meno di quanto generalmente si pensa.

Una digressione. — E qui mette conto di fare una digressione, se tale può chiamarsi il discorrere d'altre acque ma in ordine a questioni tutt'altro che diverse.

Che ogni elevarsi del livello prodotto da sezioni ristrette, cioè da erogazioni soppresse, faccia risalire a monte la propria intumescenza è cosa, non solo razionale, ma intuitiva e non è chi possa dubitarne.

Però se è generale l'idea del fatto, è tutt'altro che generalmente nota la misura di esso, laonde vediamo troppo spesso le preoccupazioni d'idraulici distinti limitarsi alle sole stazioni più prossime alle sezioni pericolosamente ristrette.

Invece la verità è che nei fenomeni di rigurgito la testa di una intumescenza marcia pressochè così rapida e diritta come l'onda solitaria.

Del resto se c'è fenomeno al quale un tal fatto sia meno disanalogo esso è quello del risalimento della marea su dalla foce d'un fiume.

L'onda di lieve tumescenza più che una injezione può dirsi un versamento e fornisce non disprezzabili criterî di paragone.

Eccone un elemento, per esempio:

Un'ondicella del Rio della Plata alta 16 pollici porta l'alta marea a Buenos-Ayres e risale su da Buenos-Ayres altre 88 miglia la più gran parte delle quali (cioè sessantaquattro) su pel Palmas, che è un ramo del Paranà. Essa viene ancora a riprodursi, sebbene molto sensibilmente ridotta alla sezione superiore riportata nell'*Hydraulic of great rivers*, cioè tocca press'a poco il centinaio. L'onda mantiene la medesima lunghezza orizzontale dal suo primo apparire al suo terminare. Dal Plata alla detta sezione del Palmas non è ridotta che al quarto della sua altezza.

Le leggi, secondo le quali vengono scemando le ordinate dell'onda, differiscono caso per caso, onda per onda, e sembra che dipendano dalla loro altezza e dal livello a cui si trova il Plata nel momento della loro formazione. Mentre il Revy prende un'onda E e la trova riprodotta alla sezione di Palmas con una metà della sua dimensione verticale, le altre variano le loro proporzioni fra una metà e un quarto di tale altezza.

Ora se dal Plata si risale con sì piccola onda ad una così alta sezione del Palmas, chi potrà dubitare che le piene di Buda non debbano elevare assai considerevolmente il livello di Komorn e di Gönyö? L'onda, giova ripeterlo, è nella sua normalità un versamento non una injezione. — La cacciata è il rincaro alla spinta, non la sua cagione o il suo inizio. Quindi dal rigurgito viene l'onda fluviale analoga alla marittima.

Però non bastano affatto i diagrammi dati dal Revy di paragone fra Buda e Komorn. Non bastano nemmeno quelli di Buda con Poksony. Bisogna rimontare a Strasburgo, sottrarsi alle influenze del rigurgito, avere le cifre assolute oltrecchè le relative, e poter ragionare proprio sulle altezze, anzichè limitarsi a farlo sulle differenze.

È vero che cotesto lavoro di confronti viene poi alla sua volta perturbato dall'influire dei corsi tributarî, ma a chi conosca le sezioni e i volumi singoli non sarà impossibile fare la loro parte a cotesti incidenti, e dare alle sue induzioni tutta

quella forza della quale il sapiente lavoro del Revy lascia certamente ancora qualche desiderio.

Le presenti considerazioni non vengono certamente dettate da alcun partito preso contro i rettifili i quali, nei tronchi inferiori, possono venire sovente praticati con reale vantaggio. Esse non sono nemmeno ispirate da alcuna reminiscenza delle desolanti teoriche (come giustamente le chiama l'ing.re Maganzini nella sua notabile relazione intorno ai lavori idraulici dei Paesi Bassi testè pubblicata dal Ministero dei lavori pubblici) del Prony e del Cuvier. Dopo le importanti osservazioni dell' illustre Lombardini sul Po, luminosamente confermate dai posteriori rilievi, le conclusioni di quei due valentissimi fisici appaiono ciò che effettivamente furono, vale a dire frettolose e dottrinarie.

Risulta al tutto smentito (meno il caso della protrazione delle ghiaie, possibile nei soli tronchi superiori) che il fondo dei fiumi più o meno rettificati e arginati si venga successivamente elevando, e che il loro avvenire consista in una allarmante pensilità rovinosa a mantenersi e più rovinosa a trascurarsi.

Conclusione questa dalla quale basterebbe a ragionevolmente distorne il considerare, che anche qualora il fatto della elevazione del fondo risultasse reale, non potrebbe a ogni modo supporsi indefinitamente progressivo dovendo esso in ogni peggiore ipotesi trovare il proprio immancabile limite nella graduale soppressione della pendenza.

Maturatasi questa, o la spinta delle acque superiori dovrebbe riportar via ciò che si fosse fin allora cacciato innanzi e riscavare il letto, o conquistarne un nuovo essendo contrario ad ogni legge sia teorica come sperimentale, ed alla stessa razionale intuizione, la indefinita marcia di un grave in contropendenza.

Nè il Revy medesimo, per quanto preoccupato dai suoi precedenti scientifici e dal suo affetto alle contrade minacciate, e perciò stesso tentato a rincarare sulle minaccie del nuovo regime danubiano, tenne, come si è veduto, parola ed insinuò timore alcuno di sollevazioni del fondo, fenomeno forse non impossibile nel caso attuale, per le condizioni poco favorevoli del tronco immediatamente successivo. Forte di fatti la cui rappresentazione e coordinazione servivano abbastanza alla sua tesi, egli non pensò a cercarle conforto di teoriche le quali ancora conservano autorevoli fautori e ritraggono lustro da nomi a ogni modo gloriosi negli annali della scienza.

Quei fenomeni rappresentati in una forma grafica sono assai facilmente traducibili in formula analitica, la quale mancherà certamente di universalità, ma, rispondendo ad una particolare serie di veri, rappresenta una legge che ha la forza di una legittima profezia della scienza.

L'idraulica, la cui materia d'osservazione presenta analogie e riscontri ma pressochè mai identità di fenomeni, non può rigorosamente coordinare nè coscienziosamente generalizzare, e deve nelle sue astrazioni starsi contenta alla enunciazione di massime anzichè di formule. Però di queste pure viene la volta. Ciascun fiume è un individuo da studiare a sè — ha la propria e ben determinata individualità dal largo ma costante complesso di condizioni della sua origine, del suo bacino e della media dei fenomeni atmosferici della sua plaga; è infine un ente le cui varietà possono ridursi a unità e concretare in forme grafiche od analitiche tutto ciò che potrebbe chiamarsi il suo temperamento.

L'idraulica individuale di ciascun corso d'acqua può e deve cercare delle formule quanto la generale deve esserne per ora parca anzi avara. — Ebbene cotesta induzione speciale del regime danubiano non si è creduto, pare dagli autori del combattuto progetto, che mettesse abbastanza conto di raccapezzarla per mezzo di studî e di pazienti osservazioni.

S'è già troppo veduto nella prima parte della presente Memoria come al progetto della regolazione del Promontor e della soppressione del Soroksar non sia andata innanzi nessuna coscienziosa ricerca intorno alle velocità, alle portate, ai livelli, a tutto infine il complesso dei fenomeni costituenti un regime idraulico, sebbene il nuovo lavoro avesse il duplice scopo non solo di modificare la direzione del corso ma altresì di limitare la capacità dell'alveo. Nulla più evidente della necessità di fare a se medesimi parecchie interrogazioni prima di proporre un taglio qualsiasi. La prima è la seguente: la tortuosità del tratto di letto che si vorrebbe rettificare, viene essa dalla reale tendenza del fiume a distribuire sopra una più lunga linea la propria pendenza? In altre parole, codesta deviazione dalla linea di massima pendenza è essa dovuta alla necessità di mantenere quelle condizioni di direzione e di velocità le quali sono la risultante di tutte le forze o l'obbedienza a tutte le leggi alle quali il fiume ha sottomesso se medesimo durante tutto il suo corso precedente? Ove tutte le considerazioni meccaniche e geologiche ci assicurino che i giri apparentemente viziosi furono determinati dalla opportunità di distribuire le pendenze o da quella di obbedire al principio naturale della ricerca della linea la quale presenti le minime resistenze, nulla vi può essere di più contrario alla natura che venire aumentando arbitrariamente le cadute e pigliare di fronte quelle difficoltà che la corrente aveva preferito di girare.

La linea retta è il più breve cammino in geometria, non altrove.

In pratica la linea più breve non è già la più corta ma quella che può essere percorsa in meno tempo e con meno sforzo. La natura è anzi tutto economica. Tale è il principio costante e sovrano al quale essa ha informato le sue leggi del moto; il cammino di un corpo in libero movimento è il più breve nel solo caso che questo sia anche il più agevole. Tra il percorrere più spazio e l'esercitare uno sforzo sproporzionatamente maggiore, la natura si appiglia sempre al primo partito. Nè la potenza di qualsiasi spinta iniziale, aiutata da qualsiasi prepotenza di forza acceleratrice basta a mettere d'accordo la fisica colla geometria, e far percorrere al corpo, per quanto sollecitato, la linea retta. Il projettile stesso non gira l'ostacolo assai più spesso che non lo fori? C'è nulla al mondo di più frettoloso e strapotente del fulmine? Certo no. Eppure esso è la negazione della linea retta e trova che, fisicamente parlando, la strada può essere più lunga nello spazio e più breve nel tempo.

La dimensione è una cosa e la percorribilità una tutt'altra.

Ora perchè la retta dovrebbe essere in tutti i casi l'aspirazione, diremo così, delle masse acquee se non è nemmeno quella delle elettriche sebbene smisuratamente più impazienti di scaricarsi?

Un tronco rettificato in tutt'altro senso da quello della linea delle minime resistenze viene da ultimo a trovarsi in una idraulica contraddizione coi suoi tronchi superiori; esso trova alterati i rapporti e rotti i nessi già stabiliti tra le forze, il

volume, le velocità e le pendenze che pure furono gli elementi in funzione dei quali esso si era trovato l'assetto e costituito il regime. Non ci sarebbe disastro il quale non fosse meritato da chi andasse deliberatamente contro alle leggi naturali.

Se poi invece che per supremo motivo di distribuire la pendenza e temperare le velocità, il fiume siasi fatto altra volta tortuoso solo in conseguenza di qualche accidente topografico al quale abbia dovuto in certa guisa rassegnarsi contraddicendo al proprio indirizzo e solo per seguire la linea delle minime resistenze, o per primitiva necessità di depositare le proprie ghiaie sopra una maggiore sviluppata; se il gomito non si presenti eccessivamente risentito; se sopratutto la capacità del nuovo alveo possa (seguendo un tracciato il cui asse si trovi approssimativamente sul prolungamento del filone) equivalere nella erogazione delle acque, e ciò con un temperato aumento di velocità al quale nessun prossimo successivo restringimento di sezione possa mettere ostacolo e dare rigurgito; se tutte queste condizioni, diciamo, si verificano, un rettifilo diventa realmente un servigio reso alla natura e viene immancabilmente compensato dai suoi favori.

Tale è stato il caso per es. della rettificazione del fiume Lek a Wisk-bij-Duurstede, del quale noi vediamo a pag. 100 della citata relazione sulle opere idrauliche dei Paesi Bassi, che il regime non rimase sensibilmente mutato, o se rimase, fu piuttosto a vantaggio.

Bisogna essere lealmente sperimentali ed accettare la statistica sia per lodare il rettifilo del Lek che per deplorare profondamente quello del Danubio, il quale del resto, anche ragionando *a priori* e partendo dal solo dato delle masse acquee, sarebbe parso subito quel che risultò, cioè funesto, a chi non avesse mancato di farsi l'ultima delle domande testè enumerate. L'equivalenza per l'erogazione tra il nuovo alveo e l'antico si annunziava tosto come affatto insperabile, non potendo il solo Promontor leggermente modificato riuscire eguale a se stesso più al Soroksar, nè potendosi avere un aumento di velocità capace di compensare la insufficienza dell'alveo, essendochè il colle di Gellert limitavagli la sezione immediatamente a valle.

Ma prescindendo da tutti gli argomenti *a priori*, se tali possono chiamarsi questi rimane ora ai non fortunati costruttori da piegare il capo, non già agli avversarî, ma alla natura, e propugnare essi medesimi la riapertura del tronco otturato.

Tutto ciò, s'intende, *si vera sunt exposita,* vale a dire, se i registri della società di navigazione che il signor Revy ha incarnato ne' suoi diagrammi sono, come il reciproco riscontro e l'armonia del diagramma sommario indurrebbero a credere, perfettamente attendibili.

Se invece i fatti per avventura risultassero dubbî o diversi, è del più grande interesse di tutti che il mondo scientifico ne venga prontamente ed esattamente informato.

fig. 1

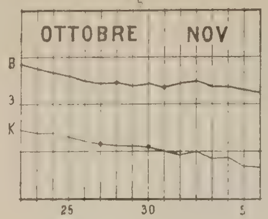


fig. 2

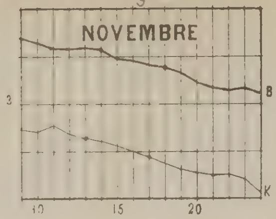


fig. 13

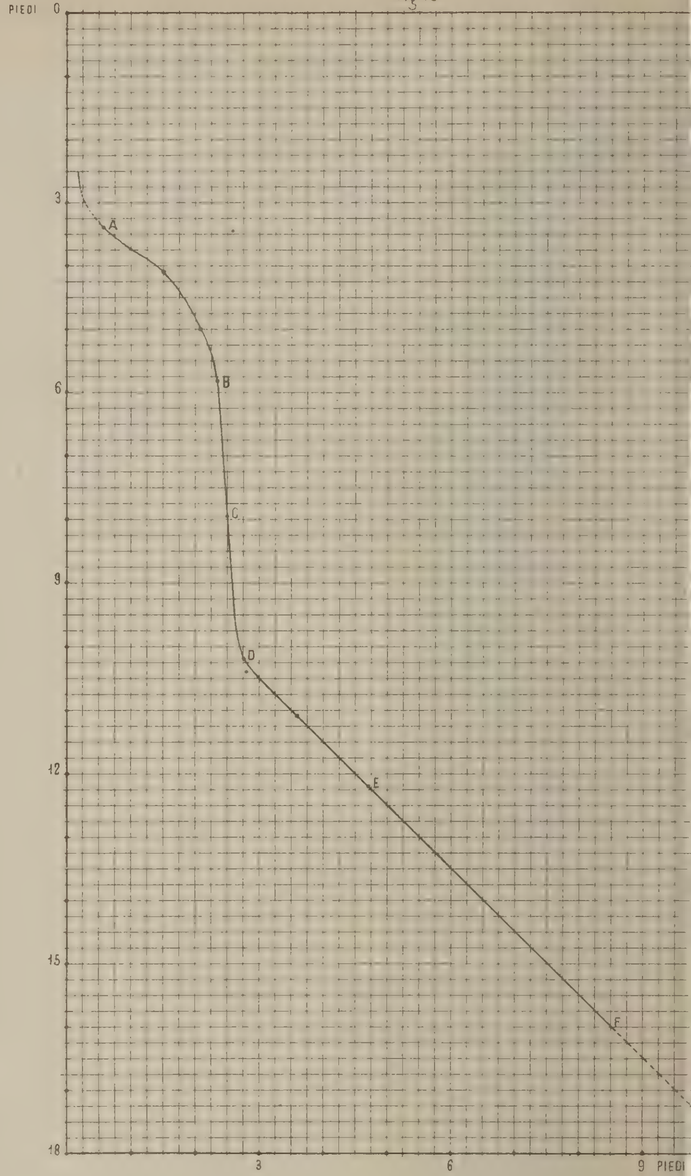


fig. 3

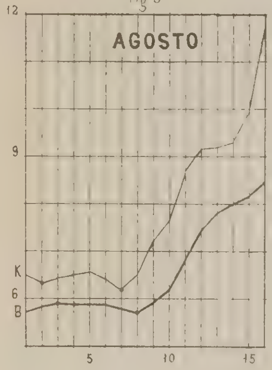


fig. 4

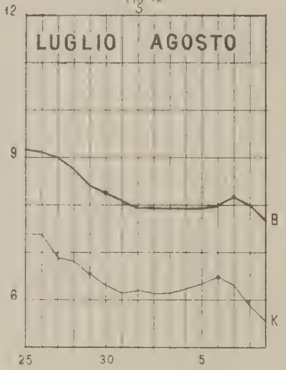


fig. 5

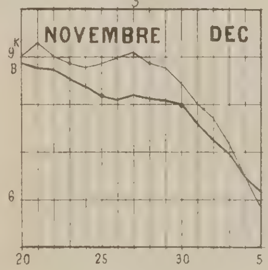
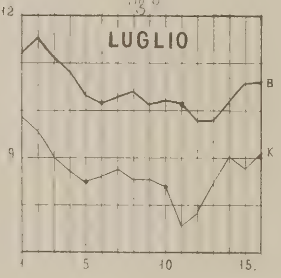


fig. 6



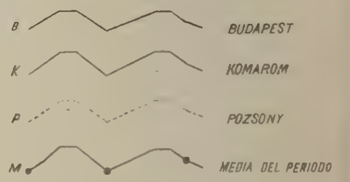


fig. 7

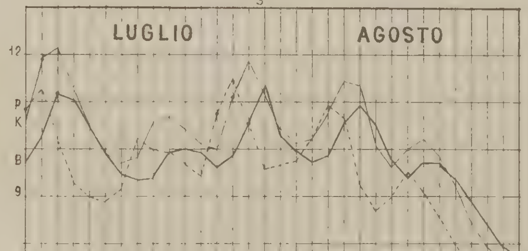
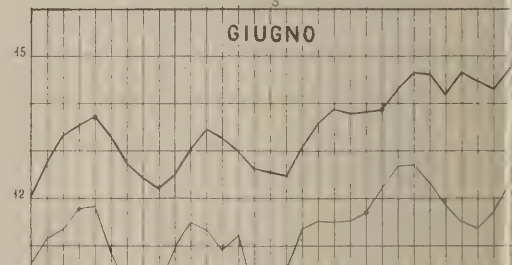


fig. 8



Scala

Fig. 9

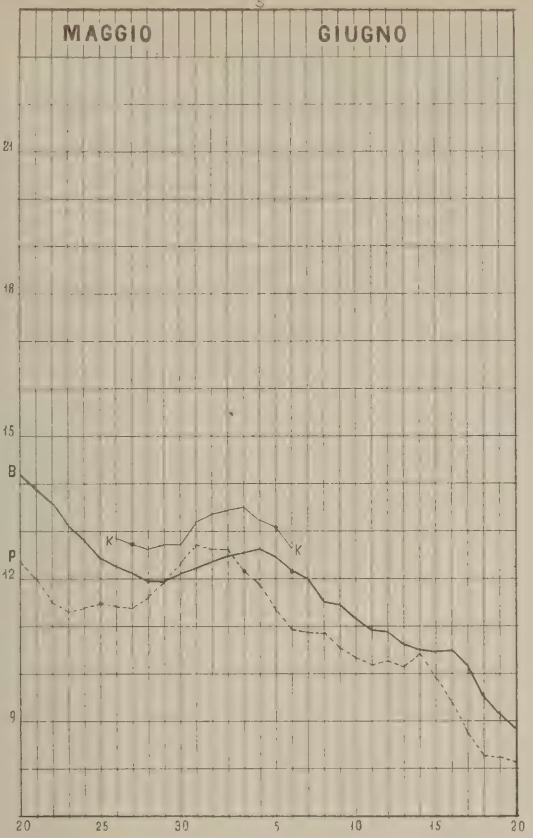


Fig. 10

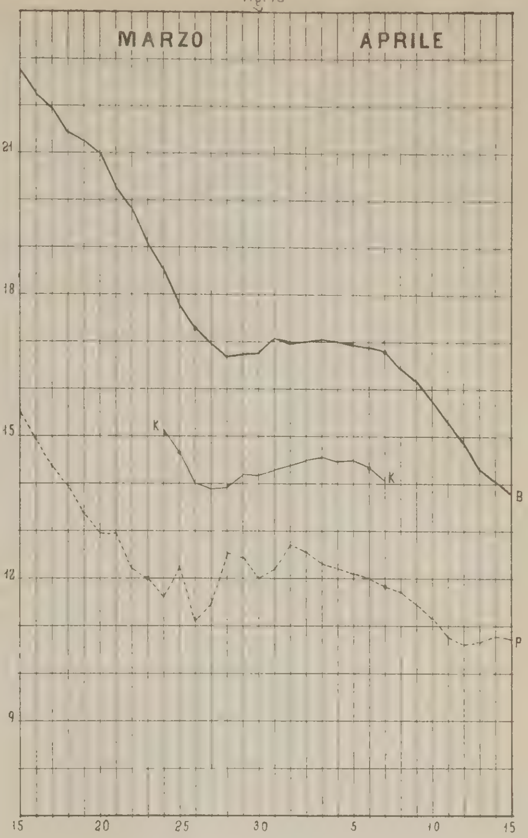


Fig. 11

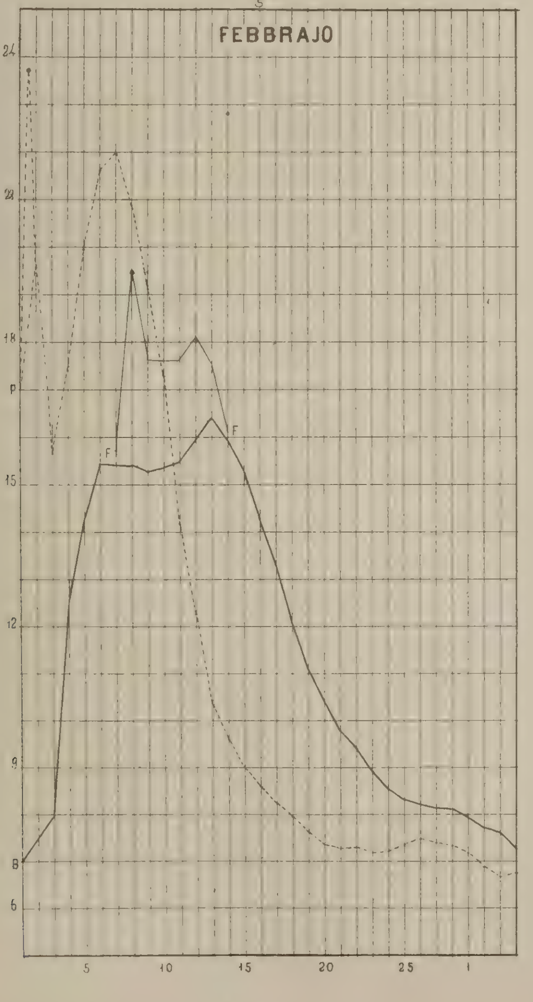
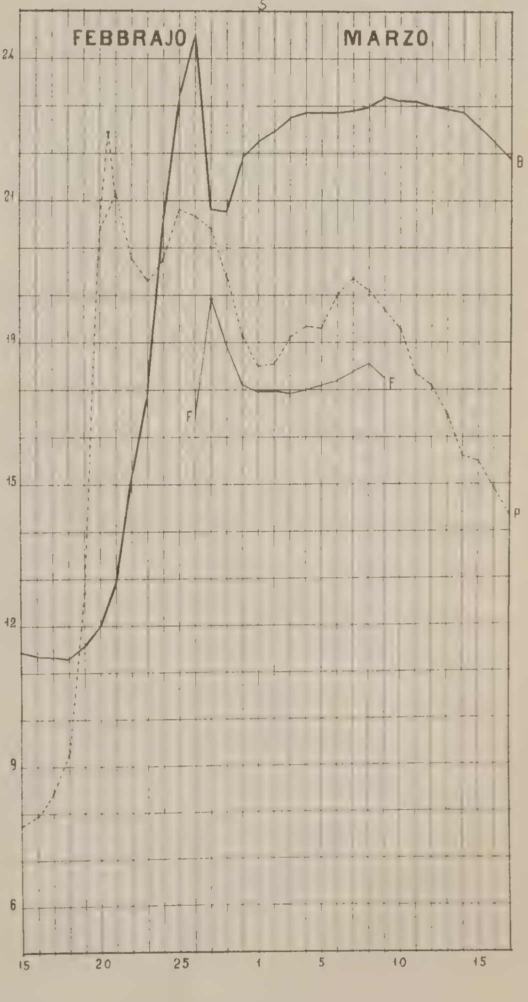


Fig. 12



LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

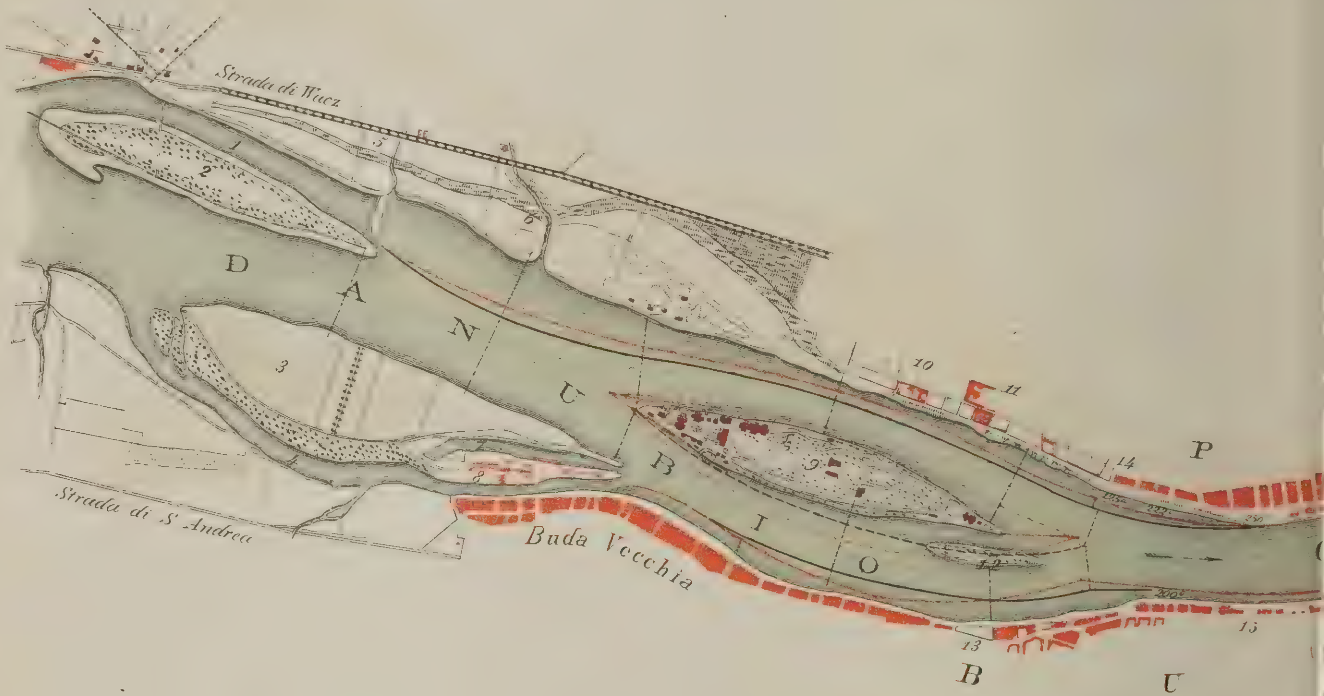
SGUARDO TOP

INTORNO AI LAVORI DELLA REG

Spiegazione dei

—— *La linea originaria*

- - - *La linea modificata*



1 *Porto di Pest nuovo*
2 *Spiaggia di Pest*
3 *Grande Spiaggia*
4 *Braccio del Danubio di Buda Vecchia*
5 *Canale di Kövzörü*
6 *Braccio di Rakos Palota*
7 *Porto di Buda Vecchia*
8 *Fabbrica di Bastimenti*
9 *Spiaggia di Margherita*
10 *Molino a Vapore cosidetto Vittoria*
11 *Molino a Vapore, cosidetto Pannonia*
12 *Spiaggia di Kus*
13 *Stabilim.to di sdazio cosidetto Imperat*
14 *Empiatura cosidetta Tüköry*
15 *Piazza cosidetta della Bomba*
16 *Piazza Francesco Giuseppe*

…RAFICO

…AZIONE DEL DANUBIO

17 *Gran ponte di ferro*
18 *Piazza della Parrocchia*
19 *Palude Palatina*
20 *Edifizio della Dogana*
21 *Monte di S. Gerardo*
22 *Molino a Vapore cosidetto Concordia*
23 *Ospedale Militare*
24 *Ponte di Macello*
25 *Spiaggia di Kopasz*
26 *Ponte della Strada Ferrata*
27 *Orto Palatinale*
28 *Magazzini militari per ferro*
29 *Empiatura della chiusura*
30 *Empiatura fibbiale*
31 *Diga*
32 *Locanda al confine di Soroksar*

Lit. Martelli Roma

dell'Emilia. Il terreno è quasi esclusivamente argilloso, perciò incolto, spopolato e presso che deserto. Solo qua e colà si vede qualche piccolo banco di sabbia giallicciа; l'argilla all'esterno è cenerina, ma quando non sia ancora esposta all'aria è scura assai come il Crag di Anversa, per causa della grande quantità di sostanze organiche e di carburi d'idrogeno che essa contiene e che appunto quando rimangano all'aria ed al sole svaniscono e lasciano la roccia scolorita. I fossili non si trovano limitati a taluni banchi, come spesso avviene, ma quasi si possono dire diffusi in tutta la massa, con molta uniformità di specie, la qual cosa può mostrare la poca variabilità del fondo nel quale viveano.

Nei dintorni del Poggiarone gli strati hanno una piccola ma pur sensibile inclinazione verso SE. Dalla direzione della casa colonica scende un poggetto, sulla sinistra del quale si presentano le testate più alte degli strati, spoglie affatto di vegetazione, talchè vi si può vedere benissimo tutta la serie loro, e si può scegliere quella via per salire al luogo nel quale giaceva il *Balaenotus*. Per fissare meglio le idee riprodurrò la successione degli strati nello spaccato seguente, che ora passerò a descrivere.

I. Argille a *Natica lineata* Lck. (zona coralligena) metri 21.
II. Sabbie con bivalvi (zona delle laminarie) metri 9.
III. Argille a *Natica millepunctata* Lck. (zona coralligena) metri 9.
IV. Come III, metri 11.
V. Come III e IV. *Balaenotus*
VI. Conchiglie della zona delle laminarie.
VII. Come III, IV e V.

I. Immediatamente sopra al livello della strada è una serie di argille, alta circa 21 metri, nella quale sono i fossili seguenti (¹):

**Corbula gibba* Ol. - L. C. A. — **Cytherea multilamella* Lck. - C. A. — **Cardium aculeatum* L. - L. — **Arca diluvii* Lck.- C.— **Nassa semistriata* Broc. - C. A.— *N. serrata* Broc. — *N. serraticosta* Bronn. — *Terebra Basteroti* Nyst. — *Ranella marginata* Brong. — *Murex torularius* Lck. — **Fusus rostratus* Ol. - L. C. — *Pleurotoma Mortilleti* May. — *P. intermedia* Bronn. — *P. turricula* Broc. — *P. cataphracta* Broc. — *P. Coquandi* Bell. — *Drillia sigmoidea* Bronn. — **Chenopus pespelecani* L. - L. C. A. — **Ringicula buccinea* Broc. L. - C. — **Pyramidella plicosa* Bronn.- A. — *Natica lineata* Lck. (*N. propinqua* Pecch.) — **N. millepunctata* Lck. - Lt. L. C. — *Solarium simplex* Bronn. — **Turritella subangulata* Broc. - C. — *Turritella communis* L. (L. C.?). — *Vermetus intortus* Lck. — *Dentalium fossile* L. — *D. elephantinum* L.

Sul pendio del poggio, insieme con questi fossili si trovano pure dei grossissimi *Pectuncoli* che si potrebbe credere derivassero dai medesimi strati, ma invece provengono da strati superiori che or ora vedremo. Negli strati esaminati, intanto, è

(¹) Per questo strato, come pel successivo, accennerò con asterisco le specie viventi nel Mediterraneo, indicando poi con A. le specie le quali vivono nella zona che i malacologi dicono degli abissi, con C. quelle della zona coralligena, con L. quelle della zona delle laminarie e con Lt. quelle della zona litorale. Non ripeterò le indicazioni pegli strati successivi, perchè non si trova in essi alcuna specie vivente che non sia indicata anche nei due primi.

molto abbondante un fossile caratteristico pei dintorni di Siena, che è la *Natica lineata* Lck., mentre vi è piuttosto rara la *Natica millepunctata* Lck. La *Natica lineata* segna un orizzonte costante negli strati sedimentati a varia profondità, ed appartiene ad uno dei piani meno recenti del pliocene senese. Infatti, nei sedimenti litorali, sotto le sabbie turchine a *Natica lineata*, sono strati alquanto salmastri a *Nassa pulchra* D'Anc., *Columbella curta* Bell., *Pollia exacuta* Bell., ecc., e strati d'acqua dolce o d'estuario con *Neochilus simplex* Fuchs, *Stalioa acuta* De Stefani, *Cerithium nodoso-plicatum* Hörn., ecc.

II. Sopra al banco con *Natica lineata*, si trova uno strato di sabbia non grossolana, gialliccia, alto circa 9 metri, nella cui parte superiore sono i seguenti fossili:

Corbula Deshayesii Sism. — **Venus fasciata* Da Costa. - L. C. — **V. ovata* Pen. (minor). - L. C. A. — *V. excentrica* Ag. — **Pectunculus glycimeris* L. (*P. polyodontus* Broc.). - L. C. — **Pecten varius* L. - Lt. L. — *P. flabelliformis* Broc. — *P. dubius* Broc. — *P. latissimus* Broc. — **Ostrea lamellosa* Broc. - Lt. L. — *Ranella marginata* Brong. — **Cancellaria cancellata* L. - C. — *Solarium simplex* Bronn. — **Natica millepunctata* Lck. - Lt. L. C. — **N. Josephinia* Risso. - Lt. L. — *Turritella Brocchii* Bronn.

Insieme con questi fossili è anche qualche cristallo di selenite: talora essi scendono a confondersi coi fossili dello strato sottostante, ma per il modo di conservazione e pella roccia che sta loro aderente si possono distinguere. Cótale strato contiene conchiglie più litorali degli altri, come lo mostrerebbe per esempio, di per sè, la sostituzione della *Corbula Deshayesii* alla *C. gibba*; però mentre i fossili degli altri strati rimasero sul posto medesimo nel quale morirono, le conchiglie dello strato che ora abbiamo considerato sono alquanto ruzzolate e rotte, per cui nella loro presente distribuzione dovettero influire i movimenti del mare. Questo è probabilmente lo strato medesimo, il quale, continuando a settentrione verso il litorale, ed abbassandosi, pella sua inclinazione, al livello della Biena, sopra Monte Aperto, contiene un numero grande di svariate e ben conservate conchiglie, che non istarò a nominare, per non uscire di troppo dal seminato.

III. Tornano poi gli strati argillosi colla fauna già in gran parte accennata, salvo che vi manca la *Natica lineata*, sostituita affatto dalla abbondantissima *Natica millepunctata*. Il primo banco argilloso che si trova è alto circa 9 metri, e specialmente nella sua parte inferiore, sopra al banco fossilifero delle sabbie, raccolsi le conchiglie qui accennate.

Corbula gibba Ol. — *Cytherea multilamella* Lck. — *Cardium aculeatum* L. — *Arca diluvii* Lck. — *Mitra fusiformis* Broc. — *Nassa semistriata* Broc. — *Murex torularius* Lck. — *Pleurotoma Mortilleti* May. — *P. turricula* Broc. — *P. Coquandi* Bell. — *Natica millepunctata* Lck. — *Dentalium fossile* L.

IV. Sopra il citato strato argilloso è un altro banco di conchiglie fitte, sopra al quale sono circa 11 metri delle solite argille, fossilifere come il solito. Nel banco delle conchiglie più fitte ho trovate le seguenti specie:

Venus islandicoides Lck. — *Cytherea multilamella* Lck. — *Pecten dubius* Broc. — *Nassa semistriata* Broc. — *Triton Doderleini* D'Anc. — *Strombus coronatus* Defr. — *Pleurotoma Mortilleti* May. — *P. turricula* Broc. — *P. Coquandi*

Bell. — *P. cataphracta* Broc. — *Chenopus pespelecani* L. — *Cancellaria varicosa* Broc. — *Natica millepunctata* Lck. — *Turritella subangulata* Broc. — *T. tornata* Broc. — *T. Brocchii* Bronn. — *Vermetus intortus* Lck. — *Xenophora infundibulum* Broc. — *Dentalium fossile* L. — *D. sexangulum* L.

V. Al di sopra dello strato mentovato passava il *Balaenotus*, che il Capellini crede riferire al *B. insignis* Van Beneden, e sulle costole, come pure sopra alcune vertebre di esso, furono scoperte le intaccature ed i tagli che vennero attribuiti all' opera dell' uomo. I contadini del podere avevano tuttora una vertebra ed alcuni frammenti d'ossa che diedero al cav. Bosniacki, ed un buon numero di pezzetti d'ossa indicano lo strato preciso dal quale il cetaceo fu tolto. Giunti colà io mi diedi a raccogliere conchiglie le quali proprio si potessero dire provenienti dallo strato stesso, e trovai varie specie delle solite, che enumererò distintamente da quelle degli strati adiacenti.

**Cytherea multilamella* Lck. — **Arca diluvii* Lck. — *Pleurotoma turricula* Broc. — *P. Coquandi* Bell. — **Ringicula buccinea* Broc. — **Natica millepunctata* Lck. — **Turritella subangulata* Broc. — *Dentalium elephantinum* L.

Nello stesso strato, a distanza di circa due metri dal *Balaenotus*, i signori Bosniacki e Pantanelli, presente me pure, trovarono un dente di *Carcharodon* ed un altro dente di *Galeocerdo*. Quei due denti sono rimasti in proprietà ai rispettivi raccoglitori, ma del resto si trovano frequentemente là, come dovunque, nei terreni pliocenici argillosi, non litorali, tanto è vero che dalla famiglia del colono ne avemmo una quindicina, che erano stati trovati nel podere. Sopra il piano del *Balaenotus* è una serie alta circa 3 o 4 metri della solita argilla nella quale a volte si trovano dei grumi calcarei derivati dall' indurimento della roccia.

VI. Succede un piccolo filare di fossili non bene conservati d'aspetto diverso, alquanto simili a quelli dello strato sabbioso del n. II. Notai le seguenti specie:

Pectunculus glycimeris L. — *Terebra Basteroti* Nyst. — *Cerithium crenatum* Broc. — *Cancellaria cancellata* L. — *Natica millepunctata* Lck.

Talune di queste specie, al solito, portate dalle acque, si mescolano con quelle degli strati sottostanti.

VII. Eccettuato questo filaretto di semplici fossili, seguono fino al vertice di quei poggi circa 7 od 8 metri delle solite argille e dei soliti fossili più volte accennati nei varî strati, ai quali si possono aggiungere la *Ficula intermedia* Sism., e l'*Adeorbis Woodi* Hörnes.

Avevo già fatta menzione altrove (loc. cit.) delle conchiglie che il prof. Pantanelli aveva raccolte al Poggiarone; ma vi erano insieme specie di straterelli diversi, oltre di che talune fra quelle indicate, come l'*Ostrea cochlear* Poli, e la *Natica helicina* Broc., non vi si trovano.

Geologicamente, gli strati del *Balaenotus* sono un poco più recenti degli strati sabbiosi litorali soprastanti alle marne turchine del ponte della Madonnina rossa, nei quali trovai una mandibola di *Bos etruscus* Falc., come pure sono alquanto più recenti di quelli sabbiosi della Buca in Val di Pugna lungo la ferrovia, presso il casotto n. 247 dai quali provengono il *Rhinoceros etruscus* Falc., ed il *Felsinotherium Gervaisii* Cap.; i quali ultimi strati sono soprastanti di varî metri a quelli con

Natica lineata. Rispondono all' incirca a quelli del *Balaenotus* gli strati a *Limopsis aurita* Broc., della Coroncina, e la diversità della fauna, e della stessa roccia, deriva dalla diversità della zona marina in cui quelle si formavano; ragione per cui molti, tratti in equivoco, hanno attribuito quei terreni ad epoche geologiche differenti fra loro.

Chi sia pratico nella malacologia dei terreni pliocenici italiani, dai fossili degli strati argillosi che sono venuto via via mentovando, avrà compreso che non si tratta affatto di specie vissute presso i litorali, nè meno di quelle che abitarono le grandi profondità; bensì di molluschi che abitarono una zona intermedia fra quella che oggi dicono coralligena, e quella delle laminarie, e più prossima a quella che a questa.

Tralasciando di parlare delle specie esclusivamente fossili ed oggidì estinte, a proposito delle quali si correrebbe certo il rischio di dir cose non molto note a tutti, accennerò a quelle ancor viventi o molto analoghe ad altre viventi, le cui circostanze di vita possono essere verificate tuttora, e la cui storia è nota ad una parte almeno di quelli che si occupano delle conchiglie odierne. Le recenti spedizioni del *Challenger* e di altri bastimenti inglesi, e gli studî del Jeffreys e di altri malacologi fra cui è anche il nostro Seguenza, hanno portata molta luce in tale questione, e possibilità di molto giovamento eziandio alla geologia. Delle 11 specie viventi da me citate nelle argille degli strati I, III, IV, V, VII, oltre alle 39 scomparse, per quanto si crede, dal Mediterraneo, considerandole complessivamente, una specie si trova anche nella zona litorale, 6 sono nella zona delle laminarie, 8 in quella coralligena, 5 in quella degli abissi (1): rimane adunque chiaramente escluso che i sedimenti argillosi sieno litorali, ed anzi viene riconosciuto che si formarono nella zona coralligena. Delle 8 specie trovate in particolare nello strato del *Balaenotus*, 5, segnate con un asterisco, vivono ancora nel Mediterraneo, con caratteri identici o quasi, e di queste, una si trova anche nella zona litorale, 2 anche in quella delle laminarie, una pure in quella degli abissi, e tutte 5 abitano la zona coralligena, od in modo esclusivo, od insieme con altre zone (2). Gli strati del n. II e VI sono più litorali, come lo dimostra la natura stessa del sedimento sabbioso che li forma: delle 7 specie ivi indicate, appetto alle 17 scomparse, ve ne hanno 4 che abitano, ma non esclusivamente, la zona litorale, 7 che abitano la zona delle laminarie, 4 indicate anche nella zona coralligena, ed una pure in quella degli abissi, che è la *Venus ovata*; la forma di questa specie che si trova negli strati in discorso non è però quella delle zone profonde. Da ciò apparisce che quegli strati si formavano nella zona laminare, ma neppure essi in quella propriamente litorale. Del resto il maggiore interesse per noi l'hanno gli strati argillosi, e questi, come ho detto, mostrano di essersi depositati ad una profondità non minore di 150 metri, e

(1) March. di Monterosato, *Nuova rivista delle conchiglie mediterranee*. Atti dell'Accademia palermitana di scienze, lettere ed arti, vol. V sez. 2.ª.

(2) Scrissi all' illustre malacologo J. Gwyn Jeffreys, per chiedere la sua opinione sui limiti della profondità di una zona sottomarina nella quale si trovassero insieme le cinque specie di molluschi, da me raccolte nello strato del *Balaenotus*. Il Jeffreys mi replicò « I regard all these as southern and shallow-water species: I believe that the normal or usual range of depth would be from 20 to 50 fathoms » (5 maggio 1877).

mai messa a scoperto nemmeno nelle basse maree. La lontananza dal lido è palesata del resto dalla natura stessa del tenuissimo sedimento. Perciò, a meno di ricorrere al soprannaturale è impossibile attribuire alla presenza dell' uomo pliocenico in quel posto, le tracce trovate sulle ossa del *Balaenotus* (¹).

Della profondità del mare, e della lontananza dal lido pliocenico si sarebbe giudicato a occhio, dopo avere esaminata la geologia dei dintorni. Gli strati più prossimi del solido alberese cretaceo superiore, il quale costituisce la parte maggiore della più prossima serie montuosa, cioè del Chianti, affiorano nel fondo dei botri e dei torrentelli, appena a Castelnuovo Berardenga ed a S. Giovanni, ad una distanza non minore di 6 chilometri. Ma per trovare la spiaggia pliocenica bisogna andare ancora più lontano. Infatti durante quell'epoca la massima parte delle pendici toscane laterali all'Apennino era sommersa o sporgeva dal mare a guisa di piccoli scogli o di isolotti; si persuade di ciò chiunque studii a modo la geologia toscana, e chiunque esamini le tracce dei terreni pliocenici in cima ai poggi di Radicondoli, di Chiusdino, e d'altrove, e presso le non alte sommità della Montagnola Senese, dei Poggi di S. Gemignano e di altri. Per limitarci a parlare della regione senese di cui abbiamo discorso infino ad ora, il Chianti sporgeva con assai minore estensione di quella che ora abbia la roccia cretacea od eocenica messa allo scoperto, e la Montagnola era quasi affatto nascosta dal mare, tanto è vero che tutti i ciottoli e le ghiaie ruzzolate che si trovano nel pliocene, checchè siasi creduto nel passato, derivano esclusivamente dal Chianti, fin quelle che fanno parte degli strati ricoprenti direttamente le antiche rocce triassiche ed infraliassiche dei colli di Jano, di S. Gemignano, e della Montagnola. Dalle rocce di questi luoghi, non sono derivati che massi sconnessi franati ed accumulati irregolarmente dall' opera delle forze sottomarine. Nel Chianti adunque poteano vivere e viveano quei mammiferi terrestri che ora troviamo fossili nei terreni pliocenici marini; ma niun d'essi poteasi recare là dove rimase sepolto il *Balaenotus* del Poggiarone.

Per ischiarire viè meglio l'argomento aggiungerò delle osservazioni ad alcune parole del Capellini, le quali, almeno per quanto mi sembra, non sono molto chiare, e potrebbero trarre qualcuno in inganno, come di fatti credo sia accaduto: ripeterò così quello che ho detto altrove (Arch. per la Ant. ecc.). Nello scritto del Capellini, si trovano, fra le altre, le seguenti frasi: « ho raccolto nel giacimento stesso delle ossa, parecchi coltellini ed altri strumenti di selce ».. « Nelle marne che occupano il posto degli *strati a Congerie*, insieme alle ossa di cetacei e agli altri fossili, si trovano abbastanza frequentemente alcune scheggie di diaspro rosso manganesifero, e di selce bigia e bionda che, ridotte a coltellini, seghe e cuspidi di freccie, io non saprei distinguere da quelle che si trovano nelle caverne della Toscana e della Liguria .... Nelle marne superiori degli strati a Congeria della Farsica e di Pane e Vino raccolsi coltelli e rozze cuspidi di freccie » (R. Acc. dei Lincei pag. 8). Se alcuno

(¹) Mi sembra poi non potersi credere che il *Balaenotus*, gettato alla spiaggia, fosse toccato e scarnito dagli uomini, quindi ripreso dalle acque e gettato là dove fu trovato. Ciò mi parrebbe contrario alle leggi le quali regolano i movimenti del mare; e d'altra parte occorre rammentare che lo scheletro si trovava nella sua integrità, non sfasciato, nè disperso.

deducesse da queste parole, che i manufatti di selce furono trovati negli stessi strati dei cetacei, potrebbe su questo fondamento ritenere senz' altro provata la presenza dell' uomo in quei tempi ed i quei luoghi. Ma questo non sarebbe se non un equivoco perchè in tutta la Toscana ed anche nel Senese, si trovano cotali selci, spesso frequentissime ; ma si rinvengono alla superficie del suolo, e non hanno perciò l'epoca dei terreni, qualunque essi siano, sui quali stanno. Infatti nelle argille del Poggiarone, e nelle marne di Pane e Vino e degli altri luoghi, gli arnesi lavorati dall'uomo non potrebbero essere pervenuti se non ruzzolati ed a guisa di ciottoli, come i frammenti di roccia che si trovano in qualche banco: per lo più poi, e per es. al Poggiarone, nei sedimenti teneri, quali sono per solito quelli che racchiudono dei cetacei, non si trovano nemmeno ghiaie, nè frammenti di qualsisia qualità.

Contribuzione all'anatomia ed alla fisiologia delle antenne degli Afanitteri.

Nota del dott. F. BERTÈ, presentata dal Socio F. TODARO

nella seduta del 6 gennaio 1878.

(Ricerche fatte nel laboratorio di Anatomia normale della R. Università di Roma. II).

L'antenna delle pulci venne riconosciuta la prima volta nel 1832 da Dugès ([1]) sopra il *Pulex irritans*. Egli determinò con esattezza la posizione di quest' organo dietro l'occhio nella cavità dell'antenna, ne descrisse la forma, le tre articolazioni e la diversa maniera di muoversi nel vivente. Secondo lui « la prima giuntura è corta; la seconda lunga e spessa, armata d' una grande apofisi e d'un pennacchio di peli; la terza è più alta, appiattita a forma di paletta e divisa in istrisce o digitazioni, che divengono più corte dallo avanti all'indietro ».

Nel 1866 Landois ([2]) descrisse nell'antenna del *Pulex canis* quattro segmenti invece di tre, e contradisse in qualche punto il Dugès. La concisa descrizione del Landois potrebbe riuscir monca, se tentassi di riassumerla; onde mi veggo costretto a riportarla per intiero, traducendola letteralmente (l. c. pag. 5).

« Il segmento basale è il più piccolo; col tratto suo più assottigliato s'intromette nella testa, coll'estremità imbutiforme s'articola col secondo segmento. Questo porta una sporgenza sferica volta indietro, provvista di quattro robuste setole, che si dirigono in alto. Il terzo segmento ha del pari una sporgenza indietro, sulla cui porzione più prominente sta, in linea parallela all'articolazione del secondo col terzo segmento, una serie di forti setole ancora più lunghe. Sul margine anteriore del terzo segmento veggonsi tre spine più piccole, una di sotto, due di sopra. Il tegumento del terzo segmento è diviso in quadrilateri allungati, che somigliano a squame.

« L'articolazione del terzo segmento col quarto trovasi alla sua estremità superiore, sopra una parte rilevata. La cavità articolare del terzo segmento risulta d'un'apertura rotonda, contornata d'un orlo spesso di chitina; in essa fin dalla porzione più esterna dell'orlo sporgono sottili e corti peli volti a raggi verso l'interno. In siffatta apertura penetra l'apofisi articolare del segmento terminale, la quale alla sua estremità inferiore ha un margine arrovesciato, e addosso a questo spingonsi i peli dell'apertura articolare. Da questo punto la sua forma comincia a farsi simile a quella d'un collo di bottiglia. Attorno all'apofisi sono otto giri di peluzzi diretti alquanto in sopra. Internamente è scavata da un canale piuttosto stretto, attraverso il quale il nervo antennale passa nel segmento terminale. Questo segmento è gonfio, a forma di

([1]) *Recherches sur les caractères zoologiques du genre Pulex* etc. Annales des scienc. nat. T. 27. 1832. p. 145.

([2]) *Anatomie des Hundeflohes* etc. Dresden, 1866.

clava, un po' compresso lateralmente e porta nove liste come i denti d' un pettine, rivolte indietro. Le cinque superiori, che, prese insieme, compongono la metà esterna del segmento terminale, son distinte l'una dall'altra da solchi netti, che girano intorno al segmento. La 5ª, 6ª, 7ª e 8ª portano alle loro estremità certe piccole spine, forse coni specifici, a simiglianza di due brevi e cilindriche eminenze sporgenti dalla prima dentatura. La prima, terza e quarta dentatura sono le più piccole e più brevi, le loro punte arrotondite. La seconda è la più lunga e divisa in compartimenti da linee longitudinali. Altre spine più brevi stanno sulla superficie; e in numero di tre sopra una speciale eminenza alla base della seconda dentatura; e due altre presso al margine anteriore della quinta e sesta. Meritano special menzione alcuni apparecchi peculiari, che hanno evidentemente a considerarsi come organi di senso. Stanno sul margine anteriore dell' antenna, coperti dalle estremità libere delle dentature e consistono di fossette ovali o rotonde, con orlo rilevato di chitina e con tenera membranella sovr'esse distesa, nel cui mezzo o vi è una piccola apertura, ovvero un bottoncino, cosa che non potei discernere coll'obb. Hartnack 10 e ocul. 4 ».

Secondo Landois queste parti costituiscono l'organo dell'udito della pulce.

Fin dal 1838 L. W. Clarke (1) aveva descritto nella base delle antenne del *Carabus nemoralis* un apparecchio uditivo, composto d'un' auricola, di un condotto uditivo interno ed esterno, d'un timpano e un labirinto; di ciò Siebold (2) dice non esistere traccia alcuna. Anche Treviranus (3) aveva descritto come organi uditivi le due macchie bianche e convesse, che si trovano nella base delle antenne della *Blatta orientalis* e che Burmeister (4) invece ha descritto come due occhi accessorî rudimentali.

Newport (5) e Goureau (6) avevano ammesso che le antenne servono allo stesso tempo al tatto e all'udito.

Intanto nelle achetidi e nelle locustidi Siebold (7) ha descritto un organo acustico situato nelle gambe anteriori immediatamente al disotto dell' articolazione colla coscia, che poi Leydig ha trovato nelle ali dei coleotteri, nei bilancieri dei ditteri e nelle larve di altri insetti.

Hensen (8) ha studiato quest'organo nella gamba anteriore della *Locusta viridissima*, e H. Landois (9) in quella del cervo volante. Nelle acridie Burmeister (l. c.) descrive come organo dell'udito due fossette circondate da un anello corneo, saliente, al fondo delle quali è tesa una membrana in forma di timpano. Nella faccia interna di questa membrana descrive due prolungamenti cornei, ai quali è annessa una vescicola delicatissima (labirinto membranoso) contenente un fluido trasparente, che è in rapporto col nervo acustico, proveniente dal terzo ganglio toracico, il quale si termina in vicinanza immediata della vescicola in bastoncelli uniformi.

(1) Citato da Siebold e Stannius, *Anatomie comparée* II.
(2) Anat. comp. — (3) Anat. comp.
(4) *Handbuch der Entomologie* Bd. II. p. 673.
(5) Transact. of the Ent. Soc. II p. 229.
(6) Annal. de la Soc. Ent. X p. 10.
(7) *Ueber das Stimm- und Gehörorgan der Orthopteren.* Arch. f. Naturgeschichte 1844.
(8) *Ueber das Gehörorgan von Locusta.* Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. XVI p. 190.
(9) *Gehörorgan des Hirschkäfers.* Arch. f. micr. Anat. 1868.

Ranke (') sostiene che tanto nelle acridie, quanto nelle locustidi tutti questi organi sono transitorî o comuni (Uebergangsorgane) cioè inservienti al tempo stesso al tatto, all'udito, all'odorato e al gusto.

Da questo breve cenno storico emerge, che le nostre conoscenze sopra l'organo dell'udito degli insetti, i quali ci danno prove non dubbie della sensazione uditiva distinta, non sono ancora molto avanzate; e per conseguenza lo studio di quest'organo richiede molte e scrupolose ricerche.

Io ho fatto una serie di ricerche sopra le antenne del *P. irritans* sotto la direzione del prof. Todaro, a cui rende grazie dell'aiuto che mi ha prestato in questo difficilissimo studio. Queste ricerche mi lusingo che non lasceranno dubbio sopra la funzione uditiva delle antenne della pulce, come nel seguito di questa Memoria verrà provato.

Per vedere le antenne nella pulce in tutte le loro parti, è mestieri di fare tagli della testa nel senso della lunghezza del corpo dell'animale e quindi aiutarsi colla leggera compressione a muoverle e a distenderle, qualora sieno raccolte. Fu così infatti che sopra alcuni tagli ben riusciti, Dugès, avvicendando la compressione e spingendola fino allo schiacciamento, ha potuto scoprire che, il corpicciuolo, visto prima di lui da altri osservatori in quel sito, era una vera antenna. Però il metodo dei tagli, di cui si son serviti tanto Dugès, quanto Landois per studiare le antenne, non era ancora a quel grado di perfezione, nel quale oggi è pervenuto, e per conseguenza i sopracitati autori, se hanno tagliato la testa e con essa la cavità antennale, non sono riusciti ad ottenere tagli dell'antenna e dei suoi segmenti. Quindi il Landois medesimo che ha spinto l'analisi molto più innanzi di quello, che avesse fatto Dugès, non ha potuto vedere che nell'ultimo pezzo dell'antenna, il più importante, come sotto vedremo, esiste una larga cavità (cavità labirintica o timpanica). E se ha descritto la cavità articolare del penultimo segmento, e l'apofisi dell'ultimo in essa contenuta, ciò l'ha potuto fare, perchè, come si vede dalla sua figura 7 della Tav. II op. cit., questo si era distaccato dall'altro.

Infatti per studiare bene questi organi si richiedono due specie di tagli, cioè, alcuni più grossi altri più sottili. I primi servono ad apprestare tutto l'insieme dell'antenna e la maniera di stare nella fossa, che la ricetta. I secondi servono allo studio più minuto delle varie parti, che compongono l'antenna.

Dopo d'aver indurito o nell'alcool o nell'acido cromico le pulci, io le ho chiuse nella mistura d'olio e cera di Stricker, e così ho potuto ottenere tagli di varia spessezza. Debbo però avvertire che per avere antenne intere, i tagli debbono esser fatti nel senso antero-posteriore o longitudinale dell'animale, e così anco per studiare le varie parti riescono più utili i tagli diretti in questo senso, anzichè quelli verticali, perchè allora, non solo si ha nel taglio una parte dell'antenna e non tutta, ma questo cade sempre alla parte più ristretta e specialmente dell'ultimo segmento appiattito d'alto in basso. Nei tagli così fatti io ho potuto studiare tutte le particolarità, che m'accingo ad esporre.

L'antenna del *P. irritans* si trova rannicchiata in una fossetta, sita ai lati della testa, dietro e sotto l'occhio (Fig. 1 *a*). Tal fossetta, molto larga e di forma ovale, s'apre

(') *Das Gehörorgan der Acridier* etc. Zeitsch. f. wiss. Zool. Bd. XX 5. 1875.

all' esterno con una fessura trasversale, provvista all' intorno d' un ciuffo di setole, innanzi alla quale sta una specie d' opercolo fisso al canto esterno dell' orbita e molleggiante. L' antenna è formata di tre segmenti (Fig. 5), come aveva detto Dugès. Il *segmento basale* o *interno* (Fig. 3 *sb*) ha la forma trapezoide ed è fatto d' una membrana chitinosa, che chiude circolarmente uno spazio riempito di molle tessuto congiuntivo. Porta da un canto una lunga apofisi (Fig. 5 *ar*), articolata colla testa dell' animale, sulla quale s' impianta un largo fascio di fibre muscolari, disposte a ventaglio; dall' altro presenta un lungo orlo circolare e sporgente indietro a punta, legato al secondo segmento mercè d' una membranella connettivale. All' intorno dell' orlo esiste una serie di setole dirette all' esterno.

Il *secondo segmento* o *medio* (Fig. 3 *sm*) è più grande ed ha la forma d' un cubo irregolare, con indietro una grossa sporgenza arrotondita. È formato del pari di membrana chitinosa, che chiude uno spazio riempito di molle tessuto congiuntivo. La porzione interna di questa membrana ha un orlo circolare che, come abbiam detto, s'unisce all' orlo circolare esterno del primo segmento. Nella parte esterna del segmento medio trovasi una vera cavità articolare, piccola e circolare (Fig. 3, 4, 6 *ca*), la quale riceve l' apofisi del terzo segmento e con essa forma un' articolazione trocoidale. Su questo segmento medio le setole sono più lunghe e più forti ancora, e, tranne alcune che si trovano nella sporgenza posteriore, le altre stanno all' intorno dell' articolazione suddetta. Si notano inoltre sulla faccia anteriore di questo segmento, qua e là, piccoli prolungamenti che per distinzione diconsi *spine*.

Il *terzo segmento* (Fig. 2, 5, 7 *st*) ha forma di fiasca, con un corpo ed un collo. Il *collo* non è altro che l' apofisi articolare, la quale, terminandosi con un orlo arrovesciato, precisamente come il collo d' una bottiglia, s' articola con la cavità sopra descritta del segmento medio. Il *corpo* è un po' schiacciato d' alto in basso, e vi si distingue una faccia superiore, una inferiore, una anteriore ed un' altra posteriore. Finalmente nella parte opposta al collo abbiamo l' estremità libera arrotondita, o il fondo della fiasca.

Il fatto importante è che il segmento terminale, a differenza degli altri due, presenta una grande cavità (Fig. 8, 9 *cl*), chiusa da una membranella connettivale amorfa, che rappresenta una vescicola labirintica.

All' esterno la vescicola labirintica è circondata da una serie di 7 cerchi o anelli di sostanza chitinosa. Ciascuno degli anelli è fatto da due pezzi o semicerchi, cioè l'uno anteriore e l'altro posteriore, che si riuniscono con le loro estremità nella faccia superiore e nella inferiore di questo segmento. I semicerchi posteriori (Fig. 2 *sp*) portano sopra ciascuna estremità una grossa spina, impiantata in una fossetta, ed un' altra più lunga e più sottile nella parte media. Per conseguenza sopra questi semicerchi si notano tre serie di spine, cioè una serie sulla faccia superiore, un'altra sulla faccia posteriore, ed un' altra sulla faccia anteriore del segmento.

Sopra i semicerchi anteriori (Fig. 2 *sa*) si notano ugualmente due serie di spine, ma molto piccole, che si veggono una nella faccia superiore e una nella inferiore.

I semicerchi anteriori sono più larghi, molto sottili e coi loro margini regolari vengono a connettersi mutuamente senza lasciare interstizî fra loro.

I semicerchi posteriori invece sono più spessi e più stretti e lasciano tra loro delle fenditure trasversali, nelle quali si trovano poste cellule fusiformi (Fig 7 *cf*) con lunghi

prolungamenti (Stiftzellen) che ricordano le cellule fusiformi di Deiters dell' organo di Corti della coclea dei mammiferi. Landois, avendoli guardati di lato solamente e non di fronte non solo non ha visto le cellule fusiformi, ma descrisse e figurò nella faccia posteriore un corpo dentato, con nove denti, cioè le due alette e i sette cerchi da lui erroneamente presi per denti.

Fra il primo semicerchio posteriore e il primo anteriore, che sta alla base del collo, resta un' apertura circolare (finestra rotonda) che rappresenta un largo orificio della vescicola labirintica. Se quest' orificio sia o no chiuso da una membrana incastrata nel primo anello, come quella del timpano degli animali superiori, non si è potuto mettere in chiaro con nessun mezzo. Intanto sopra quest' orificio si notano due alette lanceolate, una per lato, che, fisse con un' estremità all' intorno della base del collo, da esse abbracciato a modo di cravatta, sono libere in tutto il resto e quindi mobili. Queste alette potrebbero far l' ufficio d' organi collettori o modificatori delle onde sonore, qualora, come pare, quest' organo sia inserviente all' audizione.

L' antenna riceve un sol nervo, il quale nasce dal ganglio cerebrale o più probabilmente fra questo e il primo ganglio toracico. Si vede chiaramente come questo nervo, dopo aver traversato l' asse del primo e del secondo segmento, penetra nel segmento terminale, passando attraverso il foro centrale del collo o dell' apofisi articolare, e si porta fino all' estremità libera o al fondo del segmento terminale, ove si termina in un grande rigonfiamento ganglionare, che sta fra la vescicola labirintica e gli ultimi due anelli chitinosi. I rapporti fra questo ganglio e le cellule fusiformi che stanno fra i semicerchi anteriori non poterono esser posti in chiaro. Però nello stato attuale della scienza ci è lecito ammettere l' ipotesi della connessione di questi elementi con il ganglio, e dai fatti sopra esposti possiamo esser autorizzati a credere che l' ufficio delle antenne nelle pulci sia in relazione coi fenomeni acustici.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. Taglio frontale della testa *t* e del protorace *pt* d'una pulce umana femmina, l'una e l'altro limitati all'esterno da spesso e forte involucro chitinoso. Al punto maggiormente ristretto della testa veggonsi d'ambo i lati le fosse antennali *ca*, che contengono l'antenna *a*, e sono in fuori chiuse dall'opercolo *op*, salvo ad un punto, ove si vede la fenditura antennale *fa*. La fossa antennale è in avanti limitata dall'occhio *oc*; dietro a questo è l'articolazione craniana del segmento basale dell'antenna. Dentro alla testa, oltre ad una grande quantità di fibre muscolari, che servono a muovere l'apparecchio boccale dell'insetto, sta in mezzo ed in avanti una sezione del faringe *f*, il quale, attraversando il ganglio faringeo *gf* o cervello, esce restringendosi nell'esofago *e*, che scende innanzi alla prima commissura ed al ganglio protoracico. Ai lati del faringe e del ganglio faringeo, avvolto da connettivo, stanno trachee *tt* e i primi gomitoli del così detto Fettkörper.

Fig. 2. Segmento terminale dell'antenna coll'apofisi articolare *ar* o collo, e con il corpo che presenta le due alette *al*, i semicerchi anteriori *sa*, ed i posteriori *sp*. Sotto delle alette si scorge una fenditura, che è la finestra ovale veduta un poco obbliquamente; qua e là stanno le spine specifiche del segmento terminale.

Fig. 3. Sezione longitudinale del primo segmento o basale *sb* attaccato al secondo o medio *sm*; sul margine inferiore di questo apparisce in sezione la cavità articolare *ca*.

Fig. 4 Articolazione del segmento medio col terminale dell'antenna. La cavità articolare *ca* si vede di prospetto con la corona di peli sottilissimi, che fanno in certo modo ostacolo all'uscita dell'apofisi articolare. Il segmento terminale si è incurvato sul collo ed è alquanto schiacciato, onde presenta con maggior distinzione la finestra ovale *fo*.

Fig. 5. Antenna intera con i suoi tre segmenti, il basale *sb*, il medio *sm* ed il terminale *st*. Al segmento basale s'attaccano i muscoli *m* motori di tutto l'appendice. L'articolazione sua craniana è rinforzata in avanti da un ispessimento di chitina in forma di lista oscura, che, attraversando la testa della pulce, si reca da un lato all'altro; di sopra da un'altra lista più stretta, che forma il limite interno della fossa antennale.

Fig. 6. Sezione del primo *sb* e del secondo *sm* segmento dell'antenna in sito entro la cavità antennale largamente aperta; *ca* cavità articolare; *na* nervo dell'antenna; *oc* sezione dell'occhio sinistro.

Fig. 7. Segmento terminale strappato dalla sua articolazione e veduto dalla faccia inferiore. *cf*. Cellule fusiformi degli interstizi degli archi chitinosi *ar* in numero di 7; *fo* finestra ovale; *al* alette; *ga* ganglio antennale; *na* nervo antennale.

Fig. 8. Il segmento terminale in questa figura mostra una grande apertura, cagionata dall'avere il rasojo portato via buon tratto della parete chitinosa, che chiude la cavità del medesimo, o cavità labirintica *cl*.

Fig. 9. Sezione longitudinale dell'antenna. Si vede con molta chiarezza il modo d'articolarsi del terzo col secondo segmento, mediante l'orlo arrovesciato del collo, che s'incastra nelle pareti della cavità articolare. Vedesi ancora parte della cavità del terzo segmento in *cl*.

Tutte queste figure furono prese da altrettanti preparati colla camera lucida sulla lente obb. N. 7 Hartnack, salvo la fig. 1 che si ebbe coll'obb. N. 4.

m
Fig. 5.
Fig. 3
sb
ar
sb
sm
sm -
ca
st
Fig. 9
f -
gf -
e
oc
Fig. 2.
a
ar
ca -
op -
al
sa
fa
sp
pl

..Via Cestari 37.

U. Colonna inc

La trasformazione piana doppia di secondo ordine, e la sua applicazione alla geometria non euclidea.

Memoria del dott. R. DE PAOLIS presentata dal Socio CREMONA

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 2 dicembre 1877.

In un precedente studio (¹) ho stabilito la teoria generale delle trasformazioni piane doppie ed ho accennato il caso della trasformazione di secondo ordine.

In ciò che segue intendo di svolgere le proprietà di questa trasformazione, e specialmente in un caso che ha una applicazione alla geometria non euclidea.

§ 1. Formole per la corrispondenza fra P e P′ - Costruzioni.

1. In un piano P' prendiamo una conica

$$\Omega_{x'x'} \equiv a_{11}x'^2_1 + a_{22}x'^2_2 + a_{33}x'^2_3 + 2a_{12}x'_1x'_2 + 2a_{23}x'_2x'_3 + 2a_{31}x'_3x'_1 = 0$$

ed un punto I' di coordinate

$$y'_1 = y_1 \quad y'_2 = y_2 \quad y'_3 = y_3 ;$$

la polare di I' rispetto alla conica $\Omega_{x'x'}$ ha per equazione

$$\Omega_{x'y'} \equiv a_{11}x'_1y'_1 + a_{22}x'_2y'_2 + a_{33}x'_3y'_3 + a_{12}(x'_1y'_2 + x'_2y'_1) + a_{23}(x'_2y'_3 + x'_3y'_2) + \\ + a_{31}(x'_3y'_1 + x'_1y'_3) = 0 .$$

Se poniamo

$$(1) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = y'_1\Omega_{x'x'} - 2x'_1\Omega_{x'y'} : y'_2\Omega_{x'x'} - 2x'_2\Omega_{x'y'} : y'_3\Omega_{x'x'} - 2x'_3\Omega_{x'y'} ,$$

dove le x sono le coordinate di un punto d'un altro piano P, ad un punto x' di P' corrisponde un solo punto x di P, ed alle rette di questo piano corrisponde una rete di coniche che passano per i punti $J_1'J_2'$ comuni alla conica $\Omega'_{x\,x}$ ed alla retta $\Omega'_{x\,y}$ polare del punto I'. Da ciò segue che le formole (1) stabiliscono una trasformazione doppia di secondo ordine tra il piano doppio P ed il piano semplice P' (²).

L'equazione della conica corrispondente alla retta

$$U \equiv u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

si può mettere sotto la forma

$$U_{y'}\,\Omega_{x'x'} - 2U_{x'}\,\Omega'_{x\,y} = 0 .$$

La Jacobiana è formata dalla conica doppia

$$\Omega'_{x\,x} = 0$$

e dalla retta fondamentale

$$\Omega_{x'y'} = 0 \ (³).$$

(¹) *Le trasformazioni piane doppie.* Atti dell'Accademia dei Lincei serie 3ª vol. 1.º

(²) L. c. n. 22.

(³) L. c. n. 22; n. 11, I.

Le formole (1) ci danno i punti del piano doppio corrispondenti a punti presi nel piano semplice, per avere le formole inverse, che devono esprimere le x' in funzione delle x, fissiamo in P' una retta

$$U' \equiv u'_1 x'_1 + u'_2 x'_2 + u'_3 x'_3 = 0$$

e cerchiamo di scrivere l'equazione della conica corrispondente in P. Dalle (1) abbiamo

$$\rho x_1 = y'_1 \frac{\Omega_{x'x'}}{\Omega_{x'y'}} - 2x'_1$$

$$\rho x_2 = y'_2 \frac{\Omega_{x'x'}}{\Omega_{x'y'}} - 2x'_2$$

$$\rho x_3 = y'_3 \frac{\Omega_{x'x'}}{\Omega_{x'y'}} - 2x'_3$$

che moltiplicate per $u'_1\ u'_2\ u'_3$, e sommate tenendo conto della relazione $U'=0$, danno

(2) $$\rho \frac{U'_x}{U'_y} = \frac{\Omega_{x'x'}}{\Omega_{x'y}},$$

e quindi si possono scrivere sotto la forma

$$2x'_1 = \frac{\rho}{U'_y}(U'_x y_1 - U'_y x_1)$$

$$2x'_2 = \frac{\rho}{U'_y}(U'_x y_2 - U'_y x_2)$$

$$2x'_3 = \frac{\rho}{U'_y}(U'_x y_3 - U'_y x_3)\ ;$$

sostituendo questi valori delle x' nella (2) abbiamo

(3) $$U'^2_x\,\Omega_{yy} - U'^2_y\,\Omega_{xx} = 0,$$

ovvero

$$U'_x\sqrt{\Omega_{yy}} \pm U'_y\sqrt{\Omega_{xx}} = 0$$

per equazione della conica corrispondente in P alla retta $U'=0$, e paragonando i coefficienti delle u' troviamo le formole

(4) $$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1\sqrt{\Omega_{yy}} \pm y_1\sqrt{\Omega_{xx}} : x_2\sqrt{\Omega_{yy}} \pm y_2\sqrt{\Omega_{xx}} : x_3\sqrt{\Omega_{yy}} \pm y_3\sqrt{\Omega_{xx}}$$

che sono le inverse delle (1).

Dall' equazione (3) delle coniche corrispondenti alle rette del piano semplice deduciamo che passano per il punto fondamentale I di coordinate y corrispondente alla retta fondamentale $J'_1 J'_2$ ed al punto congiunto I'; di più vediamo che hanno un doppio contatto colla conica limite [1].

Le formole della trasformazione congiunta [2] si scrivono subito osservando che

$$U'_{y'}\Omega_{x'x'} - U'_{x'}\Omega_{x'y'} = 0$$

è la rete delle coniche che passano per $I'\,J'_1\,J'_2$, e sono

$$\mathbf{x}'_1 : \mathbf{x}'_2 : \mathbf{x}'_3 = y'_1\Omega_{x'x'} - x'_1\Omega_{x'y'} : y'_2\Omega_{x'x'} - x'_2\Omega_{x'y'} : y'_3\Omega_{x'x'} - x'_3\Omega_{x'y'}.$$

(1) L. c. n. 22.

(2) Cioè la trasformazione involutoria nella quale si corrispondono fra loro due punti congiunti del piano semplice (due punti corrispondenti ad uno stesso punto del piano doppio).

2. La corrispondenza stabilita tra P e P' per mezzo delle formole (1) e delle loro inverse (4) si può costruire nel seguente modo. Fissiamo una superficie S del secondo ordine, un punto O' di essa, un punto O fuori di essa, e due piani $P\,P'$. Preso un punto p del piano P congiungiamolo con O, il raggio Op incontra la S in due punti che projettati da O' sul piano P' ci danno due punti $p'\mathbf{p}'$ che in P' corrispondono al punto p di P. Preso invece p', o $\mathbf{p}'$, e congiunto con O', il raggio $O'p'$, o $O'\mathbf{p}'$, taglia la S in O' ed in un altro punto che projettato da O sul piano P ci dà il punto p corrispondente al punto p', o $\mathbf{p}'$. Evidentemente la trasformazione doppia che si costruisce nel detto modo è quella del secondo ordine.

Gli enti fondamentali del piano P sono la traccia I della retta $O'O$ e le traccie dei piani tangenti alla S che passano per $O'O$; la conica limite è la sezione fatta dal piano P nel cono che ha il vertice in O ed è circoscritto alla S.

I punti fondamentali di P$'$ sono le traccie delle generatrici che passano per O', la retta fondamentale è la traccia del piano tangente in O', ed il punto I' congiunto a questa retta è la traccia della retta $O'O$. Le traccie dei piani che da O projettano le generatrici passanti per O' sono le rette congiunte ai due punti fondamentali. La conica doppia è la traccia del cono che da O' projetta la conica di contatto del cono col vertice in O circoscritto alla S.

Dato un punto p', si voglia trovare il congiunto $\mathbf{p}'$; il punto, distinto da O', comune al raggio $O'p'$ ed alla S si congiunga con O; la congiungente incontra la S in un altro punto, che projettato da O' ci dà il punto $\mathbf{p}'$ cercato.

Congiungendo con O' i punti del piano P', li facciamo corrispondere univocamente ai punti della superficie S. Se per il punto corrispondente sulla S a p', e per O, si tirano i due piani tangenti alla S le sezioni sono rappresentate dalle coppie di rette

$$J'_1p' \ J'_2o'_1 \ , \ J'_2p' \ J'_1o'_2$$

dove $o'_1\,o'_2$ sono i punti comuni alle rette J'_1p' J'_2p' ed alla conica doppia, il punto comune alle $J'_1o'_2$ $J'_2o'_1$ è il punto $\mathbf{p}'$; da ciò deduciamo che la polare di p' rispetto alla conica doppia passa per $\mathbf{p}'$, e questo punto è l'intersezione della retta $I'p'$ colla detta polare. Dalla costruzione trovata discende che la trasformazione congiunta è una inversione quadratica d'Hirst (¹).

Se il raggio OO' è tangente alla S il punto I cade sulla conica limite, ed allora nel piano P' v'è un punto doppio non fondamentale. Se la superficie S è un cono i punti fondamentali J'_1 J'_2 sono infinitamente vicini (²).

Prendendo il piano P' parallelo al piano tangente alla S in O' i punti fondamentali J'_1 J'_2 vanno a distanza infinita, quindi: 1° se le generatrici che passano per O' sono reali alle rette del piano doppio corrisponde una rete d'iperbole cogli asintoti paralleli, 2° se O' è un umbilico alle rette di P corrisponde una rete di circoli, 3° se la S è un cono alle rette di P corrisponde una rete di parabole con i diametri paralleli.

3. Possiamo avere una costruzione senza fare considerazioni nello spazio estraneo ai

(¹) L. c. n. 22.

(²) Ho considerato questi due casi speciali nella teoria generale delle trasformazioni doppie, l. c. n. 22, 23.

due piani $P P'$. Basta supporre data in P la conica limite Ω_{xx} ed il punto fondamentale I, ed in P' la conica doppia $\Omega_{x'x'}$ ed i punti fondamentali $J'_1 J'_2$, quindi far corrispondere i punti della conica limite univocamente a quelli della conica doppia in modo che ai punti $J'_1 J'_2$ corrispondano i punti di contatto delle tangenti condotte da I alla conica limite. Allora preso un punto p di P e condotte da esso le due tangenti alla Ω_{xx} i punti di contatto $o_1 o_2$ danno due punti $o'_1 o'_2$ corrispondenti sulla $\Omega_{x'x'}$, congiunti ai punti $J'_1 J'_2$ le rette $J'_1 o'_1$ $J'_2 o'_2$ determinano uno dei punti corrispondenti a p, e le rette $J'_1 o'_2$ $J'_2 o'_1$ determinano l' altro. Se poi supponiamo dato un punto p' di P' congiungiamolo con $J'_1 J'_2$, le rette $J'_1 p'$ $J'_2 p'$ tagliano la $\Omega_{x'x'}$ in $J'_1 J'_2$ ed in $o'_1 o'_2$, e le tangenti alla Ω_{xx} nei punti corrispondenti $o_1 o_2$ s'incontrano in p.

§ 2. Corrispondenza tra i circoli euclidei di un piano P′ ed i circoli non euclidei di un piano P.

4. Prendiamo la retta all'infinito di P' come retta fondamentale $\Omega_{x'y'}$ e i punti ciclici per punti fondamentali $J'_1 J'_2$. Per questa particolare scelta la conica doppia dovendo passare per i due punti fondamentali diviene un circolo, il suo centro essendo il polo della retta all'infinito cade nel punto fondamentale I'.

Due punti congiunti $p'\,\mathbf{p}'$ sono in linea retta con I' e separano armonicamente i punti $o'_1 o'_2$ in cui la retta $I'p'\mathbf{p}'$ taglia il circolo doppio; essendo I' il punto di mezzo del segmento $o'_1 o'_2$ abbiamo

$$\overline{I'o'_1}^2 = I'p' . I'\mathbf{p}' \quad (^1),$$

ossia

$$I'p' . I'\mathbf{p}' = k^2, \tag{5}$$

chiamando k il raggio del circolo doppio.

Alle rette del piano doppio corrispondono i circoli congiunti a se stessi; da I' tiriamo una tangente $I'o'$ ad uno di questi circoli ed una trasversale che lo deve incontrare in due punti congiunti $p'\,\mathbf{p}'$. Per una proprietà nota del circolo, avremo

$$\overline{I'o'}^2 = I'p' . I'\mathbf{p}' ,$$

ed essendo $p'\mathbf{p}'$ due punti congiunti dalla (5) deduciamo

$$I'o' = k ,$$

vale a dire: i circoli corrispondenti alle rette del piano doppio, ossia i circoli congiunti a se stessi, tagliano ortogonalmente il circolo doppio, e quindi hanno I' per centro radicale comune.

Se prendiamo un circolo che non tagli ortogonalmente il circolo doppio abbiamo per corrispondente una conica che ha un doppio contatto colla conica limite; se il circolo di P' si spezza nella retta all'infinito ed in un' altra retta abbiamo per corrispondente in P una conica che passa per il punto fondamentale I ed ha un doppio contatto colla conica limite; finalmente se il circolo di P' si riduce ad un punto p' ed

(1) Per es. Cremona, *Geometria projettiva* p. 36.

alle rette che lo congiungono con i punti ciclici abbiamo per corrispondente in P le tangenti condotte da p alla conica limite. Riassumendo questi casi possiamo in generale dire che:

Ai circoli del piano semplice corrispondono nel piano doppio le coniche che hanno un doppio contatto colla conica limite.

5. Ad un punto infinitamente vicino ad un punto p del piano doppio corrisponde un punto infinitamente vicino al punto p' del piano semplice, e viceversa; in altre pàrole, le direzioni in p formano un fascio projettivo a quello delle corrispondenti direzioni in p', e per conseguenza il rapporto anarmonico di quattro raggi del primo fascio è uguale al rapporto anarmonico dei quattro raggi corrispondenti del secondo. Se consideriamo le tangenti $po_1\, po_2$ che da p si possono condurre alla conica limite i raggi corrispondenti sono $p'J'_1\, p'J'_2$, quindi prese in P' due curve $C'_1\, C'_2$ che si taglino in p', chiamate $p'T'_1\; p'T'_2$ le loro tangenti in p', e $pT_1\, pT_2$ le tangenti in p alle curve $C_1\, C_2$ corrispondenti in P, abbiamo la seguente uguaglianza di rapporti anarmonici

$$p\,(o_1\, o_2\, T_1\, T_2) = p'\,(J'_1 J'_2\, T'_1\, T'_2)\,.$$

Possiamo considerare il piano P come un piano non euclideo, cioè come un piano il cui limite (assoluto) sia una conica

$$\Omega_{xx} = 0 \quad \text{o} \quad \Phi_{uu} = 0,$$

secondochè si ritiene come luogo dei suoi punti x, o come inviluppo delle sue tangenti u, e possiamo considerare il piano P' come un piano euclideo, cioè come un piano il cui limite (assoluto) come luogo di punti sia una conica ridotta a due rette coincidenti, retta all'infinito, come inviluppo di rette sia una conica ridotta a due punti, i punti ciclici (¹).

Le due curve $C'_1\, C'_2$ si tagliano in p' sotto l'angolo euclideo

$$\varphi' = -\frac{i}{2}\log p'\,(J'_1\, J'_2\, T'_1\, T'_2) \quad (^2),$$

e le curve $C_1 C_2$ corrispondenti si tagliano in p sotto l'angolo non euclideo

$$\varphi = -\frac{i}{2}\log p\,(o_1\, o_2\, T_1\, T_2)\,;$$

ma abbiamo veduto che

$$p\,(o_1\, o_2\, T_1\, T_2) = p'\,(J'_1\, J'_2\, T'_1\, T'_2)\,,$$

dunque $\varphi = \varphi'$, ossia:

L'angolo euclideo sotto il quale si tagliano due curve di P' è uguale all'angolo non euclideo sotto il quale si tagliano le curve corrispondenti in P.

6. I circoli della geometria non euclidea, intendendo per circolo non euclideo il luogo di un punto la cui distanza non euclidea

$$\delta = -\frac{i}{2}\log\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

(¹) Vedi per es. Klein, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.* Math. Annalen Bd. IV und VI.

(²) Vedi per es. Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie* 148. Bd. I.

da un dato punto è costante, sono le coniche che hanno un doppio contatto colla conica limite (¹); la corda di contatto la chiameremo asse del circolo, il centro è il polo dell'asse rispetto alla conica limite.

Un circolo non euclideo si può definire anche come l'inviluppo di una retta che forma un angolo costante con una retta data (asse).

Avendo veduto (n. 4) che a tutti i circoli del piano semplice corrispondono le coniche che hanno un doppio contatto colla conica limite possiamo concludere che:

Ad un circolo euclideo di P' corrisponde un circolo non euclideo di P.

Ad un circolo non euclideo di P corrispondono in P' due circoli euclidei congiunti, cioè due circoli che tagliano il circolo doppio negli stessi due punti e sotto lo stesso angolo.

Möbius ha fatto corrispondere due piani (affinità circolare) in modo che ad un punto del primo corrisponda un solo punto del secondo, e viceversa, e che ai circoli euclidei del primo piano corrispondano i circoli pure euclidei del secondo, ed ha dimostrato che l'angolo sotto il quale si tagliano due curve di uno dei piani è uguale all'angolo sotto il quale si tagliano le curve corrispondenti nell'altro piano. La nostra corrispondenza è analoga a quella di Möbius, solamente uno dei due piani è euclideo e l'altro no; ma sempre ad un circolo corrisponde un circolo, e si mantiene la proprietà relativa all'uguaglianza degli angoli.

§ 3. Relazioni tra le distanze di due punti di P, o P', e dei punti corrispondenti in P', o P.

7. Nella geometria non euclidea la distanza tra due punti, o l'angolo di due rette, è della forma

$$m\pi \pm \delta$$

dove m è un intero positivo o negativo e δ è minore o al più eguale a $\frac{\pi}{2}$. Segue da ciò che due punti, o due rette, hanno una distanza, o un angolo, δ minore o al più uguale a $\frac{\pi}{2}$, ed una distanza, o un angolo, supplementare $\pi - \delta$.

Preso un punto p abbiamo infiniti circoli non euclidei che hanno il centro in p; tutti questi circoli hanno pure lo stesso asse che è la polare di p rispetto alla conica limite, anzi l'asse è un circolo di raggio $\frac{\pi}{2}$ col centro in p; infatti se da p tiriamo una trasversale che tagli l'asse in p_1 e la conica limite in $o_1 o_2$ i punti $p p_1 o_1 o_2$ formano un gruppo armonico, quindi la distanza tra $p p_1$ è

$$\delta = \frac{-i}{2} \log - 1 = \frac{\pi}{2},$$

vale a dire l'asse è il luogo dei punti distanti di un quadrante da p.

Se prendiamo quattro punti di una retta sappiamo che il loro rapporto anarmonico è uguale a quello delle loro polari rispetto ad una qualunque conica, quindi

(¹) Klein, l. c.

nella geometria non euclidea la distanza di due punti è uguale all'angolo che formano le loro rette polari rispetto alla conica limite.

Vediamo come, dato un punto p, si determina in P' il circolo corrispondente alla sua polare rispetto alla conica limite. Da p tiriamo le tangenti $po_1\, po_2$ e chiamiamo $o'_1 o'_2$ i punti corrispondenti in P' sul circolo doppio ai punti di contatto $o_1 o_2$. Il circolo corrispondente alla polare $o_1 o_2$ di p è il circolo che passa per $o'_1 o'_2$ e taglia ortogonalmente il circolo doppio, quindi il suo centro è il polo della retta $o'_1 o'_2$ rispetto al circolo doppio, perciò tutto sta a determinare questo polo m' dati i punti $p'\mathbf{p}'$ corrispondenti a p. Se conduciamo le rette $J'_1\mathbf{p}'\; J'_2 p'$ il loro punto comune è o'_2, e se conduciamo le rette $J'_1 p'\; J'_2\mathbf{p}'$ il loro punto comune è o'_1; le quattro rette condotte formano un quadrilatero, le due diagonali $J'_1 J'_2\; o'_1 o'_2$ sono separate armonicamente dai vertici $p'\,\mathbf{p}'$, perciò chiamato H il punto comune alle dette diagonali le rette

$$HJ'_1J'_2 \quad Ho'_1o'_2 \quad Hp' \quad H\mathbf{p}'$$

formano un fascio armonico, e formano un gruppo armonico i loro poli rispetto al circolo doppio, ossia i punti

$$I' \quad m' \quad p' \quad \mathbf{p}'.$$

Questa proprietà basta per determinare m' dati $p'\mathbf{p}'$.

Il centro del circolo corrispondente alla polare d'un punto p rispetto alla conica limite è il conjugato armonico del punto fondamentale I' rispetto ai punti $p'\,\mathbf{p}'$ corrispondenti a p.

8. Nel piano doppio prendiamo due punti $p_1 p_2$ e poniamo

$$p_1p_2 = \delta \quad Ip_1 = \delta_1 \quad Ip_2 = \delta_2\,;$$

ai punti $p_1 p_2$ corrispondono nel piano semplice le coppie $p'_1\mathbf{p}'_1\; p'_2\mathbf{p}'_2$. Sia

$$p'_1p'_2 = \delta' \quad I'p'_1 = \delta'_1 \quad I'\mathbf{p}'_1 = \Delta'_1$$
$$\mathbf{p}'_2\mathbf{p}'_2 = \Delta' \quad I'p'_2 = \delta'_2 \quad I\mathbf{p}'_2 = \Delta'_2\,,$$

e ricordiamo che per la relazione (5)

(6) $$\delta'_1\Delta'_1 = k^2 \quad \delta'_2\Delta'_2 = k^2.$$

Siano $m'_1\; m'_2$ i conjugati armonici di I' rispetto a $p'_1\mathbf{p}'_1\; p'_2\mathbf{p}'_2$, e sia

$$m'_1m'_2 = d' \quad I'm'_1 = d'_1 \quad I'm'_2 = d'_2\,;$$

i circoli che hanno i centri in $m'_1 m'_2$ e tagliano ortogonalmente il circolo doppio sappiamo che corrispondono alle rette polari di $p_1 p_2$ rispetto alla conica limite; ma l'angolo formato dalle rette polari è uguale alla distanza dei punti $p_1 p_2$, quindi questa distanza è uguale all'angolo formato dai circoli che hanno i centri in $m'_1 m'_2$ e tagliano ortogonalmente il circolo doppio. I raggi di questi due circoli sono

$$\pm\sqrt{d'^2_1 - k^2} \qquad \pm\sqrt{d'^2_2 - k^2}\,,$$

perciò

(7) $$\cos\delta = \pm\frac{(d'^2_1 - k^2) + (d'^2_2 - k^2) - d'^2}{\sqrt{(d'^2_1 - k^2)(d'^2_2 - k^2)}}\;;$$

il segno $\pm$ del secondo membro dipende dai due angoli che formano i circoli, o ciò che è lo stesso dalle due distanze supplementari dei punti $p_1 p_2$.

Se chiamiamo φ l'angolo formato dalle rette $I'p'_1\mathbf{p}'_1$ $I'p'_2\mathbf{p}'_2$, e consideriamo i triangoli $I'm'_1m'_2$ $I'p'_1p'_2$ abbiamo

$$d'^2 = d'^2_1 + d'^2_2 - 2d'_1 d'_2 \cos\varphi$$
$$\delta'^2 = \delta'^2_1 + \delta'^2_2 - 2\delta'_1\delta'_2 \cos\varphi,$$

ed eliminando φ

$$\frac{d'^2_1 + d'^2_2 - d'^2}{d'_1 d'_2} = \frac{\delta'^2_1 + \delta'^2_2 - \delta'^2}{\delta'_1\delta'_2}$$

dalla quale relazione possiamo ricavare il valore di d'^2, sostituirlo nella (7) ed avere così

$$(8) \qquad \cos\delta = \pm \frac{d'_1 d'_2 (\delta'^2_1 + \delta'^2_2 - \delta'^2) - 2k^2\delta'_1\delta'_2}{2\delta'_1\delta'_2\sqrt{(d'^2_1 - k^2)(d'^2_2 - k^2)}}.$$

Avendo preso $m'_1m'_2$ conjugati armonici di I' rispetto a $p'_1\mathbf{p}'_1$ $p'_2\mathbf{p}'_2$ abbiamo le relazioni

$$\frac{\delta'_1}{d'_1 - \delta'_1} + \frac{\Delta'_1}{d'_1 - \Delta'_1} = 0$$
$$\frac{\delta'_2}{d'_2 - \delta'_2} + \frac{\Delta'_2}{d'_2 - \Delta'_2} = 0,$$

e ricordando le (6) troviamo dalle due precedenti

$$(9) \qquad d'_1 = \frac{2k^2\delta'_1}{k^2 + \delta'^2_1} = \frac{2k^2\Delta'_1}{k^2 + \Delta'^2_1}$$
$$d'_2 = \frac{2k^2\delta'_2}{k^2 + \delta'^2_2} = \frac{2k^2\Delta'_2}{k^2 + \Delta'^2_2},$$

valori di $d'_1 d'_2$ che posti nella (8) danno

$$\pm\cos\delta = \frac{2k^2(\delta'^2_1 + \delta'^2_2 - \delta'^2) - (k^2 + \delta'^2_1)(k^2 + \delta'^2_2)}{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2)},$$

ovvero

$$\pm\cos\delta = \frac{-2k^2\delta'^2}{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2)} - 1$$

dalla quale

$$\frac{1 \pm \cos\delta}{2} = \frac{-k^2\delta'^2}{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2)}.$$

Prendendo una volta il segno — ed un'altra volta il segno + abbiamo le due relazioni

$$(10) \qquad \operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2} = \frac{-k^2\delta'^2}{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2)}$$
$$\cos^2\frac{\delta}{2} = \frac{-k^2\delta'^2}{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2)}$$

che risolute rispetto a δ ci danno le due distanze supplementari dei punti $p_1\,p_2$. Queste due formole si possono rinchiudere nell'unica

$$(11) \qquad \operatorname{sen}^2\frac{m\pi \pm \delta}{2} = \frac{-k^2\delta'^2}{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2)}$$

dove m è un intero positivo o negativo; quest'ultima equazione si può risolvere rispetto ad $m\pi \pm \delta$ e così avere tutte le distanze tra p_1 e p_2.

Nei secondi membri delle (10) entra la distanza tra $p'_1 p'_2$ e le distanze di $p'_1 p'_2$ da I'; però stante la doppia forma dell'unico valore delle $d'_1 d'_2$, data dalle (9), è chiaro che potevamo introdurre nei secondi membri delle (10) in luogo di $\delta' \delta'_1 \delta'_2$ le quantità analoghe relative alla coppia $\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2$ di punti, ovvero alle coppie $\mathbf{p}'_1 p'_2$ $p'_1 \mathbf{p}'_2$ senza alterare le due equazioni. Avvertiamo solamente che nel caso delle coppie $\mathbf{p}'_1 p'_2$ $p'_1 \mathbf{p}'_2$ la prima delle (10) si cambia nella seconda, e viceversa.

Passiamo alla risoluzione della (11). Formando il quadrato del coseno abbiamo

$$\cos^2 \frac{m\pi \pm \delta}{2} = \frac{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2) + k^2\delta'^2}{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2)},$$

e per mezzo di questa equazione e della (11)

$$e^{i(m\pi \pm \delta)} = \frac{\pm k\delta' \pm \sqrt{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2) + k^2\delta'^2}}{\pm k\delta' \mp \sqrt{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2) + k^2\delta'^2}},$$

dove il segno di $k\delta'$ deve essere lo stesso nel numeratore e nel denominatore, mentre il segno del radicale deve essere contrario. Prendendo il logaritmo dei due membri risulta

$$i(m\pi \pm \delta) = \log \frac{\pm k\delta' \pm \sqrt{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2) + k^2\delta'^2}}{\pm k\delta' \mp \sqrt{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2) + k^2\delta'^2}},$$

e finalmente

$$(12) \qquad m\pi \pm \delta = i \log \frac{k\delta' + \sqrt{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2) + k^2\delta'^2}}{k\delta' - \sqrt{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2) + k^2\delta'^2}}.$$

Questa formola che dà la distanza tra $p_1 p_2$ può servire a farci passare dalle relazioni metriche di una figura del piano non euclideo a quelle relative alla corrispondente figura nel piano euclideo.

Supponiamo che il punto p'_2 cada in I', allora

$$\delta'_2 = 0 \quad \delta'_1 = \delta',$$

ǝʌop δ' è la distanza tra I' e p'_1, e le formole (11) (12) divengono

$$\mathrm{sen}^2 \frac{m\pi \pm \delta}{2} = \frac{\delta'^2}{\delta'^2 - k^2} \qquad m\pi \pm \delta = i \log \frac{\delta' + k}{\delta' - k};$$

la seconda, data la distanza δ' di un punto del piano P' da I', ci dà la distanza del punto corrispondente in P da I. Risolvendo la prima rispetto a δ' abbiamo

$$\delta' = ik \tan \frac{m\pi \pm \delta}{2}$$

dalla quale facendo m pari o dispari possiamo far derivare le altre

$$(13) \qquad \Delta' = I'\mathbf{p}'_1 = ik \cot \frac{\delta}{2} \qquad \delta' = I'p'_1 = \frac{k}{i} \tan \frac{\delta}{2} \text{ (}^1\text{)}$$

le quali, data la distanza δ di un punto del piano P da I, ci danno le distanze da I' dei punti corrispondenti in P'.

(1) Per comodo conveniamo di chiamare $\mathbf{p}'_1$ il punto la cui distanza da I' viene espressa colla cotangente, e il p'_1 punto la cui distanza da I' viene espressa colla tangente.

9. Per passare dalle relazioni metriche di una figura data nel piano euclideo alle relazioni metriche della corrispondente figura nel piano non euclideo bisogna, data la distanza δ di $p_1 p_2$ e le distanze $\delta_1\,\delta_2$ di $p_1 p_2$ da I, trovare le distanze

$$p'_1 p'_2 \quad \mathbf{P}'_1 p'_2 \quad p'_1 \mathbf{P}'_2 \quad \mathbf{P}'_1 \mathbf{P}'_2$$

dei punti corrispondenti.

Abbiamo osservato che per aver δ si può scegliere indifferentemente la prima o la seconda delle (10), ed abbiamo osservato che nel secondo membro al posto delle $\delta'\,\delta'_1\,\delta'_2$ relative alla coppia $p'_1 p'_2$ di punti possiamo mettere le quantità analoghe relative alla coppia $\mathbf{P}'_1 \mathbf{P}'_2$, e che se mettiamo quelle relative alle coppie $\mathbf{P}'_1 p'_2$ $p'_1 \mathbf{P}'_2$ il primo membro della prima diviene $\cos^2 \frac{\delta}{2}$, quello della seconda $\operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{2}$. Ora tra le (10) scegliamo la prima e facciamo le sostituzioni

$$\begin{array}{ll} \delta'_1 = \frac{k}{i} \tan \frac{\delta_1}{2} & \delta'_2 = \frac{k}{i} \tan \frac{\delta_2}{2} \\ \Delta'_1 = i k \cot \frac{\delta_1}{2} & \Delta'_2 = i k \cot \frac{\delta_2}{2} \\ \Delta'_1 = i k \cot \frac{\delta_1}{2} & \delta'_2 = \frac{k}{i} \tan \frac{\delta_2}{2} \\ \delta'_1 = \frac{k}{i} \tan \frac{\delta_1}{2} & \Delta'_2 = i k \cot \frac{\delta_2}{2} \end{array}$$

rispettivamente secondochè si tratta della forma relativa alle coppie

$$p'_1 p'_2 \quad \mathbf{P}'_1 \mathbf{P}'_2 \quad \mathbf{P}'_1 p'_2 \quad p'_1 \mathbf{P}'_2;$$

in questo modo abbiamo quattro equazioni che risolute rispetto a δ' ci danno

$$(14)\qquad \begin{array}{ll} p'_1 p'_2 = \dfrac{i k \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\delta_1}{2} \cos \frac{\delta_2}{2}} & \mathbf{P}'_1 \mathbf{P}'_2 = \dfrac{-i k \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\delta_1}{2} \operatorname{sen} \frac{\delta_2}{2}} \\ \mathbf{P}'_1 p'_2 = \dfrac{i k \cos \frac{\delta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\delta_1}{2} \cos \frac{\delta_2}{2}} & p'_1 \mathbf{P}'_2 = \dfrac{i k \cos \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\delta_1}{2} \operatorname{sen} \frac{\delta_2}{2}}, \end{array}$$

che sono le formole cercate. Nella risoluzione delle dette quattro equazioni si presenta un'estrazione di radice quadrata che porta un doppio segno $\pm$, ora i segni delle (14) sono determinati in modo che siano soddisfatte le relazioni

$$p'_1 p'_2 = \frac{k^2 \, \mathbf{P}'_1 \mathbf{P}'_2}{\Delta'_1 \, \Delta'_2} \qquad \mathbf{P}'_1 p'_2 = \frac{k^2 . \, p'_1 \mathbf{P}'_2}{\delta'_1 . \, \Delta'_2}$$

che fanno passare dalla distanza di due punti a quella dei punti congiunti.

§ 4. I circoli non euclidei che passano per due o per tre punti dati.

10. Il circolo doppio insieme ad un altro qualunque E' determina un fascio di circoli; sia R' la corda comune a distanza finita (asse radicale). Tutti i circoli del fascio incontrano il circolo doppio negli stessi due punti, quindi i circoli non euclidei N

corrispondenti toccano la conica limite negli stessi due punti, ossia sono concentrici. Il centro e le due tangenti condotte da esso alla conica limite formano uno dei circoli concentrici N, a questo circolo devono corrispondere in P' due circoli del fascio che si spezzano in due rette, in altre parole al centro dei circoli N corrispondono i punti limite $l'_1\, l'_2$ del fascio determinato dal circolo E' e dal circolo doppio.

Alle rette che passano per il centro dei circoli N corrispondono i circoli che passano per i punti limite $l'_1\, l'_2$, ma questi circoli tagliano ortogonalmente tutti i circoli del dato fascio, dunque:

La tangente ad un circolo non euclideo è perpendicolare al raggio che va al punto di contatto.

11. Qual' è il punto corrispondente al centro di un circolo ortogonale al circolo doppio?

Il centro è il polo della retta all'infinito $J'_1\, J'_2$, quindi per ottenerlo bisogna condurre le tangenti al circolo nei punti $J'_1\, J'_2$ e determinare la loro intersezione. Trasportando questa costruzione in P dovremo trovare i punti comuni alla retta che corrisponde al circolo ed alle rette fondamentali, da questi punti partono, oltre alle dette due rette fondamentali, due tangenti alla conica limite, il punto comune è il punto cercato.

12. La retta all'infinito ed una retta che passi per un dato punto p' insieme al circolo doppio determinano un fascio di circoli; due congiunti si riducono ad un punto, hanno un punto doppio, e i due punti così ottenuti sono i punti limite $l'_1\, l'_2$ del fascio. Variando la retta per p' variano i punti limite e descrivono la Jacobiana della rete di circoli determinata dal fascio di rette col centro in p', ciascuna unita alla retta all'infinito, e dal circolo doppio; questa Jacobiana è il circolo E'_1 che taglia ortogonalmente tutti i circoli della rete, vale a dire il circolo che ha il centro in p' e taglia ortogonalmente il circolo doppio; ad E'_1 corrisponde in P una retta L_1. Per mezzo di un'analoga considerazione relativa a $\mathbf{p}'$ troviamo un altro circolo Jacobiano E'_2, ed in P un'altra retta L_2.

Alle rette che passano per p' ed alle rette che passano per $\mathbf{p}'$ corrispondono due sistemi di circoli non euclidei che passano per I e per p; al luogo E'_1 dei punti limite relativo a p' corrisponde il luogo dei centri dei circoli di un sistema, e al luogo dei punti limite E'_2 relativo a $\mathbf{p}'$ corrisponde il luogo dei centri dei circoli dell'altro sistema, dunque per ciò che abbiamo veduto si trova che questi due luoghi di P sono le rette $L_1\, L_2$. Dati i punti $I\ p$ possiamo facilmente costruirle; basta osservare che $p'\,\mathbf{p}'$ sono i centri dei circoli corrispondenti, quindi conducendo da I e da p le tangenti alla conica limite abbiamo un quadrilatero, una diagonale è la $I\,p$, le altre due sono $L_1\, L_2$.

Alla retta $I p$ corrisponde la retta $I'\, p'\,\mathbf{p}'$ che appartiene ad ambedue i fasci di rette considerati in P' e che per conseguenza è tagliata ortogonalmente dai due circoli $E'_1\, E'_2$, perciò le $L_1\, L_2$ tagliano ortogonalmente la retta $I p$ in due punti $m_1\, m_2$ che essendo centri di circoli che passano per $I p$ devono dividere per metà i due segmenti δ e $\pi - \delta$ formati da I e da p. I punti $m_1\, m_2$ sono fra di loro alla distanza di un quadrante, proprietà analoga a quella delle bisettrici degli angoli formati da due rette.

Riassumendo le proprietà stabilite diremo che:

I circoli non euclidei che passano per due dati punti formano due sistemi semplicemente infiniti, il luogo dei loro centri è formato da due rette, una per ciascun sistema, le quali tagliano ortogonalmente la retta che congiunge i punti dati e dividono per metà le loro due distanze.

I circoli non euclidei che toccano due rette date formano due sistemi semplicemente infiniti, l'inviluppo dei loro assi è formato da due punti, uno per ciascun sistema, i quali sono distanti di un quadrante dal punto comune alle due rette date, e le rette che li congiungono con questo punto sono le bisettrici del loro angolo.

Le rette $L_1 L_2$ e la retta Ip formano un triangolo conjugato rispetto alla conica limite. Il punto comune alle $L_1 L_2$ è il centro del circolo che appartiene ai due sistemi, ed essendo polo della retta Ip il circolo comune è la Ip considerata due volte.

Osservando che l'asse di un circolo è la polare del centro rispetto alla conica limite possiamo dire che:

L'inviluppo degli assi dei circoli non euclidei che passano per due punti dati è formato dai due punti di mezzo dei due segmenti determinati dai punti dati([1]).

Il luogo dei centri dei circoli non euclidei che toccano due rette date è formato da due rette ortogonali che sono le bisettrici degli angoli formati dalle due rette date.

13. Per due punti $p_1 p_2$ e per I passano quattro circoli non euclidei ([2]) che corrispondono alle quattro rette

$$p'_1 p'_2 \quad \mathbf{P}'_1 p'_2 \quad p'_1 \mathbf{P}'_2 \quad \mathbf{P}'_1 \mathbf{P}'_2.$$

I centri si possono costruire nel seguente modo. Se dividiamo per metà i lati del triangolo e ad essi tiriamo le perpendicolari nei punti di mezzo abbiamo tre rette che passano per uno stesso punto che è uno dei centri cercati; se poi dividiamo per metà i lati supplementari e tiriamo le perpendicolari ai lati in questi nuovi punti di mezzo abbiamo tre nuove rette, due incontrano una delle tre prime in uno stesso punto, i tre punti così ottenuti sono gli altri tre centri cercati. I sei lati del quadrangolo formato dai centri sono le sei rette luogo dei centri dei circoli che passano per Ip_1, $p_1 p_2$, $p_2 I$. Per trovare i quattro centri dei circoli iscritti in un dato triangolo basta fare la costruzione reciproca.

Vi sono quattro circoli non euclidei che passano per tre punti dati([3]).

Vi sono quattro circoli non euclidei che toccano tre rette date.

([1]) Poncelet nel suo *Traité des propriétés projectives des figures* T. 1° n. 413 enuncia la proprietà nel seguente modo. Facendo variare una conica soggetta a passare per due punti dati AB, ed a toccare in due punti TT' un' altra sezione conica mnp data di posizione, la secante di contatto TT', che può essere anche ideale, cambierà situazione girando costantemente sopra un punto fisso L posto sulla retta che contiene AB.

([2]) *Le trasformazioni piane doppie* (n. 6, II).

([3]) Poncelet, l. c.

14. Per mostrare un' applicazione delle formole stabilite nel paragrafo precedente risolviamo il seguente problema:

Dati i lati $a\,b\,c$ di un triangolo trovare i raggi dei quattro circoli circoscritti.

Siano $a'\,b'\,c'$ i lati del triangolo $I'\,p'_1\,p'_2$, $a\,b\,c$ i lati del triangolo corrispondente $I\,p_1\,p_2$, e sia $I'\,m'$ la perpendicolare condotta da I' al lato $p'_1\,p'_2$. Abbiamo

$$I'\,m' = \frac{\sqrt{p'\,(p'-a')\,(p'-b')\,(p'-c')}}{a'} \tag{15}$$

dove

$$p' = \frac{a'+b'+c'}{2}.$$

Alla retta $p'_1\,p'_2$ corrisponde uno dei quattro circoli circoscritti al dato triangolo ed il suo centro è il punto corrispondente ai punti limite $l'_1\,l'_2$ del fascio di circoli determinato dalla $p'_1\,p'_2$ e dal circolo doppio; ora

$$I'\,l' = I'\,m' \pm \sqrt{\overline{I'\,m'}^2 - k^2}$$

quindi se r_1 è il raggio del circolo corrispondente alla $p'_1\,p'_2$

$$\frac{k}{i}\tan\frac{r_1}{2} = I'\,m' \pm \sqrt{\overline{I'\,m'}^2 - k^2}$$

da cui

$$\tan r_1 = \frac{i\,k}{I'\,m'}. \tag{16}$$

Per mezzo delle formole (13) (14) troviamo facilmente

$$p' = \frac{k}{i}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{p-a}{2}\cos\frac{p}{2}}{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}\qquad p'-a' = \frac{k}{i}\,\frac{\cos\frac{p-a}{2}\operatorname{sen}\frac{p}{2}}{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$p'-b' = \frac{ik\operatorname{sen}\frac{p-c}{2}\cos\frac{p-b}{2}}{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}\qquad p'-c' = \frac{ik\operatorname{sen}\frac{p-b}{2}\cos\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

che pongono la (15) sotto la forma

$$I'\,m' = \frac{k\sqrt{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}{2\,i\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

e quindi danno il valore di $I'\,m'$ che dobbiamo sostituire nella (16) per trovare

$$\tan r_1 = \frac{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}$$

$$\tan r_2 = \frac{2\cos\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}$$

$$\tan r_3 = \frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}$$

$$\tan r_4 = \frac{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}$$

le ultime tre si deducono dalla prima ponendo successivamente al posto dei lati $a\ b\ c$ i lati

$$\begin{matrix} \pi - a & \pi - b & c \\ \pi - a & b & \pi - c \\ a & \pi - b & \pi - c, \end{matrix}$$

infatti gli altri tre circoli sono dati dalle rette

$$p'_1\,\mathbf{p}'_2,\quad \mathbf{p}'_1\,p'_2,\quad \mathbf{p}'_1\,\mathbf{p}'_2,$$

e ricordiamoci che di due punti congiunti p' $\mathbf{p}'$ se uno corrisponde alla distanza δ di p da I l'altro corrisponde alla distanza supplementare $\pi - \delta$.

Se sopra una sfera prendiamo un triangolo i cui lati siano

$$a \quad b \quad c$$

e consideriamo i triangoli adiacenti che hanno per lati

$$\begin{matrix} a & \pi - b & \pi - c \\ \pi - a & b & \pi - c \\ \pi - a & \pi - b & c \end{matrix}$$

vi sono quattro circoli circoscritti ai quattro triangoli; i valori dei loro raggi sono identici ai valori dei raggi che abbiamo trovato per i circoli non euclidei circoscritti ad un triangolo di lati $a\ b\ c$. Questo fatto mostra sempre più l'analogia tra la geometria euclidea e la geometria della sfera. Altri esempî di questa analogia ci si presenteranno in seguito e li verremo notando di mano in mano.

§ 5. Angoli formati da due circoli.
Sistemi di circoli che tagliano circoli dati sotto angolo retto.

15. Prendiamo in P' due rette $R'_1\ R'_2$; i due circoli non euclidei $N_1\ N_2$ corrispondenti si tagliano in I, nel punto p corrispondente al punto p' comune alle rette $R'_1\ R'_2$, ed in altri due punti $p_1\ p_2$ corrispondenti ai punti di R'_1 i cui congiunti sono su R'_2 [1]. L'angolo delle rette $R'_1\ R'_2$ è uguale all'angolo dei circoli $N_1\ N_2$ in p, l'angolo delle rette che da I' vanno ai punti delle $R'_1\ R'_2$ situati sulla $J'_1\ J'_2$ è uguale all'angolo dei circoli $N_1\ N_2$ in I; ma i due angoli di P' sono uguali fra loro, quindi lo sono anche i due angoli di P. Gli angoli dei circoli $N_1\ N_2$ in $p_1\ p_2$ corrispondono agli angoli formati da una delle rette $R'_1\ R'_2$ col circolo corrispondente all'altra, quindi i circoli $N_1\ N_2$ si tagliano sotto uno stesso angolo, però differente dal primo, anche in $p_1\ p_2$.

(1) *Le trasformazioni piane doppie* (n. 7. I, II).

Due circoli non euclidei si tagliano sotto uno stesso angolo in due punti, e sotto uno stesso angolo negli altri due[1].

Due delle tangenti comuni a due circoli non euclidei sono uguali fra loro, e le altre due sono pure uguali fra loro.

Come si distinguono le due coppie di punti nei quali gli angoli sono uguali?

L'asse del circolo N_1 corrisponde al circolo che taglia ortogonalmente il circolo doppio e che ha con esso R'_1 come corda comune, così l'asse del circolo N_2 corrisponde al circolo che taglia ortogonalmente il circolo doppio ed ha con esso R'_2 come corda comune; gli assi radicali di tre circoli passano per uno stesso punto, quindi essendo R'_1 R'_2 due dei tre assi radicali il terzo, cioè quello relativo ai due circoli ortogonali, passa per p', ma deve contenere i punti congiunti corrispondenti al punto comune ai due assi di N_1 N_2, dunque il terzo asse radicale è la retta $I'\,p'$, ed in P la retta $I\,p$ passa per il punto comune ai due assi.

Due punti nei quali due circoli non euclidei si tagliano sotto uno stesso angolo stanno per diritto col punto comune ai due assi[2].

Due tangenti uguali comuni a due circoli non euclidei si tagliano sulla retta che congiunge i due centri.

Chiameremo assi radicali di due circoli non euclidei le corde comuni che passano per il punto comune ai due assi.

Chiameremo centri di similitudine di due circoli non euclidei i punti comuni a due tangenti comuni uguali.

Diremo ortogonali due circoli non euclidei quando si tagliano ortogonalmente in due dei loro punti comuni.

16. Dato un circolo C' ed il suo congiunto $\mathbf{C}'$ al sistema dei circoli che tagliano ortogonalmente C' ed al sistema dei circoli congiunti che tagliano ortogonalmente $\mathbf{C}'$ corrisponde un sistema di circoli non euclidei che tagliano ortogonalmente il circolo N corrispondente a C' $\mathbf{C}'$. Presi i punti p_1 p_2 troviamo che in P' per p'_1 p'_2 passa un circolo ortogonale a C' ed uno ortogonale a $\mathbf{C}'$, questi circoli sono congiunti ai due che passano per $\mathbf{p}'_1$ $\mathbf{p}'_2$ e tagliano ortogonalmente C' $\mathbf{C}'$; così pure i circoli che passano per p'_1 $\mathbf{p}'_2$ e sono ortogonali a C' $\mathbf{C}'$ sono congiunti a quelli che passano per $\mathbf{p}'_1$ p'_2 e sono ortogonali a C' $\mathbf{C}'$.

V'è un sistema due volte infinito di circoli non euclidei che tagliano ortogonalmente un dato circolo non euclideo, per due punti arbitrarî passano quattro circoli del sistema.

Consideriamo nuovamente le due rette R'_1 R'_2 condotte per p'. I circoli che hanno il centro in p' tagliano ortogonalmente le rette R'_1 R'_2, e quindi danno in P un sistema di circoli non euclidei che tagliano ortogonalmente i due N_1 N_2 corrispondenti ad R'_1 R'_2; siccome i punti limite del fascio determinato da un circolo col centro in p' e dal circolo doppio stanno sulla retta $I'\,p'$, il luogo dei centri dei circoli non euclidei del

[1] Battaglini, *Sui circoli nella geometria non euclidea.* Giornale di matematica, v. 12.

[2] Battaglini, l. c.

sistema è la retta Ip. Abbiamo un sistema analogo considerando i circoli che tagliano ortogonalmente una delle rette date ed il circolo congiunto all' altra.

Vi sono due sistemi semplicemente infiniti di circoli non euclidei che tagliano ortogonalmente due dati circoli non euclidei; un asse radicale è il luogo dei centri dei circoli di un sistema, l' altro asse radicale è il luogo dei centri dei circoli dell' altro sistema.

Dati tre circoli $C'_1\, C'_2\, C'_3$ v' è un circolo solo che li taglia ortogonalmente, considerando anche i circoli congiunti $\mathbf{C}'_1\, \mathbf{C}'_2\, \mathbf{C}'_3$ formiamo le terne

$$\begin{array}{lll} C'_1 & C'_2 & C'_3 \\ C'_1 & \mathbf{C}'_2 & \mathbf{C}'_3 \\ \mathbf{C}'_1 & C'_2 & \mathbf{C}'_3 \\ \mathbf{C}'_1 & \mathbf{C}'_2 & C'_3 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \mathbf{C}'_1 & \mathbf{C}'_2 & \mathbf{C}'_3 \\ \mathbf{C}'_1 & C'_2 & C'_3 \\ C'_1 & \mathbf{C}'_2 & C'_3 \\ C'_1 & C'_2 & \mathbf{C}'_3 \end{array}$$

che ci danno otto circoli dei quali ciascuno taglia ortogonalmente i circoli di una terna, i quattro circoli relativi alla prima colonna sono congiunti ai quattro relativi alla seconda e danno quattro circoli non euclidei che tagliano ortogonalmente i tre $N_1\, N_2\, N_3$.

Dati tre circoli non euclidei ve ne sono quattro ciascuno dei quali taglia ortogonalmente i tre circoli dati. I centri sono quattro punti nei quali concorrono tre a tre i sei assi radicali dei tre circoli dati[1].

Chiameremo centri radicali i centri dei quattro circoli ortogonali ai tre circoli dati. Osserviamo che i sei assi radicali sono i lati del quadrangolo formato dai quattro centri radicali.

Con considerazioni reciproche deduciamo che i sei centri di similitudine di tre dati circoli sono i vertici di un quadrilatero completo. Diremo assi di similitudine i lati di questo quadrilatero.

17. Abbiamo chiamato assi radicali di due circoli non euclidei le rette luogo dei centri dei circoli che tagliano ortogonalmente i due circoli dati, come nella geometria euclidea si chiama asse radicale di due circoli la retta luogo dei centri dei circoli che li tagliano ortogonalmente; così pure abbiamo chiamato centri radicali di tre circoli non euclidei i centri dei quattro circoli che li tagliano ortogonalmente, come nella geometria euclidea si chiama centro radicale il centro del circolo ortogonale ai tre circoli dati. Questa analogia giustifica pienamente le definizioni date per l' asse radicale e per il centro radicale, che si mostrano sempre più opportune per la seguente proprietà.

Consideriamo un circolo euclideo E' di P' ed il corrispondente circolo non euclideo N di P. Una retta condotta per I' taglia E' in due punti $p'_1\, p'_2$, ed abbiamo

$$I' p'_1 . I' p'_2 = \overline{I' p'}^2$$

[1] Battaglini, l. c.

dove $I'p'$ è una delle tangenti condotte da I' al circolo E'. La retta corrispondente in P passa per I e taglia il circolo N in due punti $p_1\, p_2$. Ponendo

$$Ip_1 = \delta_1 \quad Ip_2 = \delta_2 \quad Ip = \delta$$

e trasformando la relazione precedente colle formole (13) troviamo

$$\tan\frac{\delta_1}{2}\tan\frac{\delta_2}{2} = \tan^2\frac{\delta}{2} \quad (^1).$$

Il prodotto
$$\tan\frac{\delta_1}{2}\tan\frac{\delta_2}{2},$$

che si mantiene costante qualunque sia la trasversale condotta per I, si può chiamare potenza del punto rispetto al circolo.

Gli assi radicali di due circoli non euclidei sono il luogo dei punti che hanno la stessa potenza rispetto ai due dati circoli.

Infatti le tangenti ai due circoli condotte da uno stesso punto di un asse radicale sono uguali perchè il punto è centro di un circolo ortogonale ai due circoli dati, e la potenza di un punto rispetto ad un circolo è $\tan^2\frac{\delta}{2}$ dove δ è la lunghezza della tangente condotta dal punto al circolo.

I quattro centri radicali di tre circoli non euclidei sono i quattro punti che hanno la stessa potenza rispetto ai tre circoli.

18. Siano $o'_1\, o'_2$ i punti in cui una retta R'_1 taglia il circolo doppio, e sia r'_1 il polo della R'_1. Il quadrilatero $o'_1\, I'\, o'_2\, r'_1$ ha due angoli retti in $o'_1\, o'_2$, quindi gli angoli in $I'\, r'_1$ sono supplementari, e il circolo congiunto alla R'_1 passa per $I'\, o'_1\, o'_2\, r'_1$. Una retta R'_2 che passi per r'_1 evidentemente taglia sotto lo stesso angolo la R'_1 ed il suo circolo congiunto, quindi ha per corrispondente un circolo non euclideo N_2 che taglia sotto lo stesso angolo in tutti i punti comuni il circolo non euclideo N_1 corrispondente alla R'_1.

All'asse del circolo N_2 corrisponde il circolo che passa per i punti $o'_3\, o'_4$, comuni alla R'_2 ed al circolo doppio, e che lo taglia ortogonalmente, vale a dire il circolo che passa per $o'_3\, o'_4$ ed ha il centro nel polo r'_2 della R'_2; ma la R'_2 passa per il polo r'_1 della R'_1, dunque r'_2 è un punto della R'_1, in altre parole il circolo corrispondente all'asse di N_2 taglia ortogonalmente la R'_1; nel piano P ciò equivale a dire che l'asse di N_2 passa per il centro di N_1.

Se due circoli non euclidei si tagliano sotto lo stesso angolo in tutti i loro punti comuni l'asse di uno passa per il centro dell'altro(²).

(¹) Questa relazione ha l'analoga sulla sfera. Se I è un punto della sfera e se da esso si conduce un circolo massimo che tagli un circolo della sfera $p_1\, p_2$, se $Ip_1 = \delta_1$, $Ip_2 = \delta_2$, e se l'arco di circolo massimo che passa per I ed è tangente al circolo è $Ip = \delta$, abbiamo

$$\tan\frac{\delta_1}{2}\ \tan\frac{\delta_2}{2} = \tan^2\frac{\delta}{2}$$

vedi per es. Steiner, G. di Crelle t. 2.

(²) Battaglini, *Sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle coniche.* G. di matematiche v. 12.

§ 6. I circoli non euclidei tangenti a dati circoli non euclidei.

19. Siano $C'_1\, C'_2\, C'_3$ tre circoli presi ad arbitrio in P, e siano $\mathbf{C}'_1\, \mathbf{C}'_2\, \mathbf{C}'_3$ i tre circoli congiunti. I circoli che toccano quelli di una delle seguenti terne

$C'_1\; C'_2\; C'_3$	$\mathbf{C}'_1\; \mathbf{C}'_2\; \mathbf{C}'_3$
$C'_1\; \mathbf{C}'_2\; \mathbf{C}'_3$	$\mathbf{C}'_1\; C'_2\; C'_3$
$\mathbf{C}'_1\; C'_2\; \mathbf{C}'_3$	$C'_1\; \mathbf{C}'_2\; C'_3$
$\mathbf{C}'_1\; \mathbf{C}'_2\; C'_3$	$C'_1\; C'_2\; \mathbf{C}'_3$

danno in P circoli non euclidei che toccano i tre circoli $N_1\, N_2\, N_3$; però i circoli tangenti ad una terna della prima colonna sono congiunti a quelli tangenti alla corrispondente terna della seconda colonna, quindi si vede che in P avremo 32 circoli non euclidei tangenti ad $N_1\, N_2\, N_3$.

Vi sono 32 circoli non euclidei tangenti a tre dati circoli non euclidei.

Cayley ha risoluto il problema di descrivere una conica che abbia un doppio contatto con una conica data e sia tangente a tre coniche che pure hanno un doppio contatto colla conica data ([1]). Nel linguaggio della geometria non euclidea il problema precedente si riduce a descrivere i circoli non euclidei che toccano tre dati circoli pure non euclidei. Ecco la soluzione data da Cayley. Congiungendo uno dei quattro centri radicali dei tre circoli dati col polo di un asse di similitudine rispetto ad uno di questi circoli si hanno 16 rette che tagliano il circolo nei 32 punti di contatto coi 32 circoli cercati.

Se i tre circoli $C'_1\, C'_2\, C'_3$ sono congiunti a se stessi hanno per corrispondenti in P tre rette $R_1\, R_2\, R_3$, e gli otto circoli tangenti ai circoli C' si separano in quattro coppie di circoli congiunti che danno i quattro circoli tangenti alle rette R. Per un teorema dimostrato dal d.r Hart ([2]) sappiamo che i circoli tangenti a tre circoli dati sono quattro a quattro tangenti ad uno stesso circolo, dunque in P vi sono quattro circoli non euclidei che toccano ciascuno tutti e quattro i circoli tangenti alle R.

I quattro circoli iscritti in un triangolo dato sono tangenti a quattro altri circoli.

I quattro circoli circoscritti ad un triangolo dato sono tangenti ad altri quattro circoli.

Questi teoremi costituiscono un' estensione del teorema di Feuerbach alla geometria non euclidea ([3]).

20. Quando quattro circoli, euclidei, sono tangenti ad un quinto le lunghezze delle loro tangenti comuni soddisfano l'elegante relazione

$$(1'4')\,(2'3') \pm (2'4')\,(3'1') \pm (3'4')\,(1'2') = 0\,, \tag{17}$$

([1]) G. di Crelle, v. 39.

([2]) Vedi per es. Salmon, *Sezioni coniche* (ed. francese).

([3]) Sarebbe interessante cercare la proprietà non euclidea che racchiude come caso speciale la proprietà dei nove punti del circolo di Feuerbach.

trovata da Casey [1] nella quale $(1'2')$ rappresenta la lunghezza della tangente comune al primo e al secondo circolo, ecc. Se chiamiamo $r_1\, r_2$ i raggi del primo e secondo circolo, D la distanza dei loro centri, abbiamo

$$(1'2')^2 = \mathrm{D}^2 - (r_1 - r_2)^2 ;$$

ma

$$\mathrm{D}^2 = r^2_1 + r^2_2 - 2r_1 r_2 \cos(1'2') ,$$

dove $\cos(1'2')$ è il coseno dell'angolo formato dal primo e secondo circolo, dunque

$$(1'2')^2 = 4r_1 r_2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}(1'2').$$

Possiamo trovare dei valori analoghi per $(2'3'), (3'4'), \ldots.$ sostituirli nella (17) e dire che tra gli angoli sotto i quali si tagliano quattro circoli euclidei tangenti ad un quinto esiste la relazione

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(1'4')\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(2'3') \pm \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(2'4')\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(3'1') \pm \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(3'4')\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(1'2') = 0.$$

Dal momento che passando dal piano P' al piano P si mantiene l'uguaglianza degli angoli abbiamo che:

Se quattro circoli non euclidei sono tangenti ad un quinto tra i loro angoli, o le loro tangenti comuni, deve esistere la relazione

$$(18)\qquad \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(14)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(23) \pm \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(24)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(31) \pm \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(34)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(12) = 0.$$

Questa formola è del tutto analoga ad una dimostrata da Casey [2] per quattro circoli di una sfera tangenti ad un quinto. Se i quattro circoli si riducono ciascuno ad un punto la (18) esprime una relazione tra i lati e le diagonali di un quadrilatero iscritto in un circolo non euclideo, e così abbiamo l'estensione del teorema di Tolomeo alla geometria non euclidea.

Questo teorema può dimostrarsi anche trasformando colle (14) la relazione (17) che esiste tra le distanze di quattro punti di una retta. Infatti se chiamiamo $\delta_1\, \delta_2\, \delta_3\, \delta_4$ le distanze dei punti 1 2 3 4 da I abbiamo

$$(1'2') = \frac{i\,k \operatorname{sen}\frac{1}{2}(12)}{\cos\frac{\delta_1}{2}\cos\frac{\delta_2}{2}} \qquad (2'3') = \frac{i\,k \operatorname{sen}\frac{1}{2}(23)}{\cos\frac{\delta_2}{2}\cos\frac{\delta_3}{2}}$$

$$(3'1') = \frac{i\,k \operatorname{sen}\frac{1}{2}(31)}{\cos\frac{\delta_3}{2}\cos\frac{\delta_1}{2}} \qquad (1'4') = \frac{i\,k \operatorname{sen}\frac{1}{2}(14)}{\cos\frac{\delta_1}{2}\cos\frac{\delta_4}{2}}$$

$$(2'4') = \frac{i\,k \operatorname{sen}\frac{1}{2}(24)}{\cos\frac{\delta_2}{2}\cos\frac{\delta_4}{2}} \qquad (3'4') = \frac{i\,k \operatorname{sen}\frac{1}{2}(34)}{\cos\frac{\delta_3}{2}\cos\frac{\delta_4}{2}}$$

valori che posti nella (17) ci danno la (18).

(1) Salmon, l. c.
(2) Salmon, l. c.

21. Se oltre ai piani P P' consideriamo un altro piano doppio Π e stabiliamo una corrispondenza doppia di secondo ordine tra P' e Π prendendo in P' un circolo doppio diverso da quello relativo alla corrispondenza tra P' e P, ad un punto di P corrispondono due punti di P' ed a questi due punti di Π, ad un punto di Π corrispondono due punti di P' ed a questi due punti di P, quindi abbiamo una corrispondenza (2,2) tra P e Π. È facile vedere che con questa corrispondenza considerando P e Π come due piani non euclidei ad un circolo di P corrispondono due circoli di Π e viceversa. L'angolo non euclideo sotto il quale si tagliano due curve di P è uguale all'angolo non euclideo sotto il quale si tagliano le curve corrispondenti in Π; questa proprietà discende immediatamente dall'analoga che abbiamo dimostrata per la corrispondenza tra P e P' [1].

[1] Battaglini, *Sull'affinità circolare non euclidea*. Accademia di Napoli, anno 1876.

Nuove ricerche sulle caverne ossifere della Liguria.

Memoria di ARTURO ISSEL

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nelle sedute 2 dicembre 1877 e 3 febbraio 1878.

Quaerite et invenietis
Evang. Math., VIII.

Mi propongo di descrivere in queste pagine gli oggetti raccolti in alcune caverne del Finalese, le quali anticamente servirono all'uomo di abitazione o di tomba.

Le osservazioni, le notizie e le ipotesi che mi accingo ad esporre sono in gran parte nuove ed emergono precipuamente dagli scavi sistematici da me eseguiti l'anno scorso, nelle grotte delle Fate, del Sanguineto e di Pollera, e soprattutto in quella delle Arene candide, per mandato e per conto del Ministero dell'Istruzione.

Avendo preso di mira, nelle mie ricerche, i fatti che più specialmente hanno tratto alla paleontologia e all' archeologia preistorica, non toccherò che per incidenza agli intricati quesiti dell'antropologia; tanto più che gli scheletri umani scoperti in una di queste grotte saranno illustrati sotto il punto di vista puramente antropologico da persona competente in simili studî.

Prima di entrare in materia mi sta a cuore di soddisfare ad un debito di riconoscenza rendendo pubbliche grazie agli amici e colleghi che mi prestarono assistenza e consiglio nel corso delle mie ricerche: al professore Emanuele Celesia e al capitano Enrico d'Albertis che vollero dividere meco le fatiche di alcune gite, al reverendo D. Perrando che generosamente mi comunicò alcuni preziosi esemplari della sua collezione, al professore Pellegrino Strobel che si compiacque di determinare per me parecchi avanzi di mammiferi di difficile interpretazione.

I.

GROTTA SEPOLCRALE DELLE ARENE CANDIDE.

Posizione, dimensioni ed origine della caverna.

A ponente della piccola città di Final Marina si estolle un' erta e scoscesa propaggine degli Apennini che ha nome Caprazoppa, e raggiunge nel suo punto culminante l'altezza di 293 metri sul livello del mare.

Questo monte è costituito alla sua parte inferiore da un calcare dolomitico di color bigio chiazzato di ferrigno, in stratificazioni assai inclinate o quasi verticali (bene spesso occultate da un intenso metamorfismo) e superiormente da una sorta di

panchina fossilifera un po' ferruginosa, giacente in banchi orizzontali, la quale, in certi punti, assume i caratteri d'un calcare grossolano o d'una arenaria calcare [1].

Il marchese Pareto ascrive il calcare bigio, che è affatto privo di fossili, al periodo giurese [2]. Ma non saprei concedere a siffatto apprezzamento maggior valore di quanto ne meriti una semplice induzione, imperocchè le formazioni fossilifere che servirono di termini di confronto e di punto di partenza al geologo genovese nella sua determinazione, essendo situate nella valle della Tinea (Nizzardo), reputo assai difficile lo stabilire esattamente i loro rapporti coi terreni del Finalese che ne sono divisi da sì gran distanza e da sì numerosi e complicati accidenti stratigrafici. D' altra parte, siccome il calcare bigio si mostra in varie località sovrapposto ad un talcoschisto indubbiamente paleozoico [3], con stratificazione che sembra concordante [4], ho motivo di credere che sia esso pure paleozoico anzichè secondario.

Quanto alla panchina, è ricca di copiosi avanzi organici, come denti di squali (principalmente di *Lamna* e di *Oxyrhina*), denti di sparoidi, pettini e spatanghi, i quali, ad onta della cattiva loro conservazione, bastano ad attestare che si tratta d'un terreno terziario riferibile precisamente al pliocene inferiore. Esso si formò, secondo ogni probabilità, per effetto di una precipitazione per via chimica, sui lidi del mare pliocenico, mentre negli alti fondi del medesimo si depositavano per sedimentazione meccanica le marne di Savona e d'Albenga.

Presso il villaggio di Verezzi, sul versante occidentale del promontorio della Caprazoppa, il calcare bigio si trova fino a circa 130 metri d'altezza e la panchina gli sovrasta per oltre 50 metri; ma altrove raggiunge un livello assai più alto. La Caprazoppa, al pari dei monti circonvicini, analogamente costituiti dal punto di vista geologico, si presenta alla sua parte inferiore e media tutta bucherata e fessa da numerose soluzioni di continuità che talvolta raggiungono le proporzioni di vere grotte. È notevole il fatto che per la massima parte tali cavità sono ripiene di terra rossa ed hanno le pareti loro inquinate da infiltrazioni ferruginose.

Le opinioni dei naturalisti sull' origine che deve attribuirsi alla terra rossa, di cui in molti luoghi vedonsi coperte le formazioni superficiali, sono assai discordi. Ma nel caso presente non si può dubitare, a parer mio, che i materiali ferruginosi provengano in gran parte dalla decomposizione del calcare, il quale li conteneva, sotto altra forma, diffusi nella sua massa.

Se da Final Marina si segua la via provinciale della Riviera, nella direzione della Pietra e d'Albenga, appena oltrepassata la galleria, per mezzo della quale si attraversa il promontorio della Caprazoppa, si vede il versante meridionale del medesimo,

(1) Ove è più omogenea e tenace si estrae per servire ad usi edilizî e decorativi. A Genova si adopera sotto il nome di *Pietra di Finale*.

(2) *Guida di Genova e del Genovesato*, vol. I, p. 41.

(3) Questo talcoschisto non contiene fossili, ma vi trovai (a Rialto) delle mosche di grafite. Esso forma parte della formazione in cui esiste la miniera d'antracite di Calizzano, formazione nella quale i signori Gastaldi e Bruno raccolsero fossili siluriani (vedasi in proposito gli Atti della R. Accademia dei Lincei, Transunti, vol. I, fasc. 3, febbraio 1877).

(4) Ciò per esempio nella valle dell'Aquila e a tergo di Final Pia. In quest'ultima località, se non erro, si verificherebbe sopra un piccolo tratto l'alternanza del calcare collo schisto.

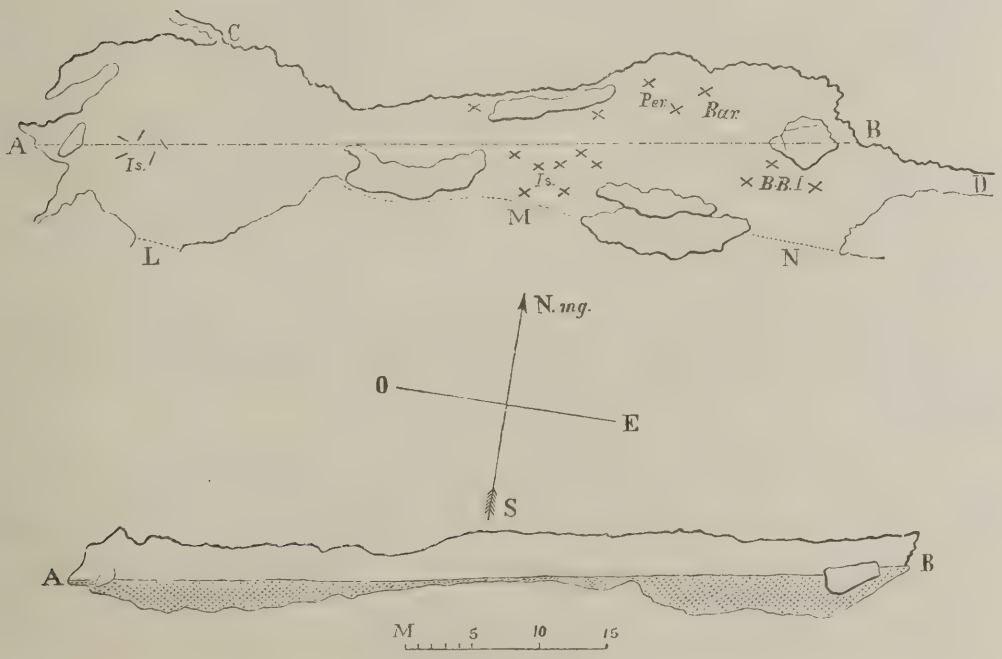
comunque assai ripido, coperto, fino a 50 o 60 metri d'altezza, di finissima e bianca sabbia silicea che dalla vicina spiaggia fu scaraventata sui fianchi del monte, per opera dei venti di mezzogiorno, colà gagliardissimi.

Ad 89 metri d'altezza sul livello del mare, un po' sopra il limite superiore delle *Arene candide*, così si chiama la duna, fra rupi scoscese, sulle quali vegetano stentatamente grami cespugli spinosi, è scavata una profonda grotta che trae il suo nome da quelle arene e mette all'esterno per tre grandi aperture, disposte quasi sul medesimo piano orizzontale. La finestra L (Fig. 1) che si apre verso sud-ovest è meno ampia delle altre due ed inaccessibile. Dalla mediana, che è larghissima e bassa, si penetra facilmente nella cavità.

Questa si presenta a tutta prima all'osservatore come una vasta camera di forma irregolare che misura 70 metri nella maggior dimensione (senza contare una piccola propaggine nella quale si prolunga all'estremità orientale), 15 di larghezza massima e poco meno di 5 d'altezza. Alla parte media di essa la volta si abbassa e le pareti si accostano, per modo che rimane divisa da una specie di strozzatura in due ineguali compartimenti, occidentale l'uno, orientale l'altro. Entrambi sono quasi privi di stalattiti ed invece le pareti loro e la volta si mostrano qua e là ornate di ciuffi di felci. In fondo al primo sbocca un tortuoso cunicolo C (Fig. 1), per mezzo del quale si scende in un laberinto inestricabile di tenebrose spelonche fra loro comunicanti. Una di esse, più vasta e più dirupata delle altre, sarebbe ammirabile per la vaghezza delle sue colonne stalattitiche e dei suoi panneggiamenti lapidei, se non avesse subìto la sorte comune a tutte le caverne della Liguria, cioè una vandalica devastazione.

Fig. 1.

Pianta e spaccato della Caverna delle Arene candide.



Rispetto all'origine di queste cavità, dirò solo che, a parer mio, si deve principalmente attribuire all'azione distruttiva dei flutti.

Il sollevamento che si verificò alla fine del periodo pliocenico ed ebbe per conseguenza l'innalzarsi della panchina al suo livello attuale, dovette subire un arresto od un rallentamento più o meno lungo, durante il quale l'orizzonte a cui ora si trova la caverna corrispondeva al livello del mare. Questo allora, flagellando colle sue onde la costa a picco per lunga successione di secoli, minò e corrose alcuni degli strati più esterni del calcare e praticò in essi una larga breccia, che fu poscia più profondamente scavata dalle acque circolanti nelle viscere del monte.

A favore della mia opinione militano i seguenti fatti:

1° D' innanzi a due delle tre aperture suindicate (distinte nella figura colle lettere L, M, N) esiste come una specie di terrazzo in gran parte ruinato, anch'esso opera del mare pliocenico.

2° Si osservano nel monte parecchie altre caverne allineate allo stesso livello ed assai estese nel senso orizzontale.

3° Il calcare della Caprazoppa e dei monti vicini presenta, presso a poco a quell'altezza, numerosi fori praticati da molluschi litofagi.

Allorchè la visitai per la prima volta, la grotta offriva un suolo pianeggiante, sul quale si vedevano alcune pietre angolose e varî massi caduti dalla volta. Questo suolo era, nella camera orientale, perfettamente asciutto e costituito di terra bruna; nella camera occidentale e in qualche punto della parte media si presentava un po' umidiccio e coperto qua e là di croste stalattitiche, per effetto di stillicidî calcariferi.

Le materie terrose che occupavano il fondo della spelonca raggiungevano la potenza di m. 3,20 ed erano regolarmente stratificate. Il massimo numero degli strati visibili era di sei o sette, ed in ciascuno si distinguevano quasi sempre un letto di terra bruna con carboni, ceneri, cocci ed ossa, ed un letto sterile, assai più sottile, formato di terra chiara o bianca sparsa di pietre angolose. La prima, vale a dire la terra bruna, fu in gran parte recata nella cavità per opera di correnti acquee temporarie, e vi si introdusse da una piccola apertura situata all'estremità orientale, per poi depositarsi, mista ad avanzi di pasti e a residui di focolari abbandonati dall' uomo. La terra bianca e le pietre non sono probabilmente che materiali caduti dalla volta, nei lunghi intervalli di tempo durante i quali la grotta rimase disabitata.

Nella regione occidentale della cavità, siccome la volta è umida e la roccia è resa più dura e meno alterabile, per effetto di stillicidî calcariferi, non potevano originarsi quei materiali polverosi e però, invece di letti di terra chiara, si formarono alcuni sedimenti stalattitici.

In un piccolo tratto della parte media, di contro alla parete settentrionale, il deposito calcarifero, assai copioso, si concretò in una breccia, quasi destituita di stratificazione, i cui elementi principali sono: ceneri, minuzzoli di carbone, frammenti d'ossa e cocci di rozze stoviglie. È presumibile che ivi, originariamente, fossero collocati alcuni focolari. Di altri si trovarono poi evidenti traccie nel terriccio sciolto e stratificato che occupava la camera orientale.

Gli stratarelli carboniosi fra i letti stalattitici o fra i letti di terra bianca, accennano ad altrettante epoche nelle quali il sotterraneo servì di domicilio all'uomo e sono, per così dire, altrettanti suoli successivamente sepolti da cause naturali.

Storia delle ricerche eseguite nella caverna.

Visitai per la prima volta la grotta nel mese di giugno del 1864, in compagnia del professor Perez di Nizza e di mio fratello Alberto. Il primo, esperto conoscitore della nostra geologia, aveva scoperto, nell'esplorare le spelonche dei Balzi Rossi, tra Mentone e Ventimiglia, copiosi manufatti litici ed altre interessanti reliquie dei tempi trascorsi e sperava che le nostre ricerche sarebbero pur riuscite proficue alle Arene candide. D'altra parte si magnificava a tal segno l'estensione della grotta, si vantavano siffattamente la varietà e la bellezza dei suoi aspetti che eravamo desiderosi di ammirare tanta meraviglia. Ci assicurammo di poi che la voce popolare avea alquanto esagerati i meriti del sotterraneo, dal punto di vista pittorico. Ma esso è tuttavolta interessantissimo sotto l'aspetto scientifico e ci applaudimmo di averlo scelto a scopo della nostra gita.

Perlustrata la grotta in ogni sua parte, iniziammo alcuni scavi in varî punti della cavità maggiore e più esterna di essa, perchè ivi il suolo, essendo costituito da un potente deposito di terriccio, sembrava più propizio alle nostre indagini. Da uno solo, praticato a circa m. 1,20 nella camera occidentale, si ottennero oggetti interessanti cioè: quattro punteruoli d'osso, frammenti di vasi, conchiglie, ossa di mammiferi infrante ed ossa umane (1).

Il 14 agosto dello stesso anno ritornai alle Arene candide in compagnia del compianto prof. Ramorino e proseguimmo insieme gli scavi già iniziati, ma con poco successo. Non trovammo infatti, oltre ai cocci e alle solite ossa d' animali, che un pezzo di pomice lavorata ed altri oggetti di poco momento.

Delle ricerche eseguite in queste due gite presentai una breve relazione alla Società italiana di Scienze naturali, nella sua riunione straordinaria tenuta a Biella dal 3 al 6 settembre 1864, sotto la presidenza del comm. Q. Sella (2).

Tre anni dopo, nell'esporre d'innanzi al Congresso internazionale d'Antropologia e d'Archeologia preistoriche, riunito in Parigi, la storia molto succinta delle indagini paletnologiche eseguite in Liguria, tornai per poco sullo stesso argomento, recando ulteriori notizie sui caratteri osteologici degli avanzi umani da me scoperti (3). La caverna fu poscia visitata dal R. D. Perrando, zelantissimo cultore della storia naturale e possessore d'una cospicua collezione paleontologica; ma per l'angustia del tempo e per altre circostanze, le investigazioni di questo esploratore non sortirono esito felice.

(1) Nella figura 1ª il punto ove trovai le ossa umane isolate è indicato con alcune lineette. Le Le crocette visibili nella stessa figura segnano presso a poco la posizione delle tombe scoperte posteriormente.

(2) Questa relazione venne alla luce tra gli Atti della Società italiana di Scienze naturali (vol. VII, p. 173. Milano, 1864).

(3) *Résumé des recherches concernant l'ancienneté de l'homme en Ligurie.* Congrès international d'Anthropologie et d'Archéologie préhistorique. Compte-rendu de la 2ᵉ session. Paris, 1867.

Al principio del 1874, i signori Yeats Brown Montague e Victor Brooke, il primo console di S. M. britannica in Genova, il secondo zoologo ed autore di pregiate monografie intorno ai ruminanti, mi esibirono di accompagnarli in una escursione che avevano in animo di fare nella Liguria occidentale, affine di visitare alcune grotte di quel territorio e, presentandosene l'opportunità, per eseguire qualche scavo nelle medesime. Io accettai di buon grado l'invito e proposi che le nostre indagini avessero a cominciare dalla caverna delle Arene candide, nella quale le prime raccolte legittimavano la speranza che si avesse a trovare assai di più in seguito, mediante scavi ben diretti e sufficientemente profondi. Detto fatto, ci recammo a Final Marina e di là alle Arene candide, ed appena posto piede nella grotta si principiarono gli scavi. A 40 o 50 centimetri di profondità, nel suolo della caverna, si trovarono subito le traccie di un focolare; cioè pietre annerite dal fuoco, ceneri, carboni, cocci di rozze stoviglie, ossa di mammiferi e particolarmente di ruminanti, per le più cotte ed infrante ed anche alcune ossa foggiate a punteruoli. Ad un metro e 60 centimetri, tolti alcuni lastroni di calcare, che avevano opposto improvvisa resistenza allo scavo, si mise alla scoperto l'estremità superiore d'una tibia umana, poi un femore, un bacino, una colonna vertebrale, in breve uno scheletro umano completo, accanto al quale giacevano un corno di cervo, varî pezzi d'ocra, un'accetta di pietra ed altri oggetti che a tempo debito saranno enumerati e descritti (1).

Costretto da urgenti motivi ad abbandonare l'impresa così felicemente iniziata, l'esplorazione continuò per due giorni ancora, per opera de'miei compagni e ne risultò il ritrovamento di varî altri manufatti e di uno di scheletro di bambino.

Poco dopo il R. D. Perrando fece altre due visite alle Arene candide e, ripigliando le interrotte ricerche, riuscì a procurarsi, la prima volta, alcune parti d'uno scheletro di bambino e la seconda due altri scheletri umani, uno dei quali quasi completo, senza contare molti manufatti di più maniere (2).

Il 5 aprile dello stesso anno un nuovo esploratore, il cui nome è caro alle lettere, l'onorevole Anton Giulio Barrili, depose la penna per impugnare la marra dell'archeologo e a lui si deve la scoperta di un quinto scheletro, col solito corredo di ossa, di conchiglie e di cocci (3).

Ad alcuni terrazzani dei dintorni, non so se per vana curiosità o per cupidigia di tesori, parve l'esempio degno d'essere imitato; ma per buona ventura si contentarono di praticare un piccolo fosso e di devastare una sola tomba.

Il prezioso ricettacolo di reliquie preistoriche non era tuttavolta esaurito e quando accettai l'onorevole incarico, affidatomi dal Ministero dell'Istruzione, di eseguire alcuni scavi nelle caverne ligustiche, affine di arricchire col prodotto di essi le collezioni del nascente Museo etnologico e preistorico di Roma, il mio primo pensiero fu di ripigliare

(1) Di questa scoperta tenni discorso la sera dell'8 aprile 1874, in una seduta della Società di Letture e Conversazioni scientifiche di Genova (vedasi in proposito il *Movimento* dell'11 aprile 1874). Ne pubblicai poscia un cenno nel mio lavoro intitolato: *L'Uomo preistorico in Italia considerato principalmente dal punto di vista paleontologico*, il quale comparve in appendice all'edizione italiana delle opere di Lubbock: *I tempi preistorici e l'origine dell'incivilimento* (Torino, 1876).

(2) Si veda intorno alla raccolta dell'egr. Curato il Bull. di Paletnologia Italiana, anno I, n. 4 e 5.

(3) Su questa scoperta si legge un cenno nel *Movimento* dell'8 aprile 1874.

l'esplorazione che tre volte, e a lunghi intervalli di tempo, avevo principiata e che per circostanze indipendenti dalla mia volontà mi era stato impossibile di compiere.

In nove giorni di ricerche accuratissime (dal 24 agosto al 3 settembre 1876), durante i quali fu posto a nudo il fondo roccioso di quasi tutta la parte orientale e media della grotta, mi venne fatto di scoprire sette nuovi sepolcri inviolati, coi rispettivi scheletri, alcuni quasi sfatti, altri in ottimo stato, e una ricca serie di manufatti di terra cotta, di pietra e d'osso. Questi oggetti, nonchè i sette scheletri, sono ora ostensibili nella collezione del Museo etnologico e preistorico dell'ex Collegio Romano (1).

Recentemente la grotta fu di nuovo visitata da mio fratello Alberto, il quale, avendo praticato un piccolo fosso in un punto ch'io gli avevo indicato, vi scoprì, impigliati in una tenacissima concrezione stalagmatica contenente ossa, carboni e cocci, un bellissimo scalpello d'osso, un'ascia-scalpello di pietra verde (il primo rappresentato nella Tav. I, fig. 13, la seconda nella Tav. III, fig. 1 *a*, e *b*) ed un cristallo di quarzo jalino.

Tombe scoperte nei primi scavi.

Ebbi già occasione di avvertire come nelle prime visite che io feci alla grotta, nel 1864, non vi trovai alcun sepolcro, ma soltanto ossa umane sparse in disordine ad una certa profondità nel terreno.

In quel tempo non avevo sufficiente esperienza di simili indagini per verificare se la terra in cui si effettuavano gli scavi fosse stata già mossa e sconvolta. Conclusi allora per la negativa; ma al presente non dubito del contrario ed ho motivo di argomentare che le ossa raccolte fossero il rimasuglio di uno scheletro messo allo scoperto in uno scavo antecedente (2). È pur probabilissimo che anche altre ossa umane, osservate da me alla superficie del suolo, in quella parte della grotta, e che mi parvero fresche, fossero parimente avanzi d'un secondo scheletro disseppellito da poco tempo e in gran parte disperso.

Ma chi mai potè eseguire quegli scavi? Non certo un naturalista, poichè evidentemente non si tenne conto degli oggetti che meritavano maggiore attenzione; e d'altronde non udii mai parlare, dalla gente del paese o da altri, di ricerche effettuate nella grotta per oggetto scientifico prima del 1864.

Un vecchio contadino che mi aveva guidato nella prima gita alla grotta affermò che alcuni terrazzani dei dintorni erano venuti molti anni innanzi a farvi incetta d'ossa, di cui si servivano per ingrassare le loro terre. Da ciò emerge l'interpretazione più probabile o più logica di quei primi scavi.

La prima tomba intatta fu scoperta nel 1874, allorchè, come già dissi, iniziai nuove ricerche nella caverna in compagnia dei sig. Brooke e Brown. Lo scheletro cui dava ricetto si trovò alla profondità di m. 1,60, nella camera orientale, presso a poco alla parte media di essa, col capo poco discosto da un voluminoso masso

(1) Le mie ricerche nella grotta delle Arene candide e in parecchie altre del Finalese costarono lire 312,20, nella qual somma son computate le spese di scavo, d'imballaggio, di trasporto e quelle occorse per la riparazione degli oggetti rotti.

(2) Si spiegano così le scalfitture che si osservano alla loro superficie, alcune delle quali mi parvero di antica data, perchè coperte di incrostazioni lapidee includenti cenere e carbone.

caduto dalla volta e coi piedi rivolti verso il mare. Esso giaceva obliquamente rispetto al piano della caverna; aveva cioè il capo più alto dei piedi. Degli arti anteriori uno era collocato sotto il capo e l'altro disteso; i posteriori erano un po' piegati. Le ossa erano imperfettamente difese da alcuni lastroni di calcare disposti sotto, sopra e ai due lati, a guisa d'incassatura. Sotto i lastroni inferiori, a qualche centimetro di profondità, v'era come un letto di terra biancastra; all'estremità corrispondente al capo e intorno ad esso, per 15 o 20 centimetri, si sovrapponeva alla terra bianca una polvere carboniosa che mi sembrò il residuo di un'abbondante capigliatura. Accanto al cranio v'era un corno di giovane cervo, in cui non si vede traccia di lavorazione e a lato dello stesso si raccolsero varî pezzi d'ocra rossa, originariamente contenuti in un vaso, ed una piccola accetta di giadeite, la cui posizione non potè essere notata con esattezza; sul torace si raccolse una grossa zanna di cinghiale, alla cui estremità radicale sono praticati due fori.

Lo scheletro appartiene ad un individuo adulto, di sesso mascolino. La sua statura è un po' inferiore alla media. Il cranio è piccolo, dolicocefalo, schiacciato lateralmente, allargato nella regione posteriore, basso ed angusto nella frontale. La sua circonferenza massima è di mill. 510, il diametro longitudinale, fra la sommità della sutura nasale e la protuberanza occipitale è di mill. 172, il diametro temporale raggiunge appena i 118 millim. Le mascelle mancano, in parte, dei loro denti ed alcuni dei superstiti sono cariati. La mandibola inferiore ha la porzione ascendente collocata molto obliquamente e la prominenza del mento assai risentita.

La tomba aperta dai signori Brown e Brooke, presso la sopradescritta, non ricettava che uno scheletro di piccolo bambino, le cui mandibole presentano un molare ed un premolare per lato. Questo scheletro non era difeso da lastre di pietra e non si osservarono accanto ad esso che cocci, conchiglie ed ossa di mammiferi.

Il primo dei tre scheletri scoperti dal R. D. Perrando giaceva presso a poco nel mezzo della cavità orientale, quasi a contatto della roccia viva che forma il fondo della grotta, sotto una spessezza di m. 2, 20 di terriccio ed apparteneva, secondo l'egregio esploratore, ad un bambino lattante. Mancavano le solite pietre e non si raccolsero nelle vicinanze che ossa e cocci di poco interesse.

Il secondo scheletro, che fu quasi completamente conservato ([1]), apparteneva ad un fanciullo di 7 o 8 anni e riposava alla profondità di m. 1,70, sempre nella parte orientale del sotterraneo, ma un po' più addentro del primo. La terza tomba si scoprì nella parte media, presso la parete che sta di contro alla più ampia apertura. Essa era limitata da otto lastre di pietra ed oltre allo scheletro non conteneva nulla d'interessante, tranne un coccio con graffiti. Le due braccia del morto, congiunte sul torace, sostenevano una grossa pietra.

L'onorevole A. G. Barrili descrive presso a poco in questi termini il sepolcro da lui trovato: « Lo scheletro è di persona giovane e mostrava le braccia composte in atteggiamento di chi dorme, il destro ripiegato intorno al capo, il sinistro sul petto, mentre il torace e la faccia erano leggermente voltati da tramontana verso la parete

([1]) Vi mancano le ossa facciali, alcuni pezzetti della cassa craniense e qualche osso delle estremità. Sul cranio si osservano le traccie d'una frattura anteriore alla morte.

del masso. Intorno alla persona e di sotto erano alcuni lastroni; un altro era collocato sopra e ricopriva appena la regione lombare. Entro quella rozza sepoltura si trovarono conchiglie in buon dato, quali bucate, quali a dirittura foggiate in cerchietti, ossa lavorate, uno scalpello di pietra verde e uno stranissimo arnese di giadeite, del quale non è ben certo l'uso se d'arma ovvero sia d'ornamento (1).

« Negli strati superiori alla tomba si rinvennero ossa e denti d'animali diversi, tra i quali è riconosciuto il cinghiale, avanzi di stoviglie dalle più rozze alle più aggraziate, ma senza vernice nè traccie di graffiti. Uno di questi cocci, e appunto il piede di un' anfora, fu pure ritrovato presso lo scheletro, sotto il cui cranio era un modesto ciottolo di spiaggia marina. Neanche qui mancava l'ocra per tingere, che fu anzi ritrovata in quantità piuttosto singolare (2) ».

Aggiungerò che questo scheletro, notevole per le sue esigue proporzioni, è adulto e probabilmente di sesso femmineo. Il suo cranio assai piccolo, dolicocefalo e allargato posteriormente, misura 485 millim. nella circonferenza massima, 169 nel diametro antero-posteriore e 115 nel bitemporale. La sua faccia è meno larga che negli altri individui della stessa provenienza. I denti delle due mandibole sono sani e non ne manca alcuno. La mandibola inferiore offre, tra il corpo e il ramo ascendente, un angolo molto aperto; l'apofisi coronoide è breve ed acuta.

Tombe scoperte cogli ultimi scavi.

Descriverò per sommi capi le tombe scoperte nello scorso agosto, distinguendo ciascuna di esse con un numero progressivo che corrisponde all'ordine del ritrovamento.

N. 1. Quella che ho contrassegnata col n. 1 era collocata nella parte media della caverna, ove è più bassa e ristretta, di contro all'apertura maggiore, a circa 3 metri di distanza dalla medesima. Essa trovavasi sotto il secondo strato del deposito archeologico, ad 80 cent. di profondità, ed era limitata, come quasi tutte le altre, da lastroni di pietra greggia, disposti in guisa da formare una specie d'incassatura. Lo scheletro cui dava ricetto era adulto e, per quanto credo, di sesso maschile. Il suo cranio, quantunque schiacciato dal peso di un grosso lastrone di pietra, si raccolse quasi intiero, cioè mancante solo di una parte della regione occipitale; degli arti si salvarono le scapole, le clavicole, un omero, un cubito e un'ulna, le articolazioni dei due omeri, le rotule, il calcaneo, e l'astragalo di ciascun piede ed alcune ossa minori delle mani e dei piedi. Si estrassero inoltre pochi pezzi della colonna vertebrale, alcune coste e scarsi frammenti del bacino.

Tutte queste ossa sono assai alterate dal tempo e dall'umidità e si sbricciolano sotto la minima pressione. Alcune, massime il cranio, sembrano aver sofferto l'azione del fuoco.

Lo scheletro era raccolto in piccolo spazio e tutto scomposto dalla caduta delle pietre destinate a difenderlo, permodochè non si può argomentare con sicurezza qual fosse la sua posizione originaria. È però probabile che fosse collocato, da principio, sopra un fianco e coi piedi volti verso l'apertura maggiore della grotta, cioè verso il mare.

(1) È un frammento di disco forato di giadeite descritto e figurato più innanzi.

(2) Il *Movimento*, 8 aprile 1874.

Nella terra che copriva la tomba furono trovati moltissimi gusci di patelle e d'altri molluschi eduli, ossa lunghe di ruminanti, cotte e spezzate e un'ascia di pietra verde che sarà descritta in seguito. Accanto allo scheletro vi erano pure un fondo di vaso non tornito, con altri cocci di terra cotta e varî pezzi d'ocra rossa che originariamente erano contenuti in un vaso.

Quantunque io non mi sia proposto qui di descrivere, dal punto di vista antropologico, gli scheletri disseppelliti nella caverna, mi pare opportuno di indicare succintamente alcuni dei loro caratteri più appariscenti. In quello della tomba n. 1 si vede chiaramente che il cranio è assai lungo, in confronto alla larghezza, alquanto sviluppato posteriormente, basso e depresso nella regione frontale. La faccia è alta, stretta ed assai prognata, estendendosi il prognatismo alla regione dentale. Le occhiaie sono quadre e disposte secondo una linea quasi orizzontale. I denti sono piuttosto grossi, sani e generalmente stipati; si osservano però piccole lacune fra il canino superiore di ciascuna parte e i denti più prossimi. Gli incisivi sono larghi, lunghi e foggiati a scalpello, i canini aguzzi. Il palato è stretto e lungo. Il mento si presenta d'insolita altezza e mediocremente prominente. Il braccio ascendente della mandibola inferiore forma col ramo orizzontale un angolo più aperto che di consueto. L'apofisi coronoide è breve ed appuntata. Le altre ossa dello scheletro sono piuttosto corte e sottili, comparativamente alle dimensioni del cranio. L'omero si distingue per la sua gracilità ed ha la parete della fossa olecranica molto assottigliata, ma non perforata.

L'individuo cui appartenevano le reliquie ora descritte aveva di poco passati i venti anni quando fu sepolto; infatti i suoi denti sono appena logori e quelli della sapienza, quantunque già formati nell'interno dell'osso mascellare, non sporgono ancora fuori di esso.

N. 2. Questa tomba era situata a poca distanza dalla prima, un po' più a ponente, e alla medesima profondità.

Sotto le solite pietre si trovò uno scheletro adulto, di sesso maschile, in perfetto stato di conservazione e quasi completo, mancando solamente di alcune ossa minori dei piedi e delle mani.

Il cranio è dolicocefalo e sviluppato posteriormente, colla regione frontale un po' angusta e le arcate sopraccigliari piuttosto sporgenti, massime nella parte mediana della fronte. La sua sutura fronto-parietale è parzialmente ossificata. Le orbite sono quadrate, profonde, poco oblique; il naso è elevato, gli zigomi prominenti. In complesso la faccia offre un lieve prognatismo. Mancano tutti i denti della mandibola superiore e gli alveoli dei molari sono obliterati per vecchiezza.

La mandibola inferiore ha l'arco stretto ed angoloso; il mento è quadrato e sporgente. Il ramo ascendente della mascella è perpendicolare al ramo orizzontale. L'apofisi coronoide è spessa, larga ed arrotondata. I condili sembrano assai robusti. I denti di questa mandibola sono tutti a posto, ma assai logori, e in gran parte cariati. Il piano di logoramento è orizzontale.

Gli omeri, grossi, quasi diritti, a superficie scabre, hanno la fossa olecranica non perforata, le clavicole sono assai torte e grosse. I femori hanno il collo breve e la fossa digitale profonda e stretta; il loro margine posteriore offre i due rilievi della linea aspra straordinariamente salienti.

Tutte le ossa summentovate sono ancora in ottimo stato e non portano traccie dell'azione del fuoco. Esse appartengono ad un individuo d'alta statura e di robustezza non comune, il quale morì in età assai avanzata.

Lo scheletro era adagiato sopra un fianco, colle ginocchia un po' piegate e la mano sinistra collocata sotto la testa. Intorno ad esso si trovarono: pezzi d'ocra rossa, numerosi ossami di mammiferi per lo più cotti ed infranti, gusci di patelle, di monodonte, di ostriche, valve di *Pectunculus*, artificialmente forate per servir d'ornamento, una grossa lesina d'osso, una lama d'osso appuntato che è forse una punta di pugnale (Tav. I, fig. 14), varie punte di freccia o di giavellotto parimente d'osso, molti cocci di stoviglie, un piccolo vaso, quasi intiero, di pasta bruna e fina, di forma ovale, a fondo piccolo e piatto, a pareti sottili, il quale conteneva una certa quantità di terra bruna sparsa di particelle carboniose, verosimilmente avanzi di cibo. Ma l'oggetto più interessante fra quelli che facevano corona al morto è indubbiamente una piccola e sottile accetta di giadeite, raccolta a destra dello scheletro, presso il capo.

N. 3. Fu scoperta a levante della tomba n. 1, un po' più verso il fondo della caverna, ad una profondità di poco maggiore delle precedenti. Essa era circoscritta, secondo il consueto, da cinque o sei lastroni di calcare, disposti ai due lati dello scheletro e al di sopra di esso; la sola parte anteriore del corpo era però difesa da quelle pietre. Vi si trovò uno scheletro umano di sesso maschile, ben conservato e completo, se si faccia astrazione dalla mancanza di qualche ossetto di poca importanza.

Il cranio di questo scheletro è pur dolicocefalo, ma è meno allargato posteriormente degli altri già menzionati; la sua sutura sagittale è già ossificata; le altre sembrano meno frastagliate che d'ordinario. La regione frontale di esso è stretta, fuggente; le arcate sopraorbitali sono poco prominenti alla periferia, ma si rialzano alquanto sopra la radice del naso. La faccia è assai larga, non prognata ed offre zigomi robusti e molto sporgenti. Le mandibole portano tutti i loro denti, i quali sono logorati orizzontalmente; uno dei molari superiori è cariato. La mandibola inferiore è alta ed offre il mento sporgentissimo; la sua parte ascendente è verticale e alta; l'apofisi coronoide è lunga, sottile, un po' appuntata.

I caratteri delle ossa lunghe corrispondono a quanto fu avvertito nello scheletro della tomba n. 2. Per altro, nel femore i rilievi del margine posteriore sono un po' meno sensibili. Lo scheletro riposava coricato sul fianco sinistro, colla mano sinistra sotto il capo e coll'altra protesa e in alto. Le sue ginocchia erano piegate e le due tibie avvicinate.

Sulle vertebre cervicali raccolsi tre canini di lupo, uno grosso in mezzo e due piccoli lateralmente (Tav. I, fig. 15). A 30 centimetri circa dalla mano destra trovai una piccola ascia di pietra verde (Tav. III, fig. 8). Non mancavano sopra la tomba e ai due lati ossa rotte, cocci, pezzi d'ocra e conchiglie.

N. 4. La tomba distinta con questo numero d'ordine fu scoperta a levante di quella cui assegnai il n. 1, a brevissima distanza dalla stessa, ed era prossima all'apertura maggiore della grotta.

Lo scheletro che racchiudeva appartiene ad un individuo di sesso maschile che morì in età assai avanzata. Alcune delle sue ossa essendo fragilissime ebbero a soffrire qualche danno, allorchè furono estratte, tuttavolta si conservano per la massima parte.

Il cranio è molto lungo e notevolmente sviluppato alla parte posteriore, a un dipresso come nello scheletro della tomba n. 2. La sua sutura fronto-parietale è ossificata, la sagittale e la lambdoidea sono ancora ben visibili. La regione frontale è mediocremente elevata ed offre la gobba nasale assai prominente. La faccia, piuttosto larga, presenta un lieve prognatismo; il quale si fa più manifesto nella regione dentale. I denti, assai logori, attestano la vecchiezza dell'individuo. Gli incisivi medî superiori sono piuttosto distanti fra loro. Nella mandibola superiore mancano due molari del lato destro e gli alveoli di uno fra essi è già obliterato; tre molari e un premolare superstiti sono più o meno cariati. Nella mandibola inferiore sussistono tutti i denti, tra i quali gli incisivi e i canini sono assai alti, impiantati verticalmente e distanti fra loro.

La parte basale del cranio è incompleta per la mancanza di parte dei temporali, dell'occipitale e dello sfenoide. Di queste ossa si conservano però molti frammenti staccati.

La mandibola inferiore è alta ed ha il ramo ascendente quasi verticale, l'apofisi coronoide è poco estesa e di forma un po' uncinata. Il mento è quadro ed assai sporgente.

Le altre ossa dello scheletro sono in generale sottili e brevi; e ciò mi fa credere che la statura dell'individuo fosse inferiore alla media. L'omero sinistro ha la fossa olecranica perforata. I femori sono un po' arcuati, carenati posteriormente e ruvidissimi.

La tomba ora descritta conteneva, oltre alle ossa di mammiferi, ai cocci e alle patelle, un *Conus mediterraneus* forato, due punte di freccia d'osso ed una scheggia di selce.

Lo scheletro giaceva nella posizione consueta, cioè adagiato sul fianco sinistro con una mano sotto il capo, le ginocchia piegate e i piedi volti verso il mare.

N. 5. Questa tomba era collocata a capo della precedente, cioè più vicina alla parete settentrionale della grotta, ad una profondità poco maggiore di un metro. Essa conteneva uno scheletro d'individuo giovane, di sesso femmineo, il quale è disgraziatamente incompleto.

Del cranio rimangono l'occipitale, i due parietali, i temporali, qualche pezzo di frontale, il mascellare superiore; ma queste ossa sono quasi tutte rotte e scomposte. La colonna vertebrale, il torace e il bacino sono quasi completi. Delle ossa degli arti mancano pezzi dei cubiti e dei radii ed alcune parti delle mani e dei piedi.

Da quanto si conserva del cranio, sembra che differisse dagli altri summentovati per essere meno sviluppato posteriormente e per avere l'occipite più depresso. I denti della mandibola superstite sono sani e bianchi, e dall'esame di questi apparisce che l'individuo aveva 12 o 14 anni appena, poichè era provvisto di dentizione permanente e i suoi secondi molari, già formati nei rispettivi alveoli, non erano ancora venuti alla luce.

La posizione originaria del morto non si potè determinare, essendo le ossa, almeno in gran parte, spostate dai movimenti del suolo e sconvolte da uno scavo anteriore.

Molte conchiglie ed un raschietto di silice accompagnavano questo scheletro. Le sue ossa sono sottili, minute, liscie. Da tali caratteri, come pure dalla forma del foro

occipitale e dall'ampiezza della pelvi, si può argomentare che appartenessero ad una femmina. Non saprei a qual causa attribuire il loro color rossastro uniforme.

N. 6 e 7. Queste tombe si rinvennero a 60 centimetri di profondità a fianco l'una dell'altra a levante del n. 5, un po' più internamente nella spelonca. Esse non erano munite di lapidi e contenevano le reliquie di due bambini, già molto alterate dal contatto del terriccio umido.

Nello scheletro della tomba n. 6 manca interamente la cassa craniense e si conservano i mascellari superiori, la mandibola inferiore, alcune vertebre, i pezzi principali del bacino e della cassa toracica, nonchè quasi tutte le ossa lunghe. Tali avanzi sono guasti, corrosi, fragilissimi e sembrano avere subìto in qualche punto l'azione del fuoco. Così dalla dimensione delle ossa, come dal numero e dalla disposizione dei denti si può argomentare che appartenessero ad un bambino di 4 a 5 anni; infatti dal mascellare inferiore non sporge ancora fuori il primo molare permanente, il quale già sussiste però nella spessezza dell'alveolo.

Lo scheletro della tomba n. 7, comprende la massima parte del cranio, in frammenti assai alterati, le due mandibole, quasi tutte le ossa delle estremità, ed alcuni pezzi della colonna vertebrale, della cassa toracica e del bacino. Questi avanzi sono ridotti a tal condizione che mal si prestano a qualsiasi misura o confronto. Rispetto all'età dell'individuo, credo poterla comprendere fra cinque e sei anni, perchè già si osservano nel mascellare inferiore il primo molare permanente, ben formato nel suo alveolo, mentre gli incisivi della prima dentizione non sono ancora surrogati.

Intorno ai due scheletri abbondavano ossa di mammiferi e conchiglie e fra queste si raccolsero alcune *Columbella rustica* (specie il cui mollusco non è mangereccio). In fatto di utensili, non si trassero da quelle tombe che un coltellino di piromaca rotto ed una scheggia di pietra verde.

Ossa umane sparse nella caverna.

Le ossa umane che raccolsi a circa un metro di profondità nel suolo della caverna, allorchè, nel 1864, feci la mia prima gita alle Arene candide, sono due femori, due tibie, un calcaneo ed un astragalo, senza contare tre denti.

Come già notai in altra occasione (¹), confrontate colle ossa omologhe di un ligure odierno, queste offrono certi caratteri differenziali che accennano a diversità di razza.

I femori son piccoli, sottili, quasi diritti e presentano un collo corto e poco inclinato; il grande trocantere è prossimo al collo, il piccolo trocantere è spesso, solido e portato un po' in alto; la cavità digitale è più ristretta che nel Ligure dei giorni nostri. Le dimensioni delle tibie sono proporzionate a quelle dei femori; il corpo dell'osso è quasi diritto ed ha una cresta più acuta che nella pluralità dei casi. Il calcaneo ha le due apofisi alquanto sviluppate e la sua superficie posteriore, che dà attacco al tendine d'Achille è rugosa e scabra. In breve, tali caratteri coincidono in gran parte con quelli osservati nelle ossa corrispondenti degli scheletri umani completi, posteriormente scoperti in altri punti della grotta.

(¹) *Résumé des recherches concernant l'ancienneté de l'homme en Ligurie.* Paris, 1867.

Ricorderò pure che queste ossa sono leggere, fragili e biancastre, come se avessero subìto l'azione del fuoco e presentano certe scalfitture ed intaccature che sembrano molto antiche. L'ustione loro si spiega ammettendo che mentre i cadaveri, deposti nella grotta erano appena coperti di poca terra, si accendesse un gran fuoco su ciascuna tomba per l'imbandigione del pasto funebre.

Quanto alle intaccature ed ai solchi osservati alla superficie della tibia e dei femori, sono forse prodotti in parte dalle zanne di carnivori e, in parte, dagli arnesi coi quali, in tempi non lontani da noi, l'uomo mise allo scoperto e devastò il sepolcro in cui giacevano quelle ossa.

Le ossa umane isolate raccolte negli scavi eseguiti testè nella grotta sono:

1. Una mandibola inferiore, i denti della quale già spettano alla seconda dentizione. Dalla circostanza che i secondi grossi molari, già formati negli alveoli, non sono ancora spuntati, si può desumere l'età dell'individuo cui appartenevano che era di 12 a 14 anni. La parte ascendente sinistra di questa mandibola fu rotta; ma ne rimangono alcuni pezzetti.

2. Tre incisivi superiori, appartenenti probabilmente allo stesso individuo. La mandibola e i denti suddetti furono trovati presso la tomba n. 5.

3. Un pezzo di occipitale d'individuo piuttosto vecchio che comprende gran parte della metà sinistra dell'osso e presenta la cresta e la protuberanza occipitale interna assai sviluppata.

4. Alcune falangi e metacarpiani d'adulto che forse appartengono a qualcuno degli scheletri umani scoperti nei primi scavi.

5. Due piccolissime ossa ischiatiche di bambino lattante.

6. Un altro osso ischiatico di piccolo bambino.

Individui umani
di cui si disseppellirono gli avanzi nella grotta delle Arene candide

QUADRO RIASSUNTIVO

OSSA RACCOLTE	Individui adulti	Individui giovani	Collezioni in cui si conservano
Ossa lunghe e vertebre trovate da me nel 1864	2		Museo geol. della R. Univ. e Museo civ. di Genova.
Scheletro scoperto nel 1874 dai signori Brown e Brooke e da me	1		Museo civico di Genova.
Scheletro estratto nel 1874 dai signori Brown e Brooke		1	Museo civico di Genova.
Scheletri raccolti nel 1874 dal R. Don Perrando	1	2	Collezione del R. D. Perrando a Sassello.
Scheletro estratto nel 1874 dall'on. sig. A. G. Barrili	1		Museo civico di Genova.
Ossa trovate da alcuni Finalesi nel 1875 (?)	1		?
Scheletri estratti da me nel 1876 . .	5	2	R. Museo etnologico e preistorico di Roma.
Un frammento di cranio, una mandibola, tre ossa ischiatiche ed altre raccolte da me nel 1876	1 almeno	3 almeno	R. Museo etnologico e preistorico di Roma.
Individui adulti 12 giovani 8			

Manufatti d'osso.

I più comuni sono i cosidetti *punteruoli*, cioè ossa appuntate e aguzzate, di forme diverse che servirono probabilmente a varî usi.

Aghi crinali. Alcuni di essi, lunghi, sottili, lavorati con diligenza e finitezza, non potevano servire ad uso di lesine nè ad armar freccie e giavellotti e credo che fossero veri aghi crinali.

Don Perrando ne possiede due, uno dei quali, della lunghezza di 16 centimetri e di sezione cilindrica, offre all'estremità opposta alla punta un breve tratto assottigliato, come se avesse servito ad adattarvi un pomo; la forma del secondo è fusiforme e la sua lunghezza raggiunge centimetri 13 $^1/_2$. Altri furono raccolti da me in uno dei primi scavi [1] e in quelli eseguiti testè per conto del Ministero dell'Istruzione. Uno di questi oggetti, le cui dimensioni sono 11 centimetri per la lunghezza e 7 millimetri per la maggiore larghezza, è rappresentato nella Tav. I, fig. 11.

Punte di freccia o di giavellotto. La massima parte delle ossa appuntate raccolte nella caverna delle Arene candide deve essere compresa, a parer mio, in questa categoria. Alcune di esse presentano infatti, presso la base, certe intaccature che sembrano fatte da una cordicella, mediante la quale la punta era probabilmente legata ad un'asta; altre hanno due faccie parallele pianeggianti, ottenute per logoramento, ciò affinchè l'osso potesse più facilmente inserirsi all'estremità di un'asta fessa. Tutte poi, essendo corte ed aguzze, si prestavano perfettamente all'uso indicato.

Le punte rappresentate nella Tav. I, fig. 7 e 8 lasciano scorgere l'intaccatura basale e la più breve offre pure, di prospetto, una delle superficie piane suaccennate. Questi stromenti sono a sezione rettangolare, almeno nella parte media.

Nella mia prima gita alla caverna raccolsi tre cuspidi di freccia d'osso che furono rappresentate colle figure 2, 3 e 4 nel lavoro summentovato. La prima di esse misura cent. 10 $^3/_4$ di lunghezza e non è altro che un metacarpiano di pecora appuntato; la seconda è fatta con un metatarsiano di ruminante ed ha cent. 9 $^1/_2$ di lunghezza; la terza poi è una punta di cent. 4 $^1/_2$ di lunghezza che rammenta per la forma una lama di temperino.

Nella collezione del R. D. Perrando osservai pure un certo numero di punte d'osso della stessa provenienza, riferibili a varî tipi, e nel 1875, unitamente ai signori Brooke e Brown, ne raccolsi non meno di 10.

Ecco un elenco di quelle trovate l'anno scorso, negli scavi eseguiti per conto del Ministero:

a) Due punte corte e robuste, fatte con un cannone di piccolo ruminante, di cui vedesi ancora parte dell'articolazione inferiore: l'una è lunga mill. 68, l'altra mill. 61. La prima è figurata alla Tav. I, fig. 9. In entrambe la forma della base si prestava a ricevere una legatura. Furono trovate nella tomba n. 2.

b) Tre punte lunghe rispettivamente 79, 76, 72 millimetri, sottili, un po' curve e schiacciate, raccolte nella medesima tomba (Tav. I, fig. 7, 8, 5). Non è possibile di riconoscere di quali specie d'ossa sieno fabbricate.

[1] *Di una caverna ossifera di Finale*, Tav. I, fig. 1.

c) Tre punte dello stesso genere (fatte con scheggie d'ossa, lunghe e sottili) trovate in varie parti della caverna; una di esse giaceva a soli 50 cent. di profondità.

d) Una punta di forma un po' canaliculata, di 62 millimetri di lunghezza, trovata collo scheletro n. 3 (Tav. I, fig. 12).

e) Una punta sottile, a sezione quadrangolare, trovata presso le tombe n. 4 e 5. È rotta alla base e probabilmente non differiva da quelle trovate nella tomba n. 2.

f) Una punta brevissima rettilinea, a sezione irregolarmente quadrangolare. La sua base è tagliata di netto e presenta una breve incisione o intaccatura, come l'ago crinale rappresentato alla fig. 11 della Tav. I.

g) Una punta della lunghezza, di 87 mill., rappresentata alla fig. 6 della Tav. I. Questa, raccolta nella camera occidentale a 2 metri di profondità, è fatta con un osso lungo, il cui capo articolare, limato e logorato in varî sensi, non è più riconoscibile. La diafisi, tagliata longitudinalmente, costituisce una specie di doccia terminata in punta. Quantunque non vi rimangano traccie di legatura, credo che anche questa fosse una punta di freccia e non è inverosimile l'ipotesi che la cavità della doccia fosse destinata a ricettare qualche sostanza venefica.

f) Una scheggia d'osso appuntata, rappresentata colla fig. 10 della stessa tavola, è forse parte di un'arme a molte punte.

Punte di lancia. Due arnesi trovati ultimamente nella caverna potrebbero considerarsi come tali: l'uno è un piccolo cannone di ruminante, col capo articolare inferiore quasi intatto e la diafisi spaccata ed appuntata (Tav. I, fig. 3). La sua lunghezza è di mill. 88, la larghezza alla base di 24. Credo fosse destinata ad inserirsi in un'asta, perchè ha il capo articolare logorato su due faccie e non manca verso la base di qualche segno di legatura.

La seconda punta di lancia sarebbe, secondo il mio supposto, l'oggetto effigiato alla fig. 2, Tav. I, il quale non è altro che un frammento di diafisi assottigliato ed appuntato. È difficile d'altronde di determinare l'uso di questo stromento, perchè è assai guasto dal tempo e manca della base. Le sue dimensioni sono di millim. 70 per l'altezza e 17 pel diametro maggiore.

Pugnali. Il pezzo di lama ossea di cui può vedersi la figura al n. 14 della Tav. I, e che si trovò nella tomba n. 1, è forse un frammento di pugnale. Esso sembra fatto coll'apofisi spinosa di una vertebra di grosso erbivoro e misura 77 mill. di lunghezza.

Un vero pugnale fu indubbiamente raccolto dal R. D. Perrando, nella caverna delle Arene candide ed è una lama ossea di forma irregolarmente triangolare, lunga 17 cent. e mezzo e munita di un foro presso l'estremità opposta alla punta.

Lesine (?) L'oggetto disegnato nella Tav. I, fig. 1 è un semplice cannone di ruminante rotto ed appuntato ad uno dei suoi capi, per servir forse ad uso di lesina. Anche questo proviene dalla tomba n. 2

Cucchiai (?). L'oggetto rappresentato nella Tav. I, fig. 4 consiste in un pezzo di diafisi d'osso, lungo squadrato ad una estremità e tagliato in isbieco in guisa da impartirgli una specie di taglio. La sua lunghezza è poco minore di 11 centimetri, la larghezza è dei 18 mill. L'estremità opposta al taglio manca. Questo utensile è un cucchiaio, una sgorbia o un zuffolo cui manca l'ancia? Mi attengo dubitativamente alla

prima ipotesi. Aggiungerò in proposito che la grotta somministrò ai signori Brooke e Brown due altri oggetti del medesimo genere.

Scalpelli. La fig. 13 della Tav. I mi dispensa dal recare una diffusa descrizione di questo arnese, il quale consiste in una larga lama ossea, di 111 mill. di lunghezza e 40 di larghezza, che sembra tratta da un cubito d'erbivoro, ed offre ad una delle sue estremità un taglio forbitissimo. Mio fratello Alberto lo trovò testè nella parte media e più interna della grotta a circa 70 centimetri di profondità. Egli crede che potesse servire a scuoiare gli animali di cui i cavernicoli adoperavano le pelli ed io non so trovare un' interpretazione migliore.

Ornamenti. Don Perrando possiede una specie di piastra ossea, cuoriforme, munita di un lungo peduncolo forato. Quest' oggetto rinvenuto in uno degli strati profondi della caverna, misura 14 centimetri e mezzo di lunghezza.

Fusaruole. Il medesimo raccoglitore conserva una fusaruola ossea della stessa provenienza. Essa è piana sopra una faccia ed assai convessa nell' altra; il foro che l'attraversa è ampio e un po' conico. La superficie piana presenta alcuni cerchietti concentrici, incisi parallelamente al margine.

Altre ossa che portano segni del lavoro umano. Debbo registrare fra queste due grosse coste arrotondate ad una estremità, a guisa di spatola, una delle quali raccolta nel 1864, nella mia prima gita alla caverna.

Osservai poi parecchi altri pezzi, in cui le traccie dell' industria umana sono meno manifeste e specialmente ossa lunghe segate o limate, ora nella diafisi, ora nelle epifisi.

Denti lavorati.

Questi sono quasi esclusivamente pendagli e possono considerarsi come trofei di caccia, ornamenti o talismani.

Durante gli scavi che praticai coi signori Brooke e Brown alle Arene candide raccolsi sul torace del primo scheletro umano che mettemmo alla luce una bellissima zanna di cinghiale, munita di due fori presso l'estremità radicale. Una seconda, più piccola e meno perfetta, fu raccolta poco appresso da D. Perrando, nella cui collezione vidi pure un incisivo di suino e un altro dente di non so quale specie, forati ad uso di pendagli.

Ricorderò a questo proposito come l'amico mio Odoardo Beccari abbia osservato che gli indigeni della baia d'Humboldt (Nuova Guinea) portano sul petto un piastrone costituito di zanne di cinghiale e di semi rossi d'*Abrus.*

La fig. 15 della Tavola I rappresenta tre denti di lupo forati nella radice, i quali furono raccolti da me stesso, nella mia ultima visita alla caverna, sulle vertebre cervicali dello scheletro n. 3. Il più grosso, che stava in mezzo ai due minori, misura 46 millimetri di lunghezza; gli altri sono lunghi rispettivamente 28 e 30 millim. Il foro è irregolare e fatto un po' ad imbuto; intorno ad esso si osservano dei solchi concentrici.

Nel novero dei denti lavorati vanno pur compresi: un frammento di zanna di cinghiale con due fori, il quale sembra appartenere ad una piastrella semilunare, una sorta di punteruolo grossolanamente foggiato, in una scheggia di dente della

medesima specie e finalmente una zanna artificialmente recisa alla sua base che presenta, presso il punto ove fu praticato il taglio, una serie di solchi trasversali, come tratti di sega. L'ultimo di questi oggetti proviene dagli scavi eseguiti l'anno scorso, gli altri due furono raccolti nel 1874.

Conchiglie lavorate.

L'oggetto più singolare ed interessante in questa categoria fu trovato nella grotta dal R. D. Perrando e consiste in una grossa valva di *Pectunculus* ben arrotondata, della quale per accidentale frattura manca un buon terzo (Tav. II, fig. 4). La conchiglia è attraversata da un foro collocato sulla linea mediana, a due terzi della distanza tra il cardine e il margine ventrale, ed ha la sua superficie esterna divisa in quattro segmenti, ciascuno dei quali è coperto di profonde strie parallele. Le strie di ogni segmento hanno comune la direzione con quelle del segmento opposto al vertice ed incontrano le altre ad angolo quasi retto.

Le valve di conchiglie semplicemente forate presso l'apice erano assai comuni nella caverna, massime in alcune tombe, e non si possono considerare che come oggetti d'ornamento. Il foro è di variabili dimensioni e si vede chiaramente che il più delle volte fu praticato stropicciando l'apice della conchiglia sopra un corpo duro e scabro. Così forati si trovano numerosi *Pectunculus* ed alcuni *Cardium* (Tav. II, fig. 12 e 13). Altre conchiglie forate, raccolte nella grotta, sono due *Conus mediterraneus* (Tav. II, fig. 6), uno dei quali proviene dalla tomba n. 4, ed un *Cassis sulcosa.* Presso il R. D. Perrando vidi poi un grosso *Triton nodiferum* coll'apice mozzato, da cui si possono trarre dei suoni come da una tromba. Da ciò è lecito supporre che il costume attribuito ai Tritoni della favola fosse pur praticato dai nostri cavernicoli.

L'oggetto rappresentato alla fig. 11, Tav. II è un pezzetto di conchiglia, non saprei dir di quale specie, forato e faccettato per servir ad uso d'articolo di monile [1]. Un altro oggetto consimile è conservato nella collezione del R. D. Perrando.

La fig. 9 della stessa tavola reca l'immagine di una specie di cucchiaio (almeno parmi di doverlo definir in tal guisa), il quale è tratto da un guscio di *Triton nodiferum.* Un cucchiaio dello stesso genere, ma un po' più concavo, fu trovato da me nel 1874, ed è ora ostensibile nel Museo civico di Genova. In entrambi gli oggetti il margine è attondato e limato e da ciò principalmente io desumo la destinazione loro.

Forse ad uso di cucchiaio servivano pure alcuni gusci di grosse arche, di *Spondylus* e di ostriche, trovati qua e là nella grotta; ma questa non è che una mia presunzione.

Manufatti litici.

Accette. La caverna ne ha somministrate un certo numero, che offrono poca diversità di forma. In generale sono di piccola dimensione e lavorate con diligenza. Ecco una succinta descrizione di quelle che ho potuto esaminare.

(1) È probabilmente un pezzo di grosso *Dentalium* fossile.

N. 1. (Appartenente al Museo civico di Genova). Accetta di giadeite raccolta accanto ad uno scheletro dai signori Brown e Brooke (Fig. 2). Le sue dimensioni sono: lunghezza 46, larghezza 26, spessezza 19 millim. È pianeggiante sulle due faccie, quadrangolare, un po' più ristretta ad una estremità che all' altra, di color verde porro. Il suo taglio è regolarmente arcuato ed acutissimo. Pesa specificamente 3,8; cifra singolarmente elevata, forse perchè la roccia è sparsa di pirite (1).

Fig. 2.
Accetta di giadeite.
grand. nat.
(Museo civico di Genova)

N. 2. (Appartenente al predetto museo). Accetta di pietra verde scura con macchiette chiare, probabilmente di diorite. Fu disseppellita nella regione orientale della grotta, dai medesimi esploratori. È lunga 74 millimetri, larga 46 e spessa 22. Presenta la solita orma triangolare, senonchè il suo taglio è molto arcuato ed obliquo.

N. 3. (Ora ostensibile nel R. Museo etnologico e preistorico di Roma). Accetta di giadeite trovata nella tomba num. 2 (Tav. III, fig. 6*a*, *b*). Le sue dimensioni sono: lunghezza 40, larghezza $28\,^1/_2$, spessezza 13,1. È piatta, sottile, in forma di triangolo scaleno troncato in uno degli angoli e cogli altri due un po' arrotondati. Il suo taglio è obliquo, un po' arcuato, acutissimo.

N. 4. (Appartenente al R. Museo di Roma) (Tav. III, fig. 8). Accetta di pietra verde scura, trovata nella tomba n. 3. Le sue dimensioni sono: lunghezza 57, larghezza del taglio 38, spessezza 17 millimetri. La sua forma è regolarmente triangolare ed ha il taglio arcuato ed assai tagliente. Come al solito, l'estremità opposta al taglio è scabra per offrire maggior resistenza alla legatura. La sua durezza corrisponde al settimo termine della scala di Mohs, e le macchiette di color verde chiaro di cui è sparsa mi fanno supporre che sia fatta di diorite (2).

N. 5. (Appartenente al R. Museo di Roma) (Tav. III, fig. 3). Accetta di pietra verdastra traente al bigio-azzurrognolo, trovata nella parte media della grotta a 60 centimetri di profondità, presso la tomba n. 1. Le sue dimensioni sono: lunghezza 118, larghezza 44, spessezza 25 millimetri. È linguiforme ed assai lunga relativamente alla larghezza. Il suo taglio è arcuato e tagliente. L'estremità opposta è naturalmente rugosa. La roccia presenta macchiette più chiare poco distinte e si lascia intaccare difficilmente dal quarzo.

N. 6. (Appartenente al R. Museo di Roma) (Tav. III, fig. 4). Accetta di pietra nerastra, trovata nella parte media della caverna, a circa un metro di profondità. Le sue dimensioni sono: lunghezza 94, larghezza 40, spessore 22 millim. È linguiforme al pari della precedente, ma meno stretta e più schiacciata verso il taglio, il quale è un po' sbocconcellato dall'uso. Lo stromento risulta di una roccia nerastra, dura quanto il quarzo, di struttura fibrosa che sembra dall'aspetto anfibolite.

N. 7. (Appartenente al R. Museo di Roma). Accetta di pietra verde, trovata nella parte media della grotta a circa 80 centimetri di profondità. Le sue dimensioni sono: lunghezza 74, larghezza 46, spessezza 18 millimetri. È di forma quadrangolare.

(1) La parte superiore di questo arnese fu tagliata per essere sottoposta al saggio chimico.

(2) In questo e in altri casi la roccia non fu determinata chimicamente per non danneggiare lo strumento e la sua natura rimase quindi incerta.

Il taglio dello stromento è smussato e logorato pel lungo uso. Il grado di durezza della roccia è $6^{1}/_{2}$.

N. 8. (Appartenente al R. Museo di Roma). Accetta verde, quadrangolare, schiacciata, mancante del taglio e dell'estremità opposta. Proviene dalla parte media della grotta.

N. 9 e 10. (Appartenente al R. Museo di Roma). Due ciottoli di pietra verde, in forma di cono tronco un po' compresso, raccolti nella parte media della caverna a mezzo metro di profondità. Questi oggetti, tanto per la forma loro quanto per le ammaccature di cui son coperti, mi sembrano accette di rifiuto logore ed infrante dopo un lungo uso.

Il R. D. Perrando possiede altre otto ascie od accette, della medesima provenienza, alcune delle quali perfettamente conservate.

Accette-scalpelli. Mi valgo di questo vocabolo per designare certe accette di pietra a corpo lungo e cilindrico e a taglio brevissimo; ma non intendo esprimere con ciò l'opinione che siffatti stromenti servissero ad uso di scalpello. Mi par più probabile, all'incontro, che fossero adoperati quali armi da caccia o da macello e in particolar modo a spaccare il cranio dei grossi mammiferi domestici. In appoggio della mia ipotesi giova avvertire che trovai nella caverna un cranio di pecora, rotto e forato tra le due corna, come se avesse ricevuto un violentissimo colpo vibrato per mezzo d'un arnese consimile.

Un frammento d'utensile di pietra verde, raccolto nella caverna dall'onorevole deputato Anton Giulio Barrili, e da lui donato, insieme a molti altri oggetti al Museo civico di Genova, si riferisce evidentemente al tipo d'accetta ora descritta; del quale d'altronde posseggo un esemplare perfettissimo trovato nella medesima località da mio fratello Alberto. Quest'oggetto, rappresentato nella Tav. III, fig. 1*a* 1*b*, è lungo 90 millimetri, largo 18 ed alto 13 ed ha forma di cilindro, un po' compresso ed attenuato ai due capi. Una delle due estremità si termina in un taglio acutissimo irregolarmente semicircolare; l'altra è greggia e scabra, segno che lo stromento doveva essere adattato ad un manico. La roccia di cui è fatto sembra una diorite affanitica, di non comune durezza e tenacità.

Disco forato. Il frammento figurato nella Tav. III, fig. 2 fu raccolto dal deputato Anton Giulio Barrili ed è ora compreso nella collezione paleontologica del Museo civico di Genova. Esso formava parte indubbiamente d'un anello litico di cui si è tentato di rappresentare la forma e le dimensioni supposte, per mezzo d'una linea punteggiata. Il diametro esterno del disco integro poteva misurare dai 10 ai 12 centimetri, il diametro interno del foro da $4^{1}/_{2}$ a 5. La piccola parte del margine esterno conservata nel frammento è assai tagliente; il margine interno ha 11 millimetri di spessezza ed è liscio e lucente. La materia che servì a fabbricare quest'oggetto è una bella giadeite translucida.

L'arnese sopradescritto era destinato, a parer mio, a munire una specie di mazza d'armi; e di ciò mi son persuaso confrontando il frammento posseduto dal Museo di Genova col disco d'una mazza d'armi papuana che il sig. L. M. D'Albertis recò non è molto dalla Nuova Guinea. Tutto corrisponde perfettamente nei due oggetti: la finitezza del lavoro, la perfezione del taglio, la dimensione del foro. Con questo

non intendo certamente revocare in dubbio le interpretazioni che gli archeologi hanno proposte per altri dischi consimili, chiamandoli: ornamenti, insegne, amuleti, rasacuoi; perciocchè io credo che le più lievi differenze in fatto d'utensili di pietra valgano a giustificare i più diversi giudizî.

Oggetto di uso ignoto. Le figure 10*a*,*b*. (Tav. III) valgono meglio di ogni descrizione a far conoscere l'aspetto di questo oggetto, il quale fu disseppellito a soli 50 centimetri di profondità, nella parte media della grotta. Esso consiste in un ciottolo di roccia ofiolitica, cui fu impartita la forma d'un prisma quadrangolare appuntato ad una estremità ed assottigliato all'estremità opposta. Le sue dimensioni sono: lunghezza millimetri 63, larghezza 25, altezza 21. La pietra è dura quanto l'ortose, di color nero verdastro con sfumature più chiare, e alla sua superficie si osservano sottili e fitte scalfitture dirette trasversalmente.

Coltelli. Furono trovati nella grotta parecchi di questi strumenti, tutti riferibili a tipi assai comuni.

L'originale figurato alla Tav. III, fig. 7*a, b,* è una scheggia di piromaca bruna terminata in punta ad una estremità e arrotondata all'altra. Esso offre due tagli minutamente ritoccati ed è lungo 52 millimetri, largo 17 e spesso 7. Lo trovai negli ultimi scavi eseguiti alle Arene candide, a circa m. 1,20 di profondità.

Il secondo esemplare figurato (Tav. III, fig. 9*a*, *b*), raccolto nel 1874 dai signori Brown e Brooke, è una lama di selce bionda, troncata ad una estremità ed appuntata all'altra. Presenta anch'esso due tagli che sembrano un po' logori e sbocconcellati dal lungo uso.

Un frammento di un altro coltellino consimile giaceva accanto allo scheletro di un bambino, nella parte media della grotta, come già accennai nel descrivere le singole tombe.

Raschiatoio. Si può forse considerare come tale una grossa scheggia di selce giallastra, della lunghezza di ben 6 centimetri, di forma irregolarmente trigona, con una faccia pianeggiante e l'altra convessa, dal margine rozzamente ritoccato. Questa fu trovata l'anno scorso nella tomba n. 5.

Nucleo. Fra i manufatti ultimamente asportati dalla caverna è compreso un piccolo nucleo siliceo di forma irregolarmente lenticolare, il quale ha una delle sue faccie naturalmente arrotondata e coperta di patina gialla e l'altra tutta scheggiata (Tav. III, fig. 5). Il suo diametro maggiore è di millimetri 26. Se quest'oggetto fu così fabbricato di proposito, potrebbe essere una pietra da fionda.

Scheggie. Una fra le scheggie litiche tratte dalla caverna è di color verde sbiadito, translucida, di lucentezza cerea, di struttura un po' cristallina e per questi suoi caratteri ricorda la giadeite. Altre sono frammenti di selce piromaca.

Pietre da macina. Nei varî scavi eseguiti alle Arene candide se ne trovò almeno una dozzina, quattro delle quali fanno parte della collezione spedita al R. Museo etnologico di Roma. Queste pietre sono variabilissime nella forma e nelle dimensioni, ma offrono il carattere comune di presentare una faccia pianeggiante o un po' incavata con traccie di logoramento. Seguono alcuni cenni intorno a quattro esemplari scelti fra i più caratteristici.

N. 1. È di forma irregolarmente quadrilatera, un po' incavata superiormente,

piana inferiormente. Le sue dimensioni sono: lunghezza centimetri 32, larghezza 21, spessezza 7 a 8. La roccia è *pietra di Finale,* sorta di arenaria calcare tenacissima.

N. 2. È di forma trapezia; la superficie superiore è incavata e liscia, l'inferiore scabra. Dimensioni: lunghezza centimetri 28, larghezza 18, spessezza da 4 a 8. La roccia è identica a quella del n. 1.

N. 3. È di forma ovoide, schiacciata e sopra ciascuna faccia offre un leggero incavo più profondo nel mezzo che alla periferia. Tali incavi sono levigati e tinti in rosso come da una sostanza ocracea. Dimensioni: diametro maggiore centimetri 26, $^1/_2$, diametro minore 15 $^1/_2$, spessezza circa 6. La roccia è quarzite biancastra durissima.

N. 4. Forma ovoide schiacciata, con due faccie appianate artificialmente. Dimensioni: lunghezza 15 centimetri, larghezza 10,2, spessezza 5. La roccia è arenaria bigia, silicea, durissima.

Macinelli. Credo che servissero a quest'uso certi grossi ciottoli ovoidi per lo più di quarzite bianca, piuttosto comuni nella caverna; infatti le loro estremità sono logore ed ammaccate. Uno di essi misura 9 centimetri nel diametro maggiore, 6 $^1/_2$ nel minore; gli altri sono più piccoli. Raccolsi pure un macinello di pietra verde la cui forma è sferoidale, con uno dei poli schiacciato e logorato. Questo misura 6 centimetri di diametro e fu raccolto presso la tomba n. 5.

Pietre da affilare (?). Alcuni ciottoli di pietra verde, assai dura offrono alla loro superficie numerose strie rettilinee evidentemente artificiali; da ciò argomento che si adoperassero ad impartire il filo alle accette litiche. La forma loro è per lo più ovoide e schiacciata. Uno di essi presenta le seguenti dimensioni: lunghezza centimetri 8 $^1/_2$, larghezza 4 $^1/_2$, spessezza 2 $^1/_3$.

Percuotitoio. Fra il macinello e il percuotitoio la differenza è lievissima e forse, in qualche caso, non sussiste. Tuttavolta la seconda denominazione mi sembra più acconcia della prima per designare un semplice ciottolo sferoidale di pietra verde, il quale offre a ciascun polo una incavatura artificiale. Quest'oggetto è posseduto dal R. D. Perrando e serviva io credo come stromento di percussione.

Ciottoli ed altre pietre non lavorate.

In tutti gli scavi eseguiti nella grotta si estrassero ciottoli marini di varie forme e di varie dimensioni che furono evidentemente portati dall'uomo nella caverna. Ma ognun vede quanto sia difficile il rintracciare la destinazione di oggetti che, nell'infanzia di ogni artificio industriale, potevano essere adoperati nei modi più diversi. Non ommetterò tuttavolta di esporre in proposito alcune ipotesi.

Ove s'incontrano residui di focolare non mancano mai grossi ciottoli anneriti dal fuoco, i quali sicuramente ebbero un ufficio qualsiasi nell'economia domestica dei cavernicoli. Servivano forse a sostenere i vasi in cui si apparecchiavano i cibi? Non si può a meno di avvertire che la forma loro ovoide o sferoidale era poco acconcia all'uopo. Non è egli possibile che si adoperassero per arroventarli, e cuocere talune vivande in vasi che non si volevano esporre direttamente al fuoco? È poco probabile, perchè possedevano vasi di più maniere ed anche suscettibili di reggere per lungo tempo all'azione di una viva fiamma.

Un'altra ipotesi mi sembra più verosimile. Parecchi popoli barbari sogliono preparare una specie di pane senza lievito, avvolgendo di pasta ciottoli ben tersi e collocandoli sulla brace; io stesso vidi sperimentar questo sistema di panificazione sull'altipiano abissinico e mi parve raggiungesse perfettamente lo scopo di convertire in pochi minuti una farina grossolana in un cibo sano e gradito. Orbene non mi sembra improbabile che gli abitanti della grotta, i quali possedevano macine, e per conseguenza facevano uso di qualche farina, avessero precorso in quel costume i moderni abissinesi.

I ciottoli di cui tengo ora discorso sono quasi tutti di quarzo, in forma di sferoidi schiacciati; uno dei maggiori misura centim. 11 di lunghezza, $8\,^1/_2$ di larghezza e $3\,^1/_2$ di spessezza.

Certi sferoidi più piccoli e di roccia calcarea non portano traccie dell'azione del fuoco e, ove non fossero utensili da vasai o semplici projettili non saprei immaginare a quale uso si raccogliessero.

Non così di altri ciottoli per lo più di pietra verde e di forma assai allungata; le ammaccature che si osservano alle loro estremità dimostrano che servirono come strumenti di percussione, forse per spaccare le ossa dalle quali si voleva estrarre il midollo, ovvero per ammorbidire qualche pelle od anche per rompere corteccie e steli affine di estrarne fibre tessili o fecole. Odoardo Beccari osservò che i nativi della Papuasia si valgono di ciottoli consimili, saldamente fissati ad un manico di giunco, per ammaccare il tessuto feculifero che somministra loro il sagù.

Per chiudere le mie considerazioni in proposito, dirò pure che trovai un buon numero di pietruzze quarzose bianche nella terra che ricopriva i sepolcri della caverna. A parer mio non è questa una circostanza accidentale, ma è prova di un antico rito funebre, analogo forse a quello che compiono i moderni Bogos, i quali coprono di candidi ciottoletti le tombe dei loro cari, quando non perirono di morte violenta.

Frammenti di pomice. Fra gli oggetti raccolti negli ultimi scavi v'ha un pezzo di pomice bigia, di forma irregolarmente ovoide, lungo circa 9 centimetri, che fu tratto dalla profondità di un metro. Su questo la mano dell'uomo non ha lasciato alcuna traccia; ma alla superficie di un pezzo consimile, trovato nel 1864, si vedono chiaramente dei solchi profondi e sottili, decorrenti in varie direzioni che sembrano fatti affilando corpi appuntati, ed è probabilissimo che abbia servito ad aguzzare le punte d'osso già descritte.

La pomice è roccia propriamente estranea alla Liguria; ma dopo le maggiori sciroccate se ne trova sulle nostre spiaggie qualche pezzo, forse proveniente dalle isole Eolie.

Ocra rossa e gialla. In quasi tutte le tombe scoperte nella caverna fu trovata l'ocra rossa, in pezzi irregolari, talvolta assai voluminosi, ed era per lo più associata ai cocci di un vaso che originariamente la conteneva. Una volta m'accadde perfino di osservarne due o tre pezzi grossi come il pugno collocati sul fondo di un vasetto, il quale, quantunque spezzato, ancora conservava la propria forma, perchè sorretto dalla terra circostante.

L'ocra di cui si tratta è impura e mista di sabbia silicea. Credo che provenga da un ampio deposito di terra ocracea che s'incontra nel Finalese, risalendo la via di Melogno fin nei pressi di Gorra.

M'imbattei pure nel corso degli scavi in alcuni pezzi d'ocra gialla; ma non sono in grado di asserire che fossero compresi tra le suppellettili di qualche tomba.

Cristallo di quarzo. Alla fine dello scorso anno, mio fratello praticò un piccolo fosso nel solo punto della grotta che non fosse completamente sconvolto dai precedenti scavi e ivi raccolse, fra le altre cose, un prisma di quarzo jalino limpidissimo, di 12 millimetri di lunghezza, il quale è rotto alle due estremità. Esso era impigliato in una durissima concrezione stalattitica che univa in un solo masso, pietre, ossa e frantumi di carbone.

Un simile cristallo non potè formarsi nella grotta, le cui pareti calcaree non presentano traccia alcuna di filoni quarzosi. Esso vi fu dunque introdotto dall'uomo.

Zolle forate da ditteri sarcofagi. Ogni volta che praticai escavazioni nella caverna m'accadde d'imbattermi in zolle argillose e nerastre, tutte piene di piccoli vacui ovoidi a pareti levigate. Supposi dapprima che fossero modelli di corpi organici omai distrutti, per esempio di ghiande, cui corrispondono per la forma e le dimensioni; ma un più maturo esame mi fece accorto che son invece l'opera d'insetti.

È da supporsi che fossero accumulati nel fondo della grotta ossami e carni corrotte, in mezzo alle quali brulicavano larve di ditteri. Queste allorchè stavano per compiere le loro metamorfosi si introducevano nella terra sottostante e ivi ciascuna si formava un nido di terra a guisa di bozzolo e più non l'abbandonava se non dopo aver raggiunto lo stato perfetto.

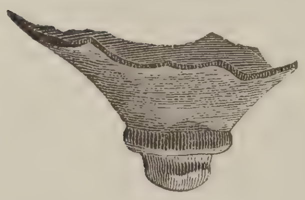
Oggetti di terra cotta.

Stoviglie. Gli oggetti di terra cotta estratti dalla caverna sono quasi esclusivamente cocci appartenenti a più maniere di stoviglie.

Tali cocci, numerosissimi, sono riferibili a due periodi archeologici i cui prodotti industriali vennero per così dire a sovrapporsi e in parte a confondersi nel suolo della caverna. Alcuni sono pezzi di vasi foggiati al tornio e con pasta fina e omogenea i quali, sia per le forme sia per la materia, non differiscono menomamente dai fittili che si trovano in abbondanza fra i ruderi romani di Vado, dell' antica Libarna e in altre località della Liguria. Consistono specialmente in fondi di grandi anfore fatte a cono tronco o a punta smussata (Fig. 3), in cocci con pezzi d'orlo rimboccato all'esterno, e con ventre prominente, in anse assai grandi e piegate ad arco. Di questi avanzi (raccolti da tutti gli esploratori della caverna) non mancano alcuni esemplari caratteristici fra gli oggetti testè spediti da me al R. Museo etnologico e preistorico di Roma.

Fig. 3.

Fondo d'anfora raccolto negli strati superficiali della caverna.
(Museo civico di Genova).



Essi provengono tutti, senza eccezione, dagli strati di terriccio compresi fra la superficie e 40 centimetri di profondità ed è interessante il fatto che nei medesimi strati si trovano bene spesso accanto ad oggetti che sogliono tenersi in conto di preistorici.

Rispetto ai cocci più grossolani, premetto che sono assai più numerosi e che si incontrano dalla superficie fino alla massima profondità raggiunta cogli scavi, cioè fino a 3 metri sotto il livello del suolo. Essi son foggiati a mano, cotti senza l'aiuto del forno e risultano di argilla impura, per lo più di color bruno o rossiccio. La pasta, sempre un po' marnosa e malcotta, fa effervescenza cogli acidi e contiene invariabilmente un po' di rena sabbiosa che talvolta vi fu introdotta di proposito deliberato, acciocchè nel cuocere non si dilatasse inegualmente e altra volta, forse, preesisteva nell'argilla (¹). Alcuni cocci ricettano anche pietruzze di serpentina (²).

Alcune di quelle terre cotte, comunque fatte a mano, sono di finezza insolita, e sembrano composte di argilla lavata, cui fu impartita una tinta nerastra per mezzo di qualche artifizio ora troppo difficile a rintracciare. La superficie loro, nell'interno quanto fuori, è levigata e quasi come verniciata, il che credo si ottenesse mediante una specie di brunitura, stropicciando il vaso ancora crudo, ma già indurito, con un corpo duro e liscio.

L'argilla per la fabbricazione delle stoviglie si traeva, se non erro, dai sedimenti pliocenici di Vado, di Zinola e delle Fornaci, che sono poco distanti, e l'arena quarzosa è quella, io credo, che forma a pochi passi dalla grotta la duna delle Arene candide.

Quantunque nel deposito della grotta non si sia trovato che un solo vaso intero, pure non è difficile conoscere, dall'esame dei cocci, quali fossero le forme più usitate dai cavernicoli per le loro stoviglie.

Una delle forme più comuni era quella, presso a poco cilindrica, delle nostre volgari pignatte. I vasi di tal fattura avevano l'orlo semplice, il fondo pianeggiante o appena un po' convesso. Non saprei dire se portassero un manico o due. Erano pur frequenti i vasi ovato-conici a fondo piatto, simili a quello figurato nella Tav. II, fig. 5.

Alcuni pezzi accennano a vasi di forma semiovale, un po' meno alti del sopradescritto e col fondo arrotondato. Questi, a quanto pare, erano forniti di un solo manico. In altri poi si manifesta una forma ventricosa in basso e cilindrica in alto, come può vedersi dalla fig. 7, Tav. II. Il frammento rappresentato dalla figura offre ornati a graffito e presso l'orlo è munito di fori per mezzo dei quali si poteva sospendere ad una cordicella. Pochi pezzi appartengono ad una specie di olla ventricosa, alquanto strozzata presso l'orlo, con un piccolo manico o due, all'altezza della strozzatura.

Il R. D. Perrando raccolse nella caverna della Matta un bel vaso il quale è, alla parte inferiore, ventricoso e un po' carenato, superiormente, svasato e *quadrangolare.* Un piccolo coccio delle Arene candide sembra appartenere a questo singolarissimo tipo. Lo stesso esploratore trovò pure nei sedimenti delle Arene candide una specie di bicchiere perfettamente integro, dell'altezza di 6 centimetri $^1/_2$, la cui forma è cilindracea, col fondo arrotondato.

(¹) Pigorini e Strobel denominano *tarso* la sostanza minerale, quarzo calcare od altro, che i terramaricoli, come fanno certi figuli odierni del nostro Appennino, introducevano per lo scopo anzidetto nella pasta dei loro vasi. Vedasi in proposito la preziosa Memoria intitolata: *Le terramare e le palafitte del Parmense*, negli Atti della Società italiana di Scienze naturali, vol. VI, p. 82.

(²) In un grosso coccio osservai dei ciottoletti di $^1/_2$ centimetro di diametro.

Finalmente non mancavano le ciotole di varie dimensioni, alcune delle quali di pasta purgata e forte e lisciate a spatola. Nei cocci di questi fittili si osserva che la parete forma col fondo angoli di 120°, 125° e 140°. In un esemplare di singolare finezza, che potrebbe essere un avanzo di coperchio, l'angolo, un po' smussato, misura 150°.

Rispetto ai manichi, di cui si sono raccolti fra i cocci numerosi campioni, predomina la forma, tuttora frequentissima, che Canestrini denomina *auricula pertusa*. Di tali manichi ve ne son di grossi, di piccoli, di stretti, di larghi, di prominenti e di schiacciati (¹). Essi presentano assai di rado qualche ornato a graffito, ma non son mai forniti di appendici come quelli che trovansi nelle mariere dell'epoca del bronzo. Talvolta i manichi sono in forma di orecchietta trigona, attraversata da un piccolo foro, ovvero si riducono a semplici protuberanze semicircolari piane che decorrono parallelamente all'orlo od obliquamente ad una certa distanza da esso; alcune di tali protuberanze sono forate, altre impervie, e in due cocci si presentano tutte dentellate a mo' d'ornamento (²). Finalmente in parecchi pezzi i manichi sono sostituiti da bugnette o tubercoli pervi od integri (Tav. IV, fig. 8).

Rispetto agli ornamenti dei vasi, si manifestano sulle pareti, sugli orli e sulle anse. Nel primo caso non sono mai linee geometriche, ma serie d'intaccature o di impressioni, disposte in varie guise, e linee ondulate.

Nella collezione del R. D. Perrando si vedono due pezzi di vasi che offrono parecchi ordini d'intaccature verticali, paralleli all'orlo, ed uno, in cui v'ha una serie di segnetti verticali in un senso e una serie di piccoli tratti orizzontali in un altro. Un piccolo coccio della medesima raccolta è coperto di due sistemi di lineette tremolate.

Fra gli oggetti raccolti da me, nel 1874, il frammento rappresentato nella Tav. II, fig. 7, offre due ordini di linee tremolate longitudinali, l'uno prossima all'orlo, l'altro nel ventre del vaso. Nel coccio figurato nella stessa tavola, al n. 3, l'ornato è distribuito in due zone e risulta di segni fatti premendo un oggetto appuntato sulla pasta ancora molle. Nella prima zona si osservano tre file di segnetti trasversi, poco profondi, alternanti con due file di segni obliqui, più impressi dei precedenti. La seconda zona è formata di tre file di segni obliqui, alternanti con due di tratti trasversi. Il coccio è fatto di pasta grossolana e ben cotta; la sua spessezza massima è di 11 millimetri. L'esemplare figurato al n. 1 (Tav. II), raccolto da me insieme al precedente nel 1876, presenta un pezzo d'orlo semplice ed assottigliato e al di sotto un cordoncino poco elevato, dal quale si dipartono due ordini d'impressioni oblique che forse stanno a rappresentare foglie attaccate ad un ramoscello. In questo caso le impressioni sembrano eseguite coll'unghia.

È notevole un altro piccolo coccio, il quale è coperto esternamente da quattro rilievi irregolari e schiacciati che si sovrappongono come embrici d'un tetto. Il vaso era assai piccolo, a pareti sottili, di pasta rossastra, omogenea e ben cotta, e probabilmente data dall'ultima epoca durante la quale la caverna fu frequentata.

Gli ornamenti sugli orli dei vasi consistono in serie d'impressioni più o meno profonde, fatte col dito, e in dentellature praticate con uno stecco o col taglio d'una

(¹) Uno dei maggiori misura 5 cent. di lunghezza, 5 $\frac{1}{2}$ di larghezza e 8 millim. di spessezza.

(²) Lubbock, *I tempi preistorici o l'origine dell'incivilimento*. Appendice, p. 776, f. 32.

spatola (Tav. II, fig. 7 e 8). Non si trovano cocci ad orlo riflesso che nella parte superficiale del deposito e questi, come dissi, portano le traccie della tornitura. Fra i pezzi non torniti alcuni hanno però l'orlo un po' svasato.

Gli esempî di manichi ornati sono assai scarsi; tuttavolta il R. D. Perrando ne trovò uno della forma più comune, in cui vi ha, per ciascun lato, una serie di linee parallele trasversali e in mezzo una serie d'intaccature. Altri quattro manichi, in forma di prominenze compresse, semicircolari, che furono rinvenuti da me nella caverna in varie epoche, presentano intorno al margine loro delle crenature più o meno profonde.

Oggetti d'uso ignoto. Il R. D. Perrando possiede un oggetto di terra cotta, simile per la materia ai cocci più rozzi, che rammenta una pipa comune, alla quale mancasse parte della cannuccia e in cui fosse rotto e sbocconcellato il ricettacolo del tabacco. Quantunque un tal ravvicinamento possa parere strano e forse anche provocare un sorriso, non è meno vero che si affaccia spontaneo alla mente e che vale a dare un'idea esattissima dell'oggetto in discorso (1). D. Perrando afferma d'averlo trovato a 2 metri di profondità nel suolo delle Arene candide.

Un arnese consimile, tratto dalla terramara di Gorzano, fu descritto dal professore Canestrini sotto il nome di *Olla caudata* (2).

L'oggetto che ora mi accingo a descrivere è uno dei più notevoli, fra quanti provengono dal sepolcreto delle Arene candide, e fu raccolto da me stesso, a circa un metro di profondità, nella parte media della grotta, accanto alle tombe n. 1 e n. 2.

Come si vede dalle figure 10*a,b,* Tav. II, esso ha forma di parallelopipedo, arrotondato in tutti gli spigoli, assai allungato e depresso. Una delle sue faccie maggiori presenta alla parte media una prominenza conica, attraversata da un foro di 4 millim. di diametro. La faccia opposta, che è lievemente convessa, offre tre profondi solchi longitudinali e per ciascun lato una serie di solchi trasversali, un po' obliqui che risalgono sui due fianchi. Le sue dimensioni sono:

Lunghezza	millim.	101
Larghezza	»	26
Altezza del rilievo . . .	»	34
Altezza delle due estremità	»	11

Quest'oggetto è fatto di terra nerastra, dura, assai cotta.

Rispetto all'uso cui era destinato, quantunque si sia già esercitata in proposito la sagacia di parecchi studiosi, manca ancora una plausibile interpretazione. Fu proposta l'ipotesi che servisse come stampo per le stoviglie, ma oltre alla considerazione che non fu mai trovato nella caverna nessun coccio con ornati in rilievo, si oppone a questo modo di vedere il fatto che i solchi non contengono la menoma parte d'argilla.

Il sig. V. Vecchi suppose argutamente che lo strano arnese fosse stato adoperato a mondare le pelli, di cui forse i cavernicoli facevano le loro vestimenta. Ma

(1) Non sarebbe questo per avventura una lampada primitiva?

(2) *Oggetti trovati nelle terramare del Modenese,* illustrati per cura del prof. Canestrini, pag. 13, Tav. II f. 5. Modena, 1866.

perchè allora quei solchi in due direzioni quasi perpendicolari? E poi gli spigoli delle costole comprese fra i solchi non presentano alcuna traccia di logoramento.

A me sembra che se le zanne di cinghiale, i canini di lupo, le valve di *Pectunculus* erano portati dai cavernicoli come preziosi ornamenti, un pendaglio di terra cotta poteva esser tenuto da costoro in conto di elegantissimo fregio; e non sarei lontano dal credere che, essendovi impressi certi segni particolari, vi si annettesse pure qualche idea superstiziosa.

In questa rubrica va pur compreso un piccolo disco, formato di argilla bruna, omogenea, poco cotta. Il suo diametro maggiore misura centimetri $4\,^1/_2$, il minore $3\,^1/_2$; la spessezza non arriva a 7 millimetri. È sopra un po' convesso e inferiormente pianeggiante. Allorchè lo raccolsi, nella parte media della grotta, a circa un metro di profondità, era così molle che credetti a tutta prima fosse fatto di legno.

Focaccia di terra cotta. Si tratta d'una masserella d'argilla che ha quasi il volume del pugno, forma di ovoide irregolare e schiacciato e color rosso mattone, la quale fu evidentemente impastata a mano, poi esposta al fuoco. L'artefice vi lasciò l'impressione delle dita e segnatamente quella d'un pollice, la quale si presenta come un incavo di 17 millim. di profondità. L'impronta è così netta, in qualche punto, che vi si distingue perfettamente il modello dei rilievi epidermici.

Circa il significato di quest'oggetto, due interpretazioni si presentano spontanee alla mente. Esso è una porzione d'argilla apparecchiata per foggiarne un vaso, caduta per inavvertenza in un focolare, oppure è un campione di pasta, di cui si volle sperimentar la resistenza al fuoco. La seconda ipotesi mi sembra più verosimile della prima, giacchè il pezzo, cotto con diligenza, fu poi infranto ad una estremità, per verificare probabilmente quale azione il fuoco avesse esercitata nell'interno della massa. Ad ogni modo, si può da ciò argomentare che i trogloditi finalesi fabbricassero le loro stoviglie nella stessa caverna.

Manufatti di vetro e di metallo.

Disco di vetro. Le sue dimensioni sono: diametro millim. 38, spessezza mill. 10. Come si vede dalle figure 2*a* e 2*b*, nella Tav. II, esso è sopra convesso e inferiormente concavo; nella parte centrale della faccia superiore vi si osserva il residuo d'un peduncolo infranto, il quale era attraversato da un foro. La materia di cui risulta è un vetro verdastro, un po' opalescente, coperto di un intonaco bruno, dovuto ad una alterazione superficiale. Togliendo la patina con una punta di temperino, il vetro sottostante apparisce splendente di vivida iridescenza e si sfoglia in minutissime laminette [1]. Il disco ora descritto è verosimilmente la base di un calice o di un'anforetta di fabbrica romana. La sua presenza nella caverna, a 50 centimetri di profondità, insieme a cocci di stoviglie non tornite, in uno strato di terriccio carbonioso intatto (almeno mi parve tale), è un fatto interessante, sul quale vorrei richiamare

[1] Queste sono infusibili al cannello, insolubili negli acidi e risultano di silice quasi pura. La patina bruna superficiale, esaminata al cannello, presenta le reazioni del manganese, del ferro e della silice.

l'attenzione dei paletnologi. Non è egli ammissibile che quel frammento sia stato tolto dai barbari trogloditi delle Arene candide a gente che già era pervenuta ad un alto grado di civiltà?

Nella parte più superficiale della caverna il R. D. Perrando disseppellì parecchi stromenti agricoli in ferro, la cui età non risale certamente che ad alcuni secoli. Da canto mio raccolsi, nelle medesime condizioni, un pezzo di lama di pugnale o di spada tutto ossidato, della lunghezza di 9 centimetri e $^1/_2$.

Avanzi di vertebrati.

Le numerosissime ossa di vertebrati estratte dalla caverna, tranne poche eccezioni, appartengono a mammiferi e giacevano alla rinfusa in ogni parte della grotta, ma sopratutto presso antichi focolari ed intorno alle tombe. Due o tre volte soltanto m'accadde di disseppellirne un certo numero collocate secondo le loro naturali connessioni.

Alcune specie più comuni e non molto voluminose, come la pecora, la capra, il cinghiale, il capriolo, erano rappresentate nella grotta da ossa di ogni maniera. Di altre, come il bue e il *Cervus elaphus*, mancavano all'incontro le ossa più voluminose e non si trovarono che frammenti di mandibole, metacarpiani, metatarsiani, falangi e coste.

Quasi tutte le ossa lunghe dei mammiferi di grandi e di medie dimensioni presentano le diafisi spaccate per lungo o rotte obliquamente. Fra i resti dei grossi mammiferi non raccolsi che un cannone di cervo ed uno di bue che fossero veramente intatti. Spesso alla superficie di tali ossa, sopratutto presso i capi articolari, si osservano tagli trasversali netti e profondi e segni di raschiatura. Alcune epifisi di ruminante sembrano rose da qualche carnivoro.

Nessun teschio intero di mammifero fu trovato nella caverna; dai pezzi raccolti si può argomentare che i cavernicoli uccidessero gli animali destinati alla loro alimentazione, spaccando loro il cranio per mezzo di uno strumento tagliente. Sopra un cranio d' *Ovis* osservai, tra le basi delle corna, un piccolo foro assai stretto e rettangolare che sembra fatto con un colpo di scalpello.

Quasi tutte le mandibole inferiori hanno l'estremità anteriore spezzata; alcune sono prive del ramo ascendente, in altre si ruppe solamente l'apofisi coronoide o il condilo.

Le sole mezze mandibole intere incontrate nella grotta spettano ad un tasso, a due faine e ad un cane. Per altro si trovò una mandibola d'un altro cane artificialmente spezzata all'estremità anteriore, come sono d'ordinario quelle dei ruminanti.

Per la massima parte le ossa portano traccie evidentissime di cottura e talune sono perfino carbonizzate. È ben manifesta l'azione del fuoco su tutte le ossa di ruminanti e di suini, nonchè sopra una mandibola di lepre. Le ossa di cinghiale e di porco si distinguono bene spesso, a prima vista, per la loro tinta più oscura; il che si verifica pure per gli avanzi delle terramare.

Le ossa d'uccelli sono in scarso numero e generalmente intere. Quasi tutte appartengono alle estremità.

Due soli esemplari, cioè un clipeo di testuggine terrestre ed un frammento di omero della medesima specie, stanno a rappresentare la classe di rettili, nella fauna della caverna.

I pesci vi mancano completamente, ed è cosa strana, perciocchè, trovandosi la caverna vicinissima al mare, riesce difficile il comprendere come i suoi abitanti non fossero anche un po' pescatori.

Felini. Alcune ossa lunghe rinvenute nella caverna si riferiscono senza dubbio ad animali di questa famiglia. Un omero sinistro fra le altre corrisponde, per le dimensioni e le forme, all'osso omologo del gatto. Un femore sinistro ed un altro omero appartengono invece ad una specie di maggiori dimensioni che potrebbe essere la lince.

Faina (*Mustela foina*). Ne conosco due mandibole inferiori, una sinistra e una destra, appartenenti a due individui. Paragonate queste colla mandibola della faina tuttora vivente in Liguria, non se ne distinguono che per differenze lievissime.

Martora (Mustela martes). Vi si riferiscono, secondo il prof. Strobel, un radio ed un metatarsiano.

Orso. A questo genere si attribuisce un osso del metatarso, il quale è compreso nella raccolta depositata tre anni sono al Museo civico di Genova dai signori Brown e Brooke. Ma siccome in quell'epoca i due esploratori precitati visitarono anche l'*Arma du Rian* che ricetta copiosi avanzi di *Ursus spelaeus,* non è impossibile che qualche piccolo oggetto della seconda sia andato confuso colla raccolta proveniente dalla prima.

Tasso (*Meles taxus*). Ne raccolsi nell'ultima gita che feci alla grotta una mandibola con tutti i suoi denti. Quest' osso sembra un po' più alto, verso l'estremità anteriore, dell'osso corrispondente d' un individuo fresco ; la sua apofisi coronoide è più stretta ed ha il margine posteriore un po' più convesso; il condilo è più robusto. Alla medesima specie si riferisce una porzione di bacino.

Tanto le ossa di *Felis* quanto quelle di tasso non sono rotte dalla mano dell'uomo e non subirono cottura.

Lupo (*Canis lupus*). Ne possiedo un mascellare superiore destro, nel quale son conservati il canino, il terzo premolare, il ferino (il quale è rotto nel margine posteriore) e due molari; di uno dei premolari mancanti rimangono le radici incastrate nei proprî alvèoli. Dall'esame di questo pezzo si può argomentare che fu violentemente staccato dal cranio con un colpo d'arnese a tagliente smussato, di cui vedonsi le traccie sul margine superiore dell'esemplare, il quale è in parte tagliato netto e in parte scheggiato. Non osservai in esso alcun carattere osteologico degno di nota.

Il lupo, quantunque raro, non ha cessato d'infestare le più alte regioni della Liguria occidentale.

Cane. I più interessanti avanzi di questo carnivoro sono, tra i fossili della caverna, due mandibole inferiori sinistre un po' diverse fra loro, appartenenti ad individui di piccola statura. L'egregio mio collega prof. Strobel, cui ho comunicato i disegni delle due mandibole, è d'avviso che somigliano a quelle del *Canis familiaris palustris.* Una di queste, la maggiore, è rotta anteriormente ed offre traccie di erosione e di cottura, l'altra è integra.

Al medesimo genere si debbono ascrivere parecchie ossa lunghe, tra le quali quattro metatarsiani che corrispondono a quelli figurati dallo Schmerling, nella sua grande opera sulle ossa fossili scoperte nelle caverne della provincia di Liegi, alla Tav. IX, fig. 15 (vol. II) come avanzi di volpe.

Le erosioni che si osservano sui capi articolari di molte ossa sono indizio che il cane aveva la sua parte nei pasti imbanditi dai cavernicoli.

Suini. I pezzi di mascella, le vertebre, le ossa lunghe di suini sono piuttosto comuni nel suolo della grotta e si distinguono facilmente dagli avanzi degli altri animali pel loro colore più oscuro, massime quando hanno subìto l'azione d'una intensa cottura. Molte di queste ossa sono ridotte a piccoli frammenti e si sottraggono ad ogni determinazione, altre presentano tagli, incisioni, segni di raschiature, fatti evidentemente nello staccarne i tendini e i muscoli. Già accennai al ritrovamento di zanne che subirono una lavorazione più o meno inoltrata.

Alcuni resti di suini appartengono a parer mio ad una piccola varietà del cinghiale comune, il quale ha cessato di vivere nella nostra provincia. Altri, secondo il prof. Strobel, si riferiscono al *Sus scrofa domesticus* e forse, in parte, alla varietà *palustris*, Rüt.

Bue (*Bos taurus*). Gli avanzi di questa specie sono piuttosto scarsi nella grotta e consistono per la massima parte in pezzi poco caratteristici, dai quali non è possibile giungere con sicurezza alla cognizione della razza cui appartengono. Fra quelli ottenuti dai varî esploratori della grotta noterò una mandibola diritta d'un individuo giovanissimo, una parte di mandibola superiore destra d'individuo adulto, ma di piccole dimensioni, un ramo ascendente d'una mandibola inferiore col suo condilo e l'apofisi coronoide, varî denti staccati, alcune coste, un frammento di radio, un metacarpiano intero e varie falangi. Ecco le dimensioni del metacarpiano: lunghezza millim. 203, larghezza dell'articolazione superiore 59, larghezza dell'articolazione inferiore 59, larghezza dell'osso nella parte media 31, spessezza del medesimo nella parte media 24.

Il prof. Strobel, cui comunicai parecchie ossa di questa specie, è d'avviso che appartengano a tre diverse varietà, una delle quali sarebbe il *brachycephalus*, Wilckens (*primigenius?* Strobel, olim), la seconda l'*elatior*, Canestrini (*brachyceros* mezzano, Strobel), e la terza, probabilmente, il *brachyceros*, di Rüthimeyer.

Cervi. Furono distinte dal sig. Victor Brooke e da me, tra le ossa di ruminanti asportate dalla caverna, gli avanzi di due specie; vale a dire del capriolo (*Cervus capreolus*) e del cervo comune (*Cervus elaphus*). Entrambe dovevano essere piuttosto comuni, la prima però più della seconda. Del capriolo si raccolsero ossa spettanti ad individui d'ogni età e specialmente mandibole, bacini, tibie, omeri, cannoni, sempre però più o meno rotti. Del cervo comune non si rinvennero che due o tre mandibole ed ossa lunghe fra le quali un cannone integro. Si trovò un solo corno di cervo, il quale era collocato accanto al cranio del primo scheletro umano disseppellito nella caverna. Il genere *Cervus* non è più compreso nella fauna ligure.

Pecora (*Ovis aries*). Le ossa di questa specie sono numerosissime, ma quasi tutte infrante e però poco interessanti dal punto di vista zoologico. I pezzi in migliore stato di conservazione sono le mandibole inferiori, che per le forme e il volume

somigliano assai alle ossa corrispondenti del muflone di Sardegna. Il prof. Strobel mi scrive che la pecora delle Arene candide doveva essere uguale od affine alla razza *palustris*, Rüt. Peraltro un metacarpiano trovato nella caverna non si può riferire alla medesima varietà e il precitato naturalista l'ascrive dubitativamente ad una razza nana della pecora comune. Un osso consimile fu figurato nella tav. VI, lettera F della Memoria di P. Strobel intitolata *Avanzi preromani* (Vedasi anche in proposito: *Le terramare e le palafitte del Parmense,* seconda relazione, p. 60. Milano, 1864).

Capra (*Capra hircus*). Questa specie si distingue difficilmente dalla precedente pei suoi caratteri osteologici. Tuttavolta la sua presenza fra i ruminanti della grotta fu accertata dal signor Victor Brooke, il quale determinò come avanzi di capra comune una mandibola inferiore, un radio, una tibia ed altri ora ostensibili nella collezione paleontologica del Museo civico di Genova. Da canto mio trovai numerose ossa e corna riferibili alla medesima specie, negli ultimi scavi eseguiti nella grotta.

Lepre (*Lepus timidus*). Riferisco a questa specie un frammento di mascella superiore con due incisivi in posto, una mandibola inferiore e varie ossa delle estremità. Il primo fra i pezzi ora indicati offre l'angolo formato dai due mandibolari più aperto che negli individui viventi della stessa specie. I due incisivi sono in parte anneriti e carbonizzati dal fuoco e tutto fa supporre che l'animale cui appartenevano fu cotto e mangiato dai cavernicoli.

Arvicola. Una piccola tibia simile a quelle figurate da Schmerling m'induce a comprendere nel mio elenco anche questo genere.

Uccelli. Le ossa di volatili non sono rare nella grotta, ma per le difficoltà che si oppongono alla loro determinazione o piuttosto per la mancanza di materiali di confronto, non posso qui registrare con certezza che due soli generi: vale a dire una pernice, le cui tibie non differiscono sensibilmente da quelle della *Perdix petrosa* di Sardegna (1) ed un *Tetrao* (che forse corrisponde al *T. albus*). Di quest'ultimo raccolsi un cubito a 2 metri di profondità, nella camera orientale della spelonca.

Rettili. Un clipeo di testuggine terrestre (*Cistudo europaea*), rinvenuto nella grotta dal R. D. Perrando, figura nella collezione di questo naturalista; l'articolazione superiore d'un omero destro della medesima specie fu raccolta da me. Questi sono i soli avanzi che rappresentino la classe dei rettili.

Resti di molluschi e di echinodermi.

I resti di molluschi sono rappresentati, nel suolo della caverna, da un gran numero di conchiglie di gasteropodi e di lamellibranchi e da frammenti d'ossicini di *Sepia*. Alla classe degli echinodermi non si possono ascrivere che pezzetti d'un guscio d'*Echinus*.

Le conchiglie sono per la massima parte di specie marine e mangereccie. Tutte le specie marine appartengono alla fauna ora vivente nel Mediterraneo, ma talune sono divenute rare o mancano affatto sui nostri littorali. Una delle specie terrestri è estinta. Pochi, fra i gusci raccolti nella caverna, servirono a qualche uso industriale

(1) Gli avanzi di pernice cui alludo spettano, secondo ogni probabilità, ad una specie ligustica affine alla *P. petrosa*, cioè alla *P. rubra*, di cui non potei veder lo scheletro.

o come oggetti d'ornamento. Per lo più son residui di pasti, e in questo numero certe patelle sembrano aver subìto l'azione del fuoco. Segue l'elenco delle specie:

Sepia officinalis Linné.

Parecchi frammenti di ossicini riferibili a questa specie furono raccolti da D. Perrando e da me a varî livelli. — Vivente attualmente in Liguria.

Cypraea lurida Linné. Weinkauff, *Die Conchylien des Mittelmeeres*, II p. 10 (1867).

Ascrivo dubitativamente a questa specie una conchiglia raccolta nella grotta dal R. D. Perrando. — Specie rarissima sul littorale ligustico.

Tritonium nodiferum Lamarck. Weinkauff, op. cit., p. 75.

Molti pezzi di conchiglie, alcuni dei quali lavorati dall'uomo, forse per servir di cucchiaio. Il R. D. Perrando ne trovò un esemplare quasi intiero e coll'apice forato. — Vivente attualmente in Liguria, ma raro.

Tritonium (*Cabestana*) *cutaceum* Linné. Weinkauff, op. cit., p. 79.

Parte del margine destro. — Specie rarissima nelle acque della Liguria.

Conus Mediterraneus Bruguière. Weinkauff, op. cit., p. 146.

Varî esemplari, due dei quali forati artificialmente. — Comune in tutto il Mediterraneo.

Purpura haemastoma Linné. Weinkauff, op. cit., p. 52.

Parecchie conchiglie, alcune coll'apice forato artificialmente, altre logore e rotte. Non pare che abbia servito ad uso di commestibile. — Questa specie non fu mai raccolta sulle spiaggie del Genovesato, ma s'incontrò, rarissima, nelle acque della Toscana e dell'Italia meridionale.

Cassis sulcosa Bruguière. Weinkauff, op. cit., p. 41.

Varî pezzi e due esemplari quasi intieri, uno dei quali manca dell'apice. — La specie si trova ancora presso di noi, ma è rarissima.

Columbella rustica Linné. Weinkauff, op. cit., p. 34.

Pochi esemplari presso scheletri di bambini. — È specie tuttora frequentissima sui nostri littorali.

Trochus (*Monodonta*) *turbinatus* Born. Weinkauff, op. cit., p. 353.

Moltissimi esemplari sparsi in tutta la grotta, specialmente presso le tombe. Alcuni sono rotti, come se fossero stati schiacciati con un sasso. — Questa specie servì probabilmente di cibo. — Comune nelle acque della Liguria.

Patella ferruginea Gmelin. Weinkauff, op. cit., p. 401.

Abbondantissima in ogni parte della caverna, specialmente sopra le tombe. — Assai comune anche attualmente.

Patella lusitanica Gmelin. Weinkauff, op. cit., p. 403.

Meno abbondante della precedente. — Non rara sulle spiaggie ligustiche.

Patella coerulea Linné. Weinkauff, op. cit., p. 404.

Alcuni esemplari. — Vive sulle nostre coste.

Queste tre specie di patelle, unitamente al *Trochus* suindicato, erano indubbiamente imbandite nei pasti funebri dei cavernicoli. Fra i molti gusci interi di patelle se ne trovano taluni rotti, come schiacciati sotto una pietra; in due l'apice sembra tolto col logoramento e di proposito deliberato.

Helix nemoralis Linné. *Syst. nat.*, ed. X p. 773.

Due esemplari, uno ornato di tre fascie e l'altro di quattro; la forma loro è quella della varietà che abbonda anche attualmente nel Finalese.

I gusci raccolti nella caverna non furono nè cotti nè rotti.

Helix aspersa Müller. *Verm. hist.*, II p. 59.

Ne raccolsi tre esemplari negli strati meno antichi della grotta. — È specie edule e si trova abbondantemente sulle nostre colline.

Helix obvoluta Müller. *Verm. hist.*, II p. 27.

Una conchiglia rotta, trovata a 50 centimetri di profondità. — Il mollusco visse probabilmente nella caverna. La specie non è infrequente in Liguria.

Helix Ramoriniana Issel. *Delle conchiglie raccolte nelle breccie e nelle caverne ossifere della Liguria occidentale*, p. 8, tav. I, fig. 7, 8 (1867).

Specie estinta, trovata per la prima volta nella caverna di Verezzi, presso le Arene candide, in una breccia ossifera evidentemente postpliocenica. L'*Helix Ramoriniana* appartiene al gruppo delle *Helix cingulata, glacialis, frigida, insubrica, Fontenilli, intermedia, phalerata,* tutte proprie alle *regioni montane* ed ai climi freschi o freddi. L'unica specie di questo gruppo ora vivente in Liguria è l'*Helix cingulata* che si trova sul colle di Nava, a circa 1000 metri d'altezza sul livello del mare.

Ne raccolsi un solo esemplare all'estremità orientale della grotta, alla profondità di 50 centimetri.

Cyclostoma elegans Draparnaud. *Tabl. des moll.*, p. 170 (1792).

Comune nella grotta, ove probabilmente la sua presenza è estranea all'azione dell'uomo. — Abbondante in Liguria. — Si trova pure in varî altri depositi fossiliferi quaternari e recenti.

Bulimus decollatus Linné. *Syst. nat.*, ed. X p. 773.

Due esemplari in buon stato di conservazione. — Specie vivente in Liguria e comune nel Finalese.

Ostrea plicata Chemnitz. Weinkauff, *Die Conchylien des Mittelmeeres*, I p. 276.

Poche valve. — È questa la comune ostrica edule della Liguria.

Spondylus gaederopus Linné. Weinkauff, op. cit., p. 269.

Molte valve trovate insieme alle patelle. — Comune in Liguria nelle acque profonde. — L'esame delle valve raccolte nella caverna mi lascia supporre che i cavernicoli le adoperassero a qualche uso domestico.

Pectunculus violacescens Lamarck. Payraudeau, *Cat. des moll. de Corse*, p. 63, tav. II, f. 1 (1826).

Un certo numero di valve, alcune delle quali coll'apice forato. — Vivente in Liguria, ma non nelle basse acque.

Pectunculus sp.

È rappresentato da una grossa valva assai trasversa e obliqua, fortemente striata alla superficie esterna. Si accosta molto a certi esemplari del *P. inflatus* Brocchi (*Arca inflata* Brocchi, *Conch. foss.*, II p. 494, Tav. XI, f. 7).

Arca Noae Linné. Weinkauff, op. cit., p. 190.

Alcune grosse valve, che, a parer mio, non sono residui di pasto. — Nei nostri mari è assai comune.

Mytilus edulis Linné. Weinkauff, op. cit., p. 224.

Don Perrando ne raccolse una grossa valva. — Vivente in Liguria.

Cardium tuberculatum Linné. Weinkauff, op. cit., p. 136.

Una valva coll'apice rotto. — È specie vivente nel mar di Genova.

Cardium edule Linné. Weinkauff, op. cit., p. 144.

Parecchie valve coll'apice bucato. — Si trova comunemente nelle nostre acque.

Condizioni fisiche del Finalese nell'epoca in cui si formava il deposito della caverna.

Secondo ogni probabilità, allorchè si effettuava il riempimento della caverna, il territorio di Finale doveva essere poco diverso da quello che apparisce nell'attualità, dal punto di vista della configurazione e del clima. Il lentissimo sollevamento, che si verifica sul nostro littorale fin dallo scorcio del periodo pliocenico, non aveva portato ancora alla presente loro altezza i monti finalesi; ma certo mancava loro assai poco perchè la raggiungessero. Le valli erano un po' meno profonde, imperocchè l'erosione delle alluvioni quaternarie non aveva potuto compiersi nella misura in cui si esercitò posteriormente. Le acque che scorrevano al mare pei numerosi rivi e torrenti di cui è solcato quel territorio erano assai più abbondanti e ciò si può argomentare dalla ampiezza delle valli e dei burroni che non è più in rapporto col volume dei corsi d'acqua che vi si accolgono. Gli Apennini liguri erano allora coperti di fitte boscaglie, le quali in parte si conservarono fino a tempi storici da noi poco lontani. Vestigia di tali antiche foreste, costituite prevalentemente d'abeti, di faggi, di querce, si ravvisano nei tronchi d'albero che abbondano in certi terreni detritici recenti, in molti punti della Liguria montana.

Sia per la vegetazione più abbondante, sia per altre cause dipendenti da fenomeni cosmici e geologici, il paese doveva essere più umido e più freddo che non attualmente. In prova di ciò si può addurre il ritrovamento nella caverna di una conchiglia terrestre di *tipo alpino* e di specie estinta. Questo rigore del clima non si mitigò che poco a poco, laonde Diodoro Siculo ed altri scrittori che fiorirono sotto il dominio romano, fanno menzione della Liguria come d'un paese bene spesso coperto di neve.

Industrie e costumi dei cavernicoli.

Descritti sommariamente gli oggetti estratti dalla caverna, mi sia concessa qualche induzione sui costumi e sulle condizioni sociali di coloro che in tempi remoti vi stabilirono la propria dimora e vi lasciarono le loro spoglie.

Premetto che, a mio giudizio, la grotta servì non solo ad uso di cimitero, ma anche a quello di abitazione, poichè l'adempimento di riti funebri non basta a spiegare l'accumulazione in quel breve spazio di tanti avanzi d'ogni maniera. Inoltre le pietre da macina, i macinelli, le accette di rifiuto, logore pel lungo uso, ivi raccolte a diversi livelli, nel terreno, sono segni evidenti d'una lunga permanenza.

Presso i popoli barbari i cadaveri non ispirano ribrezzo e repulsione come alla gente civile e raffinata, laonde non è improbabile che la stessa cavità fosse ad un tempo domicilio di vivi e di estinti.

Se però la grotta servì d'abitazione, credo che ciò non fu in modo continuo, ma saltuariamente e forse soltanto in alcune stagioni dell'anno. Il costume di ricoverarsi nei cavi delle roccie, d'altronde, si protrasse assai tardi nella nostra provincia, talchè Diodoro Siculo potè scrivere dei Liguri del suo tempo: « Costoro dormono la notte nelle campagne e assai di rado in alcune vili baracche o piccoli tugurî, e per lo più in rupi cave fatte dalla natura che possano offrir loro il comodo di tenerli al coperto. E in simil modo hanno tutte le altre cose tenendo appunto l'antico e misero modo di vita [1] ». Che i cavernicoli fossero essenzialmente cacciatori, ce lo attestano i denti di lupo e di cinghiale, di cui si fregiavano come ornamenti o come trofei, nonchè gli avanzi dei loro pasti, prevalentemente costituiti d'ossa di cervo, di capriolo, di cinghiale ecc. E nel dir cacciatori intendo anche guerrieri, poichè in seno alle società primitive, ove la lotta per l'esistenza ferve sotto ogni sua forma, aspra, incessante, inesorabile, non saprei immaginare una di queste qualità disgiunta dall'altra. Inoltre, alcune armi raccolte nella grotta sembrano più che altro arnesi guerreschi. Essi erano all'incontro poco esperti nell'arte d'insidiare i pesci, giacchè non una resta, non una lisca furono trovate fra i rimasugli dei loro pasti. Per altro solevano far incetta di testacei marini e specialmente di patelle e non sdegnavano sepie e ricci di mare. Con pari certezza si può asserire che esercitassero la pastorizia, poichè fra i residui si notano gli ossami di un porco, di un bue, di una pecora e di una capra che vivevano in domesticità. Essi, probabilmente, allorchè conducevano i loro armenti al pascolo, erano armati di tutto punto, pronti a respingere ogni assalto di uomini o di fiere, come oggi fanno i pastori etiopi sempre muniti d'asta e di scudo.

Quanto all'agricoltura, difettano prove dirette per asserire che fosse esercitata; ma il ritrovamento di parecchie pietre da macina accenna all'uso comune di qualche cereale o d'altra pianta che ne teneva luogo, il che difficilmente si concilia colla mancanza d'ogni coltivazione. Ad ogni modo costoro non potevano essere che tristi agricoltori.

Il cibo dei cavernicoli era prevalentemente animale e ciò si rileva dai residui dei loro pasti, costituiti principalmente d'ossa di pecora, di capra, di capriolo, di cervo, di cinghiale, di bue. Oltre a queste specie mangiavano anche all'occasione la lepre, il cane, il lupo e varî uccelli, tra i quali i tetrao e le pernici.

Si ha motivo di argomentare che sacrificassero gli animali domestici destinati ai loro pasti con un colpo di stromento tagliente assestato sulla sommità del cranio. Non risparmiavano gli agnelli ed i capretti ancora lattanti, i cui resti sono abbondanti nella caverna.

I piccoli mammiferi erano trasportati nella grotta e, dopo essere stati cotti e mangiati, le loro ossa rimanevano sul terreno, commiste agli avanzi dei focolari. I grossi mammiferi erano probabilmente uccisi e squartati fuori del sotterraneo, nel

[1] *Biblioteca storica* di Diodoro Siculo volgarizzata dal cav. Compagnoni, II p. 358.

quale non si recavano che pezzi scelti fra i migliori, per farli cuocere e mangiarli. In fatti la caverna non ha somministrato indistintamente ogni specie d'ossa di buoi e di grossi cervi. Vi mancavano, per esempio, i cranî, le vertebre, i bacini e vi abbondavano all'incontro le coste, le mandibole e i frammenti di ossa lunghe.

I trogloditi spaccavano per lungo le diafisi dei ruminanti e dei suini e ne estraevano il midollo per cibarsene o per servirsene alla preparazione delle pelli. A quest'uopo le schiacciavano per mezzo d'un ciottolo o le percuotevano violentemente sopra una pietra tenendole strette da una estremità. Anche i cranî erano sempre aperti per estrarne il cervello. Finalmente le mezze mandibole inferiori solevano esser rotte alle due estremità, forse per cavarne la sostanza polposa che occupa le cavità alveolari. I residui dei pasti accumulati nella grotta erano abbandonati ai cani e poscia, insieme alle altre immondizie, rimanevano preda d'insetti sarcofagi e, putrefacendosi, infettavano l'aria.

Quanto alle loro industrie, erano affatto rudimentarî e per certi rapporti decisamente inferiori a quelle d'altri popoli che non conobbero i metalli. Mancava loro, a quanto pare, la perizia e la diligenza dei loro fratelli d'oltre Alpe nel lavorare l'osso e il corno e sopratutto l'ingenuo senso artistico proprio ai trogloditi dell'età del renne, in Francia, di cui ci rimangono immagini d'animali graffite o scolpite con mirabile verità.

Le loro stoviglie, non tornite e cotte senza l'aiuto del forno, sono per lo più assai rozze e destituite d'ornamenti. Di rado presentano semplici fregi formati di lineette spezzate o meandriformi, d'intaccature fatte col dito o coll'unghia, oppure di orli crenati e di manichi striati. I vasi, di forme goffe e ineleganti, non sono mai ingubbiati, ma qualche volta lisciati a spatola. L'argilla che serviva a fabbricare codesti fittili non era mai depurata e quasi sempre vi si univa a guisa di *tarso,* per accrescerne la resistenza alla cottura, un po' di rena quarzosa o serpentinosa. Gli utensili adoperati dai vasai non erano probabilmente che ciottoli e spatole.

Dalle conchiglie e dai denti artificialmente forati ad uso di monili, di cui già tenni discorso a suo tempo, si vede pure quanto i nostri trogloditi fossero inesperti nell'arte di ornarsi.

La fabbricazione delle armi e degli altri stromenti richiedeva in generale più esperienza ed accuratezza che non quella dei vasi. Le ascie si ottenevano, dopo lungo e paziente lavoro, logorando ciottoli scelti all'uopo sulla superficie di altre pietre. Il frammento di giadeite trovato dall'egregio sig. A. G. Barrili è parte d'un bellissimo anello, il quale non fu condotto a tanta perfezione se non superando le maggiori difficoltà, sia per la durezza della roccia, sia per la forma stessa dell'oggetto.

I signori Forel e Keller hanno dimostrato, d'altronde, come gli artefici dei tempi primitivi potessero forar la pietra più dura e tenace, applicando sulla stessa un cilindro cavo di legno, di corno o d'osso e facendolo ruotare rapidamente, avvertendo di collocare sulla pietra, a guisa di mordente, un po' di sabbia silicea umida.

Credo probabile che le accette e gli altri stromenti litici che si lavorarono colla levigatura fossero fabbricati nella caverna. Non così dei coltellini scheggiati, poichè non si incontrano colà i copiosi residui silicei che risultano immancabilmente da tal fabbricazione.

Gli oggetti raccolti nella caverna delle Arene candide non accennano, in generale, a relazioni con lontani paesi. Le conchiglie che i nostri trogloditi adoperavano per adornarsene o per qualunque altro uso sono tutte di specie mediterranee e provengono, almeno in gran parte, dalle nostre spiaggie. L'ocra gialla e rossa per tingersi, l'argilla di cui fabbricavano il vasellame sono estratti da giacimenti prossimi alla caverna. La selce dei coltellini e dei raschiatoi, se non s'incontra proprio nel Finalese, si trova però a poca distanza fra i monti di Sassello. Quanto alle dioriti, alle affaniti, alle anfiboliti che somministrano i materiali di cui son fabbricati quasi sempre le ascie e gli scalpelli sembrano ciottoli dei corsi d'acqua che scendono dal piovente settentrionale dell'Appennino ligure, come la Bormida, il Tanaro e l'Orba.

La provenienza della giadeite, bellissima pietra di color verde porro e un po' translucida, rappresentata nella collezione dei manufatti litici della caverna da due piccolissime accette e da un frammento di anello forato, è invece un mistero per noi, giacchè questa roccia, i cui caratteri sono così spiccati, non fu mai trovata in posto, non solo in Liguria, ma nemmeno nel resto d'Italia e in Europa. Non se ne conoscono autentici giacimenti che in alcune parti dell'Asia. Nella Cina essa tien luogo di saussurite in una specie d'eufotide diallagica.

Il ritrovamento degli accennati oggetti di giadeite significa forse che i trogloditi mantenevano relazioni di commercio con qualche terra asiatica? Non sarebbe invece un indizio che quella fosse per l'appunto la patria loro originaria?

L'antropologia preistorica non è ancora in grado di rispondere adeguatamente a siffatte domande.

Le accette di pietra levigata della caverna sono analoghe, così per la fattura come per la materia, a quelle che trovansi a poca profondità nel terreno in molti punti della Liguria montana e principalmente nelle alte valli delle due Bormide, nella valle del Tanaro, sui monti che circondano Sassello e nel Finalese [1]. Ivi la copia di tali oggetti sta ad indicare che vi esistevano piccoli centri di popolazione, coi quali probabilmente gli abitanti della grotta ebbero frequenti rapporti.

Riti funebri dei cavernicoli.

Essi seppellivano i loro morti a poca profondità e se si trovarono scheletri coperti di oltre due metri di terra, si è perchè dopo l'inumazione il suolo della grotta fu innalzato da successivi interrimenti. Alcuni scheletri erano deposti sulla roccia quasi nuda.

I sepolcri degli adulti erano difesi da lastroni di pietra greggia in numero di quattro, cinque, sei e perfino otto, i quali formavano, come dissi, una specie d'incassatura che per lo più era incompleta e riparava solamente il capo e il torace. Le tombe di bambini si lasciavano prive di tali pietre. I cadaveri erano abitualmente adagiati sul fianco sinistro, col cranio appoggiato sulla mano sinistra e le ginocchia alquanto piegate in guisa che talvolta si trovarono le tibie assai prossime alla cassa toracica.

[1] Molte di queste accette furono illustrate, insieme ad altri antichissimi manufatti, dal professore B. Gastaldi, nelle sue pregiate Memorie intitolate: *Iconografia di alcuni oggetti d'alta antichità rinvenuti in Italia* (Torino, 1869) e *Frammenti di Paleoetnologia italiana* (Roma, 1876).

Sembra che fossero tutti disposti perpendicolarmente all'asse maggiore della cavità, coi piedi volti verso l'esterno [1].

Presso il lato destro dei morti di sesso maschile si collocava un'accetta di pietra, il cui manico era probabilmente di legno, poichè se fosse stato d'altra materia meno alterabile, se ne sarebbe rinvenuto qualche avanzo. Lo stromento non si trovò mai situato in contatto della mano, ma ad una distanza di 20 a 30 centimetri che corrisponde appunto alla lunghezza del manico, di cui si suppone fosse munito. Presso il lato sinistro era deposto un vaso di terra cotta contenente pietra sanguigna. Tal sostanza, di cui i cavernicoli facevano uso indubbiamente per tingersi il corpo, era destinata ad ornare il defunto, acciocchè apparisse smagliante di rosso nel regno degli spiriti.

Gli estinti erano fregiati dei loro ornamenti ed insegne. Alcuni, forse guerrieri, portavano al collo zanne di cinghiale o denti di lupo, appositamente forati, altri conchiglie bucate.

Quasi in ogni tomba si raccolsero punteruoli d'osso, quali diligentemente lavorati, quali assai rozzi, cioè semplici cannoni di piccoli ruminanti appena aguzzati, arnesi che io considero parte come punte di freccie o di giavellotto, parte come aghi crinali e lesine.

Credo che non si deponessero ascie nè altra maniera d'armi nelle tombe delle femmine e dei bambini. In una delle prime raccolsi un coltellino di selce ed un raschietto della stessa pietra ed accanto alle ossa d'un tenero bambino trovai una scheggia di pietra verde translucida e varie conchiglie. Sole conchiglie e non di specie mangereccie trassi dal sepolcro di un altro morticino; ed ho per fermo che ivi le deponesse una madre pietosa nel comporre per l'ultimo sonno la salma del figliuolo, acciocchè non avessero a mancargli nella vita futura i suoi prediletti trastulli.

Nella terra che copriva le tombe abbondavano gusci di molluschi eduli, nonchè ossa di ruminanti per lo più cotte e spezzate; e sono indubbiamente i resti del banchetto funebre imbandito dai congiunti e dagli amici del defunto dopo, o forse anche durante, ciascuna inumazione. Due o tre volte osservai pure, presso un sepolcro, certe ossa di capriolo nell'ordine delle loro naturali connessioni, ond'io sospetto che ivi fosse stato deposto qualche pezzo di grossa selvaggina, a guisa di scorta per colui che imprendeva il gran viaggio.

Il fuoco destinato a cuocere il pasto sepolcrale era acceso verosimilmente sulla tomba stessa dell'estinto e talvolta così vicino al cadavere che questo ne rimaneva in parte abbruciato. Così si spiega, io credo, l'ustione di cui si scorgono le traccie sugli arti inferiori di alcuni scheletri, nonchè la calcinazione dei femori e delle tibie primamente scoperti, quando iniziai l'esplorazione della grotta.

Il sospetto da me altra volta manifestato che i trogloditi finalesi si abbandonassero all'antropofagia è destituito di fondamento.

[1] Si è già avvertito che sotto gli scheletri, anzi sotto le lastre che formano la base delle tombe, si trovò quasi sempre uno strato di terra bianca. Questo sembra qualche volta un antico suolo della grotta, coperto di polvere calcarea caduta dalla volta (polvere simile a quella che tuttora si deposita nei punti più asciutti della spelonca). Ma non posso dissimulare che in altri casi l'abbondanza della terra bianca e l'irregolarità del deposito mi suggeriscono una ben diversa interpretazione; mi lasciano cioè supporre che fosse artificialmente introdotta in ciascun sepolcro, nel momento dell'inumazione.

Considerando gli strani costumi rivelati dall'esplorazione della grotta, non posso a meno di ricordare lo splendido *Nadowessiers Todtenlied* di Schiller, in cui sono poeticamente rappresentati i riti funebri d'una tribù selvaggia che visse nel territorio dell'Jowa, presso il confluente del S. Pietro col Mississipì (1).

L'uniformità che si verifica nelle condizioni delle sepolture, la scelta delle suppellettili pietosamente deposte in ciascuna, son prove palesi che i trogloditi delle Arene candide professavano il culto degli estinti e adempievano a misteriosi riti, certo poco diversi da quelli celebrati dagli odierni selvaggi, che infine la mente loro già s'innalzava al pensiero d'una vita futura. Laonde io concluderò, con parole tolte a prestito al mio illustre collega E. Celesia, dicendo che « Comunque niun oggetto apparente di culto od altro amuleto si rimanga ne'luoghi ove posero stanza, l'anima loro, commossa allo spettacolo della natura, dovea di necessità inchinarsi a quelle forze cosmiche contro cui aveano a lottare e a quell'ignota virtù che impartia loro la luce e la vita (2) ».

Caratteri fisici dei cavernicoli.

A quale schiatta si debbono ascrivere i cavernicoli delle Arene candide? Sono essi propriamente indigeni o provengono da altri paesi, da lontane regioni?

M'auguro che lo studio degli avanzi umani estratti dalla caverna ci porga il mezzo di risolvere con rigore scientifico gli ardui problemi cui alludono queste domande. Frattanto, quantunque io non abbia titolo di sorta per trattare una questione di pura antropologia, non so trattenermi dall'esporre in proposito le mie impressioni.

Se si confrontino i teschi degli scheletri da me raccolti con quelli dei popoli ora viventi in Italia non si può a meno di notare sensibili differenze, le quali diventano tanto più spiccate se il paragone si istituisca fra i cranî delle Arene candide, dolicocefali, angusti nella regione frontale, sviluppati posteriormente, e i cranî del così detto tipo ligure (ben conosciuti per la dotta illustrazione fattane da Giustiniano Nicolucci) che sono all'incontro rotondeggianti, alti, a fronte larga, a faccia ampia e spianata (3).

E caratteri differenziali del pari ben visibili emergono dal raffronto di altre ossa e particolarmente dei femori e degli omeri, i quali, negli scheletri finalesi, offrono particolarità notevolissime.

(1) Ecco le strofe più caratteristiche di questo canto, il quale in un caso consimile fu già citato da Lyell;

Bringet her die letzten Gaben,
Stimmt die Todtenklag'!
Alles sei mit ihm begraben,
Was ihn freuen mag.
Legt ihm unters Haupt die Beile,
Die er tapfer schwang,
Auch des Bären fette Keule,
Denn der Weg ist lang;

Auch das Messer, scharf geschliffen,
Das vom Feindeskopf
Rasch mit drei geschickten Griffen
Schälte Haut und Schopf.
Farben auch, den Leib zu malen
Steckt ihm in die Hand
Dass er röthlich möge strahlen
In der Seelen Land.

(2) E. Celesia, *Le teogonie dell'antica Liguria.* Atti del R. Istituto tecnico di Genova, 1868-69.

(3) Giustiniano Nicolucci, *La stirpe ligure in Italia nei tempi antichi e moderni.* Napoli, 1864.

D'altra parte, si può riconoscere anche a prima vista una stretta affinità fra i cranî dei nostri cavernicoli e quelli descritti dai sig. de Quatrefages e Hamy come appartenenti alla cosidetta razza di Cro-Magnon (1).

I tipi di questo gruppo etnico si trassero principalmente dalle grotte paleolitiche, di Cro-Magnon, di Solutré, di Laugerie, dei Balzi Rossi (presso Ventimiglia), di Engis, di Engihoul, ben note negli annali della paleontologia umana, nonchè dal ricovero (*abris*) di Lafaye a Bruniquel e dalle alluvioni antiche di Grenelle. Ma se ne hanno esempî di data assai meno antica nella grotta neolitica del *Homme mort* a saint Pierre des Tripier (Lozère), nelle alluvioni superiori di Grenelle, nel dolmen des Vignettes a Lery (Eure) e nel cimitero gallico di Chassemy (Aisne). Di più i caratteri craniologici della medesima razza si ripeterebbero anche al dì d'oggi presso alcuni popoli dell'Africa settentrionale.

Se l'accennata somiglianza veramente sussiste, il che a suo tempo sarà posto in chiaro, se ne dovrebbe concludere che i nostri trogloditi formassero parte d'una schiatta che fu largamente diffusa in Europa nei tempi preistorici, e che, non senza subire profonde modificazioni, si è ritirata in regioni assai più meridionali di quelle che occupava da principio. La ricerca della originaria provenienza di codesta razza si confonde coll'intricatissimo quesito delle origini europee, il quale nello stato attuale delle nostre cognizioni si può dire insolubile.

Intanto, qualunque sia il grado di lor parentela coi cavernicoli di Cro-Magnon e di Bruniquel, non è men certo che i nostri Finalesi son decisamente dolicocefali, e che per essi la dottrina dei brachicefali autoctoni di Esricht, Retzius e Nilsson subisce un nuovo crollo.

La statura degli scheletri d'adulti sembra in generale un po' inferiore alla media. Da varî indizî e sopratutto dalla scabrezza delle superficie d'attacco del tendine di Achille, del muscolo popliteo e del tibiale anteriore si può inferire che appartenessero a robusti camminatori, cui era abituale lo arrampicarsi fra i dirupi.

Essi d'altronde erano ben proporzionati ed esenti da quei morbi che sogliono deformare le ossa. Si deve avvertire tuttavolta che quasi tutti gli individui avevano i denti cariati.

Se poi, considerando quegli ossami calcinati dal tempo, ci facciamo ad immaginare quali fossero i fieri trogloditi, allorchè rosseggianti d'ocra, vestiti di pelli ferine, brandivano la terribile scure di pietra, affrontando orsi e lupi sulle aspre balze della Caprazoppa, la fantasia ce li raffigura magri, macilenti, colle chiome abbondanti ed incolte, la fronte bassa, gli zigomi salienti, il mento prominente, gli occhi infossati, e il volto improntato di selvaggia energia.

Antichità della stazione delle Arene candide.

Rimane ora a toccarsi uno dei punti più gravi ed importanti per la storia della caverna, rimane cioè a ricercarsi in qual periodo di tempo essa fu abitata e servì di sepolcro. Certo è che la massima parte dei manufatti ivi raccolti risale alla seconda

(1) *Crania ethnica, Les cranes des races humaines*, 1re livraison pag. 44. Paris, 1873.

età della pietra o età *neolitica*. Ma questa espressione, come pure le altre di epoca *paleolitica*, di età del bronzo e di età del ferro, sono affatto convenzionali ed esprimono non già periodi cronologici ben definiti, ma piuttosto stadî successivi (non sempre necessarî) nello sviluppo dello spirito umano. Chi non sa che presso gli indigeni di alcune delle terre del Brasile, della Patagonia, della Papuasia, della Polinesia, della Nuova Zelanda è anche al dì d'oggi in pieno vigore l'età della pietra? Che l'Italia e la Grecia non conoscevano ancora l'uso del ferro, quando già la civiltà egiziana edificava le piramidi e i templi di Menfi? Però non senza ragione Paolo Lioy condanna tali espressioni che godono oggi di tanto favore e propone di sostituirle con quelle di *Litoplidi, Calcoplidi* e *Sideroplidi* (armati di pietra, di bronzo, di ferro) applicabili non più ai tempi, ma sibbene agli uomini (1).

Ciò premesso, nel caso speciale del Finalese, mi par probabile che lo stadio della pietra, mentre ebbe principio in tempi antichissimi, si continuò assai tardi e forse finchè i Liguri conservarono la loro indipendenza; perchè, come dissi, nello strato più superficiale della grotta, i prodotti della più schietta età neolitica si trovano commisti a manufatti propriamente romani. Posto che tale strato, della spessezza di mezzo metro, si sia formato dall'epoca della conquista romana fino ai nostri giorni, cioè in circa 20 secoli, saremmo condotti per analogia ad assegnare un'età sei volte maggiore agli strati più profondi. E per quanto concerne gli scheletri umani, siccome erano sottoposti a letti di terriccio stratificato di 50 centimetri, un metro, un metro e mezzo (2), dovremmo ascrivere loro, rispettivamente, un'antichità di 20, 40, 60 secoli.

Ma riflettendo che il continuo innalzarsi del suolo, laddove ciò accade per effetto di temporarie alluvioni, ha necessariamente per conseguenza di rallentare la sedimentazione e ad un certo punto d'impedirla, e tenendo conto dei dati cronologici che emergono dalla fauna fossile della caverna e dallo stato di conservazione delle ossa, è d'uopo argomentare che il computo ci trarrebbe a valori troppo elevati. A me parrebbe discostarmi meno dal vero dimezzando i 60 secoli e scemando d'un terzo i 40, ben si intende relativamente alle reliquie che giacevano sotto stratificazioni di un metro e un metro e mezzo di potenza.

Senonchè l'oscurità quasi completa nella quale ci troviamo, circa la legge che presiede all'accrescimento dei depositi della caverna e riguardo ai mutamenti avvenuti in sì lungo spazio di tempo, nelle condizioni fisiche della stessa, rende mal sicuri i criterî che servono di fondamento a queste induzioni e non ci consente di accogliere le cifre suesposte se non con ogni riserva e solo come un tentativo d'approssimazione.

---

(1) Paolo Licy, *Le abitazioni lacustri*. Venezia, 1876.

(2) Uno degli scheletri fu trovato alla profondità di m. 2,20; ma ignoro qual fosse la spessezza della terra *intatta* e *stratificata* che lo ricopriva.

II.

CAVERNA DEL SANGUINETO O DELLA MATTA.

Questa si domandava altra volta, nel Finalese, *Arma del Sanguineto;* ma è piuttosto conosciuta sotto il nome di *grotta della Matta,* da che servì di rifugio ad una povera demente. Essa si apre sulla riva destra dell'Aquila ed è scavata in un calcare conchiglifero, probabilmente pliocenico.

La sua cavità principale richiama alla mente l'immagine d'un forno e misura nella maggior dimensione circa 22 metri e poco meno di 9 d'altezza. Vi si accede per un sentiero assai scosceso, il quale attraversa un arco naturale formato da un grosso masso che, scivolando dall'alto, rimase appoggiato al monte. Dalla parte di ponente siffatta cavità si continua in un'altra, assai più stretta e bassa, nella quale non si può penetrar che carponi.

Il suolo risulta di una terra grossolana, giallastra, sparsa di pietre, in cui, praticando scavi, s'incontrano zone di color più scuro, ceneri, ossa d'animali e cocci. Nella propaggine occidentale della grotta esso è coperto superficialmente di una spessa crosta stalagmitica. La terra giallastra fu riconosciuta in alcuni punti per oltre 2 metri di profondità.

Il primo ad imprendere ricerche scientifiche nella caverna della Matta fu il R. Don Perrando, il quale vi trovò oggetti di molto interesse che furono brevemente descritti in una sua Nota, presentata al Congresso preistorico di Bologna (1), e sono ora visibili nella sua collezione privata a Sassello.

Dapprima, scandagliando il suolo della cavità principale, presso l'apertura, il nostro esploratore s'imbattè, alla profondità di 15 a 25 centimetri, in una cospicua massa di ceneri, poi, verso il mezzo della stessa cavità, nei resti di uno o di più focolari che contenevano, oltre alle ceneri, cocci, ossa spezzate e cotte, frammenti di calcare e di stalattiti, nonchè parecchi rozzi manufatti, cioè: punteruoli d'osso simili a taluni di quelli che già descrissi, una scheggia di silice, varî ciottoli levigati e certi pezzi di gneiss, logori sopra una delle loro faccie, che a me sembrano macine, e al raccoglitore pietre destinate ad ammollire e mondar le pelli. Proseguendo lo sterro verso l'apertura che mette in comunicazione i due scompartimenti della grotta, egli s'imbattè poscia in altri oggetti che portano le traccie della mano dell'uomo, tra i quali: pezzi di stoviglie, due rozze fusaruole di terracotta, un frammento osseo, un dente e due conchiglie artificialmente forati, per uso di pendagli o d'ornamenti. Ivi, penetrando cogli scavi più profondamente, gli venne fatto di scoprire, a circa un metro dalla superficie, sotto una spessa lastra di stalagmite, una mandibola di bambino e poco lungi, di contro ad uno scoglio sporgente, tre teschi umani, l'uno vicino all'altro. Uno di essi era posato, a quanto pare, sopra un vaso che conteneva materie organiche carbonizzate, nelle quali Don Perrando ravvisa residui di cibarie. Attorno e al di sotto di tali avanzi si raccolsero, nella terra mista di ceneri, altre ossa umane che sembrano aver subìto l'azione del fuoco e parecchi manufatti, cioè: due piccole

(1) *Sur deux cavernes de la Ligurie.* Congrès international d'Anthropologie et d'Archéologie préhistoriques, compte-rendu de la cinquième session à Bologne (1871), p. 165.

ascie di pietra, un pezzo di vaso, un frammento d'osso sul quale son tracciati dei solchi, ed una spatola della medesima sostanza. Nel corso di queste indagini non si osservò alcuna traccia di metallo lavorato o adoperato dall'uomo.

Io visitai la caverna nell'agosto 1876, in compagnia del prof. Emanuele Celesia e dell'ing. Enrile e la trovai così sconvolta dalle anteriori investigazioni che mi parve non mettesse conto il tentarvi nuovi scavi sistematici. Tuttavolta feci assaggiare il terreno in varî punti della cavità principale e ne trassi un certo numero di ossa e di stoviglie. Le prime sono un radio ed una tibia d'un piccolo cervo ed alcune ossa di suino che si riferiscono parte al cinghiale comune, parte al porco domestico.

Quanto alle stoviglie, tutte foggiate senza il soccorso del torno e quasi sempre rozze e malcotte, appartengono a parecchi tipi fra loro molto diversi.

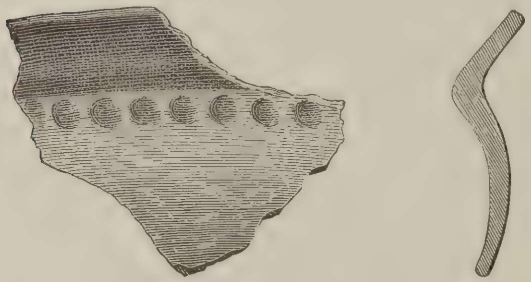
Tre cocci son resti di grosse pentole a manichi della forma più comune, e a pasta grossolana di color rossastro, contenente granelli quarzosi. Un altro coccio offre esempio di manico in forma di tubercolo ed è fatto coi medesimi materiali; alla superficie esterna di esso vedonsi chiaramente le impronte lasciate sulla pasta molle dalle dita dell'artefice. Merita poi di essere ricordato un certo frammento che presenta il margine piegato ad angolo, e faceva parte, secondo ogni probabilità, d'un vaso, la cui metà superiore era stretta e quadrangolare, e l'inferiore rotonda, ventricosa ed un po' carenata. Son venuto in siffatta opinione osservando un vaso di questa specie, quasi integro, raccolto nella stessa caverna dal R. D. Perrando. Già avvertii come un coccio consimile sia stato rinvenuto anche alle Arene candide. La pasta di tali stoviglie non è diversa da quelle delle altre già descritte.

Mi rimangono ancora a registrare due pezzi di terra cotta che appartengono a due vasi di forme non meno distinte. L'uno di questi era piccolo, subsferico e munito di un labbro verticale poco elevato. Esso aveva il margine semplice, portava uno o più manichi della solita fattura, ma piccolissimi ed era foggiato di pasta assai fina, rossastra, esternamente lisciata a spatola, con tanta cura da parer ingubbiata.

Fig. 4.

Pezzo di vaso — ½ della grand. nat.

(R. Museo preistorico di Roma).



L'altro coccio, di pasta nerastra ben cotta, ma grossolana, sembra parte di un vaso di mediocri dimensioni, il quale era in basso rotondeggiante e superiormente provvisto di labbro assai svasato, dell'altezza di 2 centimetri; nella parte del coccio che corrisponde alla base di questo labbro si osserva un fregio formato di una fila di piccoli incavi equidistanti che doveva girare attorno al vaso (fig. 4). Tali incavi sono evidentemente ottenuti colla pressione delle dita ed in ciascuno vedesi un solco in forma di V molto aperto, lasciato da un'unghia lunga e tagliente [1].

[1] A proposito di queste impressioni noterò pure come sembrano fatte da dita assai piccole, il che può lasciar supporre che presso i cavernicoli la cura di fabbricar le stoviglie fosse affidata alle donne o ai fanciulli.

Gli oggetti d'antica industria raccolti in questa caverna dal R. D. Perrando e da me sono parte somigliantissimi, parte identici a quelli rinvenuti negli strati medî e profondi delle Arene candide, per cui si deve argomentare che risalgano alla medesima età. Nè dall'esame dei resti organici raccolti nelle due caverne si potrebbe giungere a diversa conclusione.

Sussiste però una differenza notevole tra il deposito archeologico dell'Arma del Sanguineto e quello delle Arene candide, inquantochè nel primo mancano i frammenti di stoviglie ed altri avanzi d'una industria comparativamente molto innoltrata che abbondano nel secondo (almeno nella parte più superficiale di esso).

Oltre a ciò, credo che la destinazione delle due grotte non fu sempre identica; quella delle Arene candide servì alternativamente e forse anche contemporaneamente di abitazione e di sepolcro; l'Arma del Sanguineto, a mio giudizio, fu solamente una tomba. I tre cranî e le altre ossa umane scoperte da D. Perrando non sono altro infatti che reliquie di tre cadaveri sepolti, con armi e supellettili, precisamente come i venti che giacevano nel suolo delle Arene candide. Ma questi quando furono dissepelliti si trovarono quasi tutti nella loro posizione naturale, mentre gli scheletri dell'Arma del Sanguineto soggiacquero evidentemente a qualche movimento del terreno o ad altro accidente che ne scompigliò le ossa.

Il deposito delle Arene candide è ovunque essenzialmente organico, dirò di più, *umano* ed attesta una lunga dimora dell'uomo. Nella principale cavità del Sanguineto il terreno è quasi privo di cocci e di avanzi organici, tranne in alcuni punti, ove rimangono residui di piccoli focolari, ed anche qui sono assai scarsi. Tra questi, d'altronde, non un solo *utensile,* non un arnese di rifiuto, simile a quelli descritti nella prima parte della mia Memoria. È dunque probabile che quanto si trova nella grotta vi sia stato deposto in occasione di riti funebri.

III.

CAVERNA DI POLLERA.

La caverna di Pollera o di Pian Marino, in vernacolo *Arma di Pollera,* si apre in una collina poco elevata, presso la quale è eretta la cappella di s. Carlo, sulla via che da Calice mette a Feglino. Da Finalborgo alla caverna si può giungere agevolmente in due ore di strada.

Mediante un'ampia apertura quadrangolare si penetra nella cavità più esterna della grotta, la quale ha il suolo pianeggiante e misura 40 metri di lunghezza, 15 di larghezza e poco meno di altitudine. Entrando appena in questa cavità, si trova tosto sul lato destro un vano irregolare, dal quale si scende per ripidissimo declive in un tenebroso baratro, così esteso che vi potrebbe capire una delle nostre maggiori cattedrali. La luce delle fiaccole, che il visitatore suol recar seco si perde in quell'immensità e non permette di apprezzare la straordinaria altezza della volta e la profondità degli androni. Le sue pareti tagliate a picco, ora nude, ora vestite di

panneggiamenti lapidei, i suoi umidi e scoscesi dirupi, i suoi massi accatastati e crollanti offrono ad ogni pie' sospinto aspetti nuovi e bizzarri.

Le pareti e la volta sono costituite del solito calcare pliocenico, il quale è qui arenaceo ed assai facile a disgregarsi, epperò credo che la caverna ebbe origine od almeno acquistò le sue dimensioni presenti pel disfacimento di questo materiale, operato dalle acque correnti.

Il suolo, assai inclinato e disuguale, è generalmente coperto di uno strato più o meno spesso di guano di pipistrello, fetidissimo e lubrico, da cui s'innalzano migliaia di moscerini. Nella parte inferiore della grotta, scorre con lieve mormorio un piccolo corso d'acqua, sopra un letto di ghiaie e di sabbie. Nel fondo della prima camera cioè di contro all'ingresso principale, mette capo un' altra spelonca più piccola, che merita di essere segnalata per la copia e la bellezza delle sue stalattiti e stalagmiti.

Anche la caverna di Pollera fu per la prima volta visitata con intenti scientifici dal R. D. Perrando, le cui investigazioni sortirono risultati migliori nel tratto compreso tra la camera esterna e la china per la quale si scende alla cavità principale. Ivi, appie' di un immane scoglio che minacciava rovina, il suolo fu scavato per più di tre metri e si misero così in evidenza varie stratificazioni contenenti resti dell'uomo e della sua industria; una delle superiori fornì tre pezzi di un cranio umano, una mandibola inferiore di iena, varie ossa di cinghiale e due pezzi di pietra appianati sopra una delle loro superficie. Da uno strato più profondo si trassero una scure di pietra verde e parte d'un altro strumento consimile.

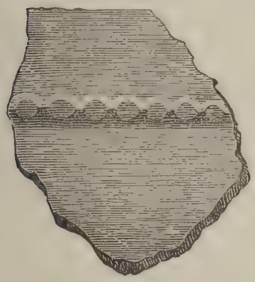
Gli scavi posteriormente eseguiti nella grotta, alla mia presenza e col concorso del comm. Celesia, del sig. Boiga e di altre gentili persone, che prendevano il più vivo interesse alle mie ricerche, ebbero principalmente per oggetto di scandagliare il terreno, per verificare se per avventura non sarebbe stato utile di tentare un' esplorazione completa e sistematica del sotterraneo.

Le fosse più o meno profonde, praticate in cinque o sei punti della prima camera, nella quale mi pareva fosse più probabile la scoperta di antichi focolari o di tombe, diedero a conoscere che il terreno è quasi in ogni parte formato di terra nerastra, oscuramente stratificata e mista di pietruzze, con rare ossa infrante e cocci di antichi fittili. In mezza giornata di lavoro i tre uomini addetti agli scavi non riuscirono ad estrarre più di una ventina di pezzi degni di essere conservati.

Nella estremità della parte media della cavità, si trovò, ad un metro e 20 cent. di profondità, una piccola scheggia di piromaca giallastra, irregolarmente triangolare, forse un frammento di cuspide ad alette, ed è l'unico manufatto raccolto oltre ai frammenti di stoviglie. Questi sono avanzi di vasi non dissimili per la forma e la materia dai tipi più frequenti nella caverna delle Arene candide. Alcuni sono gli abituali manichi di pentola (*auricula pertusa*) di fattura assai rozza; altri son pezzi di vasi, di pasta fina e nerastra, a pareti sottili, a labbra lievemente svasate, a margini semplici, a fondo pianeggiante, ignoro se con manichi o senza; per lo più tali frammenti sono lucidati a spatola. Un terzo tipo è presentato da certi grossi cocci che offrono all' esterno un cordone in rilievo ornato di piccole cavità equidistanti, ottenute colla pressione della dita sulla pasta molle e sono avanzi

di pentole cilindriche, di grandi dimensioni, dalle pareti spesse e dalla pasta grossolana e mal cotta (fig. 5). Finalmente son da osservarsi un pezzo di vaso assai spesso a grosso cordone in rilievo, parallelo al margine, ma senza impressioni digitali, ed un coccio di scodella a fondo piatto e a pareti assai svasate. Di metallo non si rinvenne indizio alcuno.

Fig. 5.
Coccio di terra cotta
¼ della grandezza naturale
(R. Museo preistorico di Roma)



Fra le ossa da me trovate nella grotta è compreso un pezzo di parietale sinistro umano (in cui si osservano parte dei margini destro e posteriore), il quale fu estratto a piccola profondità, presso l'apertura maggiore, unitamente a rimasugli di stoviglie non tornite.

I resti di bruti si riferiscono ai generi *Bos*, *Cervus* e *Sus* e sono precipuamente mandibole ed ossa lunghe, ma ridotte per lo più a frammenti di difficile determinazione (1).

IV.

CAVERNA DELLA ROCCA DI PERTI.

Questa grotta fu esplorata per la prima volta dal prof. Emanuele Celesia, in compagnia del sig. Giuseppe Boiga e dell'ing. Enrile. Essa è scavata nella così detta Costa del Curletto, sotto il monte Rocca di Perti, in cui s'interna per ben 100 metri, e si apre all'esterno a circa 300 metri sul livello del mare, per una sola apertura che misura presso a poco 6 metri di altezza ed altrettanti di lunghezza; tutto ciò, secondo le notizie datemi a viva voce dallo stesso prof. Celesia e pubblicate di poi nel giornale il *Diritto* (2). Il medesimo esploratore, avendo pur praticato qualche scavo nel suolo della caverna, vi scoperse alcuni avanzi d'industria umana, ossa di mammiferi e conchiglie e me li confidò acciocchè li esaminassi e li unissi alla collezione da me fatta nel Finalese, per conto del Ministero dell'Istruzione e a vantaggio del nuovo Museo preistorico di Roma.

Mentre mi professo gratissimo all'amico per l'interessante comunicazione, mi accingo a render conto brevemente delle mie osservazioni intorno agli oggetti raccolti.

Alcuni manufatti della grotta sono cocci di stoviglie. Uno di questi si distingue a tutta prima dagli altri pel suo color nerastro, per la sua lucentezza semimetallica e per certi solchi sottili, paralleli, equidistanti di cui è coperta la sua superficie interna, i quali furono certamente ottenuti col torno; la sua pasta è nera, omogenea e, sottoposta al saggio chimico, apparve costituita di pura grafite. Tanto basta per asserire che si tratta d'un pezzo di crogiuolo di data recentissima, analogo a quelli che servono tuttora alla fusione dei metalli preziosi. Il ritrovamento di siffatto coccio è indizio, se non prova, che la grotta servì di officina e di nascondiglio a falsi

(1) Il *Cervus* è indubbiamente l'*elaphus*.
(2) Paleontologia. Caverne ossifere della Liguria. *Il Diritto*, 1876, n. 353.

monetarî. Un altro coccio, cioè un frammento d'ansa, sia per la qualità della pasta, sia per la sua forma, non può considerarsi che come un resto di anfora romana.

All'arte cosidetta preistorica appartengono invece, senza dubbio, alcuni resti di vasi non torniti e mal cotti, la cui pasta assai grossolana è mista di sassolini. Il più notevole di questi frammenti è di color bruno, lisciato a spatola e presenta un grosso cordone in rilievo, ornato di impressioni equidistanti, ottenute premendo col dito la pasta ancora molle. Un altro vuol essere qui rammentato, perchè porta un piccolo manico riferibile al tipo solito delle caverne ligustiche; un terzo poi è un pezzo di fondo pianeggiante, cui va unita parte della parete.

In fatto di strumenti litici, non mi fu comunicato che un rozzo coltellino di arenaria a grana finissima, lungo 63 millimetri e largo 18, di sezione triangolare, appuntato ad una estremità e troncato all'altra. I due tagli di questo arnese sembrano un po' logorati dall'uso.

Fra gli oggetti raccolti dal comm. Celesia, sono poi compresi due piccoli ciottoli di spiaggia marina che probabilmente furono recati nella grotta per mano dell'uomo.

La fauna della caverna è rappresentata, nella raccolta sottoposta al mio esame, dai seguenti pezzi:

1. Parte d'un radio sinistro d'un grossissimo orso, probabilmente dell'*Ursus spelaeus*.

2. Parte d'una vertebra dorsale d'un orso più piccolo.

3. Un epistrofeo di ruminante (verosimilmente di cervo), sul quale si vedono incisioni trasversali, praticate da uno stromento da taglio.

4. Due valve di *Donax trunculus*, mollusco edule abbondante in tutti i bassi fondi arenosi del Mediterraneo.

Da quanto precede si può arguire che la caverna della Rocca di Perti, al pari di altre in Liguria, fu abitata o almeno visitata dall'uomo in diverse epoche e che il suolo della stessa ebbe a subire qualche artificiale sconvolgimento, in virtù del quale si trovano ora commisti oggetti di remota antichità ed altri comparativamente recenti.

Siffatte indagini, comunque poco estese, danno chiara prova che una completa esplorazione dell'Arma della Rocca di Perti offrirebbe un'ampia messe di oggetti pertinenti alla Paleontologia e all'Archeologia preistorica e pertanto m'auguro che il prof. Celesia non voglia arrestarsi in sì buon punto.

V.

CAVERNA DELLE FATE.

Posizione, estensione e contenuto della Caverna.

Questa è scavata nel Bricco di Peagna, sulla riva sinistra del Rio dei Ponci, proprio di contro al ponte romano di Verzi, e mette all'esterno per due aperture, l'inferiore delle quali è situata a forse 100 metri sul livello del torrente (¹). Essa

(¹) Si tratta di una misura *a occhio* e quindi approssimativa.

dista due ore di buon cammino da Final Pia, un'ora appena da Calvisio e pochi momenti dall'alpestre borgo di Manie.

L' accesso della grotta è piuttosto facile, ma le sue due aperture principali, essendo occultate da folti cespugli, riesce malagevole il rintracciarle senza l' aiuto d'una guida.

Il primo a visitar la grotta fu, a mia cognizione, l'amico mio capitano Enrico d'Albertis, il quale vi penetrò dapprima solo, indi in compagnia dei signori Brown e Brooke e più recentemente, l'8 novembre 1876, vi ritornò seguìto dagli stessi esploratori e dallo scrivente. Quest' anno mio fratello Alberto e in ultimo il R. D. Perrando, per mia istigazione, perlustrarono di nuovo la caverna e vi fecero alcuni scavi.

In ciascuna di queste gite si raccolsero, alla superficie del sotterraneo e più o meno profondamente nella terra che ne occupa le anfrattuosità, avanzi di mammiferi in grandissima parte riferibili al genere *Ursus*.

Il Bricco di Peagna, come quasi tutti i monti del Finalese, risulta alla parte inferiore di calcare assai antico, destituito di fossili e superiormente da una formazione pliocenica assai svariata nei suoi aspetti. La grotta è scavata in quest'ultima che ivi assume i caratteri di un conglomerato a grossi elementi.

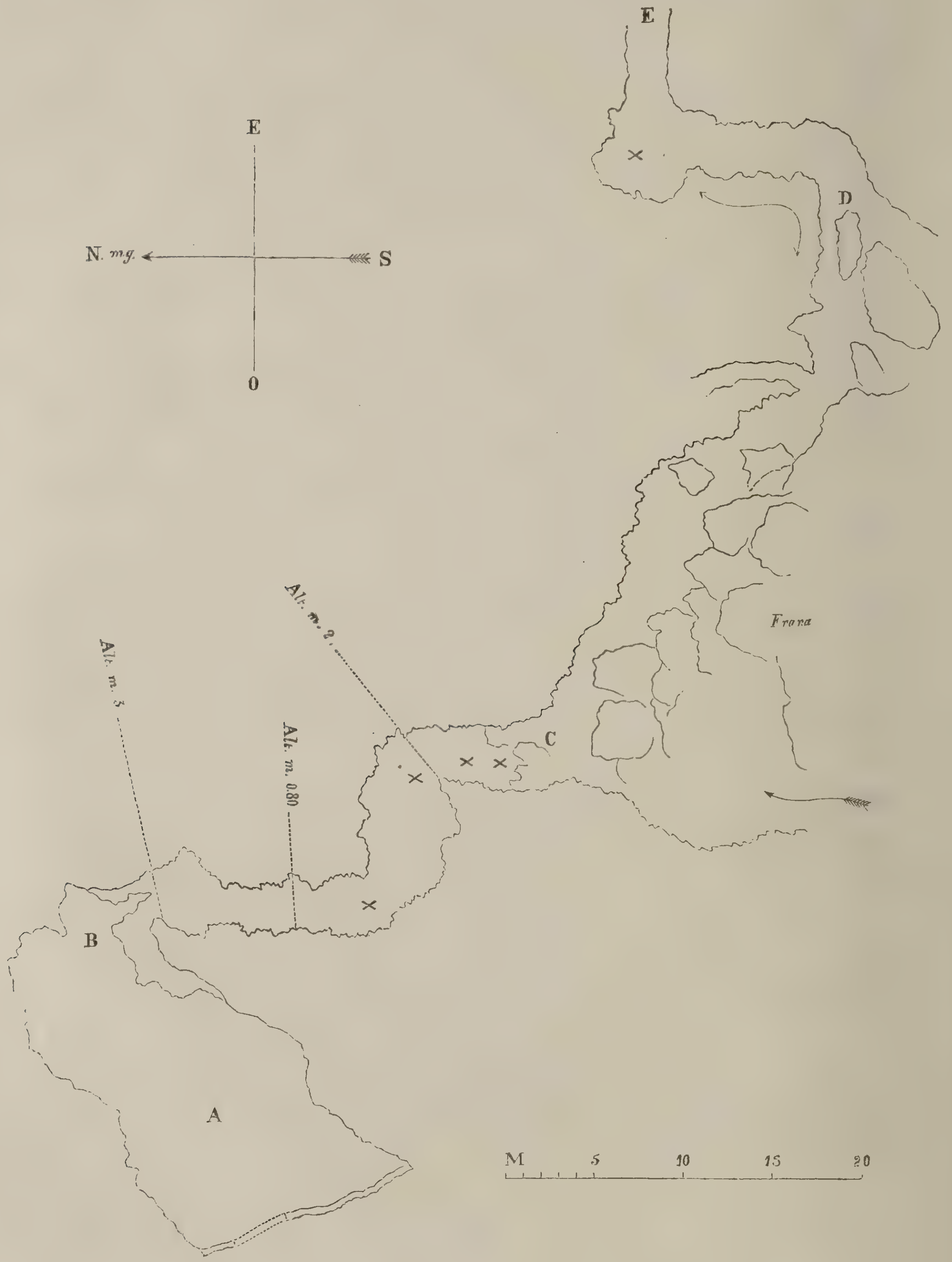
L'apertura inferiore, fra le due suaccennate, è di forma semicircolare ed amplissima e fu chiusa parzialmente mediante un muricciuolo a secco, acciocchè potesse servire ad uso di ovile.

La prima cavità che s' incontra in A B (fig. 6) è larga in media 12 metri e profonda 20. A circa 2 metri d'altezza, sopra l'attuale livello del suolo, si vedono aderenti alle pareti i resti di un sepimento stalattitico, in cui sono incastonati denti d' orso e cocci di stoviglie; ciò in conseguenza di uno sterro artificiale, eseguito probabilmente all'epoca in cui fu edificato il muricciuolo. I denti d'orso e i cocci significano, come dimostrerò in seguito, che la grotta servì successivamente di covo alle belve e di dimora all'uomo.

In fondo a questo vestibolo, la parete che guarda il mezzogiorno offre una specie di scaglione, alto circa 2 metri sul suolo circostante, al di sopra del quale sbocca un angustissimo e tortuoso cunicolo, diretto presso a poco verso sud-est. Il primo tratto di esso, che misura circa 15 metri di lunghezza, si percorre carponi, poscia la volta stalattitica si innalza e le pareti si allontanano, talchè si può proseguire per altri 15 m. senza chinar la testa. Procedendo poscia nella medesima direzione, si penetra in una seconda trafila costituita da una cavità originariamente assai ampia, ora in gran parte ostruita da centinaia di grossi massi, attraverso i quali trapela in qualche punto la luce esterna. Oltre la frana la cavità si biforca: da un lato si continua in un angusto corridoio che volge prima a settentrione, poi a levante e infine sbocca in una serie di grandi spelonche ricche di stalattiti; dall'altro mette in un passaggio, il quale, piegando a ponente fra i massi dirupati, conduce finalmente all' esterno.

Fig. 6.

Pianta della caverna delle Fate (da un rilievo approssimativo del cap. D'Albertis).



Il suolo della grotta è ovunque assai ineguale e risulta di una terra grossolana, rossiccia, mista di massi angolosi, coperti in qualche punto di concrezioni stalattitiche.

Fra C e D (fig. 6), vale a dire nel tratto in cui avvenne lo scoscendimento, le ossa scarseggiano. Il punto estremo verso levante ove s'incontrano ancora è l'angolo formato dal corridoio D E. Le ossa giacenti nella caverna sono generalmente rotte, ma non molto alterate chimicamente; in molte si osservano segni di logoramento, nelle estremità articolari e talvolta le epifisi loro sono, per effetto del logoramento, quasi scomparse. Peraltro, stante l'abbondanza di tali fossili, non fu difficile di raccoglierne un buon numero d'interi e perfetti, massime fra i piccoli esemplari. Il loro colore è d'un giallo traente al bruno o al rossiccio e talvolta sono inquinati superficialmente da incrostazioni terrose e macchie carboniose. Essi allappano un poco alla lingua, ma questo carattere, al pari di altre particolarità dipendenti dal maggior o minor grado di freschezza, è assai variabile tra i diversi esemplari.

Le ossa raccolte dai miei amici e da me nella caverna delle Fate sono in numero di circa 450 ed appartengono a mammiferi di ogni età, dal poppante al vecchissimo (¹). Sei di esse si riferiscono al genere *Felis*, due al genere *Cervus* e le altre senza eccezione sono avanzi d'orso.

Avanzi di Felini.

Tra le ossa di felini un esemplare assai caratteristico appartiene al *Felis spelaea* o leone delle caverne, gli altri cinque spettano al *Felis antiqua*.

Il primo è un grosso pezzo di mandibola inferiore, in cui si conserva quasi tutta la parte media dell'osso, col ferino e l'ultimo premolare in posto. Esso corrisponde per la forma e per le dimensioni all'esemplare figurato da Schmerling, nella sua classica opera sulle ossa fossili della provincia di Liegi (Vol. II, tav. XIV, fig. 11), senonchè il nostro fossile ha la dentatura un po' più robusta.

Il premolare, dalla base larga, dalla corona tricuspidale, il ferino, diviso in due lobi alti, compressi, a margini taglienti, trattandosi di un animale di mole così cospicua, non possono lasciar ombra di dubbio sulla identificazione del fossile. Dal confronto del pezzo ora descritto coll'osso omologo d'un leone adulto, risulta che il primo è comparativamente più robusto, più grosso e sopratutto più alto; il premolare vi apparisce più largo e più alto, il ferino offre tra i suoi lobi un angolo più aperto che è di 110°. V'ha tuttavia molta affinità (²).

Reco qui appresso le misure di questo fossile, suscettibili di presentare qualche interesse:

(¹) In questo numero si tien nota dei denti e dei frammenti ossei determinabili.

(²) Il confronto fu fatto con due teschi di leoni d'Abissinia, posseduti dal Museo civico di Genova, e con un cranio della stessa specie e di località ignota, appartenente al Museo zoologico di questa R. Università.

Altezza della mandibola sotto il ferino	millim. 55
Altezza della mandibola sotto il premolare	» 57
Spessezza massima della mandibola sotto il ferino	» 26
Altezza della corona del premolare	» 17
Lunghezza del medesimo	» 29
Larghezza massima del medesimo	» 15
Altezza della corona del ferino	» 22
Lunghezza del medesimo	» 30
Larghezza massima del medesimo	» 16

Le ossa di *Felis antiqua* sono: una parte di mascellare superiore destro, con un dente in posto, due mezze mandibole inferiori, ciascuna delle quali è armata del proprio ferino e dell'ultimo premolare, e due atlanti.

Nel primo pezzo il dente superstite è il secondo premolare, cui manca una porzione della corona (Tav. IV. fig. 1). L'alveolo del primo premolare è obliterato, quello del canino non ha di notevole che la sua ampiezza e la direzione prossima alla orizzontale. La mandibola inferiore destra è quasi completa, ma un po' sbocconcellata all'estremità posteriore. Del suo canino non rimane che la radice, grossa e profonda; il secondo premolare e il molare (ferino) sono perfettamente conservati (Tav. IV, fig. 3).

L'altra mezza mandibola manca dell'estremità anteriore ed è un po' guasta posteriormente; i due denti che vi rimangono, cioè il secondo premolare e il ferino, sono assai logori e smussati per vecchiaia.

A tutta prima si può avvertire che questi avanzi non possono appartenere al leone delle caverne, perchè sono troppo piccoli e relativamente poco robusti. Offrono invece la più stretta somiglianza colle ossa omologhe della pantera e corrispondono perfettamente alle descrizioni e alle figure del *F. antiqua* che si considera da taluni come il rappresentante fossile del vivente *F. pardus* (1).

Istituito il confronto fra le mezze mandibole della grotta delle Fate e quelle d'una grossa pantera d'Abissinia che figura nella collezione del Museo civico di Genova, le prime appariscono un po' più grandi e più forti; il corpo loro è comparativamente più alto e un po' più convesso nel margine inferiore, i denti sono in proporzione più spessi, è un po' maggiore la distanza fra l'apofisi coronoide e il ferino e finalmente l'incavatura alla parte posteriore della mascella, sulla faccia esterna di essa, sembra alquanto più profonda. Tali differenze, peraltro, son così lievi che non bastano ad escludere i dubbî affacciati riguardo alla legittimità del *F. antiqua*, per dissipare i quali sarebbe necessario paragonar fra loro scheletri completi dei due tipi; ma ciò essendo impossibile, il miglior partito mi sembra per ora quello di conservar provvisoriamente, nella nomenclatura, il *F. antiqua*.

(1) Si veda in proposito: Gervais, *Recherches sur l'ancienneté de l'homme et la période quaternaire*, pag. 67, tav. XIII. Paris, 1867. — Hamy, *Précis de Paléontologie humaine*, pag. 172. Paris, 1870.— Lartet, *Carnassiers et Rhinocéros fossiles du midi de la France*. Annales des sciences naturelles, vol. VIII, pag. 170.

Questa specie fu segnalata da Falconer e Busk presso Gibilterra (nella grotta di Genista) da Marcel de Serres, Dubreuil e Jeanjean a Lunel-Vieil, da Gervais a Mialet, da Fontan nella grotta superiore di Massat. È probabilmente la medesima di cui Bourguignat scoprì alcune ossa nella caverna di Mars, presso Saint-Cézaire, (Alpi marittime) e che Lartet descrisse col nome di *Felis leopardus fossilis*, seguìto da un punto d' interrogazione.

Quanto al gran *Felis* delle caverne, la sua distribuzione geografica era invero estesissima, giacchè fu segnalato nelle località di Clermont-sur-Ariège, Ver, Grenelle, Rigabe, Lherm, Lunel-Vieil, Mialet, Aurignac, Les Eyzies, Echenos, Nizza (Francia), Goffontaine, Montfat (Belgio), Gaylenreuth, Sundwich, Bauman, Scharrfeld (Germania), Kirkdale, Kent's-Hole, Oreston, Gower, Wokey (Inghilterra). Nelle tre prime località si trovò in depositi alluvionali, nelle altre in grotte o spaccature.

Seguono le dimensioni della mezza mandibola destra di *Felis antiqua*:

Distanza fra l'alveolo del canino e l'estremità dell'apofisi coronoide.	millim.	127
Distanza fra l' alveolo del ferino e l'estremità dell'apofisi coronoide .	»	58
Distanza fra l'alveolo del canino e quello del secondo premolare . .	»	32
Altezza della mandibola sulla perpendicolare abbassata dalla estremità dell'apofisi coronoide	»	63
Spessezza massima del corpo dell'osso, misurata sotto il premolare . .	»	19
Larghezza della corona del ferino	»	22
Altezza della medesima	»	15

Avanzi d'Orso.

Le ossa e i denti d'orso raccolti nella caverna rappresentano almeno 26 individui dei due sessi e d'ogni età, i quali si riferiscono quasi tutti ad una varietà dell'*Ursus spelaeus.* Alcuni avanzi, per verità poco caratteristici, accennano ad un'altra forma, più rara, un po' diversa.

Cranî. Uno dei due cranî raccolti spetta evidentemente ad un individuo che può già dirsi adulto, quantunque non abbia raggiunto tutto lo sviluppo di cui era suscettibile. Infatti le sue suture sono saldate, la dentizione è completa; ma le ossa sono ancora sottili e le creste craniensi poco estese. L'altro, all' incontro, appartiene decisamente ad un giovane. Il primo adunque si presta assai meglio alle osservazioni ed ai confronti che possono condurre alla determinazione della specie.

Questo cranio, che ha le dimensioni dei maggiori dell'orso ordinario, non arriva a quelle che abitualmente raggiungono i teschî d'*U. spelaeus* (Tav. V, fig. 1, 2).

In confronto del primo, la sua scatola craniense è più alta ed anche *un po' più ristretta*, come strozzata nella parte mediana, quantunque in complesso possa dirsi più ampia; la sua fronte è al di sopra *convessa* e all' innanzi più prominente, presentando inoltre due gobbe frontali sufficientemente distinte. La cresta sagittale [1]

[1] Per evitare le circonlocuzioni attribuisco alle creste il nome delle suture cui corrispondono.

è nel nostro fossile meno alta che nell' *arctos* adulto, massime alla parte posteriore, ma si avanza anteriormente più che non faccia in questa specie; la cresta lambdoidea è più spessa ed insieme meno sviluppata, meno elevata alla parte media e non tanto sinuosa. L'osso occipitale è più ristretto e meno inclinato dall'indietro in avanti; il foro occipitale è più ampio, i condili offrono maggiore sviluppo e solidità.

Le orbite sono più ampie nel cranio fossile che nel fresco e di forma diversa; nel primo il margine anteriore del frontale è quasi piegato ad angolo e perciò le occhiaie assumono in esso una forma subquadrata caratteristica che non hanno nel secondo. Il muso sembra un po' più lungo che nell'*arctos*; ed apparisce tale, quantunque il fossile sia un po' mutilato all'estremità anteriore. Le due serie dei molari nel cranio del Finalese sono *più lontane* e più *convergenti in avanti* che non nel cranio dell' orso vivente; i canini sono più robusti; il ferino ha il lobo anteriore più sollevato e il tallone meno sviluppato; l'ultimo molare, in proporzione più lungo, *non è contratto posteriormente*; lo spazio fra i ferini e i canini è assai maggiore.

L' orso delle Fate ha la scatola craniense comparativamente assai più ampia, meno alta e molto meno strozzata nel mezzo di quella dell' *Ursus spelaeus* tipico; la sua cresta sagittale è assai meno lunga (circa della metà) e più bassa e si suddivide anteriormente in due rilievi che poco innanzi svaniscono. Mentre nell' orso delle caverne la cresta suddetta raggiunge talvolta $^2/_3$ della lunghezza totale del cranio prima di dividersi, nel mio fossile non arriva che ad un $^1/_3$ di tal lunghezza ([1]).

La cresta lambdoidea, assai poco sviluppata e leggermente sinuosa, presenta, veduta di prospetto, un *angolo ottuso*; quella dell'*U. spelaeus* tipico, oltre ad essere più estesa e sinuosa, offre invece un *angolo acuto.* Nell'ultima forma l'occipitale è più inclinato e i condili dell'occipite sono più robusti e salienti.

Nel mio fossile, inoltre, la regione anteriore del cranio è meno rigonfia, le gobbe frontali sono *meno prominenti*, la regione interfrontale *meno incavata,* le arcate zigomatiche non sono tanto protratte ([2]), il muso è meno largo anteriormente, la base del cranio è più larga, specialmente alla parte mediana. Estendendo il confronto ai denti del mascellare superiore, l'ultimo e il penultimo molare si mostrano un po' più brevi e i canini meno robusti.

Il cranio n. 2 non ha le suture ossificate e però, come dissi, spetta evidentemente ad un individuo giovane. Esso conserva tuttavolta i caratteri generali del n. 1, da cui differisce perchè è comparativamente un po' più allungato e sottile, perchè ha la fronte meno prominente e per certe particolarità delle creste sagittali e lambdoidea: la prima è più elevata, un po' sinuosa ed accenna alla parte anteriore (verso la sutura

([1]) È probabile che alcune di tali differenze dipendano, almeno in parte, dalla diversa età degli esemplari confrontati. Il cranio che mi servì di termine di paragone appartiene infatti ad un individuo assai vecchio. Questo cranio proviene da una grotta dei Pirenei e forma parte della raccolta del Museo civico di Genova

([2]) Tali arcate non sussistono più che in parte. Tuttavia, da quanto rimane si può scorgere l'accennata differenza.

fronto-parietale) ad una biforcazione, si continua, cioè, in due lievissimi rilievi che finiscono al di sopra dell'orbita corrispondente; la cresta lambdoidea è sottile, ondulata, e poco elevata. Il punto ove convergono le due creste, anzi le tre, contando anche l'occipitale, breve e poco sentita, offre un ingrossamento, il quale è portato alquanto all'indietro.

Nei due teschi ora descritti non si conservano le estremità dei mascellari superiori e quindi non si può vedere quanti e quali sieno i denti anteriori. Ma gli alveoli di questi denti si osservano perfettamente in due frammenti di mascellari, l'uno destro, l'altro sinistro, compresi nella mia raccolta. Il primo offre l'alveolo del canino, che è assai ampio e quelli di tre incisivi; il secondo ha *solo* gli alveoli del canino e di due incisivi. In entrambi poi il margine esterno dell'osso, fra il canino e il ferino, è *affatto destituito* dei piccoli premolari e dei loro alveoli.

Misure del cranio d'orso n. 1.

Lung. del margine incisivo alla sommità della cresta occipitale, circa (1)	mill.	420
Larghezza del cranio fra le apofisi postorbitali del frontale	»	121
Distanza fra la linea che unisce le suddette apofisi e la cresta occipitale.	»	208
Larghezza del cranio fra le arcate zigomatiche (2)	»	225
Altezza verticale del cranio a livello della spina occipitale	»	94
Altezza del punto più prominente del cranio	»	155
Altezza del cranio nel mezzo della linea che riunisce le due apofisi postorbitali	»	150
Maggior diametro trasversale della scatola cerebrale	»	105
Lunghezza basale del cranio fra il margine inferiore del foro occipitale e il margine inferiore degli alveoli degli incisivi, circa (3)	»	380
Larghezza del palato fra le corone degli ultimi molari	»	56
Minor diametro trasversale tra i temporali	»	80
Spazio longitudinale occupato dai tre molari superiori	»	76
Larghezza del foro occipitale	»	32

Mandibole. Tra complete e quasi intere potei esaminare non meno di 5 mezze mandibole dell'orso delle Fate ed altri 12 frammenti più o meno voluminosi.

Le suddette mezze mandibole, in confronto di quelle dell'*U. arctos*, sono più grosse, più robuste e più *alte*, le loro apofisi coronoidi sono più estese, i condili più spessi e forti. I molari sono in esse più larghi; *l'ultimo non è mai ristretto posteriormente.* Il ferino è sempre, in proporzione, *più largo nella base* e presenta generalmente un tubercolo maggiore conico e due minori arrotondati, nonchè un piccolo tallone. Fra il ferino e il canino della stessa parte, il margine dell'osso è d'ordinario meno incavato

(1) Qui è detto circa, perchè manca il margine incisivo.
(2) Anche questa misura è incerta, essendo le arcate incomplete.
(3) L'incertezza dipende dalla circostanza già addotta al n. 1.

e non offre, in ogni caso, che un solo alveolo o un solo premolare gemmiforme, mentre nell'*arctos* tali denti o gli alveoli che li rappresentano, allorchè son caduti, si trovano spesse volte in numero di due o tre. I canini sono generalmente più robusti, più lunghi e meno assottigliati nella corona.

Anche le mandibole, come i cranî, offrono più stretti rapporti colle parti omologhe dell' *Ursus spelaeus* che con quelle dell' *Ursus arctos.* Si verificano in esse i caratteri generali del primo, colla differenza che sono in complesso più piccole e meno robuste, specialmente nei condili; l'apofisi coronoide è meno prominente e non tanto incavata alla base. Nella massima parte delle mandibole il margine superiore dell'osso compreso fra il ferino e il canino è appena un po' concavo, come nell' *U. spelaeus;* in una è invece assai arcuato come nell' *U. arctos.*

Seguono le misure di alcune mezze mandibole delle Fate:

	N. 1	N. 2	N. 3
Lunghezza fra l'estremità superiore dell'apofisi coronoide e il margine anteriore dell'alveolo del canino . . . . mill.	254	278	238
Altezza fra il margine inferiore dell'osso e il superiore dell'apofisi coronoide . . . . »	125	132	117
Altezza dell'osso sulla perpendicolare abbassata dal margine anteriore dell'alveolo dell'ultimo molare . . . . . . »	71	73	60
Distanza fra il margine posteriore dell'alveolo dell'ultimo molare e il margine anteriore dell'alveolo del ferino . . . . »	94	100	90
Distanza fra quest' ultimo margine e il canino . . . . . . »	52	56	54
Lunghezza dell'ultimo molare . . . . »	25	27	24
Larghezza dell'ultimo molare . . . . »	18	18 ½	17
Lunghezza della corona del canino . . . . »	40	38	34
Distanza fra la base del condilo e la punta dell'apofisi coronoide »	80	85	79

Quanto ai denti, ciascuna delle nostre mezze mandibole è munita di due grossi molari, di un ferino e di un canino; ma in tre, un po' all'indietro del canino, vi è l'alveolo di un piccolo premolare gemmiforme, in una l'alveolo è obliterato e in un'altra il piccolo premolare è in posto. I molari ripetono, in piccolo, le forme di quelli del grande orso delle caverne; se però si volesse sottilizzare, si potrebbe dire che sono comparativamente un po' più stretti; l'ultimo molare non è mai molto attenuato posteriormente come nell'*arctos* e come in certe varietà dello *spelaeus.*

Il ferino è assai più variabile degli altri denti ed offre, si può dire, tutte le gradazioni fra il dente a tre grosse colline maggiori e a tallone sporgente dello *spelaeus* e quello ad un solo tubercolo dell'*arctos.* In generale questo dente ha nei fossili di cui tengo discorso due tubercoli anteriori piccoli ed arrotondati, un tubercolo mediano esterno, robusto e conico ed un tallone posteriore appena accennato, cui s'accompagna talvolta un rilievo interno, lievissimo, poco distinto dalla collina principale. Passando in rassegna i ferini isolati raccolti nella caverna, si osserva che ve ne ha uno il quale non differisce guari dal dente omologo dell'*arctos* ed altri invece che presentano più o meno accentuate le caratteristiche dello *spelaeus* (Tav. V, fig. 5, 6).

I canini in posto che osservai tra i miei fossili ripetono le forme generali di quelli dell'*U. spelaeus,* ma sono d'ordinario meno robusti (Tav. V, fig. 4). Tra i denti isolati, alcuni però hanno la corona tanto assottigliata e la radice così debolmente compressa, che sembrano riferirsi ad altra specie (Tav. V, fig. 3).

Rispetto ai denti isolati delle due mascelle basterà per adempiere al mio assunto che io porga le dimensioni del maggiore e del minore di ciascuna specie [1].

Dimensioni dei denti d'orso trovati nella caverna delle Fate.

Denti anteriori.

		Lunghezza	Larghezza	Spessezza	Lunghezza della corona	Larghezza alla base della corona	OSSERVAZIONI
Incisivi esterni superiori	maggiore mill.	57	16	14	22	15	
	minore »	47	12½	10	18	13	
Incisivi interni superiori	maggiore »	34	10	7	9	10	Manca circa una metà della corona.
	minore »	27	9½	6	13	9½	
Incisivi interni inferiori.	»	28	8	3	10	8	
Canini superiori . . . . ,	maggiore »	110	36	24	43	26	Ve ne sono alcuni più voluminosi, ma non interi.
	minore »	105	29	19	35	24	Nella mia raccolta ve ne ha forse di più piccoli; non è certo però che appartengano alla mascella superiore.
Canini inferiori	maggiore »	96	29	19	37	25	
	minore »	84	19½	13½	33	22	

[1] Questi denti sono circa un centinaio e, tra sani e guasti, vi son compresi 45 canini.

Denti posteriori.

		Lunghezza della corona	Larghezza della corona	Altezza della corona	OSSERVAZIONI
Premolari superiori (ferini)	maggiore mill.	19	14½	10½	
	minore »	16	11	11	
Premolari inferiori (ferini)	maggiore »	14	9½	10	Questo presenta un tubercolo grande, due piccoli ed un tallone.
	minore »	12	8½	6½	È munito di un tubercolo maggiore, di uno minutissimo e di un piccolo tallone. La sua radice è semplice [1].
Penultimi molari superiori	maggiore »	25	18	10	
	minore »	24½	17½	10	
Terzultimi molari inferiori	maggiore »	29	14	11	
	minore »	26	12	10½	
Penultimi molari inferiori	maggiore »	29	17	11	
	minore »	27	16½	9	
Ultimi molari superiori . .	maggiore »	45½	22	8	
	minore »	39½	21	9½	
Ultimi molari inferiori. . .	maggiore »	26	18	8½	
	minore »	21½	16½	9	

Vertebre. Ne ho avuto sotto gli occhi non meno di 97, quasi tutte intiere e in discreto stato di conservazione. Si verificano fra queste notevolissime differenze di dimensioni; ma ciò non basta, io credo, per ammettere che la caverna abbia dato ricetto a più d'una specie d'orso. D'altronde i caratteri differenziali di queste ossa furono poco studiati e non somministrano criterî sicuri. Tra le vertebre figurano tre atlanti quasi intatti che corrispondono perfettamente per forma e dimensioni a quelli rappresentati dallo Schmerling nella fig. 1, tav. XXXIII della sua classica opera [2]. La lunghezza del più voluminoso raggiungerebbe, se fosse completo, 175 millimetri. Gli epistrofei, nel numero di 4, ma incompleti, corrispondono presso a poco alla fig. A della tavola precitata; senonchè sono piccoli e il corpo loro sembra più breve. Le

(1) Si tratta proprio di un ferino?

(2) Sono invece proporzionatamente più bassi dell'atlante figurato nella *Paléontologie lombarde.*

altre vertebre cervicali, dorsali e lombari sono generalmente minori delle omologhe figurate dallo Schmerling; le caudali mancano.

Omeri. Ne ebbi 9 della parte destra, di cui 2 interi, e 11 della sinistra, di cui uno solo intatto. Fra questi si osservano esemplari di varie dimensioni, ma poco diversi nelle proporzioni relative delle varie parti. In generale corrispondono alla fig. 2 della tav. XXIII di Schmerling, quantunque un po' minori; uno di essi sembra invece coincidere colla fig. 2 della tav. XXIV. Due omeri, di cui non si conserva che il capo articolare, hanno la fossa olecranica attraversata da un foro di 2 centimetri di diametro nell'uno e di un centimetro nell'altro.

I due pezzi ora ricordati sono di mezzana grandezza e forse un po' meno robusti degli altri; ma non vi si osserva alcun'altra particolarità degna di nota.

Dimensioni		N. 1	N. 2
Lunghezza	mill.	420	339
Contorno dell'osso ov'è più sottile	»	160	120
Maggior diametro dell'articolazione superiore	»	102	85
Maggior larghezza dell'art. inferiore	»	118	97

Cubiti. Ne ebbi 3 destri e 4 sinistri, quasi completi, e non meno di 8 frammenti. Quantunque appartenenti probabilmente ad individui di varie età e dei due sessi, queste ossa offrono tra loro lievi differenze. Esse corrispondono in generale alla fig. 1 della tav. XXVI di Schmerling, senonchè sarebbero un po' meno robuste dell'esemplare figurato. Alcuni frammenti accennano piuttosto alla forma effigiata nella fig. 2, tav. XXV.

Dimensioni		
Lunghezza	mill.	342
Larghezza dell'olecrano	»	44
Corda della grande cavità sigmoide	»	65
Contorno dell'osso ov'è più sottile	»	98
Diametro maggiore della testa dell'ulna	»	51

Radî. Tra queste ossa, di cui esaminai 6 esemplari completi (3 destri e 3 sinistri) e 11 frammenti, si manifesta una forma robusta ed una forma gracile, di cui non potrei dire con sicurezza se non appartengono a due specie o varietà o piuttosto ad individui di sesso diverso. Il tipo robusto somiglia alla fig. 1, tav. XXVII di Schmerling, colla differenza che sembra più torto e un po' più piccolo dell'esemplare rappresentato; il tipo gracile si distingue dal primo, non solo per le dimensioni minori e per la sottigliezza, ma perchè è più schiacciato ed ha la carena più ottusa.

Dimensioni dei due tipi		N. 1 (1)	N. 2 (2)
Lunghezza	mill.	300 (3)	270
Larghezza dell'articolazione superiore	»	54	42

(1) Tipo robusto. — (2) Tipo gracile. — (3) Circa, perchè manca un pezzetto.

Circonferenza sotto la tuberosità bicipitale	»	89	74
Circonferenza alla parte media	»	94	73
Larghezza dell'articolazione inferiore	»	63 [1]	59

Femori. Ne conosco 5 soli intieri, 2 destri e 3 sinistri, e 21 pezzi quasi tutti assai voluminosi. Anche qui si distingue una forma robusta ed una forma gracile, tra le quali intervengono differenze sensibili. La prima coincide colla fig. 1, tav. XXX di Schmerling. La seconda, più sottile e più piccola, ha il piccolo trocantere più prossimo alla fossa digitale che non nell'altra; in complesso sembra consimile al femore dell'*U. arctos* vivente e non corrisponde ad alcuna delle figure di Schmerling. Le seguenti dimensioni si riferiscono solo al tipo robusto.

Dimensioni

Lunghezza	mill.	438
Contorno a livello del piccolo troncatere	»	162
Contorno ove l'osso è più sottile	»	120
Larghezza dell'articolazione inferiore	»	99
Larghezza della testa del condilo	»	54

Tibie. Fra le 10 intere e i 14 pezzi raccolti sono rappresentati individui poppanti, adulti e vecchi. Le loro diafisi sono più o meno grosse, in confronto delle epifisi; ma, io credo, per effetto di variazioni individuali. Le tibie della nostra caverna sono diverse da quelle figurate nella fig. 2, tav. XXXI di Schmerling, in cui la diafisi è oltremodo robusta e schiacciata alle due estremità, ma piuttosto si accostano alle figure 3 e 4 della stessa tavola.

Dimensioni		N. 1	N. 2
Lunghezza	mill.	298	121
Larghezza della testa superiore	»	120	50
Diametro antero-posteriore della testa superiore	»	77	
Diametro maggiore della testa inferiore	»	78	40
Circonferenza della diafisi nel punto corrispondente al minor diametro	»	110	

Fibule. Una destra e una sinistra quasi intere ed alcuni pezzi.

Dimensioni

Lunghezza	mill.	232
Larghezza dell'articolazione superiore	»	22
Larghezza dell'articolazione inferiore	»	29
Circonferenza dell'osso alla parte media	»	45

Altre ossa. Le zampe anteriori sono rappresentate nella raccolta d'ossa di cui porgo l'elenco da 3 scafoidi-semilunari, 3 pisiformi e 12 metacarpiani (non contando alcuni esemplari dubbî). Alle zampe posteriori vanno attribuiti 4 calcanei destri, 4 calcanei

(1) Approssimativamente, perchè la testa articolare non è completa.

sinistri, un astragalo, un primo ed un terzo cuneiforme, più di 30 metatarsiani (tra i quali non potrei assicurare che non fosse compreso anche qualche pezzo del metacarpo) e 11 falangi, di cui 6 ungueali.

Non ebbi ad osservare differenze di molto rilievo tra queste ossa e i pezzi omologhi dell' *U. spelaeus*. Però i metacarpiani e i metatarsiani mi sembrano, in generale, più piccoli e più sottili.

Non ebbi che sole 3 scapole in cattivo stato di conservazione e da una di queste, meno incompleta delle altre, traggo l'altezza dell'acromion che è di 67 millimetri e il diametro maggiore della cavità glenoidea che è di 71.

La mia raccolta manca affatto di pezzi dello sterno. I frammenti di coste vi sono all'incontro numerosissimi, ma non si prestano ad osservazioni comparative di qualche interesse. I pezzi pertinenti al bacino sono parecchi e poco perfetti; tuttavolta, in due di essi verificai che la cavità cotiloide misura 67 millimetri di diametro e 48 di profondità.

Finalmente i miei amici ed io trovammo nella grotta delle Fate anche tre ossa del pene, quasi perfette, nelle quali, cioè, manca soltanto l'estremità appuntata. La lunghezza del maggiore, tenendo conto della parte mancante, è di 200 millimetri; la sua circonferenza all'estremità ingrossata è di millimetri 50.

L' *U. Bourguignati*, Lartet, della caverna di Mars (Alpi marittime), l'*U. priscus*, Goldfuss, che alcuni ritengono specificamente identico all' *arctos*, di cui sarebbe l'antenato, l'*U. planifrons*, Denny, si distinguono dalla specie sopradescritta, perchè offrono il carattere comune di avere il cranio poco saliente nella curva superiore, in essi cioè la regione frontale non subisce il rialzamento brusco proprio alle specie d'orso attuali e all' *U. spelaeus*. L' *Ursus priscus*, d'altronde, aveva la fronte pianeggiante, come lo notano Cuvier e Lartet.

Recentemente il sig. J. R. Bourguignat ebbe a scoprire in una magnifica grotta dell'Algeria quattro specie d'orsi fossili che denominò *Lartetianus*, *Letourneuxianus*, *Faidherbianus* e *Rouvieri* (¹). La prima soltanto, per le proporzioni delle ossa, offre qualche analogia coll' *U. spelaeus* e per conseguenza colla varietà sopradescritta. Uno dei pezzi principali dell' *U. Lartetianus* illustrati dal Bourguignat consiste in un frammento della regione alveolare superiore, con un pezzo dell' arcata zigomatica. Or bene, l'inserzione di quest' arcata dista dalla base dell' ultimo molare di 14 millim., mentre nell'orso del Finalese ne dista 22, cioè 6 meno che nello *spelaeus* tipico. Quest'inserzione corrisponde nelle due specie alla parte media dell'ultimo molare, mentre nell'orso delle caverne si trova un po' più innanzi, vale a dire sopra il terzo anteriore del dente suddetto.

L'ultimo molare superiore del *Lartetianus* differisce poi molto dal dente omologo dell'orso delle caverne tipico e tanto più dalla varietà Finalese, perciocchè è assai più ristretto posteriormente e di forma che tende alla triangolare.

Gli omeri dell'orso d'Algeria hanno la fossa olecranica perforata, come due degli

(¹) J. B. Bourguignat, *Souvenir d'une exploration scientifique dans le nord de l'Afrique*, pag. 390 e seguenti. Paris, 1868-1870.

esemplari della mia raccolta; ma questi, d'altra parte, si differenziano dai primi per la maggiore obliquità e larghezza dell'articolazione inferiore. Nè minor diversità si verifica, nelle tibie, secondo le figure di queste ossa presentate dal sig. Bourguignat (1).

L' *U. Rouvieri* e l' *U. Faidherbianus* sono due piccolissime specie dotate di caratteri talmente spiccati che non è possibile confonderle con altre. L' *U. Letourmeuxianus*, quantunque più prossimo allo *spelaeus* ed alle sue varietà, se ne distingue facilmente per la forma accorciata del muso e per molte altre particolarità, la cui enumerazione sarebbe qui affatto superflua.

Da quanto posso inferire, dopo l'esame superficiale dei resti d'orso della caverna di Laglio ostensibili nella collezione del Museo civico di Milano, e dopo aver consultato la descrizione che ne diede il prof. Cornalia nella *Paléontologie lombarde* (2), l'orso di questa provenienza non sarebbe perfettamente conforme al tipo dello *spelaeus* e differirebbe altrettanto dalla varietà ligustica. Nel cranio dell'orso lombardo la cresta sagittale è assai più breve che d'ordinario, si biforca cioè presso il vertice della cresta lambdoidea in due rami assai divergenti; nel cranio del Finalese la biforcazione si verifica invece in avanti e i due rami sono comparativamente meno estesi; nel primo inoltre la cresta lamdboidea, veduta di prospetto, forma un angolo acuto, laddove è ottusa nel secondo. Le mandibole inferiori appariscono nella varietà di Laglio più alte e brevi che non in quella delle Fate.

Finalmente le ossa sopradescritte, quantunque sieno da me in gran parte riferite all'*U. spelaeus*, non coincidono coi pezzi omologhi di questa specie, estratti dalla caverna di Cassana, dal Savi e dal Capellini, ed illustrati da questi naturalisti (3). Per citare alcune fra le molte differenze riscontrate, dirò che in un osso dell'orso di Cassana, conservato nel Museo geologico della R. Università di Genova, l'arcata zigomatica ha origine in un punto che corrisponde alla parte anteriore dell'ultimo molare, mentre nel fossile del Finalese quest'arcata s'inserisce sopra la parte media del dente suddetto, il quale inoltre è assai meno assottigliato posteriormente. La mandibola inferiore del primo è in confronto dell'osso omologo del secondo più lunga, meno arcuata inferiormente e il suo margine anteriore offre molto minore obliquità.

Resti di Cervi.

Oltre all'orso ed ai felini, due ossa rinvenute nella caverna accennano a due altre specie di mammiferi e sono una scapola (in cui manca parte della lamina dilatata), che non differisce sensibilmente dall' osso omologo del *Cervus elaphus;* ed una mezza mandibola superiore che sembra di capriolo. La prima allappa alla lingua ed è coperta d' incrostazioni terrose simili a quelle che aderiscono alle ossa d'orso e per tal motivo inclino a ritenerle della medesima età; la seconda dal

(1) Opera citata, tav. III, fig. 7, 8.

(2) *Monographie des mammifères fossiles de la Lombardie,* par Mr E. Cornalia. Milan 1860-65.

(3) P. Savi, *Sopra una caverna ossifera stata scoperta in Italia.* Nuovo giornale dei letterati italiani vol. XI, 1825. — G. Capellini, *Nuove ricerche paleontologiche nella caverna ossifera di Cassana* (Riviera di levante), lettera al prof. M. Lessona, estr. dalla *Liguria medica.* Genova, 1859.

color più chiaro, dalla maggiore levigatezza, dalla lieve alterazione subìta in confronto delle altre ossa, mi parrebbe invece più recente.

I ruminanti cui appartengono queste ossa possono aver servito di cibo all'uomo o di pasto alle belve; ma non v'ha alcun indizio per cui sia da ritenersi vera l'una ipotesi più che l'altra.

Traccie dell' uomo.

Che l' uomo in tempi assai remoti abbia trovato ricovero nella grotta delle Fate si può inferire da che la terra rossiccia ossifera accumulata nel fondo della cavità contiene minuzzoli di carbone e cocci di stoviglie, come pure da altre osservazioni che addurrò in seguito. Il carbone non è raro nella caverna, specialmente nei punti in cui s'incontrano le ossa, e vi si presenta ora in stratarelli di uno o due centimetri di spessezza, ora confuso cogli altri elementi del terreno. I cocci si trovano qualche volta nella terra, col carbone, ma più comunemente alla superficie. Dalle condizioni della località, dall'aspetto irregolare ed eterogeneo del giacimento si deve necessariamente concludere che tanto le ossa quanto il carbone, i cocci e la terra, provengono dalla parte più elevata della spelonca, ora impraticabile a cagione di una frana, e di colà furono promiscuamente trascinati dalle acque nella regione in cui si trovano.

Esaminando i cocci e le ossa d'orso, non si può a meno di avvertire che i primi sembrano troppo freschi per essere contemporanei dei secondi (poichè anche la terra cotta va soggetta a certe alterazioni); d'altra parte, riescirebbe difficile a comprendersi come quando l'*Ursus spelaeus*, specie estinta, infestava ancora la Liguria, l'uomo fosse già tanto avanzato nelle arti manuali da produrre siffatte stoviglie (1). Nel caso presente, peraltro, questa promiscuità è probabilmente accidentale e dipende dalla frana anzidetta che sconvolse e confuse due giacimenti di diversa età. La caverna servì in prima di covo agli orsi, ai leoni, alle pantere, poi, questi scomparsi, dopo lungo volgere di tempi, fu occupata dall'uomo.

I pochi cocci raccolti, sono identici a quelli che trovansi più comunemente alle Arene candide e all'Arma del Sanguineto, sono cioè resti di rozze pentole foggiate senza l'aiuto del torno e cotte sulla brace. Alcuni pezzi offrono un manico che è la consueta *auricula pertusa;* uno solo presenta altresì un rudimento d' ornato, cioè tre solchi graffiti che si dipartono da uno dei soliti manichi e convergono all'orlo del vaso, il quale è minutamente crenato.

È probabile che risalga alla medesima età preistorica od esostorica un'altra opera umana, veduta dal R. D. Perrando, che consisterebbe, da quanto egli me ne disse, in una cavità elissoidale di alcuni centimetri di profondità, praticata artificialmente in un masso di pietra arenacea. Si tratterebbe di una vera *pierre à bassin.* Terminerò il breve elenco segnalando un ciottolo ovoide di quarzite bianca, da me raccolto, il quale senza dubbio fu portato nella caverna per mano dell'uomo.

(1) Il compianto dott. Regnoli osservò in una caverna delle Alpi Apuane ossa d'*Ursus spelaeus* commiste ad arnesi dell'età neolitica, ma le sue conclusioni in ordine alla contemporaneità di questi oggetti non furono accettate dai paleontologi.

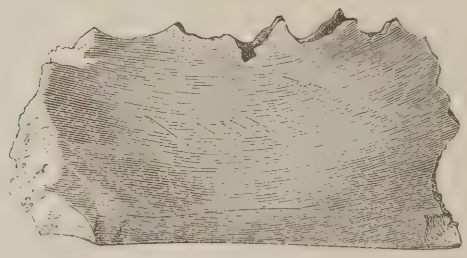
Mentre io ritengo che i cocci sopradescritti sono più recenti dell'*Ursus spelaeus,* non è men certo per me che colà questa fiera ebbe ad imbattersi coll'uomo, e ne fa fede un pezzo di mandibola inferiore, sulla cui superficie interna furono tracciati dei solchi e dei tagli, mentre l'osso era ancora fresco (fig. 7). Da qualche tempo si è molto usato ed abusato delle scalfitture, osservate sulle ossa fossili, per dimostrare la coesistenza dell'uomo coi grandi mammiferi estinti, talchè siffatto criterio è caduto un po' in discredito. Tuttavolta non posso esimermi dal far cenno di quest'oggetto, il cui significato è per me evidente. I solchi sono in numero di 10 o 11, rettilinei, netti, lunghi dagli 8 ai 15 millimetri, alcuni profondi, altri superficiali e li credo praticati coll'intento di scarnar l'osso; quantunque si possa ragionevolmente obbiettare che la sostanza alimentare aderente ad una mandibola d'orso sia invero scarsissima.

Fig. 7.

Pezzo di mandibola d'orso con incisioni

$\frac{1}{2}$ della grandezza naturale.

(R. Museo preistorico di Roma)



Non deve far maraviglia, d'altronde, che l'uomo vivesse nel Finalese contemporaneamente all'orso delle caverne, mentre risulta dalle ricerche eseguite dal signor E. Rivière nelle famose grotte dei Balzi Rossi, presso Ventimiglia, che giacevano colà associati scheletri umani, utensili paleolitici ed avanzi d'*Ursus spelaeus*, di leone e di iena delle caverne (¹).

(¹) E. Rivière, *Découverte d'un squelette humain de l'époque paléolithique dans les cavernes des Baussé-Roussé*, pag. 37. Menton, 1873.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Oggetti raccolti nella caverna delle Arene candide.

Tavola I.

1 Lesina d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
2 Punta di lancia d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
3 Punta di lancia d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
4 a 6 Cucchiaio (?) d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
5, 6, 7, 8, 9 Punte di freccia d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
10 Scheggia d'osso appuntata — R. Museo preistorico di Roma.
11 Ago crinale d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
12 Punta di freccia d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
13 Scalpello d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
14 Lama di pugnale d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
15 Pendaglio formato con tre denti di lupo forati — R. Museo preistorico di Roma.

N. B. Tutti questi oggetti sono rappresentati in grandezza naturale.

Tavola II.

1 Coccio di terra cotta con fregio — R. Museo preistorico di Roma
2 *a*, *b*, Base di un'anforetta o di un calice di vetro — R. Museo preistorico di Roma.
3 Coccio di terra cotta con ornati — R. Museo preistorico di Roma.
4 Valva di *Pectunculus* forata e ornata di solchi — Collezione del R. D. Perrando.
5 Vaso di terra cotta — R. Museo preistorico di Roma.
6 *Conus mediterraneus* forati — R. Museo preistorico di Roma.
7 Frammento di vaso con fori ed ornati — Museo civico di Genova.
8 Frammento di vaso con orlo crenato e fori — R. Museo preistorico di Roma.
9 Cucchiaio (?) di conchiglia — R. Museo preistorico di Roma.
10 Pendaglio (?) in terra cotta — R. Museo preistorico di Roma.
11 Articolo di monile di conchiglia — Museo civico di Genova.
12 Valva di *Cardium* forata ad uso d'ornamento — R. Museo preistorico di Roma.
13 Valva di *Pectunculus* forata — R. Museo preistorico di Roma.

N. B. Le figure 5, 7, 8 hanno dimensioni di metà più piccole delle reali; le altre sono in grandezza naturale.

Tavola III.

1 *a*, *b*, Accetta-scalpello di diorite affanitica — R. Museo preistorico di Roma.
2 Frammento d'anello di giadeite — Museo civico di Genova.
3 Ascia di pietra verde — R. Museo preistorico di Roma.
4 Ascia di anfibolite — R. Museo preistorico di Roma.
5 Nucleo di piromaca — Museo preistorico di Roma.
6 *a*, *b*, Accetta di giadeite — R. Museo preistorico di Roma.
7 *a*, *b*, Coltellino di piromaca — R. Museo preistorico di Roma.
8 Accetta di diorite — R. Museo preistorico di Roma.
9 *a*, *b*, Coltellino di selce bionda — Museo civico di Genova.
10 *a*, *b*, Oggetto di serpentina — R. Museo preistorico di Roma.

N. B. Tutti questi oggetti sono rappresentati in grandezza naturale.

Oggetti raccolti nella caverna delle Fate.

TAVOLA IV.

1 Frammento di mascellare sup. di *Felis antiqua*, Cuv. (grand. nat.).
2 Atlante di *Felis antiqua* (grand. nat.).
3 Mezza mandibola inf. di *Felis antiqua* (grand. nat.).

TAVOLA V.

1, 2 Cranio di *Ursus spelaeus*, Blum., var. ($\frac{1}{2}$ delle dimens. nat.).
3 Canino inf. di *Ursus sp.* ($\frac{1}{2}$ della grand. nat.).
4 Canino sup. di *Ursus spelaeus*, var. ($\frac{1}{2}$ della grand. nat.).
5, 6 Ferini dell'*Ursus spelaeus*, var. (grand. nat.).

N.B. Gli originali delle figure comprese nelle tavole IV e V sono ostensibili nel Museo geologico-mineralogico della R. Università di Genova.

1
2
3
4ª
4ᵇ
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

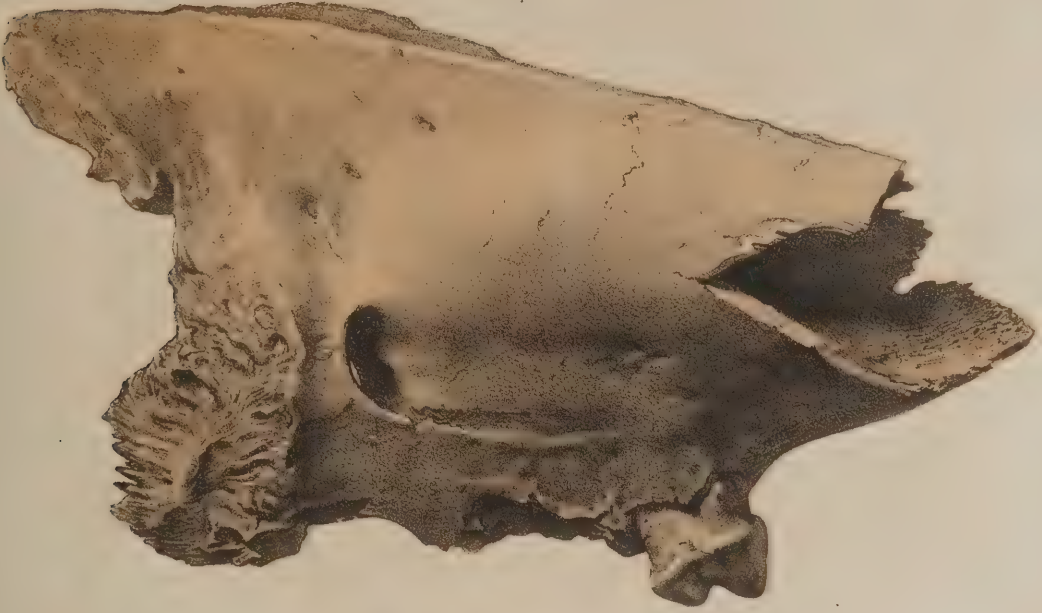
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Lit. Armanino Genova

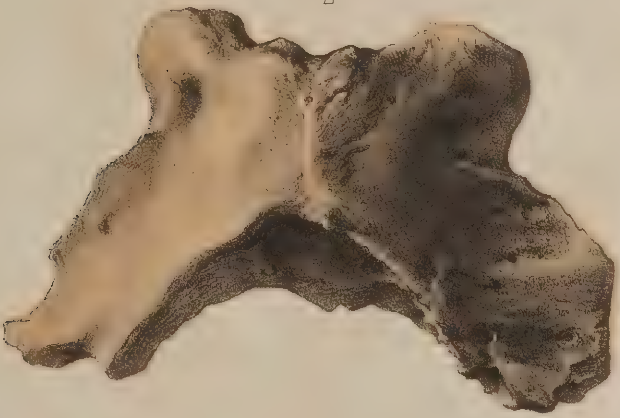
1a
1b
9
3
4
7a
7b
6a
5
6b
8
9b
9a
10a
10b

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

1



2



3

Lit. Armanino Genova

Lit Armanan

Ricerche chimiche su minerali e roccie dell'Isola di Vulcano.

Memoria del Socio ALFONSO COSSA, presentata dal Socio Q. SELLA
nella seduta del 2 dicembre 1877.

I.

Allume Potassico contenente allumi di tallio, rubidio e cesio.

I. In un saggio di allume potassico dell'isola di Vulcano (Isole Lipari) scopersi nel 1873 la presenza del tallio mediante l'osservazione spettroscopica. Non pubblicai allora il risultato di questa osservazione perchè il tallio, quantunque sott'altra forma, era già stato trovato da Crookes nello zolfo di Vulcano. — Nel mese di luglio di quest'anno (1877), ripetendo le osservazioni incominciate quattro anni prima, trovai che l'allume di Vulcano oltre al contenere realmente il tallio allo stato di allume tallico, racchiudeva pure traccie di allume di cesio e di rubidio e solfato di litio.

Esaminai in seguito un campione di allume potassico commerciale ottenuto nella fabbrica di Vulcano, che ora appartiene al signor Stewenson di Glascow. Da 180 grammi di quest'allume (quantità di cui poteva disporre) ottenni 15 grammi di un allume così ricco di cesio e di rubidio, che la presenza di questi due metalli si rendeva evidente ad un occhio esercitato dal solo colore della fiamma, senza bisogno di ricorrere all'analisi prismatica. — Successivamente potei esaminare campioni di allume naturale della stessa provenienza e conservati nei musei di Milano, di Pavia e di Torino. Il campione del museo dell'Università di Torino cortesemente comunicatomi dal professore Spezia, differisce dagli altri perchè è costituito da una massa compatta di un aspetto simile a quello che presenta l'allume quando si rappiglia per raffreddamento dopo aver subìto la fusione acquea. Le prime osservazioni fatte su questo campione mi diedero un risultato negativo, ma in seguito nei cristalli meno solubili ottenuti dopo ripetute cristallizzazioni potei osservare distintamente anche in questo come negli altri campioni, le linee brillanti caratteristiche del tallio, del cesio e del rubidio.

I risultati delle mie osservazioni che accertavano per la prima volta la presenza di composti di cesio, di rubidio, di litio, e di una combinazione solubile di tallio nei prodotti di Vulcano, furono riassunti in una Nota preventiva indirizzata al comm. Q. Sella e pubblicata durante le ferie accademiche nella Gazzetta ufficiale del Regno del 25 agosto 1877 (1).

(1) Esprimo la più viva riconoscenza all'egregio capitano del 48° reggimento di fanteria Serafino Frattola il quale oltre all'avermi offerta la più squisita ospitalità in Lipari, mi accompagnò nelle varie escursioni fatte a Vulcano prestandomi validissimo aiuto.

Devo pure ringraziare il Signor Narleau direttore della fabbrica di allume e di acido borico a Vulcano, il quale pose generosamente a mia disposizione gran parte delle materie prime necessarie alle mie ricerche.

Non avrei potuto mantenere la promessa fatta in quella comunicazione preventiva, di presentare cioè all'Accademia dei Lincei una Memoria più dettagliata insieme a preparati dei metalli rari or ora nominati, se il Ministro d'Agricoltura informato favorevolmente intorno a questi primi studî non mi avesse lasciato tempo e dato generosamente i mezzi di potermi recare a Vulcano per raccogliere i materiali necessarî per continuare le ricerche incominciate.

La varietà delle forme litologiche che ho potuto osservare a Vulcano, e la importanza dei prodotti dei fumaioli ancor poco studiati sotto il punto di vista chimico, mi hanno suggerito il proponimento di allargare il campo degli studî che mi era prefisso iniziando delle ricerche chimiche su minerali e roccie di Vulcano. A ciò mi spinse anche la speranza di avere risultati che possano soddisfare alle intenzioni di coloro che mi aiutarono e mi incoraggiarono a proseguir nelle ricerche di chimica mineralogica.

II. Prima di riferire le osservazioni che ho finora eseguite sull'allume, che è il minerale che forma il primo argomento di queste mie ricerche, credo non inutile di enumerare brevemente gli studî chimici finora eseguiti intorno all'isola Vulcano.

Le ricerche chimiche che a mia notizia furono fin quì intraprese sui prodotti naturali di Vulcano si riducono alle seguenti.

Spallanzani nei suoi *Viaggi alle due Sicilie* descrive alcune ricerche da lui eseguite sul grado di maggiore o minore fusibilità delle lave, desumendo da questo carattere un criterio per giudicare della loro ricchezza in silice. Merita di essere notato che in queste sue ricerche l'illustre naturalista modenese cimentò le lave non solo alle fiamme ordinarie, ma eziandio al calore vivissimo che ottiensi da una combustione avvivata con gaz ossigeno (1).

Le ricerche fatte precedentemente da Dolomieu sono pure limitate, ma però riescono più interessanti di quelle dello Spallanzani; inquantochè il geologo francese colpito dall'alterazione che nelle lave di Vulcano aveva prodotto l'acido solforico, trattò con questo acido campioni diversi di lave non alterate, e seppe così distinguere quelle che producevano solamente allume, da altre che davano origine anche a gesso oppure resistevano all'azione scomponitrice dell'acido. Nella denominazione d'allume il Dolomieu comprendeva evidentemente anche il solfato d'alluminio e l'allume sodico (2).

Secondo quanto nota il Dana nel suo trattato di Mineralogia, l'acido borico nell'Isola Vulcano sarebbe stato scoperto per la prima volta dal dottor Holland nell'anno 1813. Ma il Dana che è solitamente molto esatto nelle citazioni, non indica la fonte da cui attinse questa notizia; e perciò mi manca il mezzo di verificare se il merito della priorità di questa scoperta si debba attribuire all'Holland oppure a Lucas il quale in una lettera indirizzata il 31 luglio 1819 da Messina ad

(1) Spallanzani. Viaggi alle due Sicilie ed in alcune parti dell'Appennino. Pavia MDCCXCV Tomo II, Capitolo XIII e XIV.

(2) Voyage aux iles de Lipari fait en 1781; ou Notices sur les Iles Æoliennes pour servir à l'histoire des Volcans. Paris MDCCLXXXIII.

Arago ([1]) racconta di avere insieme al farmacista messinese Gioacchino Arrosto, scoperto tra le materie saline che tappezzano il fondo e le pareti del cratere di Vulcano, dell'acido borico sotto forma di squammette bianche.

Nel 1822 Stromeyer analizzò l'acido borico di Vulcano ([2]) e due anni dopo nella seduta del 3 aprile 1824 comunicò alla R. Società delle scienze di Gottinga, di avere scoperto del solfuro di selenio aderente al cloruro d'ammonio sublimato dell'isola Vulcano ([3]). Stromeyer ritenne da prima questa sostanza per cloruro ferrico, ma ne riconobbe poi la vera natura all'odore caratteristico dei composti di selenio quando sono abbruciati in contatto dell'aria, ed alla reazione osservata cimentando con solfito potassico la soluzione nitrica del solfuro di selenio.

Negli anni 1855 e 1856 Carlo Saint-Claire Deville ([4]) analizzò le miscele gazose che erompono da molti fumaioli in Vulcano. In uno di questi fumaioli trovò un deposito costituito di diverse materie disposte nell'ordine seguente: 1.° Zolfo. 2.° Sale ammonico contenente traccie di jodio probabilmente allo stato di joduro d'ammonio, e ricoperto da una patina di solfuro di arsenico contenente piccole quantità di selenio e di fosforo allo stato di fosfato calcico. 3.° Conglomerato di zolfo, acido borico e frammenti di roccia. 4.° Deposito superficiale d'acido borico puro. — Nei prodotti di Vulcano il jodio, il fosforo e l'arsenico vennero messi in evidenza per la prima volta da Deville.

Warington in una Memoria pubblicata nel 1854 ([5]) asserisce d'aver trovato che l'acido borico di Vulcano contiene traccie di azoturo di boro. Questo è un fatto molto interessante perchè confermerebbe l'ipotesi sostenuta da Wöhler, da Deville ([6]) ed anche dal prof. Bechi, secondo la quale l'acido borico deriverebbe dallo scomporsi che fa l'azoturo di boro sotto l'azione del vapor d'acqua in acido borico ed ammoniaca; e non dalla scomposizione del solfuro di boro in solfuro d'idrogeno ed acido borico, come si ritiene da Dumas e da altri.

Verso l'anno 1862, Crookes che divide con Lamy l'onore della scoperta del tallio, trovò coll'analisi spettrale traccie di questo metallo nello zolfo di Vulcano.

A. Baltzer ([7]) visitò il cratere di Vulcano il 3 novembre dell'anno 1873 cioè pochi giorni dopo l'eruzione di ceneri e projettili del 19 ottobre. Osservò nelle ceneri eruttate cristalli di tridimite, e sottopose all'analisi chimica queste ceneri ed alcune

([1]) *Extrait d'une lettre de M. Lucas fils à M. Arago.* — Annales de chim. et de phys. Tome XI pag. 443 (1819).

([2]) *Untersuchungen über die Mischung der Mineral-Körper und anderer damit verwandten Substanzen.*

([3]) *Untersuchung des in der Gegend von Clausthal vorkommenden Selenblei,* von Stromeyer und Hausmann, *nebst einer Notiz über das auf der Insel Vulcano vorkommende Schwefelselen.* Pogg. Annalen. Vol. 2 pag. 410.

([4]) *Neuvième lettre à M. Elie de Beaumont sur les phénomènes éruptifs de l'Italie méridionale;* par Charles Sainte-Claire Deville. Compte-rendu de l'Ac. des Sciences. Vol. XLIII pag. 681 (1856.)

([5]) *On the Production of Boracic Acid and Ammonia by Volcanic Action.* Chemical Gazette 1854 pag. 419.

([6]) Vedi Ann. der Chem. und Pharm. Vol. 105 pag. 69.

([7]) *Geognostisch-chemische Mittheilungen über die neuesten Eruptionen auf Vulcano und die Producte derselben* von A. Baltzer. Zeitschrift d. deutschen geol. Gesellschaft. Vol. XXVII (1875) pag. 36.

delle lave più recenti. Ma le sue ricerche sono incomplete perchè in esse gli alcali sono determinati cumulativamente per differenza. Un'analisi completa delle lave lo avrebbe senza dubbio condotto alla scoperta del cesio e del rubidio [1].

III. I depositi principali di allume nell'isola di Vulcano si trovano nelle grotte del Faraglione, e nella cavità del gran cratere. Il Faraglione detto anche Rocca dell'allume [2] è un ammasso di roccie trachitiche decomposte per la massima parte dall'acido solforico. Esso è situato al limite meridionale dello stretto istmo che unisce Vulcanello a Vulcano, e si protende lateralmente verso il mare formando gran parte del braccio occidentale del porto di levante. L'allume potassico nelle grotte del Faraglione è intimamente commisto a solfato d'allumina, a gesso, a sale ammoniaco; e difficilmente si trova ora in uno stato tale da potere con vantaggio essere isolato.

Nella parete interna settentrionale del cratere di Vulcano vi è una plaga piuttosto estesa detta *la Schicciola* che è costituita da una roccia bianca compatta a cui aderisce in strati di varia grossezza l'allume potassico. Da più luoghi della *Schicciola* sgorga a stille un liquido avente una reazione fortemente acida, denso qualche volta a segno di rappigliarsi in stalattiti coniche a zone concentriche, come ne fa fede il saggio che presento all'Accademia. Ma in altri punti della stessa località il liquido che stilla attraverso le fessure della roccia contiene oltre all'allume potassico, solfato d'alluminio ed allume di sodio, i quali essendo molto più solubili si separano spontaneamente dall'altro sale o si raccolgono a piedi della parete del cratere formando un tappeto di una materia cristallizzata in aghi finissimi, oppure formano lo strato più esterno della materia cristallina aderente alla roccia. Questi sali più solubili sono qua e là colorati leggermente in giallo da composti di ferro, o in verde da rame. In un saggio al cannello fatto su un campione di queste materie trovai pure del cobalto la di cui presenza ho ripetutamente constatato con prove fatte per via umida.

L'allume della *Schicciola* osservato tale e quale viene staccato dalla roccia con un buon spettroscopio dà appena un indizio della presenza del tallio. Il sale di sodio che lo inquina impedisce la manifestazione delle linee diversamente colorate caratteristiche degli altri metalli che esso contiene. Separando con ripetute cristallizzazioni i cristalli meno solubili e sottoponendo questi all'analisi spettroscopica, si osservano in modo distinto, oltre all'unica linea del tallio, le linee α e β del cesio e del rubidio,

(1) Non avendo potuto consultare l'opera di Abich, *Vulkanische Erscheinungen* 1841, non conosco se oltre alle analisi delle roccie di Lipari, questo distinto mineralista abbia pure esaminato alcune tra le roccie di Vulcano.

La descrizione geologica più dettagliata dell'Isola Vulcano è quella compresa nella Memoria seguente di Federico Hoffmann: *Ueber die geognostische Beschaffenheit der Liparischen Inseln. Schreiben an Herrn Leopold von Buch* — Poggendorff Annalen. Vol. 26.° pag. 1-89. Leipzig 1822.

Anche il professore G. von Rath visitò il 9 aprile 1869 l'isola Vulcano e pubblicò una brevissima notizia tolta dal suo libro di annotazioni compilate durante il viaggio, in una lettera diretta al Prof. Leonhard ed inserita a pag. 62 del Neues Jahrbuch fur Mineralogie und Geologie, per l'anno 1874.

(2) Nel dialetto siciliano *Faraglione* è un appellativo comune agli ammassi di roccie che formano scogli o rupi scoscese. Così gli *Scogli dei Ciclopi*, notissimi per i bei cristalli di analcime, che stanno dicontro ad Aci Trezza si chiamano comunemente i *Faraglioni della Trezza*.

le quali ultime, a motivo della loro vicinanza e del potere dispersivo non sufficiente degli spettroscopî che qualche volta si adoperano per ricerche analitiche, appaiono come riunite formando un'unica linea larga e molto brillante. — Per togliere ogni dubbio sull'identità delle linee caratteristiche dei metalli rari ora nominati, non mi fidai solamente del carattere desunto dalla loro posizione rispettiva misurata per mezzo della scala micrometrica projettata sullo spettro, ma osservai ancora la coincidenza perfetta di due spettri sovrapposti, dei quali uno proveniva dall'allume di Vulcano, l'altro da composti ben accertati di tallio, cesio e rubidio.

La ricchezza in cesio e rubidio varia nelle diverse località della *Schicciola*. Da due chilogrammi e mezzo di minerale ottenni una volta duecento grammi di un allume ricco di cesio a segno da palesare tutte e due le linee caratteristiche del cesio e del rubidio. Non ho ancora terminato le operazioni necessarie per determinare con qualche precisione la quantità di questi corpi. Se è facile il separare e l'isolare il tallio, riesce difficile il separare senza perdite il cesio ed il rubidio dal potassio, e difficilissimo poi il dividere il cesio dal rubidio. Posso però affermare che l'allume di Vulcano, fatta eccezione del polluce, trovato in piccolissima quantità nell'isola d'Elba, è la materia prima più ricca da cui si possa finora estrarre il cesio ed il rubidio. Attualmente si ottengono i composti di questi due metalli o dai residui del trattamento della lepidolite, o da acque minerali, che ne contengono traccie minime, e richiedono lunghe operazioni per separarli dagli altri corpi ai quali sono accompagnati. Nell'allume invece la concentrazione dei metalli rari si può fare per semplice cristallizzazione. È appunto in questo modo che io ho potuto ottenere dall'allume della *Schicciola* un allume di cesio, rubidio e tallio, di cui presento all'Accademia un saggio, esente da allume potassico e ricco di cesio a segno da lasciar scorgere oltre le linee α e β anche le altre linee secondarie.

Coll'allume di Vulcano ho già preparato una discreta quantità di cloroplatinato di rubidio e di cesio esente affatto del corrispondente sale di potassio. Da questo cloroplatinato col metodo suggerito da Bunsen ho potuto separare il rubidio dal cesio. La separazione di questi metalli sottoponendo a successive cristallizzazioni frazionate l'allume misto di cesio e di rubidio non riesce mai completa. — Ho cercato di separare il cesio dal rubidio col metodo proposto dal professore F. Stolba di Praga (1) che consiste nelle operazioni seguenti. Si scioglie la mescolanza dei due allumi di cesio e di rubidio nell'acido cloridrico molto concentrato, ed alla soluzione calda si aggiunge del tetracloruro di stagno. Si lava il precipitato cristallino con acido cloridrico concentrato; si discioglie il precipitato nell'acqua calda appena inacidita con acido cloridrico, e nella soluzione si riprecipita il cloruro doppio di cesio e di stagno. Ma operando esattamente e più d'una volta nel modo ora descritto ho sempre osservato che insieme al cloruro di cesio e di stagno precipitava il cloruro di stagno e rubidio. — Questo risultato negativo conferma quanto venne già asserito da Godeffroy, che cioè, contrariamente a quanto venne indicato da Stolba, il cloruro di stagno e di rubidio è, come il sale corrispondente di cesio, insolubile nell'acido cloridrico concentrato (2).

(1) *Ueber die Nachweisung des Cäsium als Cäsiumzinnchlorid.* — Dingler politech. Journ. Vol. 197 pag. 336 e Vol. 198 pag. 225.

(2) *Antimonchlorid als Reagens für Cäsiumsalze.* — Berichte der deutsch. Chem. Gesellschaft. Vol. VII pag. 375 e Vol. VIII pag. 9.

Invece la separazione riesce facile e completa versando del pentacloruro d'antimonio in una soluzione cloridrica dei due allumi di cesio e di rubidio. In questo caso precipita solamente sotto forma di piccioli cristalli il cloruro di antimonio e di cesio $Sb\,Cl_3$, $6\,Cs\,Cl$ studiato per la prima volta da Godeffroy, mentre il sale corrispondente di rubidio è solubilissimo nell'acido cloridrico concentrato e rimane disciolto nelle acque-madri.

IV. La roccia a cui aderisce l'allume della *Schicciola* è stata semplicemente attraversata dalla soluzione di allume cesifero; oppure è essa stessa che decomposta dall'acido solforico ha fornito i materiali necessarî alla formazione dell'allume? Per risolvere questo quesito importantissimo ho sottoposte a lunghe e ripetute lavature frammenti della roccia per liberarli da ogni traccia di allume. La roccia ridotta in fina polvere fu ancora lavata con acqua distillata bollente, finchè nelle acque di lavatura, anche coll'analisi spettrale, non si aveva più indizio di potassio, e quindi fu decomposta con acido solforico ed acido fluoridrico. Lisciviata la massa con acqua bollente, dopo di avere eliminato gran parte dell'eccesso di acido solforico, ottenni una soluzione che convenientemente concentrata depose dopo due giorni dei bellissimi cristalli ottaedrici di allume potassico, i quali più volte ricristallizzati ed osservati collo spettroscopio manifestarono in modo evidente la presenza del cesio e del rubidio. Dunque questi due metalli si trovano molto probabilmente sotto forma di silicati nella roccia esaminata.

L'esame chimico di questa roccia mi fece conoscere un altro fatto importante. Le acque madri dalle quali eransi separati i primi cristalli di allume e che contenevano in gran copia solfati di alluminio e di sodio, e traccie di solfato di litio, trattate con acido solfidrico diedero un precipitato di solfuro d'arsenico misto a solfuro di selenio. Ho ripetuto tre volte questo esperimento dopo essermi accertato della purezza dei reattivi adoperati, ed ebbi sempre un eguale risultato. Finora non ho potuto stabilire con certezza sotto qual forma il selenio e l'arsenico si trovano nella roccia.

La roccia della *Schicciola* ha un colore bianco che tende leggiermente al giallognolo, fonde difficilmente in scheggie sottili producendo uno smalto bianco. La determinazione del peso specifico fatta alla temperatura di $+12°$ C. diede i risultati seguenti:

con grammi	3,510	2,009
»	4,555	2,011
»	8,294	1,942.

L'alterazione che ha subìto la roccia per l'azione dell'acido solforico ne rende difficile l'esame microscopico. Osservai finora tre sezioni sottili, e mi pare che si possa classificare questa roccia nel gruppo delleIpariti. In una pasta microfelsitica che non depolarizza la luce trovansi immagliati cristalli di feldispato ortotomo di cui alcuni presentano dei geminati secondo la legge di Carlsbad. Il quarzo si trova principalmente sotto forma di tridimite; non contiene cavità con liquidi, ma corpuscoli poliedrici. Osservai pure in questa roccia dei piccolissimi cristalli isometrici di cui finora non seppi riconoscere la specie mineralogica.

Finora ebbi agio di esaminare tre lave non alterate di Vulcano, e dopo averle trattate convenientemente con acido solforico ottenni dei cristalli d'allume nei quali riusciva evidente la presenza del cesio e del rubidio ([1]).

V. Sui bordi di un fumaiolo situato nel fondo del cratere di Vulcano trovasi una materia spugnosa di un colore rossigno alla superficie e cinereo cupo nell'interno. La sua tessitura è cristallina e subito si appalesa come una materia non omogenea. L'analisi chimica mi ha dimostrato che essa è composta di zolfo, solfuro d'arsenico, solfuro di selenio, acido borico, cloruro d'ammonio, solfato di litio ed allume di tallio e di cesio, e traccie di allume di rubidio e di potassio. Trattando questa materia con acqua bollente si separano i solfuri di arsenico e di selenio. La soluzione debolmente concentrata lascia facilmente deporre gli allumi di tallio e di cesio pochissimo solubili.

Un'altra materia simile alla precedente, eccettuata la mancanza dei solfuri di arsenico e di selenio è ancora più ricca di allume tallico e di cesio. La quantità di cristalli che presento all'Accademia appena inquinati da poco solfato di litio, fu ottenuta con circa due grammi di materia. Queste due sostanze costituirebbero una sorgente di tallio e cesio ancora più ricca dell'allume della *Schicciola.* Ho notato che in queste materie porose che tappezzano le pareti di alcuni fumaioli e che hanno l'apparenza di allume usto, la quantità del cesio supera sempre quella del rubidio.

VI. Il solfato di alluminio mescolato a traccie d'allumi abbonda anche nelle molte acque minerali che sgorgano in parecchi luoghi dell'isola. A sud-ovest del Faraglione, poco lungi dalla fabbrica dove si purificano l'acido borico e lo zolfo, trovasi un pozzo profondo 3 metri, largo 2 metri e lungo metri 2,60. In questa cavità si raccoglie uno strato d'acqua alto mezzo metro. Dal fondo del pozzo si svolgono continuamente e in così gran copia delle bolle di gaz, da far apparire che l'acqua sia in piena ebollizione. — Sainte-Claire Deville chiamò molto a proposito questa sorgente *la grotta del Cane dell'isola di Vulcano,* perchè esaminando i gaz che da essa si svolgevano riconobbe che essi erano per la massima parte costituiti da acido carbonico.

Ho creduto interessante di ripetere le analisi di questi gaz vent'anni dopo le ricerche del Deville.

Ecco i risultati delle osservazioni fatte nelle due occasioni.

9 luglio 1856 — Deville.

Temperatura del gaz + 25°.

	I	II	III
Acido carbonico	86,0	83,0	86,0
Ossigeno	0,4	0,0	0,0
Azoto	13,6	17,0	14,0
	100,0	100,0	100,0

([1]) L'analisi minuta di queste roccie e di quella della *Schicciola* formerà argomento di un altro mio lavoro che intendo di pubblicare tra breve.

17 ottobre 1877 — Cossa.

Temperatura dell'acqua 22° —

	I	II
Acido carbonico	78,0	80,0
Ossigeno	0,5	0,6
Azoto	21,5	19,4
	100,0	100,0

VII. L'estrazione dell'allume nelle isole Eolie è un'industria antica. Si ritraeva l'allume non solo dall'isola Vulcano, ma fino ad un certo tempo anche in Lipari e precisamente nella località detta *la Perrera*. Parlano in modo indubbio dell'allume di Lipari, Dioscoride, Plinio e Diodoro Siculo il quale ultimo asserisce che i Romani levavano un grosso tributo da questo sale, e nello stesso tempo i Liparoti ne ricavavano gran profitto (1). Giorgio Agricola enumerando le diverse località italiane dove si fabbricava allume ricorda Messina in Sicilia; ma non si comprende se egli voglia alludere all'allume importato a Messina dalle isole Lipari, oppure a quello proveniente da Roccalumera piccolo paese vicino ad Alì nel circondario di Messina, che ricevette appunto il suo nome dalle cave di allume.

La fabbricazione dell'allume nell'isola Vulcano ricevette un grande sviluppo quando nel 1813 il Governo borbonico cedette alla famiglia Nunziante di Napoli il cratere e le sue adiacenze, col privilegio del monopolio della fabbricazione e dello smercio dell'allume per tutto il Regno delle due Sicilie. Il prezzo dell'allume di Vulcano ascendeva allora a 30 ducati (138 lire) per ogni cantaro di 89 chilogrammi. Il modo di estrazione dell'allume non consisteva solamente nella lisciviazione e cristallizzazione dell'allume naturale come fu da alcuni asserito. Per utilizzare anche il solfato d'allumina commisto all'allume potassico, si aggiungeva al liscivio del minerale delle ceneri di sarmenti di viti le quali, come è noto, sono ricche di potassa, oppure del cloruro ammonico; si otteneva così un allume potassico misto ad allume ammoniacale. Abolito dopo il 1860 questo privilegio, l'industria dell'allume cessò ben presto di essere produttiva e venne dopo poco tempo del tutto abbandonata (2).

VIII. L'illustre professore R. Bunsen al quale mi feci premura di inviare un saggio di allume di cesio, rubidio e tallio estratti dall'allume naturale di Vulcano, ebbe la cortesia di farmi sapere con una sua lettera che egli aveva confermato i risultati delle mie osservazioni, e mi fece conoscere che il professore Laudoltt di Aquisgrana già da qualche tempo aveva osservato la presenza di cesio e di rubidio in un allume commerciale di cui non ha potuto constatare la provenienza. Questo allume

(1) « Aluminis famigeratum metallum, unde magnum Romani vectigal et Liparaei incredibiles quaestus faciunt ». Bibl. hist. V. 10.

(2) Nell'isola Vulcano si estraggono attualmente acido borico e cloruro d'ammonio.

però, soggiunge il Bunsen, non può provenire da Vulcano perchè esso non contiene il tallio la di cui presenza caratterizza l'allume di questa ultima località. Mi invitò quindi a fare delle ricerche sull'allumite o sulle acque madri delle allumiere della Tolfa per scoprire se per avventura anche questo allume contenesse i metalli rari che io trovai nell'allume di Vulcano. Finora ho potuto appena provare l'allumite della Tolfa, ma negli esperimenti fatti su un chilogramma di materia non potei riscontrare la presenza di cesio e rubidio e nemmeno di tallio.

La viscosità e l'elasticità susseguente nei liquidi.

Ricerche sperimentali del dott. ANTONIO ROITI,

prof. nell'Istituto Tecnico di Firenze.

Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 6 gennaio 1878.

---

§ 1.

La maggiore o minore viscosità si spiega, com'è noto, ammettendo con Newton che due strati di un medesimo liquido incontrino nello spostarsi uno rispetto all'altro un attrito A proporzionale alla loro superficie s, alla loro velocità relativa v ed inversamente proporzionale alla loro distanza d, talchè sia:

$$(1) \qquad A = \mu \frac{sv}{p}$$

ove μ rappresenta il coefficiente di viscosità o di attrito interno. E questa formula fu trovata d'accordo coll'esperienza, se non in tutti i casi [1], almeno in quelli nei quali la velocità relativa v era piccola.

Esistono, oltre ai liquidi propriamente detti, altri corpi i quali, benchè solidi, pure presentano talora tutte le caratteristiche della fluidità, colla sola differenza che si deformano con estrema lentezza. Così per esempio la pece nera, fragile rispetto alle azioni brusche, si mostra fluida quando sia assoggettata a forze continue: per effetto della gravità, poco a poco assume la forma del recipiente, acquista una superficie libera orizzontale, sgorga in goccie per le aperture, ecc. Il sig. A. v. Obermayer [2], esaminato l'attrito interno di diverse qualità di pece nera e dello storace, fu condotto a dichiarare che questi corpi deformandosi seguono le stesse leggi della viscosità dei liquidi.

Anche i metalli ed altri solidi effluiscono dagli orifici, quando sieno sottoposti a forti pressioni; ma le esperienze fatte da Tresca [3] sopra questo soggetto non consentono che si decida se il loro attrito interno segua in tal caso quelle leggi medesime.

Si suole del pari invocare l'attrito interno per ispiegare lo smorzamento delle oscillazioni dei fili metallici, il quale è molto maggiore che non sarebbe se si opponesse al moto la sola resistenza del mezzo e dei punti d'appoggio. A dir vero alcuni, sulle traccie di Weber [4] che la scoprì, attribuiscono più direttamente tale smorzamento alla elasticità di seconda specie o elasticità susseguente (*elastische Nachwirkung* de' Tedeschi), ossia a quella proprietà che hanno i solidi di non obbedire ad un'azione deformatrice e

(1) Vedi la mia Memoria: *Sul moto dei liquidi nei tubi cilindrici*. Nuovo Cimento, Ser. 2ª Vol. IV, 1870. — Annali d. R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. I.

(2) Obermayer, *Ein Beitrag zur Kenntniss der zähflüssigen Körper*. Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien. Aprile, 1877.

(3) Tresca, Compt. rend. Vol. LIX e LX.

(4) W. Weber, *De fili bombyciani vi elastica*. Comm. Soc. Gott. Vol. VIII p. 80, 1841. Pogg. Ann. Vol. XXXIV p. 247, Vol. LIV p. 1.

di non ritornare poi alla forma primitiva, che in un tratto di tempo più o meno lungo, il quale può contarsi a settimane e anche a mesi. Ma sino a questi ultimi tempi si riteneva con Thomson (1) e O. E. Meyer che anche il fenomeno della elasticità susseguente fosse un semplice effetto dell'attrito interno: anzi O. E. Meyer (2) ne svolse una teoria matematica, prendendo le mosse dalla legge (1) che regola l'attrito de' liquidi, teoria che sembrava appoggiata dalle successive ricerche sperimentali di Neesen (3); quando Boltzmann (4) mise in evidenza che il semplice attrito, inteso in questo modo, non è sufficiente a rendere ragione di tali fenomeni, e diede un saggio di una nuova teoria della elasticità susseguente, sul quale ritorneremo più oltre.

Intanto basti mettere in chiaro che si hanno altri esempî di corpi i quali non seguono la formola (1), e fra questi citeremo il sego e l'argilla plastica che, come constatò A. v. Obermayer, non si comprimono sotto un certo peso, ma o lo reggono senza deformarsi, oppure si schiacciano.

Ora, in alcune ricerche da me iniziate col fine di verificare sperimentalmente l'azione elettromagnetica che, stando alla teoria, una corrente deve esercitare sopra i punti interni del conduttore da essa percorso, m'imbattei in un fenomeno che perturbava le mie misure in guisa impreveduta, e che mi parve degno di uno studio alquanto accurato, perchè accennava ad azioni, che si destano nei liquidi, diverse dalla comune viscosità e molto analoghe alla elasticità susseguente, osservata finora nei soli corpi solidi.

Ad un filo di bozzolo avevo sospeso uno specchietto rigidamente connesso con un'asticella metallica verticale, avente l'estremità inferiore saldata nel punto di mezzo di un ago magnetico perpendicolare ad essa, e però orizzontale. Ago e asticella erano zincati alla galvanoplastica, ed erano immersi in una cassetta di vetro contenente una soluzione satura e neutra di solfato di zinco, nella quale potevo far passare una corrente fra elettrodi di zinco amalgamato. In altre esperienze l'ago era verniciato e fissato ad un'asticella di vetro, anzichè di metallo. Leggevo le deviazioni corrispondenti ai varî punti occupati dai poli dell'ago nella sezione del conduttore. Se non che, di mano in mano ch'io progrediva nelle mie determinazioni, osservava che l'ago giungeva alla deviazione definitiva con una lentezza sempre maggiore, e poi all'atto che interrompeva la corrente, esso non ritornava alla posizione di riposo che dopo un tempo via via più lungo. Anzi, se mentre era fra quelle due posizioni estreme, gli davo un impulso, lo vedeva compiere una serie di oscillazioni intorno ad una posizione intermedia.

Allora dovetti rinunziare all'idea di studiare più da vicino questo fenomeno singolare, perchè il gabinetto di fisica dell'Istituto Tecnico, per la prossimità della Via

(1) W. Thomson, *On the elasticity and viscosity of metals.* Phil. Mag. Vol. XXX Ser. 4. July 1865 p. 63.

(2) O. E. Meyer, *Theorie der elastischen Nachwirkung.* Pogg. Ann. Vol. CLI p. 108, 1874.

(3) F. Neesen, *Beitrag zur Kenntniss d. elast. Nachw. bei Torsion.* Pogg. Ann. Vol. CLIII p. 498, 1874.

(4) L. Boltzmann, *Zur Theorie d. elast. Nachw.* Berichte der k. Akad. zu Wien. Bd. LXX. Pogg. Ann. Ergänz. Bd. VII pag. 624, 1876.

s. Gallo molto frequentata, e per la costruzione infelicissima dello stabile, va soggetto ad incessanti e fortissime trepidazioni che, durante il giorno, rendono assolutamente impossibile qualsiasi misura delicata. Ma essendomi procurato nelle vacanze autunnali un locale conveniente, ripresi il soggetto: ed ora pubblico i risultati ottenuti in questo tempo; perchè, anche incompleti come sono, mi sembrano meritevoli di qualche attenzione e, d'altro canto, fino alle nuove vacanze mi trovo nell'impossibilità di completarli.

§ 2.

Le seguenti osservazioni furono fatte nella villa del sig. Malenotti, a Colline, Comune del Galluzzo presso Firenze. Lo stabile è di costruzione solida e lontano dalle strade carreggiabili: la stanza che vi scelsi è a pianterreno, esposta a nord-nord-est talchè, avendo cura di chiudere le imposte nelle ore mattutine, le variazioni di temperatura non arrivavano che in casi eccezionali ad 1° C. in ventiquattr'ore.

Tanto l'apparecchio col liquido, quanto il cannocchiale e la scala erano sopra sostegni interamente di terra cotta, per eliminare gli spostamenti che probabilmente si sarebbero prodotti adoperando il legno.

Ho dovuto rinunziare a servirmi del magnetismo terrestre come forza direttrice, a causa delle inferriate e, peggio ancora, dei copiosi ferramenti ond'erano munite le imposte e le porte; ed ho avuto ricorso alla sospensione bifilare, constatando poi che in tal modo avevo raggiunto maggior costanza nell'intensità della forza.

L'apparecchio, del quale mi sono valso, è composto della cassetta di vetro con piedi a vite, che serve nelle esperienze di Plateau sulle figure di equilibrio de' liquidi. Nel foro centrale del coperchio, pure di vetro, ho fissato la canna guernita in cima di ghiera metallica e cerchio diviso, che fa parte dell'elettrometro di Thomson, costruito dal meccanico Desaga di Heidelberg dietro le indicazioni di Kirchhoff. L'asticella cilindrica, che scorre a sfregamento dolce nella ghiera e che porta l'indice, è forata lungo il proprio asse pel tratto inferiore: ivi sulla base del cilindro, parallelamente ad essa e di faccia al foro, ho saldato un filo di rame del diametro di $0^{mm},75$, in guisa da lasciare scoperto il foro da una parte e dall'altra. Ho passato su questo filo di rame una bava di filugello, della quale ho annodati insieme i due capi, e vi ho appeso in basso con un gancio lo specchietto che si prolunga in una bacchetta cilindrica di vetro, fusa all'estremità inferiore, cosicchè riesce terminata da mezza sfera. Mi assicurava che la bacchetta prendesse la posizione verticale, quand' era sospesa, osservandone l'imagine riflessa sul mercurio.

La distanza fra il punto di sospensione del filo di bozzolo e il punto d'attacco dello specchietto era di 470^{mm}.

In mezzo alla cassetta di Plateau si trovava un bicchiere cilindrico di 70^{mm} di diametro (in una sola serie di osservazioni ho sostituito al bicchiere una vaschetta di vetro larga 103^{mm}), e la bacchetta veniva a pescare più o meno nei liquidi che vi introducevo. La cassetta conteneva inoltre un termometro diviso in quinti di grado, ed un altro bicchiere per accogliere sostanze disseccanti, acqua od altri liquidi, secondo i casi. Sul coperchio e davanti alla canna di vetro aveva fissato un secondo specchio, verso il quale puntando il cannocchiale, poteva assicurarmi che nel corso delle osservazioni non avvenivano spostamenti.

Nelle esperienze mi sono servito successivamente di tre diversi specchietti uniti a tre diverse bacchette, e questi apparecchi saranno indicati in seguito con I, II, III.

Il I pesava $3^{gr.},95$, aveva la bacchetta del diametro di $4^{mm},9$, il gancio, che serviva ad attaccarlo e però determinava la distanza fra i due tratti del filo all'estremità inferiore, era grosso $0^{mm},4$ e quando oscillava nell'aria presentava una durata d'oscillazione semplice $\tau = 7'', 46$, ed un decremento logaritmico $\lambda = 0,0092$, chiamando così il logaritmo volgare del rapporto fra due ampiezze consecutive.

L'apparecchio II pesava $3^{gr.},83$, il diametro della bacchetta di vetro era di $5^{mm},5$, il gancio aveva la grossezza di $0^{mm},5$; nell'aria satura di vapore compieva un'oscillazione semplice in $\tau = 7'', 47$ e presentava un decremento logaritmico $\lambda = 0,0119$, alla temperatura di $25°,5$.

Per l'apparecchio III: Peso $5^{gr.},98$, grossezza della bacchetta $5^{mm},5$, grossezza del gancio $0^{mm},3$; $\tau = 9'',03$; $\lambda = 0,0072$ nell'aria satura di vapor acqueo alla temperatura di $12°,8$.

I numeri dati per τ e λ sono le medie di molte osservazioni fatte anche in giorni diversi e sempre concordantissime.

Sul lembo del circolo diviso aveva fissate due morsette, contro le quali veniva ad appoggiarsi l'indice connesso col punto di sospensione de' fili, affinchè in ciascuna serie di osservazioni riuscisse costante il più possibile lo spostamento angolare che si dava all'apparecchio. E procedevo nel modo seguente. Cominciavo ad osservare, stando al cannocchiale, la posizione d'equilibrio per parecchi minuti di seguito, e talvolta anche per ore intere, al fine di apprezzare bene entro quali limiti fossero comprese le perturbazioni accidentali dovute a piccoli squilibri di temperatura che potevano destare delle correnti nell'aria o in seno al liquido, od anche a qualche leggiera trepidazione, specialmente nelle giornate ventose. Accertata la posizione di riposo, metteva in moto un metronomo, faceva cenno all'assistente d'avvicinarsi cautamente all'apparecchio; e ad un colpo convenuto del metronomo, egli spostava l'indice della sospensione bifilare dall'una all'altra delle morsette fissate sul disco diviso, ed io segnavo un punto sul conta-secondi di Breguet; poi l'assistente si allontanava dall'apparecchio per registrare le varie divisioni della scala, ch'io gli dettava mentre segnavo sul cronometro l'istante della loro coincidenza col reticolo del cannocchiale. Dopo qualche giorno di esercizio, tutto procedeva esattamente.

Per prepararmi la via alla spiegazione e discussione dei fenomeni che hanno tutto l'aspetto della elasticità susseguente, anzichè seguire l'ordine cronologico, comincierò col citare quelle osservazioni che accennano al solo attrito ordinario, le confronterò colla teoria matematica, la quale ne riceverà nuovo appoggio; e in pari tempo apparirà manifesto il grado di precisione di queste esperienze.

§ 3.

Fra gli altri anche Kirchhoff (¹), partendo dalle equazioni generali della idrodinamica nelle quali è tenuto conto dell'attrito conforme alla ipotesi espressa dalla (1) del § 1, ha trattato il caso di una sfera, immersa in un liquido viscoso indefinito, che oscilli attorno ad un suo diametro per effetto di una forza direttrice costante α^2, o

(¹) Gustav Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physik*, p. 381. Leipzig, 1876.

in altre parole, di un momento di rotazione $\alpha^2 \vartheta$, ove ϑ è lo spostamento angolare al tempo t; e ponendo la condizione che la velocità svanisca all'infinito, e sia uguale a quella della sfera nello strato che la tocca, è arrivato alle seguenti due soluzioni del problema:

$$(2) \qquad \vartheta = Ce^{(a^2 - b^2)t} \cos 2\, abt$$

$$(3) \qquad \vartheta = Ce^{-b^2 t},$$

ove le costanti dipendono da α^2, dalla densità e dal coefficiente d'attrito del liquido, dal diametro e dal momento d'inerzia della sfera.

Ora io penso che queste formole si possano estendere anche al caso di un solido qualunque di rivoluzione che oscilli attorno al proprio asse entro un liquido, ed allora le costanti saranno naturalmente funzioni dei parametri di questo solido.

Inoltre risulta dal processo de' calcoli di Kirchhoff che esse debbano valere anche se il liquido, anzichè omogeneo, sia di densità e di viscosità variabili attraverso ai varî strati piani perpendicolari all'asse di rivoluzione. Ciò non di meno può sorgere dubbio se sieno applicabili al caso di più liquidi non miscibili sovrapposti, perchè allora intervengono nel fenomeno nuovi fattori dei quali i calcoli non tengono conto: voglio dire la tensione *capillare* delle superficie di separazione, e la curvatura dei menischi in prossimità del corpo solido. Ma se ben si riflette intorno alle proprietà della tensione superficiale, siffatto dubbio deve svanire.

Infatti lo strato superficiale di un liquido è bensì dotato di tensione, ed anzi spesso si suole paragonare ad una membrana elastica, ma non è men vero che tale confronto è tutt'altro che esatto; giacchè la forza elastica che si desta nella membrana dipende dalla sua maggiore o minore distensione e può esser diversa nelle varie direzioni, mentre la tensione di una lamina liquida rimane costante comunque si distenda, ed in ogni punto è la stessa in tutte le direzioni: per conseguenza dalla tensione superficiale non può derivare nessun lavoro resistente quando si tratti semplicemente di trasferire da un punto ad un altro della superficie libera (o di separazione fra due liquidi) le particelle che la compongono.— Non si richiede lavoro che quando si aumenta la superficie libera, lavoro che gl'Inglesi chiamano *energia superficiale di capillarità*.

Siamo condotti a queste conclusioni da tutte le ricerche sperimentali finora eseguite, e siamo quindi autorizzati a ritenere che lo strato, il quale separa due liquidi non miscibili, non alteri, pel solo fatto della tensione, le condizioni matematiche del problema. E se esso è diversamente denso e vischioso di ciascuno de' due liquidi, come risulterebbe da certe indagini che riferiremo in seguito, ciò non produrrà altro effetto che di aggiungere un nuovo strato diverso, a quelli che già si dovrebbero considerare se tale circostanza non si verificasse.

Quanto poi alla curvatura del menisco in vicinanza del corpo solido, è probabile che, per ragione di simmetria attorno all'asse di rotazione, e perchè non viene mai alterata durante il moto oscillatorio, essa non faccia che introdurre dei nuovi parametri nell'espressione delle costanti che compariscono nelle (2) e (3).

Tutte queste considerazioni m'indussero ad applicare le due formole al caso mio del cilindro che, parzialmente immerso in un liquido relativamente molto esteso, oscilla attorno al proprio asse, verticale, per effetto della sospensione bifilare; ed il risultato fu soddisfacentissimo, come si vedrà dai numeri che riferirò fra poco.

Veramente in questo caso il momento di rotazione è proporzionale al seno dello spostamento angolare, ma trattandosi sempre di piccolissime oscillazioni, si può ritenere proporzionale all'angolo, finchè rimangono costanti la lunghezza, la distanza, la tensione e la elasticità de' due fili. Per lo stesso motivo è affatto superfluo ridurre la durata d'oscillazione ad archi infinitesimi. Invece bisogna correggere le letture fatte direttamente sulla scala del cannocchiale, per ridurle ad archi. Ed a tal fine avverto che la scala, divisa in millimetri, era alla distanza $r = 1400^{mm}$ dallo specchietto mobile; che nei prospetti seguenti ho preso per unità una divisione della scala e che per conseguenza i decimi sono stimati ad occhio. Se la lettura fatta sulla scala è distante di n divisioni dal punto che si trova sotto l'asse del cannocchiale, la distanza angolare m corrispondente è data da:

$$m = n - \frac{n^3}{3r^2},$$

ed i numeri seguenti sono tutti corretti a questo modo: ma la correzione non arriva a 0,1 che oltre i 70^{mm} e non supera 1^{mm} che ben di rado.

Per l'applicazione della (2) noteremo che, indicata con τ la durata di un'oscillazione semplice e con δ il decremento logaritmico delle ampiezze, cioè il logaritmo naturale del rapporto k fra due ampiezze consecutive, risulta:

(4) $$\tau = \frac{\pi}{2ab};\ \delta = (b^2 - a^2)\ \tau = \frac{b^2 - a^2}{2ab}\pi$$

e quindi la (2) diventa:

(5) $$\vartheta = Ce^{-\frac{\delta}{\tau}t} \cos\frac{\pi}{\tau}t.$$

Prendendo a contare il tempo dall'istante in cui si sposta la sospensione bifilare da una posizione A all'altra B, C rappresenta la prima mezza oscillazione semplice; e se lo spostamento fosse istantaneo, dovrebbe trovarsi C esattamente uguale alla differenza delle due letture corrispondenti alle due posizioni di riposo A, B. Ma invece esso richiede un certo tempo (qualche decimo di secondo), e però, prescindendo anche dalle piccole perturbazioni inevitabili, quali sarebbero urti, scosse ecc., prodotte dall'assistente che s'avvicina e dà lo spostamento all'apparecchio, la forza direttrice non agisce con tutta la propria intensità sul principio della prima mezza oscillazione, come si suppone nella formola; e per conseguenza si può prevedere che questa dia per C un valore un poco maggiore del vero.

Dopo 24 ore che lo specchietto III (§ 2) era sospeso nell'apparecchio in un ambiente, reso saturo di vapor acqueo coll'aver versato nel bicchiere laterale dell'acqua piovana ed introdottovi un rotolo di carta bibula che occupava tutta l'altezza della cassetta, il 24 ottobre ho mesciuto nel bicchiere con una pipetta tanto olio d'uliva vergine (raccolto quest'anno dalla fattoria Bartolini di Bagnolo), previamente filtrato attraverso a carta svedese, fino al punto che vi pescasse solamente in parte la mezza sfera che termina la bacchetta di vetro. Alle $7^h 55'$ pom. l'apparecchio fu abbandonato a sè; alle $10^h 10'$ pom. il reticolo del cannocchiale coincideva colla divisione 391, 3 della scala, essendo la temperatura di $12°, 9$. E la mattina successiva furono fatte le osservazioni seguenti:

Tabella I.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
30 ottobre	Punti di riposo		Deviaz. estr.		Ampiezze		Differenze
12°.7	oss. σ_0	calc. α'_0	oss. D_n	calc. ϑ_n	oss α_n	calc. α'_n	$\alpha'_n - \alpha_n$
10h.50′ a.	A=392,2						
51	2						
52	2						
53	2						
54	2						
55	2						
56	2						
57	2						
58	3						
59	3						
11. 0	3						
1	2						
2	3						
2′.55″	3						
3′. 1″	Appoggio l'indice del micrometro da *A*, contro *B*.						
		B.					
10″,3			143,3	—89,83			
		224,2			138,0	137,83	— 0,2
19, 6			272,3	+48,00			
		4			73,4	73,61	+ 0,2
28, 8			198,9	—25,61			
		4			39,1	39,28	+ 0,2
38, 0			238,8	+13,67			
		3			21,0	20,96	0.0
47, 1			227,0	— 7,29			
		3			11,2	11,18	0,0
56, 3			228,2	+ 3,89			
		2			6,1	5,97	— 0,1
4′. 5″,6			222,1	— 2,08			
		2			3,3	3,19	— 0,1
14, 9			225,4	+ 1,11			
		3			1,7	1,70	0,0
24, 1			223,7	+ 0,59			
		3			1,0	0,91	— 0,1
33, 3			224,7	+ 0,32			
		3			0,6	0,49	— 0,1
?			224,1	— 0,17			
		2			0,2	0,26	+ 0,1
?			224,3	+ 0,09			
5′. 0″	B=224,2						
6	2						
7	3						
8	2						
9	3						
10	3						
11	3						
12	3						
13	3						
14	3						
15	3						
16	3						
3h.p.0	6						
4. 33	2						
5. 43	2						
9. 53	2						
12°.8							

$$\tau = \frac{73{,}8}{8} = 9'',23.$$

Decremento logaritmico a base 10, in media $\lambda = \delta \lg e = 0{,}2728$.

Gli altri numeri della precedente Tabella I furono ottenuti coll'ordine che segue:

1. . . . . Colonna VI. $(-1)^n \alpha_n = D_n - D_{n+1}$

2. . . . . $C = \dfrac{\sum_1^{11} {}_n \alpha_n}{(1 + e^{-\delta}) \sum_1^{11} {}_n e^{-n\delta}} = 168{,}57$

3. . . . . Colonna V. $\vartheta_n = (-1)^n C e^{-n\delta}$

4. . . . . Colonna VII. $(-1)^n \alpha'_n = \vartheta_n - \vartheta_{n+1}$

5. . . . . Colonna III. $\alpha'_0 = \dfrac{D_n - \vartheta_n + D_{n+1} - \vartheta_{n+1}}{2}$.

La distanza angolare fra la posizione d'equilibrio iniziale $A = 392, 2$ e la finale $B = 224, 3$ è $167, 9$, e quindi presenta una differenza in meno di soli 0, 7 sul valore ricavato per C dalle osservazioni rimanenti, differenza che, quantunque di pochissimo superiore agli errori d'osservazione, è tuttavia nel senso delle nostre previsioni.

Pel resto l'accordo fra l'esperienza e la formola (2) non potrebbe esser davvero migliore, come appare dalla colonna VIII che contiene le differenze fra le ampiezze calcolate e le osservate; e dalla colonna III la quale indica come subito fin dal principio, il moto oscillatorio si compiesse intorno alla posizione definitiva d'equilibrio.

Il 30 ottobre alle 10 pom. ho aggiunto 10 c. c. d'olio e la mattina successiva ho fatto le osservazioni della Tabella II.

Siccome in questo caso non si dispone che di due ampiezze, e la seconda $< 1^{mm}$ non è stimata che ad occhio, così sarà più esatto dedurre il decremento logaritmico λ dalla costante C e per questa ricorrere all'osservazione precedente, che cioè deve risultare pochissimo maggiore della differenza fra le due posizioni di riposo:

$$395, 5 - 226, 0 = 169, 5.$$

Assumeremo dunque $C = 170$, e per avere l'ampiezza d'oscillazione durante lo spostamento del micrometro, aggiungeremo al valore di C la differenza fra il primo punto di ritorno D_1 ed il punto di riposo finale A:

$$170 + 405, 5 - 395, 5 = 180.$$

Allora sarà:

$$\lambda = \lg. 180 - \lg. 10, 3 = 1, 2425;$$

e calcoleremo gli altri numeri come nel caso precedente.

Tabella II.

31 ottobre — 12°,8	Punti di riposo oss.	Punti di riposo calc. α'_0	Deviaz. estreme oss. D_n	Deviaz. estreme calc. ϑ_n	Ampiezze oss. α_n	Ampiezze calc. α'_n	Differenze $\alpha'_n - \alpha_n$
11h. 6′ a.	$B = 225{,}8$						
7	9						
8	9						
9	226,0						
10	0						
11	0						
12	0						
13	0						
14	0						
15	0						
16	0						
17	0						
18	0						
18′.58″,5	1						
19. 4, 5		Appoggio l'indice da *B* contro *A*.					
16, 6		*A*	405,5	—9,72	10,3	10,28	0,0
29, 0		395,8	395,2	+0,56	0,5	0,59	+ 0,1
42, 1		395,7	395,7	—0,03			
20′ 0″	$A = 395{,}6$						
21	6						
22	5						
23	5						
24	5						
25	5						
26	5						
27	5						
28	5						
29	5						
30	5						
31	5						
32	5						
33	5						
34	5						
12°,8							

$$\tau = \frac{24{,}5}{2} = 12'',25; \; \lambda = 1{,}2425.$$

Alle 1 pom. del 31 ottobre aggiunsi altre 10 c. c. d'olio, e il moto osservato la sera stessa alle 8 $^1/_4$ era divenuto aperiodico, talchè erano da confrontarsi le osservazioni colla formola (3), la quale si può anche scrivere così:

$$(6) \qquad \lg y = \lg C - t \,.\, b^2 \lg e \qquad\qquad (7) \qquad t = \frac{\lg C - \lg y}{b^2 \lg e}\,.$$

Applicando il metodo de' minimi quadrati alla (6), ho determinato i valori delle costanti colle formole:

$$(8) \quad \lg C = \frac{(\Sigma t^2_n)\,(\Sigma \lg y_n) - (\Sigma t_n)\,(\Sigma t_n \lg y_n)}{n\Sigma t^2_n - (\Sigma t_1)^2}; \qquad b^2 \lg e = \frac{(\Sigma t_n)\,(\Sigma \lg y_n) - n\Sigma t_n \lg y_n}{n\Sigma t^2_n - (\Sigma t_n)^2}$$

senza però tener conto del valore di y corrispondente a $t = 0$; e poi li ho introdotti nella (7) per calcolare t.

Nella seguente Tabella III t è espresso in secondi ed è contato dall'istante, nel quale veniva spostato l'indice della sospensione bifilare, e che è segnato in capo a ciascuna colonna; le y sono le distanze angolari dalla posizione d'equilibrio finale.

Tabella III.

31 ottobre $8^h15'3''$ pom.
12°,8

y	t oss.	t calc.	Diff.
169,4	0,0		
91,0	5,0	5,08	+0,1
31,1	10,4	10,31	—0,1
11,1	15,4	15,34	—0,1
3,1	21,5	21,55	+0,1
1,1	26,6	26,61	0,0

$b^2 = 0,2052$ $C = 258,1$

12°,8

1. novembre $10^h40'6''$ a.
12°,8

y	t oss.	t calc.	Diff.
168,8	0		
58,7	7,4	7,56	+0,2
28,0	10,9	11,02	+0,1
31,1	14,9	14,57	—0,3
4,2	20,1	19,90	—0,2
1,2	25,5	25,76	+0,3

$b^2 = 0,2137$ $C = 295,2$

12°,9

Alle $11^h15'$ a. aggiungo altri 10 c.c. d'olio.

2 novembre $10^h43'58''$ a.
13°,0

y	t oss.	t calc.	Diff.
170,3	0		
89,9	6,8	6,70	—0,1
70,0	8,8	8,76	0,0
50,0	11,8	11,67	—0,1
30,0	15,9	16,08	+0,2
20,0	19,6	19,58	0,0
10,0	25,4	25,57	+0,2
6,0	29,8	29,98	+0,2
3,0	35,8	35,97	+0,2
1,0	45,8	45.46	—0,3

$b^2 = 0,1158$ $C = 193,1$

13°,0

Alle $11^h12'$ a. aggiungo altri 10 c.c. d'olio.

2 novembre $5^h58'4''$ p.
13°,1

y	t oss.	t calc.	Diff.
169,0	0		
120,7	5,0	5,03	0,0
80,8	9,4	9,55	+0,2
55,8	13,8	13,74	−0,1
40,9	17,3	17,25	0,0
26,0	22,3	22,37	+0,1
20,1	24,9	25,27	+0,4
13,1	30,1	30,17	+0,1
8,2	35,6	35,39	—0,2
6,2	38,8	38,55	—0,2
4,2	43,3	42,95	—0,3
2,2	50,2	50,25	+0,1
1,3	56,6	56,19	—0,4

$b^2 = 0,0886$ $C = 188,5$

13°,2

$9^h25'$ p. aggiungo 10 c.c. d'olio.

4 novembre $10^h45'2''$ a.
12°,4

y	t oss.	t calc.	Diff.
169,5	0		
99,2	8,8	8,92	+0,1
79,3	12,3	12,28	0,0
59,3	16,4	16,44	0,0
49,3	18,8	19,09	+0,3
39,3	22,4	22,34	—0,1
29,3	26,6	26,54	—0,1
19,3	32,8	32,52	—0,3
12,3	39,2	38,98	—0,2
9,3	43,3	42,98	—0,3
6,3	48,9	48,56	—0,3
4,3	53,8	54,03	+0,2
2,3	62,7	63,00	+0,3
1,3	71,0	71,18	+0,2

$b^2 = 0,0698$ $C = 186,7$

12°,6

Se si tien conto della difficoltà maggiore di far le letture in questo caso, si deve riconoscere che anche la formola (3) del moto aperiodico corrisponde egregiamente alla realtà.

Ho un'altra serie di esperienze simile alla precedente, fatta dal 7 al 18 settembre con olio d'uliva vergine della fattoria Corsini a Mezzomonte e collo specchietto II, a temperature prossime ai 20°. Ma siccome i risultati non differiscono dai precedenti, così stimo inutile riferirla per intero, e mi limito a dire che dopo aver tracciate una sopra l'altra le 4 curve rappresentanti le ultime esperienze fatte in condizioni identiche il giorno 13 alla temperatura di 21°, 8 a 21°, 9; il 14 dai 21°, 4 ai 21°, 6; il 15 dai 21°, 5 ai 21°, 8 (il 16 e 17 riposo) ed il 18 settembre dai 20°, 3 ai 20°, 5; ho potuto constatare che le varie misure erano benissimo concordanti, perchè quelle curve non arrivavano mai a scostarsi di un tratto corrispondente ad una divisione della scala.

Non credo superfluo citare ancora qualcuna delle esperienze fatte sull'acqua, molto meno vischiosa dell'olio, alle quali è applicabile la formola (2) del moto periodico.

Ho adoperato lo specchietto I, ma il filo di bozzolo era 5^{cm} più corto di quando aveva determinato la durata di oscillazione e il decremento logaritmico riportati al § 2. L'acqua distillata, invece che nel bicchiere centrale, era contenuta nella vaschetta del diametro di 103^{mm}. Procedei colle più scrupolose cautele per lavare perfettamente e il recipiente e la bacchetta di vetro, per filtrare più volte l'acqua, per tenerla esposta il meno possibile all'aria libera, per chiudere perfettamente la cassetta di Plateau. Queste operazioni vennero eseguite la mattina del 24 agosto; ed alle $10^h\,35'$ ant. l'apparecchio fu abbandonato a sè.

Lo stesso giorno e i giorni successivi furono fatte le esperienze spostando l'indice del micrometro dall'una all'altra posizione d'equilibrio: cosicchè gli spostamenti avvenivano alternativamente un giorno a destra e il successivo a sinistra.

Dal seguente specchio appare come non si possa dedurne un'influenza spiccata del tempo sulla durata d'oscillazione e sul decremento logaritmico.

Tabella IV.

24 agosto $5^h\,47'$ p.	25 agosto $9^h\,24'$ a.	26 agosto $9^h\,44'$ a.	27 agosto $9^h\,39'$ a.	28 agosto $9^h\,41'$ a.	29 agosto $9^h\,38'$ a.
26°,1	25°,5	25°.5	25°,3	25°,6	25°,6
$\tau = 7'',53$	$\tau = 7'',68$	$\tau = 7'',62$	$\tau = 7'',74$	$\tau = 7'',75$	$\tau = 7'',75$
$\lambda = 0,0405$	$\lambda = 0,0414$	$\lambda = 0,0443$	$\lambda = 0,0436$	$\lambda = 0,0445$	$\lambda = 0,0443$
25°,8	25°,8	25°,8	25°,5	25°,8	25°,8

Trascriverò per intero i soli numeri dell'ultimo giorno, più che altro, per mettere in evidenza come fin da principio le oscillazioni avvenissero intorno alla posizione definitiva di equilibrio.

Tabella V.

Punti di riposo		Deviazioni estreme		Ampiezze		Diff.	29 agosto
oss.	calc. α'_0	oss. D_n	calc. ϑ_n	oss. α_n	calc. α'_n	$\alpha'_n - \alpha_n$	
A_1=432,2	. . . . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .		9h38′12″; 25°,6
		?	—261,83				? Esce dalla scala
		380,6	+236,42		498,25		
		?	—213,48		449,90		
		337,7	+192,77		406,25		
		?	—174,06		366,83		
		302,3	+157,17		331,23		
	B= 145,3	3,5	—141,92	298,8	299,09	+0,3	
	4	273,5	+128,15	270,0	270,07	+0.1	
	4	29,8	—115,71	243,7	243,86	+0,2	
	5	249.9	+104,48	220,1	220,19	+0,1	
	3	50,9	— 94,35	199,0	198,83	—0,2	
	5	230,9	+ 85,20	180,0	179,55	—0,4	
	5	68,3	— 76,93	162,6	162,13	—0,5	
	3	214.8	+ 69,47	146,5	146,40	—0,1	
	4	82,8	— 62,73	132,0	132.20	+0,2	
	5	202,0	+ 56,64	119,2	119,37	+0,2	
	4	94,3	— 51,14	107,7	107,78	+0,1	
	5	191,7	+ 46,18	97,4	97,32	—0,1	
	5	103,8	— 41,70	87,9	87,88	0,0	
	5	183,2	+ 37,65	79,4	79,35	0,0	
	5	111,4	— 34,00	71,8	71,65	—0,1	
	5	176,2	+ 30,70	64,8	64,70	—0,1	
	4	117,6	— 27,72	58,6	58,42	—0,2	
	3	170,4	+ 25,03	52,8	59,75	0,0	
	4	122,9	— 22,60	47,5	47,63	+0,1	
	4	165,8	+ 20,41	42,9	43,01	+0,1	
	5	127,1	— 18,43	38,7	38,84	+0,1	
	4	162,0	+ 16,64	34,9	35,07	+0,2	
	3	130,3	— 15,03	31,7	31,67	0,0	
	4	159,0	+ 13,57	28,7	28,60	—0,1	
	4	133,1	— 12,25	25,9	25,82	—0,1	
	3	156,3	+ 11,06	23,2	23,31	+0,1	
	3	135,4	— 9,99	20,9	21,05	+0,2	
	3	154,3	+ 9,02	18,9	19,01	+0,1	
	3	137,2	— 8,10	17,1	17,12	0,0	
B = 145,2	. . . . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	10h20′ a.; 25°,8

A—B=287,0; e il calcolo dà C=290,0, ossia alquanto maggiore, come avevamo preveduto.

§ 4.

Finora abbiamo trovato che si verifica senz' alcuna eccezione la teoria matematica della viscosità, che parte dall' ipotesi di Newton espressa dalla (1), § 1; e quindi rimangono confermate le nostre previsioni che la superficie libera di un liquido, quantunque dotata di tensione, pure si debba comportare precisamente come uno degli strati interni; senza però che ne venga pregiudicata la questione se lo strato superficiale sia diverso per densità e viscosità dagli strati inferiori.

Che la densità debba essere diversa è ammesso necessariamente in ogni teoria della capillarità, e che sia diversa anche la viscosità, fu opinato prima da Cartesio, Rumford e da altri fisici, e poi fu ammesso da Plateau in seguito ad alcune sue ricerche, sulle quali sarà bene che ci tratteniamo alquanto.

Plateau ([1]) metteva in bilico un ago romboidale di declinazione sopra un pernio coincidente coll' asse di un vaso cilindrico; per mezzo di una calamita conduceva l'ago nella posizione perpendicolare al meridiano magnetico; mesceva un liquido nel vaso fino a che toccasse la sola faccia inferiore dell' ago; aspettava che il liquido si mettesse in quiete; lasciava libero l' ago e misurava il tempo da questo impiegato a percorrere i primi 85°. Poi ripeteva la medesima determinazione avendo aggiunto tanto liquido da sommergere l' ago per intero.

Così egli constatò che per alcuni liquidi quel tempo era maggiore nel primo caso che nel secondo, mentre per altri accadeva l' opposto; e ne conchiuse che quelli hanno maggiore e questi minor viscosità nello strato superficiale che nell' interno della loro massa. Indi ponendo in relazione siffatta viscosità diversa con la tensione superficiale, fece una ingegnosa teoria della formazione più o meno facile delle lamine liquide e della loro maggiore o minore persistenza, corredando la propria esposizione di copiose e minute osservazioni di fatti.

Due anni dopo il prof. Luvini ([2]) espresse il dubbio che i fenomeni descritti da Plateau fossero semplici effetti di viscosità; e ciò fondandosi sopra i risultati delle proprie esperienze, nelle quali aveva sostituito all' azione direttrice del magnetismo terrestre la torsione del filo metallico di una bilancia di Coulomb, sospendendovi orizzontalmente delle lastre di sostanze e forme diverse. Egli trovò che la velocità angolare diminuiva da un' esperienza all' altra, sebbene tutte le condizioni rimanessero apparentemente inalterate, e ne inferì che la resistenza al moto aumenta colla durata dell' esposizione del liquido all' aria (o ad un altro gas indifferentemente), e del suo contatto col solido. Riflettendo poi che tale aumento di resistenza non si può attribuire ad una variazione nella tensione superficiale la quale, anzichè aumentare, diminuisce col tempo ([3]), il prof. Luvini conchiuse che le cause del fenomeno devono essere l' imbrattamento della superficie libera e l' adesione via via crescente fra il liquido e il solido.

Gli effetti relativamente grandi prodotti anche da minime impurità delle superficie liquide, sono ormai noti generalmente dopo i lavori di Tolimson e di Quincke ([4]), ed è pur noto a tutti che basta tener immerso per lungo tempo un solido nell'acqua, perchè ne venga perfettamente bagnato; ed allora spostando il solido nel liquido, si può ammettere che lo strato aderentevi si sposti con esso, e però in tal caso il coefficente d'attrito esterno si suole ritenere uguale a quello di viscosità: mentre invece quando il solido non venga bagnato, e quindi la sua superficie scorra sul liquido, bisogna mettere in calcolo un coefficente speciale. Per questa ragione ho sempre avuto cura, a meno che non ne faccia espressa avvertenza, di tenere la bacchetta di vetro immersa almeno per 24^h nel liquido da sperimentare.

([1]) Plateau, *Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur*, 8e Série. Mém. de l'Acad. R. de Belgique T. XXXVII, 1868.

([2]) Luvini, *Esperienze ed osservazioni sull' adesione fra solidi e liquidi.* Atti della R. Accad. d. Scienze di Torino, 1870. Philosophical Magazine for September 1870.

([3]) Hagen, *Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten.* Annalen von Poggendorff Vol. LXVII p. 1. 1845.

([4]) Tolimson, Philosoph. Magaz. for October 1861, and 1868. — Quincke, *Ueber die Capillaritäts-Erscheinungen an der gemeinschaftlichen Oberfläche zweier Flüssigkeiten*, Pogg. Ann. Vol. CXXXIX p. 1, 1870. — N. Cimento Ser. 2 Vol. IV p. 70.

Mi par dunque indubitato che l'aderenza e l'imbrattamento superficiale del liquido abbiano dovuto esercitare un'influenza non lieve sui risultati sperimentali di Plateau, ma non per questo valgono a negare il concetto della viscosità superficiale.

L'influenza poi della forma della lastra era prevedibile, ed il prof. Luvini volle distinguere la resistenza *superficiale* dalla resistenza *lineare*, e trovò che il *contorno* di un disco circolare ruotante sul proprio centro alla superficie di un liquido, non incontra che poca o punta resistenza; mentre le porzioni dei contorni inclinate sulla direzione del moto incontrano una resistenza uguale a quella delle loro projezioni sulla normale alla direzione medesima.

Più tardi il prof. Marangoni pubblicò una sua Memoria (¹) sullo stesso argomento, senza conoscere quella del prof. Luvini, ed anch'egli segnalò l'influenza dell'imbrattamento superficiale: anzi mostrò con molta sagacia che, avendo la superficie imbrattata una tensione minore della superficie fresca, dallo spostamento dell'ago di Plateau, che mette a nudo gli strati sottostanti, deve risultare un eccesso di tensione contraria al moto: talchè la superficie si deve contenere come se fosse dotata di elasticità vera e propria. Con questo concetto, ch'egli chiama della *elasticità superficiale*, e colla deformazione dei menischi il prof. Marangoni spiega i varî fatti osservati da Plateau, e non crede che si debba ammettere con lui una viscosità *superficiale* diversa dalla viscosità *interna*.

Senza entrare della discussione particolareggiata del lavoro del prof. Marangoni e della risposta che vi fece Plateau (²), mi fermerò sopra le determinazioni del primo che si riferiscono ad un disco di ottone il quale, secondo che affiorava od era immerso in un dato liquido, impiegava tempi diversi a ruotare di un certo angolo per effetto dell'azione terrestre su di un ago magnetico rigidamente connesso col disco. Il rapporto fra i due tempi risultò costantemente < 1, e precisamente compreso fra 0,86 e 0,68 pei varî liquidi cimentati, essendo maggiore pei meno vischiosi, indifferentemente poi se fossero di quelli ai quali Plateau attribuisce un eccesso o un difetto di viscosità superficiale sulla viscosità interna.

Ora, se si ritiene che nel primo caso il liquido possa considerarsi limitato dalla sola superficie libera ed esteso indefinitamente per ogni altro verso, e nel secondo sia invece infinito in tutte le direzioni; e se inoltre si trascurano le perturbazioni possibili dovute alle condizioni speciali in cui si trova lo strato della superficie: torna evidente che nel primo caso la resistenza dev'essere la metà che nel secondo. E se il prof. Marangoni la trovò maggiore, si può tutto al più supporre che ciò derivi in gran parte dall'attrito dell'aria sulla faccia superiore del disco e dalle resistenze della sospensione; ma non mi pare che si possa dedurne con certezza una viscosità maggiore alla superficie che nell'interno, e neppure che tale eccesso di viscosità si possa negare.

Il problema rimane adunque insoluto tanto per le superficie fresche quanto per le imbrattate, sebbene questo caso del disco sia appunto quello il quale, studiato più

(¹) Marangoni, *Sul principio della viscosità superficiale dei liquidi stabilito dal sig. J. Plateau.* N. Cimento S. 2. Vol. V, VI, aprile 1872.

(²) J. Plateau, *Réponse aux objections de M. Marangoni contre le principe de la viscosité superficielle des liquides.* Bulletins de l'Acad. R. de Belgique, 2.ᵉ Série T. XXXIV, novembre 1872. — N. Cimento S. 2. Vol. VII, VIII p. 370.

minuziosamente, prometta di darne la chiave; perchè in esso non intervengono nè le deformazioni del menisco, nè la cosidetta *elasticità superficiale* del prof. Marangoni, la quale è dovuta all'imbrattamento e per manifestarsi richiede che gli strati inferiori del liquido siano messi allo scoperto.

Molto simile a questo del disco è il caso mio del cilindro parzialmente immerso, ed ora riferirò alcune esperienze dalle quali risulta chiaramente come una superficie liquida possa in alcune circostanze acquistare, piuttosto che un semplice aumento di viscosità, tutte le caratteristiche di quelle peculiari azioni molecolari che si sono finora osservate in varî solidi; come i metalli, il vetro e la gomma elastica, e che si sogliono comprendere nella denominazione di elasticità susseguente.

§ 5.

Comincierò con una serie di esperienze da me fatte collo specchietto I (§ 2) sull'acqua distillata, senz' usare la cautela di filtrarla e di proteggerla dal pulviscolo atmosferico prima di rinchiuderla nella cassetta di vetro.

Questa serie abbraccia un tempo piuttosto lungo, e precisamente dal 25 luglio al 24 agosto: e credo bene di riferirla con qualche diffusione per mostrare come gradatamente vada destandosi e poi aumentando la disposizione molecolare che ci preoccupa, e così gettare un poco di luce sul fenomeno ancora tanto oscuro della elasticità susseguente.

Il 25 luglio alle $8^h\,9'$ ant. ho introdotto l'acqua nel bicchiere, e nel giorno stesso e nei successivi 26 e 27 ho fatto delle esperienze preliminari per ricercare la posizione più acconcia ove fissare le morsette sul disco diviso e dove collocare il cannocchiale.

Nel prospetto seguente sono registrate alcune esperienze de' primi giorni, riserbando le altre pel § 6. In capo a ciascuna esperienza è notata l' ora nella quale avvenne lo spostamento della sospensione bifilare, appoggiando l'indice dall'una morsetta all'altra.

La prima colonna contiene le deviazioni estreme D_n quali furono osservate sulla scala, ma corrette per ridurle ad archi. Nella seconda colonna si trovano le ampiezze d'oscillazione, dalle quali fu dedotto il valor medio del decremento logaritmico λ, segnato in basso. I numeri ω_n della terza colonna, che rappresentano le posizioni istantanee d'equilibrio attorno alle quali si compiono le singole oscillazioni, furono calcolati con la nota formola

$$\omega_n = D_{n+1} + \frac{D_n - D_{n+1}}{1 + k}$$

ove k è il rapporto medio fra due ampiezze consecutive: oppure, gli ultimi, furono osservati direttamente quando le oscillazioni erano cessate, ed allora accanto a ciascuno è segnato l'istante dell'osservazione.

La differenza fra ciascuna ω_n e l'ultima determinata è inscritta nella quarta colonna ed è preceduta dal segno $+$ o $-$ secondo che la posizione istantanea d'equilibrio era compresa fra la iniziale e la finale, oppure si trovava oltre quest'ultima.

Riferisco per brevità la prima esperienza di ciascun giorno omettendo le altre, ma indicando in basso di ciascuna colonna l'ora nella quale l'apparecchio fu abbandonato a sè: talchè da quell'ora all'altra segnata in capo alla colonna seguente, tutto era rimasto in assoluto riposo.

Tabella VI.

27 luglio 6h9'50" pom.

D_n	α_n	ω_n	
		B	
401.6	325,5	236.2	+0.2
76,1	315,4	6,3	+0,3
391,5	304,3	6,9	+0,9
87,2	294.6	6,9	+0.9
381,8	285.4	6,8	+0,8
96.4	277.3	7,3	+1,3
373,7	269.0	7,0	+1,0
104,7	259,0	6,3	+0,3
363,7	250.3	6.5	+0,5
113,4	243,4	6,9	+0,9
356,8	235,8	7,0	+1,0
121,0	227,5	6,6	+0.6
348,5	220,2	6,7	+0,7
128,3	213.4	6,7	+0.7
341.7	206.4	6.8	+0.8
135,3	199.5	6,7	+0,7
334,8	193,6	6.4	+0.4
141,2	187,5	6,5	+0,5
328,7	181,5	6,5	+0.5
147,2	175,7	6.5	+0,5
322,9	171,5	5,8	—0.2
151,4	166.0	5,7	—0,3
317,4	159,3	6.5	+0,5
158,1	154,4	6,6	+0,6
312.5			
36 oscillazioni semplici			
259,8	46,6	6,1	+0.1
213.2	45,0	6,1	+0,1
258,2	43.6	6,0	0,0
214.6	42.3	6,1	+0,1
256,9	40.9	6.1	+0,1
216.0	39,4	236,0	0,0
255,4			

λ = 0,0141

11h0' p.

28 luglio 7h10'45" ant.

D_n	σ_n	ω_n	
		A	
324,9	167,9	411,0	+0.3
492.8	159,9	0,9	+0,4
332,9	152,4	1,0	+0,3
485.3	145,2	0,8	+0,5
340,1	138,7	1,2	+0,1
478,8	132,1	1,1	+0.2
346,7	125,5	1,0	+0,3
472,2	119,7	0,8	+0,5
352,5	113,7	0,8	+0,5
466,2	108,2	0,7	+0,6
358.0	103,1	0,8	+0.5
461,1	99,1	0,3	+1,0
362.0	94,3	0,3	+1,0
456.3	89,0	0,7	+0,6
367.3	86,0	1,4	—0,1
453.3	82.2	1,2	+0,1
371,1	77,5	0,8	+0,5
448,6			
5 oscillazioni semplici			
381.8	57,1	1,1	+0,2
438,9	54,4	1.0	+0,3
384,5	52,1	1,2	+0,1
436,6	49,7	1,1	+0.2
386,9	47,2	1,1	+0.2
434,1	44,7	1,2	+0,1
389,4	42,6	1,2	+0,1
432,0	40,7	1,1	+0,2
391,3	39,0	1,3	0,0
430,3	37,0	1,3	0,0
393,3	35,1	1.3	0,0
428,4	33,4	1,3	0,0
395,0	31,9	1,3	0,0
426,9	30,4	1,3	0,0
396,5	28,9	1,3	0,0
425,4			

λ = 0.0218

7h19' p.

29 luglio 10h35'50" ant.

D_n	α_n	ω_n	
		B	
381,6	261.0	244,4	—0,2
120,6	235,8	4,5	—0.1
356,4	213,0	4,5	—0,1
143,4	192,7	4,7	+0,1
336.1	174,1	4,6	0,0
162,0	157,4	4,7	+0,1
319,4	142,1	4,7	+0,1
177,3	128.4	4,8	+0,2
305,7	115.8	4,8	+0,2
189,9	104,9	5,0	+0,4
294.8	94,8	5,0	+0,4
200.0	85,3	4,8	+0,2
285,3	76,9	4,9	+0,3
208,4	69,5	4,9	+0,3
277,9	62,9	4,8	+0,2
215,0	56,8	4,9	+0,3
271,8	51.1	4,9	+0,3
220,7	46,1	4,9	+0,3
266,8	41,7	4,9	+0,3
225,1	37.6	4,9	+0,3
262,7	33,9	4,9	+0,3
228,8	30,5	4,8	+0,2
259,3	27,7	4,7	+0,1
231,6	24.9	4,7	+0,1
256.5	22,6	4,6	0,0
233,9	20,3	4,6	0,0
254,2	18,2	4,6	0,0
236,0	16,0	4,4	—0,2
252,0			
11h39'30" a.		oss. 244,6	0.0

λ = 0,0444

11h45'0" p.

30 luglio 10h29'2" ant.

D_n	α_n	ω_n	
		A	
483,3	137,2	406,8	+3,9
346,1	110,2	7,6	+3,1
456,3	86,9	7,8	+2,9
369,4	69,5	8,2	+2,5
438,9	54,6	8,4	+2,3
384,3	43,5	8,6	+2,1
427,8	34,3	8,7	+2,0
393,5	27,6	8,9	+1,8
421,1	21,6	9,1	+1.6
399,5	17,2	9,1	+1,6
416,7	13,6	9,2	+1,5
403,1	10,9	9,2	+1,5
414,0	8,4	9,3	+1,4
405,6	6,8	9,4	+1.3
412,4	5,4	9,4	+1,3
407,0	4.2	9,4	+1,3
411,2	3,1	9,5	+1,2
408,1			
10h43'0"		oss. 410,7	0,0

λ = 0,1009

6h20' p.

—

31 luglio

Completo riposo

1 agosto 10h11'6" ant.

D_n	α_n	ω_n		λ_n
		B		
324,9	112,8	258,5	18,5	
212,1	74,6	256,0	16.0	0,1794
286,7	54,4	4,7	11,7	1371
232,3	35,7	3,3	14,3	1829
268,0	26,4	2,5	12,5	1311
241,6	17,1	1,7	11,7	1886
258,7	12,9	1,1	11,1	1224
245,8	7,9	0,4	10,4	2130
253,7	6,4	249,9	9,9	0914
247,3	3,8	9,5	9,5	2264
251,1	3,2	9,2	9,2	0747
247,9	1,8	9,0	9,0	2498
249,7	1,7	8,7	8,7	0249
248.0	0.9	8.5	8,5	2762
248,9	1,1	8,3	8,3	0,9128—1
247,8				
		oss.		
10h13'.25"		247,0	7,0	
14'. 9"		246.0	6,0	
15. 7		245,0	5,0	
17. 1		244,0	4,0	
19. 39		243,0	3,0	
23. 50		242,0	2,0	
32. 10		241,0	1,0	
39. 30		240,0	0,0	
11h 2'.50"		240,0	0,0	

λ = 0,1557, τ = 6"706

Da una prima ispezione del prospetto si scorge come λ, e quindi lo smorzamento, vada via via aumentando. La prevalenza dei segni + nella IV colonna indica che le oscillazioni, contrariamente a quanto avveniva nelle esperienze de' paragrafi precedenti, tendono a compiersi intorno ad una posizione intermedia: ma la piccolezza di quei valori e la loro irregolarità nei primi tre giorni non permetterebbero ancora di stabilire questo fatto con certezza.

Invece nel quarto giorno (30 luglio) lo spostamento progressivo della posizione d'equilibrio non lascia verun dubbio.

Nell'esperienza del 1 agosto ho poi aggiunto una quinta colonna per segnarvi i decrementi logaritmici dedotti da due ampiezze consecutive: e mostrare come sieno soggetti alle seguenti leggi, verificate senza eccezione anche in tutte le altre numerosissime esperienze delle quali non do cenno.

1. Chiamando *andata* l'ampiezza dell'oscillazione semplice che si compie verso la posizione finale d' equilibrio, e *ritorno* quella diretta verso la posizione iniziale; si scorge che il decremento logaritmico, e quindi il rapporto, di ciascun ritorno all'andata successiva è minore dei due decrementi, da andata e ritorno, fra i quali è compreso. In guisa che, se non vi fosse smorzamento, il ritorno sarebbe minore dell'andata.

2. I rapporti dei ritorni alle andate vanno diminuendo; mentre invece vanno aumentando i rapporti delle andate ai ritorni. Cosicchè bisogna conchiudere che le ampiezze di ritorno decrescono più rapidamente di quelle dell'andata.

Ora, esaminando i risultati numerici che esprimono le osservazioni fatte da F. Neesen sul *cautsciuc* (¹), si vede che essi pure seguono queste due leggi.

Lo spostamento continuo della posizione di equilibrio, registrato nella quarta colonna del 1 agosto, è abbastanza rilevante e seguita anche dopo che le oscillazioni sono spente.

§ 6.

Ma avanti di procedere nella relazione delle mie esperienze, stimo opportuno di dare un cenno della teoria proposta da Boltzmann per ispiegare la elasticità susseguente: e così risparmierò delle inutili ripetizioni di numeri, giacchè di fronte ai risultati dell'osservazione potrò mettere subito i risultati teorici corrispondenti.

Le ricerche di Weber e di Kohlrausch (²) condussero a formole d'interpolazione le quali, se anche le esprimono bene, sono destituite affatto di ogni carattere teorico; e le considerazioni di quegli scienziati, che fanno risiedere la causa del fenomeno nelle rotazioni delle molecole, sono ingegnose, ma naturalmente non danno formole da potersi cimentare coll'esperienza.

Le misure fatte dal F. Neesen sulla gomma elastica ed espresse con buona approssimazione da una sola funzione esponenziale per tempi brevi, e dalla somma di due per tempi più lunghi, sembravano venire in appoggio dalla teoria di O. E. Meyer fondata

(¹) Si trovano registrati da pag. 510 a pag. 515 del Vol. CLIII degli Annali di Poggendorff.

(²) F. Kohlrausch, *Ueber die elast. Nachw. bei der Torsion.* Pogg. Ann. Vol. XIX p. 337. 1863. — *Beiträge zur Kenntniss der elast. Nachw.* Pogg. Ann. CXXVIII p. 1. 1866. — *Experimental Untersuch. ü. d. elast. Nachw. bei d. Torsion, Ausdehnung und Biegung.* Pogg. Ann. CLVIII p. 337, 1876.

sopra il semplice attrito interno. Ma Kohlrausch [1] mostrò come l'accordo potesse esser fortuito, appunto perchè veniva rappresentato un piccolo tratto del moto e perchè bisognava determinare molte costanti; ed in seguito Neesen medesimo [2] convenne che quelle sue espressioni non avevano altro valore che di formole d'interpolazione.

Dimostrato da Boltzmann come non basti la semplice viscosità interna a spiegare la elasticità susseguente, furono da lui gettate le basi di una teoria, la quale quantunque non assegni le cause *fisiche* del fenomeno, pure ne raccoglie le leggi sotto un punto di vista che promette bene [3].

Boltzmann parte dal concetto che la forza necessaria per produrre una data deformazione di un corpo, non dipenda unicamente dalle tensioni attuali delle sue parti, ma anche dalle anteriori; e che una tensione eserciti un'influenza tanto minore quanto maggiore è il tempo decorso da che ebbe luogo. E precisamente la forza deformatrice dovrebbe risultare scemata da una deformazione, avvenuta precedentemente nello stesso verso, di una quantità proporzionale alla grandezza e alla durata di quella deformazione, e ad una funzione del tempo decorso da che essa ebbe luogo: funzione questa dipendente dalla natura del corpo e da determinarsi sperimentalmente.

Restringendoci al caso nostro che le deformazioni consistano in rotazioni delle parti di un sistema attorno ad un asse: supponiamo che al tempo τ e durante l'elemento $d\tau$ lo spostamento angolare sia dato da ω. Per effetto di questo spostamento il sistema, ricondotto dopo il tempo $t-\tau$ nella propria posizione naturale di equilibrio, eserciterebbe, stando alle ipotesi fatte, un momento di rotazione dato da

$$a \,.\, \omega \,.\, \psi\,(t-\tau)\,d\tau.$$

Se dunque la deformazione ω ha perdurato tutto il tempo $T=\theta'-\theta$ e se si ammette con Boltzmann che le azioni susseguenti si sovrappongono senza turbarsi, l'intero momento susseguente, destato dalla deformazione ω, sarà:

$$D_t = a\omega \int_{\theta}^{\theta'} \psi\,(t-\tau)\,d\tau$$

e questa espressione, se si conta il tempo dall'istante $\theta'=0$ in cui cessò la deformazione ω e si pone $\theta=-T$, $t-\tau=\chi$, prende la forma:

$$D_t = a\omega \int_{t}^{t+T} \psi\,(\chi)\,d\chi. \tag{9}$$

Quindi a mantenere il sistema nella propria posizione naturale di equilibrio sarebbe necessario un momento uguale e contrario a D_t: momento che andrebbe scemando col tempo. Se invece il sistema fosse abbandonato a sè, conserverebbe uno spostamento angolare ω_t tale da soddisfare alla relazione

$$D_t = b_t\omega_t\,, \tag{10}$$

(1) F. Kohlrausch, *Bemerkungen z. Hrn. Neesen's Beobachtungen ü. elast. Nachw.* Pogg. Ann. Vol. CLV p. 579, 1875.

(2) F. Neesen, *Ueber elast. Nachw.* Pogg. Ann. Vol. CLVII p. 595, 1876.

(3) F. Neesen (Pogg. Ann. CLVII p. 579) modifica alquanto la teoria di Boltzmann, ma non sostanzialmente sotto l'aspetto matematico; e mira a stabilire che la causa fisica sia un'azione vicendevole delle molecole che si urtano nei loro moti.

avendo indicato con b_t la forza direttrice al tempo t (nel caso di un filo sarebbe il suo modulo di torsione). Se poi supponiamo b_t costante, oppure le sostituiamo la media b dei valori che assume durante il tempo considerato, potremo scrivere:

$$D_t = b\omega_t;$$

e per conseguenza lo spostamento rimanente al tempo t, dopo cessata la torsione costante ω, sarà espresso da

$$(11) \qquad \omega_t = \frac{a\omega}{b}\int_t^{t+T} \psi(\chi)\, d\chi,$$

e lo spostamento angolare dalla posizione, che aveva il sistema quando fu abbandonato a sè, sarà dato da

$$(12) \qquad \omega'_t = \omega\left[1 - \frac{a}{b}\int_t^{t+T} \psi(\chi)\, d\chi\right].$$

Se la deformazione ω ha avuto luogo per un tempo lunghissimo, talchè si possa porre $T = \infty$, l'ultima espressione si muterà nell'altra:

$$(13) \qquad \omega''_t = \omega\left[1 - \frac{a}{b}\int_t^{\infty} \psi(\chi)\, d\chi\right]$$

ossia, ponendo

$$c = 1 - \frac{a}{b}\int_\rho^{\infty} \psi(\chi)\, d\chi$$

ove ρ è una costante arbitraria $< t$,

$$(14) \qquad \omega''_t = \omega\left[c + \frac{a}{b}\int_\rho^{t} \psi(\chi)\, d\chi\right].$$

Dalle esperienze di Neesen [1] risulterebbe

$$(15) \qquad \psi(t) = pe^{-qt}$$

e quindi la (11) per $T = \infty$ si trasformerebbe in

$$(16) \qquad \omega_t = \frac{ap}{bq}\,\omega e^{-qt}$$

perfettamente identica alla (3) del § 3, che abbiamo veduto verificarsi nel caso che il sistema abbia una forza direttrice costante e sia soggetto alla semplice viscosità dei liquidi. E siccome le esperienze di Neesen espresse dalla (16) avevano una breve durata dopo il cessare della deformazione, così appare anche da ciò che l'elasticità susseguente non si può considerare come derivante dall'attrito se non nei primi tempi e tutto al più quale prima approssimazione.

Streintz [2] trovò il decremento logaritmico indipendente dalla durata di oscillazione, e Boltzmann ne dedusse come probabile [3]:

$$(17) \qquad \psi(t) = \frac{B}{t}$$

(1) F. Neesen, *Berl. Monatsberichte*, febb. 1874.

(2) H. Streintz, *Ueber die Dämpfung der Torsions Schwingungen von Drähten*. Sitzb. d. k. Akad. z. Wien. Vol. LXIX, marzo, 1874.

(3) P. M. Schmidt (*Ueber die innere Reibung fester Körper*. Ann. di Wiedemann. Vol. II p. 48, 241, 1877), mette in dubbio la legge di Streintz e l'argomentazione che vi applica Boltzmann.

per cui la (9) diverrebbe:

$$D_t = a\omega \lg \frac{t + T}{t} \tag{18}$$

che si trova in buon accordo colle esperienze fatte da Kohlrausch sul vetro fin dal 1863; ma non con quelle da lui fatte sull'argento e sull'ottone, perchè pare che in tal caso non regga l'ipotesi della sovrapposizione delle azioni susseguenti ([1]). Similmente la (11) diverrebbe per la (17):

$$\omega_t = \frac{a\omega}{b} \lg \frac{t + T}{t} \tag{19}$$

e una formola analoga a questa, per T piuttosto piccolo, fu verificata dallo stesso Boltzmann sul vetro, e da Finger ([2]) sulle corde d'acciaio inglese da pianoforte.

Quando poi sia $T = \infty$ oppure per $t = 0$, le formole (9), (11), (12), non sono più applicabili se si pone semplicemente $\psi(t) = \frac{B}{t}$, perchè danno valori infiniti. In tal caso bisogna sostituire alla costante B una funzione $f(t)$ che per valori moderati di t sia quasi costante, e per t grandissimo vada diminuendo fino a zero: come sarebbe per esempio $A e^{-kt}$ ovvero $\frac{A}{t^k}$ per k piccolissimo; ed inoltre bisogna ricorrere all'artifizio che diede la (14), la quale diventa allora:

$$\omega''_t = \omega \left[c + \frac{a}{b} \lg \left(\frac{t}{\rho} \right) \right]. \tag{20}$$

Ma è sempre da tener presente che queste formole (18), (19), (20) sono solamente approssimate, e non possono sussistere nè per valori troppo piccoli, nè per valori troppo grandi di t. E con questa restrizione vedremo che risponde alle nostre esperienze l'ultima, la quale si può porre sotto la forma:

$$\omega_t = M + N \lg t, \tag{21}$$

indicando con lg il logaritmo volgare.

Nel prospetto seguente la prima parte di ciascuna colonna si riferisce al primo stadio dell'esperienza, cioè quando il sistema oscilla, e però le ω_t sono le posizioni istantanee d'equilibrio attorno alle quali avvengono le singole oscillazioni e sono dedotte come le ω_n del prospetto precedente; la seconda parte corrisponde al secondo stadio, quando le oscillazioni sono spente, e però quelle ω_t sono osservate direttamente.

Il tempo è contato in secondi, le ω_t come al solito in millimetri della scala, ma ridotte ad archi. Le costanti M ed N sono calcolate col metodo de' minimi quadrati.

([1]) F. Kohlrausch, l. c. Pogg. Ann. Vol. CXIX p. 336. — *Beitrag zu Boltzmann's Theorie der elast. Nachw.* Pogg. Ann. Vol. CLX p. 225, 1877.

([2]) Jos. Finger, *Zur elast. Nachwirkung des tordirten Stahldrahtes.* Sitzb. d. k. Akad. z. Wien Vol. LXXII, luglio 1875.

Tabella VII.

1 agosto $10^h 11' 6''$ ant.
Appoggio contro *B*

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
27″	155,2	155,3	+0,1
33	157,7	156,9	—0,8
39	159,0	158,3	—0,7
45	160,4	159,5	—0,9
51	161,2	160,5	—0,7
57	162,0	161,4	—0,6
63	162,6	162,2	—0,4
69	163,3	163,0	—0,3
75	163,8	163,6	—0,2
81	164,2	164,2	0,0
87	164,5	164,8	+0,3
93	164,7	165,4	+0,7
99	165,0	165,9	+0,9
105	165,2	166,4	+1,2
111	165,4	166,8	+1,4

$\tau = 6'',00$
$M = 128,48;\quad N = 18,744$

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
139″	166,7	167,0	+0,3
183	167,7	167,7	0,0
241	168,7	168,5	—0,2
355	169,7	169,5	—0,2
513	170,7	170,6	—0,1
764	171,7	171,6	—0,1
1264	172,7	173,0	+0,3

$M = 153,6;\quad N = 6,254$
$6^h 10'$ pom.

—

2 agosto — Riposo

3 agosto $9^h 12' 11''$ ant.
Appoggio contro *A*

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
2,5τ	139,5	139,5	0,0
3,5	142,5	142,8	+0,3
4,5	145,4	145,1	—0,3
5,5	147,2	147,1	—0,1
6,5	148,8	148,6	—0,2
7,5	150,0	150,0	0,0
8,5	151,2	151,2	0,0
9,5	152,1	152,3	+0,2
10,5	153,2	153,2	0,0
11,5	153,9	154,0	+0,1

$\tau = 6'',1875$
$M = 113,46;\quad N = 21,935$

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
181″	161,0	162,3	+1,3
209	162,0	162,7	+0,7
249	163,0	163,2	+0,2
303	164,0	163,8	—0,2
357	164,9	164,4	—0,5
463	165,9	165,1	—0,8
594	166,9	165,9	—1,0
870	167,9	167,0	—0,9
1243	168,3	168,1	—0,2
1549	168,9	168,7	—0,2
1592	168,9	168,8	—0,1
2209	169,2	169,8	+0,6
2564	169,8	170,2	+0,4
2839	169,9	170,6	+0,7

$M = 146,62;\quad N = 6,931$
$10^h 10'$ ant.

La sera del 3 agosto ho aggiunto 66^{cc} di acqua distillata, avendo cura che la pipetta toccasse il fondo del bicchiere, così da turbare il meno possibile la superficie libera del liquido. Alle $6^h 40'$ pom. l'apparecchio fu abbandonato a sè coll'indice appoggiato contro la morsetta *B*. — La mattina successiva alle $10^h 47'$ ant., quando nel cannocchiale si leggeva la divisione 241,1, ho appoggiato l'indice contro l'altra morsetta *A*. — Alle $11^h 38'$ ant. coincideva col reticolo la divisione 412,4: e subito dopo feci le seguenti osservazioni, registrate precisamente come quelle della precedente Tab. VII, cosicchè basta la sola avvertenza che i numeri distinti con asterisco non servirono nel calcolo delle costanti *M* ed *N*.

Tabella VIII.

…sto 11h38′50″ ant.
…oggio contro *B.*

ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
147,7	147,9	+0.2
150.8	150.8	0.0
153,1	152,8	—0,3
154.6	154,2	—0,4
155,6	155,4	—0.2
156,4	156,6	+0.2
157.0	157,1	+0.1
157,5	151,9	+0,4
158,0*	158,5	+0,5
158,5*	159,1	+0.6
159,5*	159,6	+0,1

$\tau = 8'',50$
…133,3; $N = 13,210$

160,4*	160.9	+0,5
161,4	161,7	+0,3
162,4	162,4	0,0
163,4	163,2	—0,2
164,4	164,2	—0,2
165,4	165,2	—0,2
166,4	166,6	+0.2

… 143,9; $N = 7,963$
…2′24″ p. Appoggio contro *A.*

5 agosto
…1′50″ a. Appoggio contro *B.*
…1′42″ p. Appoggio contro *A.*

6 agosto 9h30′0″ ant.
Appoggio contro *B.*

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
1,5τ	138,8	138,6	—0.2
2,5	141,5	141.6	+0,1
3,5	143,5	143,6	+0,1
4,5	145,0	145,1	+0,1
5,5	146,3	146,2	—0,1
6,5	147,3	147,2	—0,1
7,5	148,1	148,1	0,0
8,5	148,8	148.8	0,0
9,5	149,5	149,4	—0,1
10,5*	150,2	150,0	—0,2
11,5*	150,5	150,6	+0,1
12.5*	150,9	151,1	+0,2

$\tau = 6'',25$
$M = 125,5$; $N = 13,499$

102″	152,2*	152,6	+0,4
122	153,2	153,5	+0,3
146	154,2*	154,3	+0,1
182	155,2*	155,3	+0.1
222	156,2*	156,2	0.0
269	157,2*	157,1	—0,1
350	158,7*	158,3	—0,4
389	159,2	158.8	—0,4
475	160,2*	169,7	—0,5
584	161,2*	160,7	—0,5
732	162,3*	161,7	—0,6
885	163,2*	162,6	—0,6
1110	164,2	163,7	—0,5
1400	165,2*	164,7	—0,5
1790	166,2*	165,9	—0,3
2213	167,2*	166.8	—0,4
2520	167,8*	167,4	—0,4
2830	168,2	168.0	—0,2
3110	168,9*	168,4	—0.5
3660	169,2*	169.2	0,0
4500	170.1*	170,1	0.0
4860	170,2	170,5	+0,3
6060	171,3*	171.5	+0,2
7200	172,0*	172,3	+0,3
8880	173,0*	173,3	+0.3
10440	173,4*	174,0	+0,6
12600	174,2	174.9	+0,7
15000	175,2*	175,7	+0,5
15600	175,3*	175,9	+0,6

$M = 131,3$; $N = 10,624$

7 agosto
9h40′2″ a. Appoggio contro *A*
5h33′4″7 p. » » *B*

8 agosto
11h14′ a. Appoggio contro *A* e subito dopo contro *B.*

9 agosto 5h10′2″,9 pom.
Appoggio contro *A.*

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
2,5τ	132,9	132,7	—0,2
3,5	135,0	135,5	+0.5
4,5	137,7	137,6	—0,1
5,5	139,5	139,2	—0,3
6.5	140,8	140,6	—0,2
7,5	141.8	141,8	0,0
8,5	142,8	142.8	0.0
9,5	143,6	143,8	+0,2
10,5	144,5	144,6	+0,1

$\tau = 6'',03$
$M = 110,27$; $N = 19,049$

106″	148,1*	148.6	+0.5
118	149,1	149,2	+0,1
142	150,1*	150,3	+0,2
158	151,1*	150,9	—0,2
188	152,0*	151.9	—0,1
223	153,0	152,9	—0,1
260	154,0*	153,8	—0,2
307	155,0*	154,8	—0,2
359	156,0*	155,7	—0,3
435	157,0*	156.8	— 0,2
535	158,3*	158,0	—0,3
619	159,0	158,9	—0,1
734	160,0*	159,9	—0,1
882	160,9*	160,9	0,0
1070	161,9*	162,0	+0,1
1262	162,9	163,0	+0,1
1517	163,9*	164,1	+0,2
1,73	164,9*	165.0	+0,1
2037	165,6*	165,8	+0,2
2337	166,7*	166,6	—0,1
2697	167,1*	167,4	+0,3
2997	167,8	167,9	+0,1
3357	168,6*	168,7	+0,1
3597	168,8*	169,1	+0.3
3897	169.0*	169,6	+0,6
4197	169,7*	170,0	+0,3
4497	169,8*	170,4	+0,6

$M = 121,4$; $N = 13,418$

10 e 11 agosto
Riposo.

12 agosto 9h42′2″,7 ant.
Appoggio contro *B.*

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
1,5τ	117,6	117,6	0,0
2,5	121,8	122,0	+0,2
3,5	125,0	124,9	—0,1
4,5	127,1	127,0	—0,1
5,5	128,8	128,8	0,0
6,5	130,3	130,2	—0,1
7,5	131,3	131,5	+0,2
8,5	132,5*	132,5	0,0
9,5	133,3*	133,5	+0,2
10,5	134,3*	134,4	+0,1

$\tau = 5'',95$
$M = 98,69$; $N = 19,864$

79,″3	136,0*	137,4	+1,4
89, 3	137,0	138,1	+1,1
99, 3	138,0*	138,7	+0,7
112, 3	139,0*	139,5	+0.5
129, 3	140,0*	140,3	+0,3
146, 3	141,0	141,0	0,0
167, 3	142,0*	141,9	—0,1
191, 3	143,0*	142,7	—0,3
222, 3	144,0*	143,6	—0,4
260, 3	145,0	144,5	—0,5
305, 3	146,0*	145,5	—0,5
357, 3	147,0*	146,4	—0,6
417, 3	148.0*	147,3	—0,7
487, 3	149,0*	148,3	—0,7
565, 3	150,0	149,1	—0,9
651, 3	151,0*	150,0	—1,0
771, 3	152,0*	151,0	—1,0
908, 3	153,0*	151,9	—1,1
1073, 3	154,0*	153,0	—1,0
1277, 3	155,0	154,0	—1,0
1494, 3	155,5*	155,0	—0,5
1672, 3	156,1*	155.6	—0,5
2032, 3	157,1*	156,8	—0,3
2452, 3	157.6*	157,9	+0.3
2692, 3	158,0	158,5	+0,5
3177, 3	159,0*	159,5	+ 0,5
3777, 3	160,0*	160,5	+0,5
4677, 3	161,0	161,8	+0,8
5577, 3	161,9*	162,9	+1,0

$M = 111,17$; $N = 13,790$

14 agosto
9h52′23″ ant. App. fra *A* e *B.*
5h 9′18″ pom. » contro *B.*

15,16,17,18 e 19 agosto
Riposo.

20 agosto
Varie esperienze, nell'ultima delle quali 9h52′e53″ ant. appoggio contro *B.*

21 agosto — Riposo.

22 agosto 9h30′8″ ant.
Appoggio contro *A.*

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
1,5τ	87.0	86,9	—0,1
2,5	92,3	92,4	+0,1
3,5	96.0	96,1	+0,1
4,5	98,7	98,8	+0,1
5,5	100,8	101,0	+0.2
6,5	103,2	102,8	—0,4
7,5	104.2*	104,3	+0,1
8,5	105,9*	105,7	—0.2

$\tau = 4'',92$
$M = 65,05$; $N = 25,107$

137″	118,6*	120,3	+1,7
151	119,6	121,1	+1.5
167	120,6*	122,0	+1,4
183	121,6*	122,7	+1.1
222	123,6*	124,5	+0,9
246	124,6*	125,3	+0,7
271	125,6*	126,2	+0,6
296	126,5*	126,9	+0,4
325	127,5*	127,7	+0.2
358	128,5	128,6	+0,1
389	129,5*	129,3	—0,2
426	130,5*	130,1	—0,4
491	131,5*	131,3	—0.2
576	133,5*	132,7	—0,8
634	134.5	133,5	—1,0
694	135,5*	134,3	—1,2
768	136,5*	135,2	—1,3
851	137,4*	136,1	—1,3
962	138,4	137,1	—1.3
1105	139,4*	138,3	—1.1
1266	140,4*	139.5	—0.9
1444	141,4*	140,6	—0,8
1650	142,4*	141,8	—0,6
2137	144,4	144.0	—0,4
2433	145,4*	145.2	—0,2
2758	146,3*	146.2	—0,1
3125	147,3*	147.3	0.0
3538	148.3*	148,4	+0,1
3779	148.8*	149,0	+0,2
4113	149,3	149,7	+0,4
4532	150,3*	150,5	+0,2
5234	151,3*	151,8	+0,5
6150	152,2*	153.2	+1,0
6862	153,2	154.1	+0,9
7732	154,8*	155,2	+0.4

$M = 77,7$; $N = 19,923$

Le differenze a vero dire sono piccole, minori forse di quelle incontrate da Boltzmann, da Kolhrausch e da Finger ne' loro confronti, e superano di poco gli errori possibili di osservazione: ma hanno un andamento così regolare da far ritenere che derivino per la massima parte dall'essere la (21) soltanto approssimata, come già avvertimmo con qualche insistenza.

Inoltre le costanti M ed N hanno valori così diversi nello stadio di moto oscillatorio e in quello di moto aperiodico da far dubitare che pel solo fatto delle oscillazioni si destino delle azioni susseguenti le quali alterino affatto le proprietà del sistema, analogamente a quanto osservò già Streintz [1] sui fili metallici, e poi con maggiore generalità il prof. Pisati [2], ed ultimamente con più profondità lo Schmidt [3].

Risultati affatto simili ai precedenti si ottengono applicando la (21) alle altre esperienze che non ho trascritte. Ma qualche piccola eccezione nella regolare variazione de' coefficienti M ed N fu riscontrata quando le esperienze erano state precedute da un riposo meno lungo.

§ 7.

Non essendo la (21) che una formola semplicemente approssimativa, mi sono deciso di ricercare se, partendo dalle esperienze, si possa assegnare alla funzione $\psi(t)$ un'espressione analitica più rigorosa che non sia la (17), e mi sono rivolto alla formola (13), la quale dà

$$\psi(t) = \frac{b}{a\omega} \frac{d\omega''_t}{dt}. \tag{22}$$

Presi i tempi per ascisse, e per ordinate gli spostamenti angolari ω_t dalla posizione iniziale d'equilibrio, ho costruito la curva che deve essere espressa dalla equazione (13), la quale per comodità indicheremo con

$$y = \omega(t). \tag{23}$$

Per costruire poi la curva espressa da

$$z = \frac{dy}{dt} = \frac{\omega a}{C} \psi(t) \tag{24}$$

osserviamo che

$$\frac{dy}{dt} = \operatorname{tang} \gamma,$$

γ, indicando l' angolo che la tangente sul punto (y, t) della curva (23) fa coll' asse delle t; onde il punto (z, t) della curva (24) avrà per ordinata $z = \operatorname{tg}\gamma$. Conducendo

[1] H. Streintz, *Ueber die Dämpfung der Torsions Schwingungen von Drähten.* Sitzb. d. k. Akad. zu Wien. Pogg. Ann. Vol. LXIX, marzo 1874; Pogg. Ann. Vol. CLIII p. 387.

[2] G. Pisati, *Sulla elasticità dei metalli a diverse temperature.* Gazz. Chim. Ital. Vol. VI (1876) e Vol. VII (1877).

[3] P. M. Schmidt, *Ueber die innere Reibung fester Körper.* Annali di Wiedemann. Vol. II, 1877.

adunque, come insegna il Fiedler [1] la tangente sul punto (y, t) è prendendo sull'asse delle t un segmento AB uguale alla costante $\frac{b}{\omega a}$ innalzandovi una perpendicolare BE, tirando per A la parallela alla tangente fino ad incontrare questa perpendicolare in B, il segmento BB_1 rappresenterà il valore di $\psi(t)$.

Ma siccome il valore della costante $\frac{b}{\omega a}$ non è noto, così ho preso invece una lunghezza arbitraria, e precisamente quella rappresentante 118 secondi, ed ho costruito le curve espresse da:

$$z = 118 \frac{\omega a}{b} \psi(t) \tag{25}$$

e da esse per interpolazione ho cercato di determinare l'espressione analitica di $\psi(t)$.

A questo fine, per le ragioni dianzi esposte discutendo la (17), ho tentato la forma

$$\psi(t) = A \frac{e^{-kt}}{t}$$

per la quale, ed avendo posto $118 \frac{\omega a}{b} A = L$, la (25) diventa:

$$z = L \frac{e^{-kt}}{t}. \tag{26}$$

E con questa formola, ricorrendo ai minimi quadrati che danno

$$k \lg e = \frac{(\Sigma t)(\Sigma \lg z) + (\Sigma t)(\Sigma \lg t) - n(\Sigma t \lg z) + n(\Sigma t \lg t)}{n(\Sigma t^2) - (\Sigma t)^2}$$

$$\lg L = \frac{\Sigma \lg z + \Sigma \lg t + (\Sigma t) k \lg e}{n}$$

ho calcolato le z della Tabella IX seguente.

Le differenze sono comprese entro i limiti degli errori d'osservazione; ma il loro andamento regolare rivela come anche la (26) sia un'espressione semplicemente approssimata. Ad ogni modo l'approssimazione è così buona che, riflettendo alle quantità trascurate nello svolgere la teoria di Boltzmann, dobbiamo riconoscere che questa corrisponde benissimo alle nostre esperienze.

[1] G. Fiedler, *Trattato di geometria descrittiva* tradotto da A. Sayno e da E. Padova p. 192, *b)*. Tipografia Lemonnier 1874.

Tabella IX.

6 agosto 9h30′ ant.

t	z oss.	z_1 calc.	$z_1 - z$	$\frac{z_1 - z}{z}$
197,″0	3,12	2,99	—0,13	—0,04
364, 4	1,74	1,61	—0,13	—0,07
551, 0	1,03	1,06	+0,03	+0,03
1134, 0	0,48	0,51	+0,03	+0,06
2760, 0	0,18	0,19	+0,01	+0,06
6654, 0	0,07	0,07	0,0	0,0
8598, 0	0,05	0,05	0,0	0,0

$\lg L = 2,77271$; $k \lg e = 0,00001326$

9 agosto 5h10′2″,9 pom.

t	z oss.	z_1 calc.	$z_1 - z$	$\frac{z_1 - z}{z}$
115,″0	6,95	6,69	—0,26	—0,04
174, 8	4,13	4,35	+0,22	+0,05
247, 9	3,03	3,03	0,0	0,0
334, 9	2,24	2,21	—0,03	—0,01

$\lg L = 2,96728$; $k \lg e = 0,00007679$

12 agosto 9h42′2″,7 ant.

t	z oss.	z_1 calc.	$z_1 - z$	$\frac{z_1 - z}{z}$
108,″0	9,20	8,27	—0,93	—0,10
158, 9	5,50	5,53	+0,03	+0,01
226, 7	3,55	3,79	+0,24	+0,07
315, 4	2,35	2,65	+0,30	+0,12
501, 3	1,70	1,56	—0,14	—0,08

$\lg L = 2,96662$; $k \lg e = 0,0001437$

22 agosto 9h30′8″ ant.

t	z oss.	z_1 calc.	$z_1 - z$	$\frac{z_1 - z}{z}$
81,″5	14,95	14,34	—0,61	—0,04
115, 5	10,60	10,09	—0,51	—0,05
194, 0	6,30	5,97	—0,33	—0,05
242, 0	5,00	4,76	—0,24	—0,05
265, 4	4,50	4,33	—0,17	—0,04
461, 2	2,61	2,45	—0,16	—0,06
1410, 0	0,63	0,74	+0,11	+0,17
1514, 0	0,58	0,68	+0,10	+0,15
1977, 0	0,46	0,50	+0,04	+0,08
2315, 0	0,39	0,41	+0,02	+0,05
2613, 0	0,37	0,36	—0,01	—0,03
4099, 0	0,22	0,20	—0,02	—0,09
4369, 0	0,20	0,18	—0,02	—0,10

$\lg L = 3,07087$; $k \lg e = 0,00003830$

Dopo le esperienze fatte sull'olio di uliva; in parte narrate al § 3, e nelle quali trovai pienamente confermata la teoria della semplice viscosità: il 18 settembre ripulii ben bene il bicchiere, tenendo però la bacchetta di vetro congiunta allo specchietto II, sempre immersa nell'olio. Poi introdotta nel bicchiere dell'acqua distillata e filtrata, vi depositai sopra uno strato di 2mm d'olio d'uliva vergine, pure filtrato, avendo cura che aderisse perfettamente alle pareti del bicchiere. Alle 11h 11′ ant. tutto era messo al posto e lasciato tranquillo, coll'indice appoggiato alla morsetta *A*.

La mattina dopo lo specchietto era quasi assolutamente immobile, e si leggeva nel cannocchiale la divisione 276,0 della scala. Essendo temperatura di 19°, 4, alle ore 10 55′ 32″ ant. appoggiai l'indice contro la morsetta *B* e dopo 14″, 3 era compiuta la prima oscillazione semplice con la deviazione estrema 145,7 dal punto di partenza; la qual deviazione scese poi a 144,7, come è registrato nel seguente prospetto, ove si trovano eziandio le successive osservazioni.

In ogni giorno non fu fatta che una sola osservazione, e pel resto del tempo l'apparecchio fu lasciato in assoluto riposo.

Tabella X.

19 settembre — 19°,4 — A=276,0 — 10h55′26″ a. Appoggio l'indice contro B

t	y
0	0,0
14″,3	145,7
26, 3	144,7
1′28″	144,7
2′28	144,7
5′28	144,7
9′28	144,7
13′28	144,6
18′28	144,5
24′28	144,4
29′28	144,4
34′28	144,4
40′28	144,6
45′28	144,5
50′28	144,2
52′28	144,3
58′28″	144,1

19°,6

Alle 10h51′ pom. B= 132,1

20 settembre — 19°,4 — B=131,4 — 10h20′43″ a. Appoggio contro A

t	y
0	0,0
4″1	68,9
5, 6	98,6
7, 9	123,6
10, 1	138,6
12, 6	141,6
16, 2	146.1
33, 2	145,3
1′17″	145,3
2′17	145,2
4′17	145,2
6′17	145,2
9′17	145,3
14′17	145,4
19′17	145,4
24′17	145,5
29′17	145,4
33′17	145,5
42′17	145,5

19°,5

Alle 11h30′ pom. A = 276,1

21 settembre — 18°,8 — A=275,2 — 9h35′8″ a. Appoggio l'indice contro B

t	y
0	0,0
4,″1	45,2
6, 4	65,2
9, 3	80,2
13, 7	95,1
17, 6	105,1
21, 7	113,1
25, 9	119,1
30, 9	123,0
35, 9	127,0
39, 8	130,0
52, 0	135,0
59, 0	137,0
1′26″1	140,9
1′38, 1	141,9
1′55, 7	142,9
2′23	143,9
2′40	144,4
3′28	144,9
3′46	145,0
4′46	145,4
5′46	145,6
6′46	145,7
7′46	145,8
8′46	145,8
10′46	145,8
13′46	145,8
17′46	145,8
21′46	145,8
24′46	145,8
29′46	145,8
31′46	145,7

19°,2

Alle 7h58′ pom. B=129,4

22 settembre — 19°,4 — B=129,2 — 11h20′43″ a. Appoggio l'indice contro A

t	y	t	y	t	y
0	0,0	5′ 8″	67,8	20′12′	109,8
6,″5	11,0	5′19	68,8	20′54	110,8
12, 5	15,0	5′33	69,8	21′41	111,8
21, 3	19,0	5′43	70,8	22′28	112,8
28, 4	22,0	5′54	71,8	24′08	114,8
37, 7	24,9	6′18	73,8	25′07	115,8
43, 3	26,9	6′58	76,8	26′12	116,8
50, 4	28,9	7′12	77,8	27′18	117,8
57, 5	30,9	7′24	78,8	28′16	118,8
1′9″4	31,9	7′40	79.8	29′28	119,8
1′19,0	35,9	7′50	80,8	30′44	120,8
1′27,4	37,9	8′13	81,8	31′59	121.8
1′37,2	38,9	8′24	82,8	33′28	122,8
1′48,6	41,9	8′43	83,8	34′50	123,8
1′52,8	42,9	8′58	84,8	36′29	124,8
1′59,0	43,9	9′19	85,8	38′29	125,8
2′ 5.2	44,9	9′35	86,8	40′10	126.8
2′16,3	46.9	9′59	87,8	42′18	127,8
2′22,7	47,9	10′11	88,8	44′22	128,8
2′29,4	48,9	10′30	89,8	46′54	129,8
2′43,8	50,9	11′13	91.8	49′41	130,8
2′49.2	51,8	11′35	92,8	52′41	131,8
2′56,8	52,8	11′58	93,8	56′ 9	132.8
3′11,0	54.8	12′59	94,8	1h.0′17	133,8
3′20″	55.8	12′48	95,8	1. 5′11	134,8
3′27	56,8	13′10	96,8	1. 9′54	135,8
3′34	57.8	13′36	97,8	1.15′40	136,8
3′44	58.8	13′59	98,8	1.24′11	137,8
3′53	59,8	14′27	99,8	1.34′11	138,8
4′ 2	60.8	14′57	100.8	1.49′24	139,8
4′10	61.8	15′58	102,8	2. 8′ 9	140,9
4′19	62,8	16′28	103,8	2.23′ 9	141,8
4′29	63.8	17′02	104,8	3.11′ 9	143,2
4′39	64.8	18′12	106.8	5.25′	144,1
4′49	65.8	18′50	107,8	7h.43′	144,8
4′59	66,8				

19°,9

Alle 11h55′ pom. A=273,2

23 settembre — 19°,5 — A=272,8 — 9h32′55″ a. Appoggio contro B

t	y	t	y
0	0,0	51′59″	35,1
51″3	4,8	55′	36,1
1′22″	5.8	57	36,9
1′57	6.8	59	37,7
2′36	7,8	1h 2′	38,6
3′29	8.8	1h 5′	39,6
4′32	9.8	1.10	40,9
5′33	10,8	1.13	41,4
6′37	11,8	1.16	43,1
7′43	12,8	1.20	44,2
8′59	13.8	1.22	44,9
10′14	14,8	1.26	45,8
11′29	15.8	1.30	46,9
13′03	16,8	1.34	47,9
14′27	17,8	1.37	48,9
16′06	18.8	1.43	50,1
17′46	19,8	1.47	51,5
19′27	20,8	1.52	52,5
21′27	21,8	1.57	53,6
23′18	22,8	2. 1	54,4
25′18	23,8	2. 6	55,4
27′18	24.8	2.16	57,4
29′18	25,8	2.31	60,5
31′29	26.8	2.39	61,8
33′31	27,8	2.52	64,2
35′37	28,8	3. 1	65,7
37′ 3	29,8	3.11	67,4
40′29	30,8	3.17	68,2
43′ 7	31,8	3.25	69,6
45′37	32.8	3.36	71,0
47′59	33,7	3h.42′.8″	71,8

Ora che il sistema è a metà della propria corsa fra A e B, appoggio l'indice contro A, e da questo istante comincio a contare il tempo nella colonna seguente.

23-24 settembre — 1h15′8″ p. Appoggio contro A

t	y	t	y
0	0,0	1h35′	29,8
31″1	3,0	1.41	30,4
1′ 7″	4,0	1.45	30,9
1′50	5,0	1.50	31,3
2′50	6,0	1.55	32,0
4′ 5	7,0	2. 5	32,9
5′31	8,0	2.10	33,4
7′16	9,0	2.16	34,1
9′11	10,0	2.23	34,8
11′10	11,0	2.31	35,3
13′24	12,0	2.44	36,4
15′32	13,0	2.50	37,0
18′16	14,0	2.56	37,7
21′ 3	15,0	3h 0′	38,0
24′ 9	16,0	3.15	39,1
27′27	17,0	3.28	40,0
30′47	18,0	3.39	40,8
34′14	19,0	3.50	41,7
38′ 8	20,0	4.15	43.0
42′32	21,0	4.36	44,0
46′29	22,0	4.59	45,0
50′58	22,7	5.19	45,8
55′ 0	23.5	5.47	46,7
1h 0′.0″	24,4	6.13	47,8 (1)
1. 5	25.2	6.33	48,6
1.10	26,1	7.51	51,2
1.15	26,9	8.41	52,4
1.20	27,7	17.59	58,3 (2)
1.25	28,2	21.19	59,1
1.30	29,1	24.22	60,8 (3)

(1) 19°,8 (2) 19°,2

(3) Corrispondenti a 261.8 della scala: dunque sempre discosto di una decina di divisioni dalla posizione d'equilibrio A.

Ho tracciato la curva rappresentante l' esperienza del 22 settembre prendendo sull'asse delle t un centimetro per un minuto primo e sull'asse delle y un centimetro per un centimetro della scala. Indi ho costruito la curva rappresentata dall'equazione (26) ed i numeri seguenti si riferiscono ai punti di contatto delle tangenti che servono a costruirla.

Omessi i due primi, cogli altri ho determinato le costanti della formola.

Tabella XI.

t	z	z_1	$z_1 - z$	$\frac{z_1 - z}{z}$
mm	mm			
15,7	163,7*			
49,0	79,6*			
88,6	49,6	50,61	+1,0	+0,02
130,0	32,8	32,41	—0,4	—0,01
171,0	23,8	23,17	—0,6	—0,03
213,0	17,7	17,46	—0,2	—0,01
255,3	13,2	13,67	+0,5	+0,04
298,0	10,9	10,98	+0,1	+0,01
340,5	9,0	9,02	0,0	0,0
383,5	7,6	7,51	—0,1	—0,01

$\lg L = 5{,}70944 \qquad k \lg e = 0{,}00006525$

L'accordo è ancora migliore che nelle esperienze precedenti e se i due valori di z si scostano dai valori che darebbe la (26), ciò dipende, secondo me, dalla circostanza che nell'applicare la teoria di Boltzmann si trascura la quantità di moto del sistema, la quale nei primi tempi non è certo trascurabile.

Cito anche un'altra esperienza che forse non è priva d' interesse, perchè indica che l'espansione di un semplice velo d' olio alla superficie dell' acqua, non esercita influenza apprezzabile.

L'acqua era distillata, filtrata, ben protetta, e giaceva nel bicchiere fin dalla sera del 3 settembre, avendomi servito in varie esperienze, le quali non mi rivelarono che traccie insignificanti di elasticità susseguente. Lo specchietto era il II. La mattina del 6 settembre alle $9^h\, 3'\, 30''$, dopo quarant'ore di riposo, appoggiai l'indice contro la morsetta B, ed ottenni i risultati che si leggono nella prima colonna del quadro seguente, mentre nella seconda ho scritto quelli ottenuti dopo aver toccato la superficie dell'acqua con una bacchetta di vetro che aveva prima tuffata nell'olio. I punti istantanei d'equilibrio ω_n sono dedotti come quelli del § 5.

Le differenze fra le due serie sono irrilevanti, mentre si sa che nel secondo caso la tensione superficiale deve essere minore.

Tabella XII.

6 settembre $6^h3'30''$ ant. . . . . . 22°,0

ω	D_n	α_n	α_n	$\alpha'_n - \alpha_n$
A				
302,1				
calc.		oss.	calc.	
B	30,8			
158,2	270,0	239,2	239,20	0,0
4	60,6	209,4	209,77	+0,4
5	244,3	183,7	183,96	+0,3
3	82,9	161,4	161,33	—0,1
3	224,5	141,6	141,48	—0,1
2	100,1	124,4	124,07	—0,3
1	209,0	108,9	108.81	—0,1
1	113,4	95,6	95,42	—0,2
0	197,2	83,8	83,68	—0,1
0	123,7	73,5	73.39	—0,1
157,9	187,9	64,2	64,36	+0,2
8	131,4	56,5	51,43	—0,1
8	180,9	49,5	49.48	0,0
7	137,3	43,6	43,40	—0,2
6	175,4	38,1	38,06	0,0
6	142,0	33,4	33,38	0,0
6	171,2	29,2	29,27	+0,1
5	145,5	25,7	25,66	0,0
5	168,0	22,5	22,51	0.0
5	148,2	19,8	19,74	—0,1
4	165,5	17,3	17,31	0,0
4	150,2	15,3	15,18	—0,1
3	163,5	13,3	13,31	0,0
3	151,9	11,6	11,68	+0,1
3		10,1	10,24	+0,1
	162,0			

oss.
158,0 — $9^h17'35''$ a.
158,2 — $9^h20'20''$ — $\lambda = 0{,}0570$

9^h50. Tocco la superficie dell'acqua con una bacchetta di vetro intinta nell' olio.

$\tau = 7''64$

6 settembre $10^h17'43''$ ant. . . . . . 22°,2

ω	D_n	α_n	α'_n	$\alpha'_n - \alpha_n$
B				
158,1				
calc.		oss.	calc.	
A	430,2			
302,5	190,3	239,9	240,21	+0,3
302,4	400.8	210,5	210,92	+0,4
4	216,0	184,8	185,20	+0,4
5	378,4	162,4	162,62	+0,2
3	235,2	143,2	142,79	—0,4
1	360,9	125,7	125,38	—0,3
4	250,9	110,0	110,21	+0,2
4	347,6	96,7	96.79	+0,1
2	262,4	85,2	84,89	—0,3
2	337,2	74,8	74,54	—0,3
3	271,7	65,5	65,45	0,0
3	329,1	57,4	57,47	+0,1
3	278,8	50,3	50,46	+0,2
3	322,9	44,1	44,31	+0,2
2	284,0	38.9	38,91	0,0
2	318,1	34,1	34,16	+0,1
1	288,0	30,1	29,99	—0,1
2	314,4	26,4	26,05	—0,3
2	291,2	23,2	22,84	—0,4
1	311,6	20,4	20,30	—0,1
1	293,8	17,8	17,83	0,0
1	309,3	15,5	15,66	+0,2
0	295,5	13,8	13,75	0,0
0	307,7	12,2	12,07	—0,1
0	296,9	10,8	10,60	—0,2
301,9	306,2	9,3	9,31	0,0
8	298,0	8,2	8,17	0,0
8	305,2	7,2	7,17	0,0
9	298,9	6,3	6,30	0,0
7	304,3	5,4	5,54	+0,1
7	299,5	4.8	4,86	+0,1
8	303,8	4,3	4,26	0,0
7	299,9	3,9	3,74	—0,2
7	303,2	3,3	3,29	0,0
6	300,1	3,1	2,89	—0,2
5	302,8	2,7	2,54	—0,2

oss.
301,6 — $11^h36'33''$ a. — $\lambda = 0{,}0565$
301,8 — $11^h59'$ — 22°4

$\tau = 7'',69$

Per quanto mi è noto, Quincke è il solo che abbia sospettato potersi incontrare la elasticità susseguente anche nelle superficie liquide: ed ha emessa questa idea fin dal 1858 (1) avendo osservato che la costante di capillarità del mercurio diminuisce rapidamente col tempo. Ma poi (2), attribuì tale diminuzione alla condensazione dei

(1) G. Quincke, Pogg. Ann. Vol. CV p. 33, 1858; Annales de Chimie (3) LV, p. 227.
(2) G. Quincke, Pogg. Ann. Vol. CXXXIX p. 34, 1870.

vapori sulla superficie del mercurio, condensazione che l'imbrattavano, e ch'egli riteneva di non aver potuto eliminare neppure sotto la campana della macchina pneumatica, giacchè vi si trovavano dei vapori grassi. Analogamente spiegava in questa Memoria (¹) la diminuzione col tempo della costante di capillarità alla superficie di separazione fra l'acqua e l'olio, ascrivendola ad un lento mescolarsi o ad un' azione chimica lenta fra i due liquidi.

Se non che recentemente (²) egli dichiarò di ritornare alla primitiva opinione in seguito ad una lunga ed accurata serie di esperienze fatte su molte soluzioni acquose ed alcooliche. Ne determinò le costanti di capillarità con due metodi, cioè osservando l' inalzamento ne' tubi capillari, oppure misurando col catetometro e col microscopio le dimensioni di una bolla gassosa la quale, trovavasi in seno al liquido e veniva ad appoggiarsi contro una lastra piana sospesa orizzontalmente nella parte più alta del liquido medesimo.

Con questo secondo metodo trovò che, tanto se la bolla era d'aria quanto se era d'idrogeno elettrolittico, la tensione superficiale dei varî liquidi diminuiva col tempo, in principio più rapidamente, in seguito meno: che tale diminuzione era minore nei liquidi puri come l'acqua e l'alcool, arrivando in tal caso al 6 per 100 dopo 24 ore, era maggiore nelle soluzioni e specialmente in quelle acquose, nelle quali arrivava al 40 per 100. Per l'aggiunta di alcune traccie d'acido cloroidrico all'acqua, la diminuzione della coesione saliva dal 6 al 20 per 100 in 17 ore. Nella superficie libera del mercurio la diminuzione era di 10 per 100 in 3 a 6 ore.

Escluso che tali variazioni della tensione superficiale derivino dalla temperatura, dall'imbrattamento di sostanze estranee, escluse le eventuali influenze elettriche; il prof. Quincke riteneva in sulle prime che le soluzioni si potessero considerare come miscugli del solvente e di una soluzione più concentrata e che il solvente, come quello cui compete nei casi esaminati minor tensione, si portasse lentamente alla superficie. Ma abbandonò siffatta spiegazione osservando che nei miscugli d'acqua e alcool la costante di capillarità non varia sensibilmente col tempo e, se mai, accenna ad aumentare; ed osservando inoltre che nelle soluzioni acquose la costante di capillarità scende fino al 6^{mgr} ed anche a 5^{mgr}, 2, cioè sotto il valore di 7^{mgr}, 9 a 7^{mgr}, 3, trovato per l'acqua molto tempo dopo la formazione della sua superficie libera.

Ed ora egli pensa che il concetto più plausibile sia quello di ravvicinare tale contegno delle superficie libere de' liquidi ai fenomeni della elasticità susseguente osservati ne' corpi solidi. In fine per ispiegare il fatto che le bolle grosse si deformano col tempo più delle piccole, e che la diminuzione dell'inalzamento, insensibile nei cannelli sottilissimi, si può invece constatare ne' cannelli più ampi (³), il Quincke fa intervenire nel fenomeno la parete solida, in vicinanza della quale comincierebbero a sistemarsi le molecole della superficie liquida, ecc.

Ma noi non intendiamo d' inoltrarci in tali considerazioni, e ci basta di aver citate le lente diminuzioni della tensione superficiale, osservate da Quincke, per

(¹) Pogg. Ann. Vol. CXXXIX p. 19-39.

(²) G. Quincke, *Ueber die Cohäsion von Salzlösungen*. Pogg. Ann. Vol. CVI p. 337 e p. 560, 1877.

(³) Tali variazioni non sono da confondersi con quelle osservate da Hagen, le quali provenivano dall'imbrattamento del menisco: mentre da Quincke nulla era trascurato per eliminarlo.

metterle di fronte agli accrescimenti cui va soggetta col tempo la elasticità susseguente da noi segnalata nei liquidi.

Se poi insieme a questa elasticità di seconda specie, le superficie liquide sieno dotate ancora della elasticità di prima specie (prescindendo sempre dalle azioni provocate da uno strappamento, considerate dal prof. Marangoni e citate al § 4), è una questione molto delicata; e sarebbe interessante risolverla, particolarmente pensando alle esperienze di Braun (1), le quali accennano ad una certa indipendenza fra i processi molecolari determinanti le due specie d'elasticità.

Mi pare che per raggiungere lo scopo sia necessario disporre nel sistema di una forza direttrice variabile in modo conosciuto, e di un congegno atto a tenere spostata per un dato tempo e di un angolo dato la sola estremità inferiore della sospensione bifilare, ed a lasciarla poi libera senza urti. Sto già costruendo un apparecchio che mi dovrà servire in tale ricerca appena avrò a mia disposizione un locale conveniente.

Intanto ringrazio i signori Vito Volterra ed Enrico Micciarelli, allievi di questo Istituto Tecnico, di avermi aiutato nei calcoli numerici e nelle costruzioni grafiche.

(1) F. Braun, *Ueber die Natur der elast. Nachw.* Pogg. Ann. Vol. CLIX, p. 337, 1876.

Sulla degenerazione dei nervi recisi.

Nota di GIUSEPPE COLASANTI presentata dal Socio TOMMASI-CRUDELI
nella seduta del 4 febbraio 1877.

(Lavoro eseguito nel Laboratorio d'Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma. X.)

I processi istologici che accompagnano la degenerazione dei nervi recisi, negli ultimi decenni furono tanto sovente e tanto diffusamente trattati ([1]) che chi vuole nuovamente tornare sulla questione, deve esservi spinto da un motivo speciale il quale possa servirgli di giustificazione rimpetto al mondo scientifico. Nel nostro caso questo motivo era doppio.

Come già trovasi esposto in un altro luogo ([2]), il primo e più immediato impulso a questa ricerca ci venne dato dalla scoperta dei segmenti midollari e dagli altri fatti nuovi relativi alla struttura della fibra nervosa midollare. Dopo questa scoperta ci parve molto utile, dal punto di vista istologico, di ripetere l'esame microscopico della degenerazione dei nervi recisi; perchè tutti i lavori anteriormente pubblicati su questo argomento furono intrapresi senza che si avesse conoscenza della vera struttura della fibra nervosa. Era dunque opportunissimo che questi fossero soggetti ad una ulteriore revisione.

L'esame della degenerazione dei nervi recisi ci parve suscettibile di un ulteriore progresso non solo nella direzione delle ricerche istologiche, ma anche in rapporto a quelle fisiologiche. Infatti la letteratura che si riferisce a tale questione ci è sembrato che presentasse ancora una lacuna di natura fisiologica. In nessun luogo, per quanto ci fu possibile consultare le memorie originali, abbiamo trovato discussa la questione, se la degenerazione del moncone periferico, la quale segue

([1]) La letteratura sulla degenerazione e sulla rigenerazione dei nervi recisi, fino dall'anno 1872 si trova completamente registrata nel lavoro di Benecke (*Ueber die histologischen Vorgänge in durchschnittenen Nerven.* — Virchow's Archiv. LV pag. 496) nel quale dall'anno 1838 in poi sono riportati non meno di 47 autori i quali nell' assieme hanno pubblicato 84 differenti comunicazioni. Oltre il sopra ricordato lavoro di Benecke sono poi venuti a nostra cognizione ancora le seguenti comunicazioni: 1) Ranvier, *De la dégénérescence des nerfes après leur section.* — Comptes rendus LXXV, 1831. 1872. 2) Ranvier, *De la régénération des nerfs sectionnés.* — Comptes rendus LXXVI, 491, 1873. 3) Eichhorst, *Ueber Nervendegeneration und Regeneration.* — Virchow's Archiv. LIX, 1. 1874. 4) Cossy et Dejerine. *Recherches sur la dégénérescence des nerfs séparés de leurs centres trophiques.* — Archives de Physiologie normale et pathologique 1875, pag. 567. 5) Engelmann, *Ueber Degeneration von Nervenfasern.* — Pflueger's Archiv. XIII, pag. 474, 1876. 6) Bakowiecki, *Zur Frage vom Verwachsen der peripherischen Nerven.* — Arch. f. mikr. Anatomie XIII. pag. 420, 1876.

([2]) F. Boll, *Studî sulle immagini microscopiche della fibra nervosa midollare* (Lavoro eseguito nel Laboratorio d'Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma. VI.) Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXIV (1876-77).

la recisione di un nervo misto, abbia luogo parimente e contemporaneamente in tutte le fibre, motrici o sensitive, le quali non si trovano più in continuità con l'organo centrale, o se alle funzioni differenti delle singole fibre nervose corrispondano anche delle differenze nel decorso o nella durata del processo patologico.

È singolare che, fra i molti autori che si occuparono di una tale questione, nessuno abbia mai tenuto conto di questa circostanza. Ciò prova, che il maggior numero di quelli che finora studiarono quest'argomento a preferenza vollero far rilevare i fatti d'anatomia microscopica, ed attaccarono solo una importanza secondaria all'interesse fisiologico che si lega alla questione della recisione dei nervi.

Questa subordinazione degli interessi fisiologici agli anatomici, fa sentire i suoi deplorevoli effetti ancora in un altro caso. Si può scorrere tutta la letteratura sulla recisione dei nervi senza trovare in essa una soluzione definitiva della importante questione, se il processo degenerativo che ha luogo nel moncone periferico sia simultaneo o progressivo, cioè se la degenerazione attacchi in uno stesso tempo tutti i punti del nervo troncato, o se invece si propaghi da una all'altra sezione nervosa come un processo patologico progressivo. La maggioranza degli autori non tocca punto questa questione, ed i pochi che la discutono sono fra loro in contradizione. In fatti, mentre secondo Erb la degenerazione progredirebbe dal punto del taglio in direzione centrifuga, W. Krause ritiene al contrario, che la degenerazione si origini nelle finissime diramazioni e progredisca verso il centro. Ultimamente altri autori (Schiff, Lent, Hertz, Engelmann) sostengono una terza teoria, cioè che la degenerazione nasca contemporaneamente in tutta la lunghezza del moncone separato dal suo centro.

Per poter sostituire a queste contradizioni dei fatti positivi ci parve indispensabile di intraprendere una metodica ricerca. Nei porcelli d'India venne preparato il nervo sciatico nel punto ove esso esce dal bacino e contemporaneamente ne venne esciso un piccolo pezzo della lunghezza di 3-5 millimetri. In queste esperienze ci siamo serviti di animali giovani ed adulti, e nell'assieme abbiamo ripetuta l'operazione 48 volte. A determinati intervalli di tempo furono uccisi gli animali, ed ogni volta esaminati con il microscopio: *a*) il moncone periferico immediatamente vicino al taglio; *b*) un pezzo del moncone periferico distante non più di un cent. dal punto della recisione; *c*) un pezzo del moncone periferico, 4 cent. all'incirca distante dal luogo della recisione; *d*) un ramo muscolare della gamba proveniente dal nervo sciatico; *e*) un ramo cutaneo della gamba proveniente dallo sciatico, ambedue possibilmente lontani dal luogo della recisione. Non ci siamo mai occupati di fare preparazioni microscopiche del moncone centrale, perchè non entrava nelle nostre intenzioni lo studio delle alterazioni istologiche che in esso possono occorrere.

Meritano uno studio speciale quelle alterazioni microscopiche che si osservano nel moncone periferico e che effettuansi immediatamente in vicinanza del luogo della recisione. In rapporto ad esse possiamo confermare completamente i fatti recentemente pubblicati da Engelmann; che cioè nelle prime 24 ore dopo la operazione è dimostrabile in tutte le fibre nervose, che furono lese dal taglio, una alterazione caratteristica che si estende fino al più prossimo anello di Ranvier, giammai però oltre di questo. La nuova sezione nervosa che incomincia al di là di

quest'anello mostra una struttura perfettamente normale. Con più evidenza, che nelle preparazioni fatte con acido osmico e raffigurate dall'Engelmann, questo fatto si accentua nell'esame a fresco con la soluzione fisiologica di cloruro sodico (vedi fig. 1ª 2ª). È difficilissimo del resto dire in cosa consista questa alterazione della sezione nervosa lesa. In essa non distinguesi più nè guaina midollare nè cilindro assile: lo spazio interno della guaina dello Schwann viene occupato da una massa del tutto omogenea di forte refrazione, e priva di determinata struttura. Questo stato microscopicamente non ha alcuna somiglianza con quello che fu finora generalmente chiamato degenerazione delle fibre nervose, e sarebbe perciò utilissimo, per allontanare equivoci ed ambiguità, di introdurre per questa alterazione un nome differente e più significativo, per esempio quello di *alterazione traumatica delle fibre nervose.*

Tanto del luogo della recisione e del processo traumatico che ivi si sviluppa. Con questo processo la degenerazione propriamente detta non ha nulla da fare. La degenerazione si distingue dal processo non solo per lo aspetto microscopico ma anche perchè essa non si sviluppa mai nelle prime 24 ore, anzi deve decorrere almeno il triplo di quest' intervallo di tempo avanti che ne appaiano le sue prime tracce. Da questo momento però la degenerazione, nè predilige, nè trascura determinate parti del nervo, ma attacca contemporaneamente e parimente tutte le sezioni nervose che non sono più in relazione con i centri, senza che vi faccia ostacolo la loro più o meno grande distanza dal centro, o la loro speciale funzione fisiologica motoria o sensitiva. La degenerazione dei nervi recisi non ha dunque nessuna relazione diretta col processo del trauma stesso. Infatti essa incomincia indipendentemente in ogni singola sezione nervosa di Ranvier, perchè fu interrotta quella continuità funzionale e nutritiva con i centri nervosi, la quale pare sia una condizione indispensabile acciocchè ogni singola sezione nervosa si mantenga nel suo stato normale.

Avanti di descrivere minutamente il processo istologico della degenerazione dei nervi, sarà opportuno di spendere qualche parola sulla struttura normale delle fibre nervose che compongono il nervo sciatico del porcello d'India. In tutti i punti essenziali la loro struttura somiglia esattamente a quella delle fibre nervose dello sciatico della rana, dalle quali differiscono per le loro minori dimensioni. Inoltre differiscono anche per certe particolarità di struttura che offrono i singoli segmenti midollari, i quali nel porcello d'India ordinariamente s' internano, ciascuno dentro al segmento contiguo che lo abbraccia, molto più di quello che suole avvenire nella rana (vedi fig. 1ª). Come fu già rilevato da Boll [1], in moltissime fibre nervose poi si osserva lo *sfibramento* delle estremità libere dei segmenti midollari. Questo sfibramento, che nella rana si trova soltanto in via eccezionale, ed in tal caso debolmente accentuato, nel porcello d'India apparisce invece molto spiccato, e trovasi tanto frequente (anche nello stato freschissimo) che per le fibre nervose di questo animale deve essere considerato come una struttura caratteristica e quasi costante (vedi fig. 2ª).

Come venne già sopra accennato, avanti il 3° giorno non si osserva alcuna alterazione microscopica sulle sezioni nervose separate dall'organo centrale, ma solo

(1) l. c. p. 8.

dopo 72 ore (1) si osservano le prime tracce di una alterazione obiettiva. Comparata con la immagine microscopica di una fibra nervosa normale, la guaina midollare, nelle sezioni nervose separate dall' organo centrale, apparisce evidentemente alterata, la sostanza dei singoli segmenti midollari si mostra ingrossata e nello stesso tempo meno refrangente. Nelle successive 24 ore questa alterazione si accentua sempre più, e dopo trascorso il 4° giorno i doppî contorni i quali limitano la fibra nervosa (cioè i tagli ottici della sostanza dei singoli segmenti midollari) sono inspessiti quasi del doppio ed appaiono nello stesso tempo più opachi. In questo caso si riceve l' impressione come se i segmenti midollari constassero di parafina o di sostanza dotata di proprietà ottiche consimili (vedi fig. 3ª). Le ulteriori alterazioni, le quali hanno luogo nel decorso del giorno susseguente, si riferiscono ai punti di contatto per i quali si riuniscono vicendevolmente i segmenti midollari. A misura che la sostanza dei segmenti midollari si rigonfia, i loro margini liberi perdono il loro taglio acuto, e facendosi più ottusi si staccano dai margini liberi dei segmenti vicini, così che la composizione dei singoli segmenti che formano la guaina midollare a quest' epoca apparisce alquanto slegata. Questo slegamento continua a fare degli ulteriori progressi e ben presto la fibra nervosa raggiunge uno stadio nel quale non si può più parlare di una guaina midollare nel vero senso della parola. I singoli segmenti midollari, retraendo vicendevolmente i margini liberi, si staccano completamente fra di loro e, riunendo contemporaneamente alle due libere estremità il loro margine su se stesso, si chiudono per cambiarsi in formazioni indipendenti e rassomiglianti a gocciole. I due disegni 4ª e 5ª sono destinati a raffigurare questo processo. Quando questo processo è completamente terminato e tutti i singoli segmenti midollari si sono perfettamente chiusi (cosa che in genere ha luogo sul finire del 6° giorno dopo la recisione) la fibra nervosa appare composta da una serie di singoli pezzi indipendenti di forma cilindrica allungata, ognuno dei quali corrisponde ad un segmento midollare primitivo. Ciascuno di questi pezzi mostra la forma di una gocciola irregolare ed ha uno splendore opaco di grasso, come se fosse formato di parafina (vedi la fig. 6ª) (2).

Con questa trasformazione in gocciole chiuse può dirsi terminata la prima fase della degenerazione, anzi si può dire che la degenerazione delle fibre midollari

(1) Questa determinazione di tempo, come tutte le altre che seguiranno, si riferisce esclusivamente al porcello d' India e non si pretende che abbia un valore generale. Nello sciatico della rana, con il quale abbiamo fatta qualche esperienza di controllo, si osservano le alterazioni microscopiche (del resto identiche in tutto a quelle del porcello d' India) dopo decorse parecchie settimane.

(2) Da un semplice ragionamento risulta che il processo ora descritto della chiusura dei singoli segmenti midollari debba compiersi relativamente molto più presto nelle fibre nervose di un calibro più fino, che in quelle di un calibro più forte. Così si spiega il fatto che nei nervi cutanei i quali constano quasi esclusivamente di fibre finissime, la degenerazione si produca più presto che nei nervi muscolari. Questa differenza (la quale probabilmente ha indotto W. Krause ad ammettere una degenerazione esordiente dalle diramazioni più fini e propagantesi verso il centro) ha certamente nulla da fare colla diversità delle funzioni, perchè anche nel tronco comune dello sciatico e nei nervi muscolari la degenerazione attacca più presto le fibre più sottili che le fibre più forti (Vedi anche per questo la spiegazione di Hertz, Virchow's Archiv XLVI, pag. 260).

consista essenzialmente in quest'alterazione dei segmenti midollari, nella loro trasformazione in *gocciole midollari*, come noi intendiamo chiamare i singoli pezzi cilindrici che si producono nella trasformazione di ciascuno dei segmenti midollari. Le alterazioni che seguono sono, per così dire, di natura molecolare, o almeno completamente sprovviste di un determinato carattere istologico. Vogliamo comprendere sotto il termine collettivo di alterazioni secondarie, quelle ulteriori modificazioni che subisce la fibra nervosa dopo la trasformazione dei segmenti midollari in gocciole midollari, cioè dopo il 6° giorno della avvenuta recisione del nervo. Queste alterazioni secondarie principalmente consistono in ciò, che le singole gocciole midollari, cominciano a mostrare sulle loro superficie numerose irregolarità, pieghe, sporgenze e depressioni. Queste pieghe in prima decorrono parallele all'asse longitudinale della fibra nervosa e della gocciola midollare (vedi le fig. 7ª e 8ª), ma molto presto però appaiono anche delle pieghe più irregolari, oblique e finalmente trasverse. A misura che queste ultime si approfondiscono, producono la scissione delle singole gocciole midollari in due parti separate più piccole e ben presto (circa il 10° giorno dopo la recisione) per questo processo di divisione, il quale successivamente si estende a tutte le gocciole midollari, viene ad essere quasi raddoppiato il numero delle primitive gocciole midollari e segmenti midollari, i quali originariamente si trovano nella sezione nervosa. In cambio dei cilindri allungati primitivi si vedono delle gocciole tonde (vedi la fig. 9ª). In queste gocciole arrotondate, il numero delle quali va continuamente aumentando per ulteriori divisioni, appariscono presto grandi e piccoli globicini di forte refrazione l'aspetto dei quali fa rammentare le fine gocciole di grasso (vedi la fig. 10ª). Più tardi ancora i limiti fra le singole gocciole spariscono ed il contenuto della fibra nervosa si trasforma in una massa omogenea, come in un detritus, la quale consta di una sostanza fondamentale granulosa ove si trovano sospesi globicini grandi, piccoli e piccolissimi, dello splendore del grasso, più vi si rinvengono dei nuclei liberi e delle cellule migratorie.

Sulla provenienza di quest' ultime formazioni e sui processi intimi che danno luogo alla formazione delle gocciole grassose non sappiamo dir nulla di determinato, ma dobbiamo lasciare agli osservatori che ci seguiranno e più specialmente ai cultori della chimica la soluzione di codeste questioni, ed in particolar modo la decisione se le gocciole grassose realmente constino o no di una sostanza grassa. In egual modo abbiamo anche trascurato di esaminare le ultime ed importanti asserzioni del Ranvier sul comportarsi dei nuclei dello Schwann nella degenerazione dei nervi recisi, e ciò perchè nel presente lavoro ci siamo fatti guidare da uno scopo solo, cioè abbiamo voluto determinare e descrivere fedelmente la parte che nella degenerazione dei nervi recisi prendono i segmenti midollari rimasti sconosciuti agli anteriori osservatori. Partendo da questo punto di vista abbiamo trovato che il processo istologico, il quale è del tutto caratteristico per la degenerazione dei nervi recisi, restò completamente ignoto a tutti i nostri antecessori. Esso consiste nella (probabilmente attiva) alterazione dei segmenti midollari e nella loro trasformazione in gocciole midollari. Solo dopo la formazione di queste gocciole midollari si producono in esse, e per mezzo di esse quei processi, che finora hanno attirato l'attenzione degli autori e che fino ad oggi furono considerati come caratteristici del processo istologico della

degenerazione dei nervi: ma ai quali noi però non possiamo che attribuire una importanza secondaria, considerandoli di sola natura molecolare e non istologica.

Finalmente ci sia permesso di toccare ancora un'altra questione, la quale finora nella letteratura sulla recisione dei nervi ha avuto una grande anzi la grandissima parte, cioè la questione se nelle fibre nervose separate dal centro il cilindro assile si mantenga o deperisca. Quelli che si accostano alla prima opinione, in quanto si tratta della struttura normale del cilindro assile, debbono adottare l'originaria idea degli Istologi secondo la quale il cilindro assile nello stato fresco rappresenta una formazione solida. Chi invece, rispetto alla struttura del cilindro, accetta i risultati delle ricerche istologiche più recenti e gli attribuisce una consistenza liquida o semi-liquida, troverà a priori delle difficoltà per persuadersi della persistenza del cilindro assile nei nervi separati dal centro. Il fatto poi che il cilindro assile nella fibra nervosa recisa realmente deperisce, deve essere riconosciuto come certissimo da ognuno che con precisione segua le alterazioni della guaina midollare nella degenerazione dei nervi e che tenga conto del fatto che il sopra descritto processo della chiusura dei singoli segmenti midollari non può aver luogo, senza che contemporaneamente il cilindro assile venga spezzato e suddiviso in altrettanti pezzi quanti esistevano segmenti midollari e quanti se ne chiudono per formare gocciole midollari. Ogni singola gocciola midollare deve racchiudere nel suo interno un pezzo della sostanza del cilindro assile che corrisponde alla sua lunghezza, e questo processo che in tutta la lunghezza della fibra nervosa costantemente si ripete, deve avere per conseguenza immediata e necessaria lo spezzamento del cilindro assile che, come formazione continua, è immancabilmente distrutto.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Tutte le preparazioni disegnate provengono dal nervo sciatico del porcello d' India; tutte sono esaminate nella soluzione fisiologica di cloruro sodico ed ingrandite esattamente 540 volte.

Fig. 1.ª Fibra nervosa nel luogo del taglio 24 ore dopo la rescisione: l'alterazione traumatica della sezione nervosa si estende dal taglio solo fino all'anello di Ranvier, la sezione nervosa che incomincia al di là dell'anello mostra una struttura completamente normale.

Fig. 2ª come la Fig. 1.ª I segmenti midollari della sezione nervosa rimasta ancora normale mostrano tutti ai loro termini liberi uno spiccato sfibramento.

Fig. 3.ª Fibra nervosa del tronco del nervo sciatico, distante parecchi centimetri dal luogo del taglio, 3 giorni dopo la recisione. Incomincia l'alterazione dei segmenti midollari, la sostanza dei quali è ingrossata già quasi del doppio.

Fig. 4.ª Fibra nervosa al 5° giorno dopo la recisione. I segmenti midollari incominciano a sciogliersi fra loro nei rispettivi punti di contatto.

Fig. 5ª e 6.ª Fibre nervose del 6° giorno dopo la recisione. I segmenti midollari si trasformano in gocciole midollari.

Fig. 7ª e 8.ª Fibre nervose all' 8° giorno dopo la recisione. Le gocciole midollari vengono alterate per mezzo di pieghe, le quali a preferenza decorrono lungo l' asse longitudinale della fibra nervosa.

Fig. 9.ª Fibra nervosa al 10° giorno dopo la recisione. Oltre le pieghe longitudinali si formano anche depressioni trasverse che dimezzano le gocciole midollari aumentandone notevolmente il numero.

Fig. 10ª. Fibra nervosa al 12° giorno dopo la recisione. Il numero delle gocciole midollari è straordinariamente aumentato e nel loro interno si mostrano numerosi globicini fortemente risplendenti.

Fig. 1.

Fig. 2.

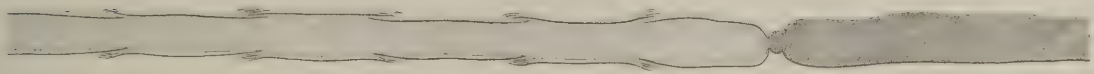


Fig. 3.

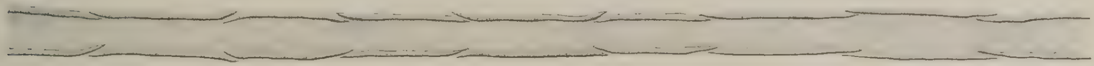


Fig. 4.

Fig. 5.

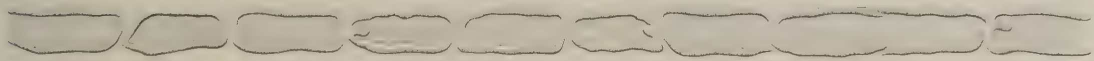


Fig. 6.

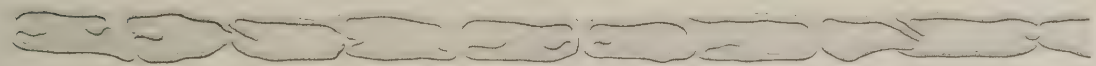


Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 10.

Lit. G. Clemàn. Roma. U. Colonna inc.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

Note cristallografiche e chimiche.

Memoria del dott. RUGGIERO PANEBIANCO

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 3 marzo 1878.

1.° Santonato benzilico

$(C_{15} H_{19} O_4) C_7 H_7$.

Preparazione. — Si scalda cloruro benzilico con soluzione alcoolica di santonato potassico, secondo le proporzioni richieste dall'equazione

$$C_{15} H_{19} O_4 K + C_7 H_7 Cl = (C_{15} H_{19} O_4) C_7 H_7 + K Cl.$$

Caratteri. — Solubile nell'alcool e nell'etere. È incoloro ed inodoro. Fonde ad 84°, 3 (corretto).

Analisi. — Per 100 parti	Trovato	Calcolato
C.	74, 20	74, 58
H.	7, 47	7, 34

Saponificando con potassa alcoolica ed indi trattando con un acido si ottiene l'acido santonico riconoscibile alla forma cristallina [1], e l'alcool benzilico, dal quale successivamente si ha il cloruro benzilico e la tribenzilamina riconoscibile alla forma cristallina.

Sistema cristallino. — Trimetrico.

Costanti. a : b : c = 0, 7701 : 1 : 0, 4159.

Combinazione osservata. (100) (010) (110) (101) (011) (fig. 1 e 2).

Angoli	n [2]	Calcolati	Misurati	Limiti delle osservazioni
100 : 010	9	90°	90° 2′	89° 40′ — 90° 16′
100 : 110	19	37° 36′	37° 36′*	37° 29′ — 37° 43′
100 : 101	7	61° 38′	61° 34′	61° 28′ — 61° 41′
011 : 0$\bar{1}$1	5	45° 10′	45°	44° 57′ — 45° 17′
010 : 011	5	67° 25′	67° 25′*	67° 15′ — 67° 29
101 : $\bar{1}$01	6	56° 45′	56° 40′	56° 15′ — 57° 13′
011 : 101	3	35° 40′	35° 29′	35° 18′ — 35° 35′

(1) Scacchi, Gaz. Chim. 1873, pag. 242. — Strüver, id. 1876, pag. 349.
(2) n = numero degli angoli omologhi misurati.

Sfaldatura. Parallela ad (100).

Nota. Le facce del prisma verticale sono striate parallelamente agli spigoli d'esso. Le facce di uno dei prismi orizzontali sono generalmente piccole, talchè i cristalli sono terminati a scalpello.

Caratteri ottici (1). — Formola ottica. $b\ a\ \underset{+}{c}$.

$2H_a = 92°.10'$ per il rosso
$= 92°.43'$ » violetto $\quad 2V = 85°.57'$
$2H_o = 101°.17'$ » rosso $\quad = 86°.15'$
$= 101°.12'$ » violetto

Bisettrice acuta. Positiva, normale a (001).
Dispersione. $\rho < v$

2.° Tribenzilamina

$(C_7\ H_7)_3$ N.

(*Cannizzaro. Cimento III pag. 397*).

Sistema cristallino. — Monoclino.
Costanti più probabili. $a : b : c = 1,22417 : 1 : 1,01301$; $\eta = + X : + Z = 95° 4' 2''$.
Forme osservate. (100), (001), (110), (120), (101), (10$\bar{1}$), ($\bar{1}$11), ($\bar{1}$22). (fig. 3).
Combinazioni osservate. (100) (001) (110) ($\bar{1}$11) (10$\bar{1}$) (101) ($\bar{1}$22); e detta con (120) (fig. 4).

Angoli	n	Calcolati	Misurati
00$\bar{1}$: 100	1	95° 4' 2"	95° 5' 20"
00$\bar{1}$: 10$\bar{1}$	7	41° 38' 40"	41° 36' 25"
00$\bar{1}$: $\bar{1}$0$\bar{1}$	1	37° 31' 30"	37° 32'
100 : 110	4	50° 38' 40"	50° 41'
110 : 120	1	17° 3' 30"	17° 5'
100 : 11$\bar{1}$	2	62° 28'	62° 33' 50"
11$\bar{1}$: 12$\bar{2}$	2	14° 36' 30"	14° 31' 30"
11$\bar{1}$: 00$\bar{1}$	2	54° 34' 20"	54° 31' 40"
11$\bar{1}$: 110	1	38° 38' 20"	38° 45'

Sfaldatura. Interrotta, parallela a (001).
Piano di geminazione osservato. Parallelo ad (100).

(1) Sul significato della formola ottica si veda: Grailich, *Krystallographisch-optische Untersuchungen.* Sul significato delle lettere si veda: Des Cloizeaux, *Manuel de Minéralogie.*

Angoli caratteristici del geminato (fig. 5).

Angoli	n	Calcolati	Misurati
$001:\overline{00\bar{1}}$	2	10° 8′	10° 5′
$12\bar{2}:\overline{\bar{1}22}$	1	25° 51′	25° 43′

Caratteri ottici. — Piano degli assi ottici. Normale a (010).

Bisettrice acuta. Positiva, formante l'angolo di 35° circa (luce ordinaria) con l'asse *a* verso l'asse — *c*.

Dispersione. Orizzontale, $\rho < v$.

$2H_a = 82°$ circa (luce ordinaria).

3.° Cloroplatinato di Tribenzilamina

$Pt\,Cl_6\,[(C_7\,H_7)_3\,N\,H]_2$.

(*Cannizzaro. Cimento III pag. 397*).

Per ottenere questo corpo in cristallini macroscopici, si lascia evaporare una sua soluzione alcoolica sull'acido solforico ed alla pressione di pochi centimetri di mercurio.

Sistema cristallino. — Monoclino

Costanti. a : b : c = 1,1588 : 1 : 1,6073; $\eta = + X : + Z = 105° 43'$.

Forme osservate. (100), (001), (111), ($\bar{1}$11), (110), (210). (fig. 6).

Combinazioni osservate. (100) (001) (111) ($\bar{1}$11) (210); id. con (110). (fig. 7).

Angoli	n	Calcolati	Misurati
100 : 001	5	74° 17′	74° 17′*
111 : 11$\bar{1}$	3	50° 56′	50° 56′*
111 : 100	2	47° 42′	47° 35′
100 : 210	2	29° 9′	29° 9′*
210 : 11$\bar{1}$	1	36° 1′	35° 40′ pros.
100 : 110	—	48° 8′	—

Nota. La sfaldatura ed i caratteri ottici non poterono essere osservati a causa della estrema piccolezza dei cristalli.

4.° Cloridrato di Tribenzilamina

$Cl\,(C_7\,H_7)_3\,N\,H$.

Preparazione. — Si satura con acido cloridrico una soluzione alcoolica di tribenzilamina. Si ottiene pure nella preparazione della tribenzilamina qualora l'ammoniaca sia in difetto.

Caratteri. — Poco solubile nell'alcool, insolubile nell' acqua e nell' etere. È incoloro ed inodoro. Fonde a circa 208° ed incomincia a volatilizzarsi prima di fondere.

Analisi. — Non contiene acqua di cristallizzazione.

Per 100 parti	Trovato	Calcolato
Cl.	10,85	10,97

Sistema cristallino. — Romboedrico (in piccolissimi cristallini allungati).

Angolo degli assi. 114° 19'.

Combinazione osservata. $(10\bar{1})$ (100) (fig. 8 e 9).

Angoli	n	Calcolati	Misurati
001 : 100	4	45° 33' 30"	45° 33' 30" *
$10\bar{1} : 0\bar{1}0$	5	60°	59° 59'
$10\bar{1}$: 100	4	67° 13'	67° 5' 30"
$10\bar{1}$: 010	2	90°	89° 58' 20"

Caratteri ottici. — Doppia rifrazione. Positiva.

Nota. La sfaldatura non potè essere osservata a causa della piccolezza dei cristalli.

5.° Solfato di Tribenzilamina

Preparazione. — Si satura con acido solforico una soluzione alcoolica di tribenzilamina.

Caratteri. — Solubile nell' alcool, insolubile nell' acqua e nell' etere. È incoloro ed inodoro. Fonde a 106° — 107°, ed incomincia a scomporsi.

Non contiene acqua di cristallizzazione. Si constatò la presenza dell' acido solforico e della base organica.

Sistema cristallino. — Monoclino.

Costanti più probabili. $a : b : c = 0,88306 : 1 : 0,88038$; $\eta = +X : +Z = 100° 25'$.

Forme osservate. (100), (001), (010), $(\bar{1}11)$, (012). (fig. 10).

Combinazioni osservate. (100) (001) (010); id. con $(\bar{1}11)$ (012). (fig. 11).

Angoli	n	Calcolati	Misurati
100 : 001	3	79° 35′	79° 28′
100 : $11\bar{1}$	1	58° 5′	58° 6′
001 : $11\bar{1}$	1	122° 5′	122° 10′
010 : $11\bar{1}$	1	55° 52′ 50″	55° 53′
100 : $01\bar{2}$	1	99° 32′ 50″	99° 32′
010 : $01\bar{2}$	1	66° 35′	66° 28″
$11\bar{1}$: $01\bar{2}$	1	44° 45′ 10″	44° 45″

Sfaldatura. Perfetta, parallela a (010).

Nota. Le facce dei tre pinacoidi sono generalmente appannate.

Caratteri ottici. — In una lamina di sfaldatura un piano di massima estinzione fa l'angolo di 39° 30′ circa (luce ordinaria) con l'asse *a* verso l'asse — *c*.

Dispersione. Rotatoria.

Doppia rifrazione. Negativa.

$2H_a = 105°$ circa, per il rosso.

6.° Allume di Tribenzilamina

$(SO_4)_4\ Al_2\ [(C_7 H_7)_3\ NH]_2 + 24\ H_2 O.$

Preparazione. — Si tratta con acido solforico un miscuglio di tribenzilamina ed allumina.

Caratteri. — Solubile nell'acqua, insolubile nell'alcool e nell'etere. È incoloro ed inodoro. Fonde nella sua acqua di cristallizzazione a circa 110°, ed a 120° circa comincia a decomporsi.

Analisi. — Fu constatata la presenza dell'allumina e della base organica.

Per 100 parti	Trovato	Calcolato
H_2O	29,94	29,85
SO_3	21,98	22,11

Sistema cristallino. — Monometrico.

Combinazioni osservate. (111) ; (111) (100).

Sfaldatura. Difficile, parallela a (111).

7.° Nitrato di Tribenzilamina

$NO_3\ (C_7 H_7)_3\ NH.$

Preparazione. — Si satura a freddo con acido nitrico una soluzione alcoolica di tribenzilamina.

Caratteri. — Poco solubile nell' alcool, insolubile nell' acqua e nell' etere. È incoloro ed inodoro. Fonde a 120° e si scompone. Brucia spandendo soavissimo odore.

Analisi. — Non contiene acqua di cristallizzazione.

Per 100 parti	Trovato	Calcolato
N.	8,14	8,00

Per ottenere dei cristallini macroscopici si usi il metodo di cristallizzazione accennato per il cloroplatinato.

Sistema cristallino. — Trimetrico (emiedrico a facce inclinate).

Costanti. $a:b:c = 2,49430:1:0,99784$.

Combinazione osservata. (100) (010) (101) ϰ(111). (fig. 12 e 13).

Angoli	n	Calcolati	Misurati
010 : 111	3	47° 11′ 10″	47° 11′ 10″*
100 : 111	2	74° 11′ 20″	74° 11′ 20″*
101 : $\bar{1}$01	1	43° 37′	43° 42′
100 : $\bar{1}$01	1	111° 48′	111° 44′

Sfaldatura. Perfetta, parallela ad (100).

Caratteri ottici. — Formola ottica. $\underline{a}\ c\ b$.

Bisettrice acuta. Normale ad (100).

Dispersione. $\rho < v$.

$2E = 45°.20'$ per il rosso

$= 47°.40''$ » violetto

Fig. 1

Fig. 2

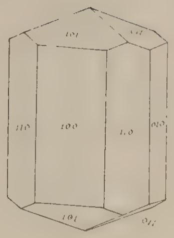


Fig. 3

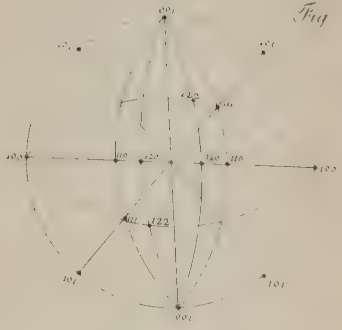


Fig. 6

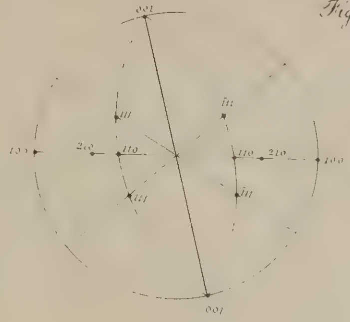


Fig. 7

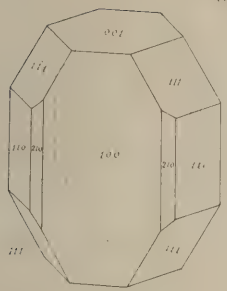


Fig. 4

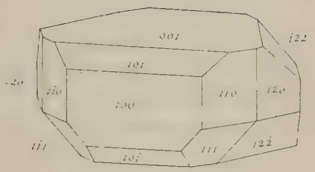


Fig. 13

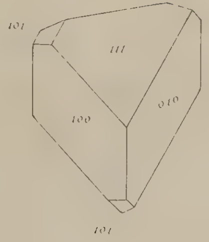


Fig. 9

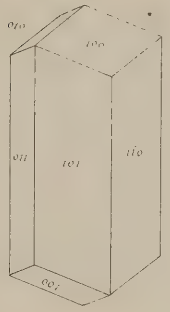


Fig. 12

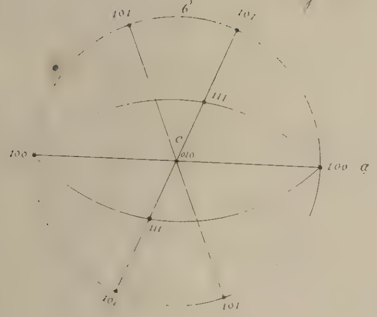


Fig. 10

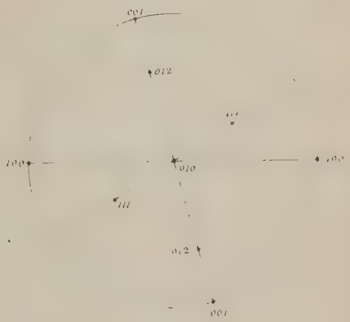


Fig. 8

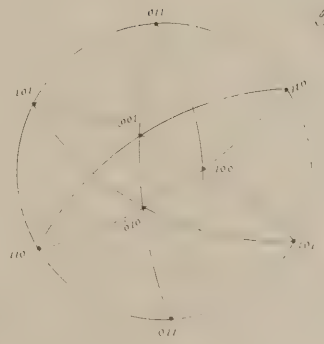


Fig. 5

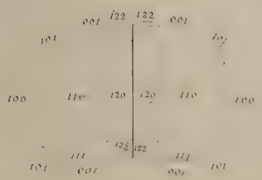
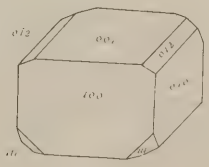


Fig. 11



R. Panebianco — Note Cristallografiche.

LIBRARY OF THE OF ILLINOIS

Indagini sperimentali sulla temperatura del Sole.

Memoria del prof. FRANCESCO ROSSETTI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 6 gennaio 1878.

PREFAZIONE

Il problema della temperatura effettiva del Sole fu vivamente agitato in questi ultimi tempi e non fu peranco risoluto. Di questo argomento si occuparono già il Newton, e più tardi il Saussure; e più recentemente il Pouillet, il Waterston, il Secchi, l'Ericson, il Vicaire, il Soret, il Violle, il Crova ed altri.

Benchè le osservazioni fatte da questi sul raggiamento solare sieno abbastanza concordanti, pure le conclusioni alle quali pervengono circa la temperatura del Sole sono talmente diverse, che sta fra esse un abisso. Mentre il Newton, il Waterston, l'Ericson, il Secchi dichiarano che la temperatura del Sole non può essere inferiore a uno o due milioni di gradi, il Pouillet, il Vicaire, il Violle e molti altri sostengono che quella temperatura non supera i 1500 o tutt'al più i 2500 gradi.

Un argomento così controverso parve all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia che fosse degno di un concorso, che essa bandì pel 1876 col titolo di premio Bordin. Spirato il concorso l'Accademia diede una ricompensa al sig. Violle, ed un assegno d'incoraggiamento ai sigg. Vicaire e Crova, ma dichiarò che nessuno aveva risolto il problema, e, vista la difficoltà ch'esso presentava, deliberò di non più ripresentarlo per un ulteriore concorso (1).

Osservava giustamente la Commissione dell'Accademia, come per dedurre la costante solare ai limiti dell'atmosfera sia sempre necessario di ricorrere a una pericolosa extrapolazione, e di più come non sia minore il pericolo che s'incontra necessariamente coll'applicare a temperature superiori a quella di fusione del platino una legge del raggiamento appena legittimata per le temperature comprese fra 0 e 300 gradi.

Infatti da osservazioni presso che identiche del raggiamento solare, il Secchi ottiene due e più milioni di gradi deducendo questa temperatura dalla formola del Newton; e invece il Violle ottiene 1500 gradi facendo uso di quella di Dulong e Petit; mentre è dimostrato che ambidue le formole non sono applicabili se non nel caso di piccole differenze tra la temperatura del corpo caldo raggiante, e la temperatura ov'è collocato il corpo freddo che si riscalda.

(1) Comptes rendus, Vol. 84, pag. 813, anno 1877.

Quelle due formole applicate al caso di un corpo reso incandescente dalla fiamma ossidrogenica, che ha al certo una temperatura di 2000 gradi, danno, la prima (quella del Newton) la temperatura di 45990 gradi, eccessivamente elevata; la seconda (quella di Dulong e Petit) la temperatura troppo bassa di 870 gradi.

Il Violle, volendo in ogni modo giustificare il tenue valore che dà la formola di Dulong e Petit, ne incolpò il poter emissivo specifico del corpo incandescente, e ritenendo esatta ed applicabile anche a quel caso la formola, dedusse dalla stessa un valore eccessivamente piccolo del poter emissivo di quel corpo.

A me parve che invece di violentare le formole per far loro dire ciò che non possono, fosse assai migliore consiglio affrontare direttamente la questione, stabilire col mezzo di apposite esperienze la legge con cui varia la intensità del raggiamento al variare della temperatura, determinare il potere emissivo dei varî corpi su cui si sperimenta, e nelle condizioni nelle quali essi trovansi realmente all'atto dell'esperienza; e trovata la formola che esprime la legge del raggiamento entro i limiti delle fatte esperienze, verificare se essa corrisponda anche nel caso di temperature più elevate ma ben conosciute. Solamente quando questa corrispondenza esista, si ha il diritto di èstender ancor più l'uso della formola, e di indagare, con grande probabilità di esattezza, la ignota temperatura di corpi inaccessibili e straordinariamente caldi, come al certo dev'essere il Sole.

Così facendo credo di aver superato la seconda delle due difficoltà segnalate dalla Commissione dell'Accademia di Francia.

Quanto alla prima difficoltà essa non può per la natura del problema esser del tutto evitata. Anch'io ho dovuto ricorrere a un'extrapolazione per ottenere il valore della costante solare ai limiti dell'atmosfera; ma il metodo da me adoperato rende quella extrapolazione assai più sicura e precisa.

Perciò io credo che le cifre da me ottenute rappresentino la temperatura del Sole in modo abbastanza preciso e soddisfacente: come apparirà dalla lettura di questa Memoria che ho l'onore di presentare alla R. Accademia dei Lincei.

---

§ I.

Descrizione degli strumenti adoperati in queste indagini.

Pile termo-elettriche.

Nelle mie sperienze ho adoperato due differenti pile termo-elettriche, una delle quali fu costruita da Duboscq e l'altra da Gourjeon. La pila costruita da Duboscq, che chiameremo pila n. 1, era composta di 25 elementi antimonio-bismuto disposti in modo da formare un prisma retto a base quadrata: sulle basi di questo prisma stavano le saldature, che venivano coperte di nero fumo. Il primo bastoncino di bismuto e l'ultimo d'antimonio erano in comunicazione metallica con due morsette isolate a e b

(fig. 1) nelle quali si stringevano i due reofori. La pila era protetta da una custodia di ottone a doppia parete (fig. 1 e 2) fornita di due fori in corrispondenza alle due faccie della pila. Questa occupava il centro della custodia ed era sostenuta da un pezzo metallico *c*. La custodia ABCD aveva la forma di un prisma retto a base rettangolare. Le due basi anteriore e posteriore si potevano all'occorrenza levare, e portavano verso il centro le due finestre destinate a lasciar libero l'accesso dei raggi fino alle saldature della pila. Queste finestre potevano però esser chiuse da due schermi, anch'essi a doppia parete (fig. 3), che scorrevano lungo due guide orizzontali fissate alla parete esterna della custodia: questo modo di chiusura è simile a quello che si usa per molti carri ferroviarî destinati al trasporto delle merci. Le pareti interne della custodia erano coperte di nero fumo; esse non potevano però irradiare sulle faccie della pila, perchè queste erano protette da due tubi EE, EE a sezione rettangolare, che, divergendo assai poco verso l'esterno, arrivavano fino in prossimità alle finestre della custodia.

La custodia e la pila in essa contenuta si potevano variamente inclinare all'orizzonte movendo un rocchetto dentato G, che ingranava in una ruota F alla quale la custodia era unita in sistema. Questa ruota era poi portata da una colonna H che poteva scorrere lungo un'asta orizzontale graduata T, e venir fissata in ogni punto di essa mediante una vite di pressione.

In tal modo alla pila si potevano dare due movimenti, uno di traslazione lungo una retta orizzontale, l'altro di rotazione intorno ad asse orizzontale. Un terzo movimento, di rotazione intorno ad asse verticale, si poteva ottenere a mano movendo in giro il sostegno L.

Importava assai di poter dirigere con precisione la pila, di disporre cioè una delle due faccie esattamente perpendicolare alla direzione secondo cui si propaga un dato raggiamento. Ad ottener ciò servivano due pinnule *e, f* fissate sul coperchio della custodia, fornite ciascuna di un forellino nel centro. La retta passante per i due centri di questi forellini era parallela all'asse longitudinale della pila termo-elettrica. Si poteva in tal modo dirigere quest'asse, come si fa nelle operazioni geodetiche colla diottra a pinnule, e se si trattava del raggiamento solare si poteva star certi che una faccia della pila era normale alla direzione dei raggi solari, quando il fascetto luminoso che attraversava il foro della pinnula anteriore andava a cadere sul foro della posteriore.

La seconda pila termo-elettrica, costruita da Gourjeon, che nomineremo pila n. 2, servì solo in alcune ricerche speciali. Essa era composta di un numero maggiore di elementi bismuto-antimonio, disposti in modo da formare un cilindro retto a base circolare. Era più sensibile della pila n. 1.

Bussola a riflessione.

La intensità della corrente termo-elettrica generata dalla pila esposta al raggiamento veniva misurata con un'eccellente bussola a riflessione di Wiedemann costruita dal Ruhmkorff. Com'è ben noto, in questa bussola l'ago magnetico è costituito da un dischetto di acciajo brunito su una faccia e sospeso ad un lungo filo di bozzolo in modo da riuscire verticale e da poter liberamente oscillare intorno ad asse verticale.

Le deviazioni dell'ago si leggono mediante un cannocchiale e una scala divisa orizzontale, collocata rimpetto alla faccia brunita del dischetto, a qualche distanza da esso. La corrente che fa deviare l'ago circola in un filo avvolto su due rocchetti verticali, i quali stanno l'uno da una parte e l'altro dall'altra del dischetto magnetico, sono indipendenti fra loro e possono venire più o meno avvicinati al dischetto medesimo. Su ciascuno di questi rocchetti erano avvolti due fili, onde poter adoperare lo strumento anche come galvanometro differenziale: nel mio caso importava soltanto di ottenere una grande sensibilità e quindi disposi le congiunzioni in modo che la corrente attraversasse successivamente e nel medesimo senso i due circuiti di ciascun rocchetto. Avvicinai poi quanto era possibile i due rocchetti al dischetto, e disposi superiormente una grossa calamita a qualche distanza dal dischetto, in maniera da neutralizzare in gran parte l'azione magnetica terrestre. In tali condizioni lo strumento era sensibilissimo. Il cannocchiale munito di reticolo, e la scala divisa erano posti a circa tre metri dalla bussola. La scala era divisa di due in due millimetri e col mezzo del cannocchiale si leggevano i decimi di una particella.

Nel fare le letture delle deviazioni si aveva riguardo alle differenze nella posizione di equilibrio del dischetto d'acciajo, quando non passava per il circuito alcuna corrente, differenze prodotte dalle variazioni della declinazione magnetica terrestre; a tale scopo, prima di far passare la corrente, si osservava quale divisione della scala apparisse in corrispondenza del filo verticale del reticolo del cannocchiale, e si riteneva il numero così trovato come punto di partenza per computare la deviazione successiva.

§ II.

Esperienze per determinare la legge del raggiamento in funzione della temperatura.

Esperienze fra 0° e 300°

Per determinare la legge del raggiamento in funzione della temperatura cominciai col prendere per corpo raggiante il cubo di Leslie ripieno di acqua che mediante una fiammella veniva portata a varie temperature, e infine mantenuta alla temperatura di ebollizione. Allo scopo di procedere al di sopra di 100 gradi e fino ai 300 mi valsi del mercurio e feci per conseguenza costruire un apposito cubo con lamine di ferro. Il coperchio di questo cubo era munito di tre fori: attraverso due di questi passavano i cannelli di due termometri aventi la graduazione fino a 360° e costruiti dal Geissler colla sua ben nota diligenza; per il terzo foro passava l'asticciuola di un agitatore pure di ferro (veggasi la fig. 4). A piccola distanza dalla faccia irradiante era collocato un diaframma a doppia parete; nel centro di esso venne bucato su ogni parete un foro circolare di diametro alquanto più piccolo dell'apertura della custodia contenente la pila. In tal guisa si poteva esser certi che ogni punto della faccia della pila riceveva il raggiamento da una superficie irradiante di eguale estensione: mentre se i fori del diaframma fossero stati più grandi dell'apertura della custodia, sarebbe avvenuto che gli elementi della pila situati sull'orlo avrebbero ricevuto una quantità di raggi minore di quella incidente sugli elementi centrali della pila stessa. Senza questa precauzione si ottengono dei risultati che non sono paragonabili fra di loro,

allorchè si muta la distanza della pila dalla faccia irradiante. Per maggior precauzione le due pareti esterne del diaframma vennero affumicate, ed inoltre tra la pila ed il primo diaframma si collocò un secondo diaframma, pure a doppie pareti con fori alquanto maggiori dell'apertura della custodia. Ad allineare esattamente i due diaframmi e la pila in guisa che la retta normale passante pei centri di quei fori riuscisse perpendicolare sul centro della faccia della pila termo-elettrica, servivano dei forellini situati sulle pareti dei diaframmi a una distanza dal foro centrale eguale a quella che separava i forellini della diottra della pila dal centro di questa. Così allorchè traguardando a traverso tutti quei forellini si poteva scorgere distintamente una fiammella momentaneamente collocata dinanzi al primo diaframma, si aveva la sicurezza che la pila e i due diaframmi erano bene allineati.

Le esperienze vennero fatte colla pila più sensibile n. 2 e nel circuito non fu introdotta alcuna resistenza all'infuori di quella offerta dalla pila stessa, dai reofori e dalla bussola. Il seguente prospetto contiene i risultamenti sperimentali ottenuti.

PROSPETTO I.

Temperatura dell'ambiente 23°, 8 C.

	Temperatura della faccia raggiante	Differenza di temperatura fra la superficie raggiante e l' ambiente ove era situata la pila	Deviazioni lette alla bussola
1	56°,6	32°,8	Div.[1] 10,0
2	96°,6	72, 8	29,5
3	116°,6	92, 8	42,8
4	136°,6	112, 8	55,0
5	156°,6	132, 8	72,5
6	176°,6	152, 8	91,5
7	196°,6	172, 8	116,7
8	216°,6	192, 8	141,9
9	236°,6	212, 8	169,5
10	256°,6	232, 8	204,0
11	276°,6	252, 8	239,5
12	296°,6	272, 8	283,5

Devesi notare che ogni esperienza fu ripetuta almeno due volte, e furono prese le necessarie precauzioni perchè durante l'esperienza la temperatura si conservasse stazionaria; in tal guisa i numeri ottenuti riuscivano pressochè identici nelle due esperienze; e qualora fra la prima e la seconda esperienza si avesse trovato una differenza superiore a una o al più due divisioni nelle alte temperature, e a cinque decimi nelle temperature basse, si procedeva a una terza e talora a una quarta esperienza per dedurne un valor medio preciso.

§ III.

Formole empiriche e scelta di quella che meglio rappresenta il fenomeno.

Fatte le esperienze ora indicate importava di dedurre dalle stesse la legge colla quale varia l'effetto termico, prodotto dal raggiamento, al variare della temperatura

della superficie raggiante. A tale scopo cominciai col costruire la curva passante pei punti determinati coi dati numerici contenuti nel precedente prospetto, prendendo per ascisse i numeri contenuti nella terza colonna (le differenze di temperatura fra il corpo raggiante e l'ambiente ov'era situata la pila) e per ordinate i corrispondenti numeri della quarta colonna (le deviazioni galvanometriche). La curva fu costruita su ampia scala. Un semplice sguardo alla curva ci avverte che l'effetto termico del raggiamento cresce assai più rapidamente della temperatura della superficie raggiante; e per conseguenza resta esclusa senz'altro l'applicabilità della legge di Newton, la quale sarebbe rappresentata graficamente da una linea retta. — È già stato dimostrato da lungo tempo e da molti fisici che la formola del Newton, come viene d'ordinario interpretata, non è applicabile se non quando la differenza di temperatura fra il corpo caldo che irraggia e il corpo freddo che accoglie il raggiamento, è assai piccola.

I signori Dulong e Petit hanno provato con una serie di accuratissime esperienze che la legge del raggiamento è espressa dalla formola

$$q = b\,[a^{t-t}\,1 - 1]$$

nella quale q rappresenta la quantità di calore ceduta da ogni unità della superficie del corpo irradiante nell'unità di tempo, t la temperatura del corpo caldo raggiante, t_1 quella dell'ambiente, a e b due costanti (vedasi Jamin, *Cours de Physique* Vol. II, 1868 pag. 329). Sebbene quella formola abbia servito a quegli illustri fisici a rappresentare bene il fenomeno del raggiamento entro i limiti delle fatte esperienze (comprese fra 0° e 280°) e nelle condizioni in cui esse furono eseguite, tuttavia è stato dimostrato da parecchi fisici, e tra gli altri dall'Ericson, che essa non è applicabile in generale quando la differenza di temperatura tra il corpo caldo irradiante e l'ambiente superi 80 gradi, ed anche il sig. Jamin dichiara (Vol. II, pag. 314) che essa è una formola empirica e cessa di essere esatta alle temperature elevate.

Poichè adunque la formola di Dulong e Petit è empirica, e di uso limitato, io volli indagare se a quella si potesse sostituire un'altra formola, la quale meglio di essa si prestasse a rappresentare il fenomeno del raggiamento termico in funzione della temperatura del corpo caldo raggiante, e della temperatura dell'ambiente che circonda il corpo freddo che accoglie il raggiamento. Dopo molte riflessioni mi decisi ad adottare la formola

$$y = a\mathrm{T}^2\,(\mathrm{T} - \Theta) - b\,(\mathrm{T} - \Theta),$$

nella quale y rappresenta l'effetto termico prodotto dal raggiamento e misurato dallo strumento termometrico, che in questo caso era la pila termo-elettrica; T è la *temperatura assoluta* del corpo caldo raggiante, Θ la temperatura pure assoluta dell'ambiente, ove è collocata la pila, a e b due quantità da determinarsi espressamente, che dipendono dalla qualità dello strumento termometrico, e che si mantengono costanti per un medesimo corpo raggiante qualunque sia la sua temperatura. Il primo dei due termini del secondo membro dell'anzidetta formola si può considerare come rappresentante dell'effetto termico prodotto dal raggiamento, qualora l'esperienza si potesse fare in uno spazio vuoto; il secondo termine invece starebbe nella formola a rappresentare l'influenza esercitata dall'aria dell'ambiente.

La formola da me adottata si può riguardare, quanto alla forma, identica a quella del Newton, essendo anche in essa il valore di y proporzionale a $T-\Theta$, con questo divario però che mentre in quella del Newton, come viene d'ordinario usata, si considera indipendente dalla temperatura il poter emissivo del corpo irradiante, nella formola da me proposta invece il poter emissivo è rappresentato dalla quantità $E \times T^2$, cioè è proporzionale al quadrato della temperatura assoluta del corpo raggiante.

Io suppongo cioè che dato un corpo dotato del massimo potere emissivo, per es. il nero fumo, che per $T=1$ abbia un potere emissivo $E=1$, di mano in mano che s'eleva la di lui temperatura, vada in esso aumentando anche il poter emissivo, e questi aumenti sieno proporzionali al quadrato della temperatura. Che questa supposizione non sia infondata lo dicono tra le altre le esperienze di Tyndall sulla emissione del calore (Pogg. Ann. Vol. 174 ed anche Wüllner, *Lehrbuch der Physik* Vol. III, pag. 215, 216). E poi basta considerare anche il modo con cui si comportano i corpi rispetto al raggiamento di mano in mano che si aumenta la loro temperatura. Le belle esperienze di Melloni e di Tyndall hanno provato che collo elevarsi della temperatura il raggiamento dei corpi in certa guisa si esalta, perchè non solo aumenta l'energia dei raggi delle ondulazioni prima esistenti, ma a queste si aggiungono altri raggi di maggior rifrangibilità; e così il raggiamento aumenta per la maggior quantità di raggi di diversa rifrangibilità, e per la maggior intensità di vibrazione di ogni singolo raggio.

Comunque sia, la sola pratica applicazione può decidere se la formola da me scelta rappresenti bene il fenomeno del raggiamento entro i limiti delle fatte esperienze; e se anche si possa estendere al di là di quei limiti.

Cominciai dunque col calcolare il valore delle costanti a e b col mezzo dei dati sperimentali desunti dal precedente prospetto. Mi valsi delle esperienze (7) e (10); per la prima delle quali si ha

$$y=116,7, \quad T=196,6+273=469,6 \quad T-\Theta=172,8,$$

per la seconda

$$y=204,0, \quad T=256,6+273=529,6 \quad T-\Theta=232,8.$$

Ottenni i valori

$$\log a=4,5252152-10\,, \qquad a=0,0000335131,$$
$$\log b=8,8040253=10\,, \qquad b=0,0636833.$$

Per verificare se la formola colle due costanti a e b in tal modo calcolate rappresenti bene l'andamento del fenomeno per tutte le differenze di temperatura comprese fra 0° e 272° C, vennero col sussidio di essa formola calcolati i valori di y per differenze di temperatura distanti 50 gradi una dall'altra, e messi a confronto coi corrispondenti valori desunti dalla curva. Il prospetto seguente fa vedere come le differenze fra i valori calcolati, e i valori desunti dalla curva siano assai piccoli.

PROSPETTO II.

Differenze di temperatura $T-\Theta$	Temperature osservate Term.° Cent.° t	Temperature assolute T	Ordinate y lette sulla curva	Ordinate y calcolate	Differenze
0	23,8	296,8	0	—	—
50	73,8	346,8	17,2	16,97	+0,23
100	123,8	396,8	46,4	46,40	0,00
150	173,8	446,8	90,1	90,80	—0,70
200	223,8	496,8	151,7	152,69	—0,99
250	273,8	546,8	234,7	234,58	+0,12
272,8	296,6	569,6	279,6	279,25	+0,35

Ho voluto tuttavia indagare se per avventura la formola di Dulong e Petit si prestasse altrettanto bene a rappresentare l'effetto termico del raggiamento entro i limiti delle fatte esperienze. A tal uopo furono desunti dalla curva i due valori

$T-\Theta=130°$ a cui corrisponde $y=69,9$

$T-\Theta=260°$ » $y=253,5$

e introdottili nella formola

$$y=b\left(a^{T-\Theta}-1\right)$$

si ricavano i valori delle due costanti a e b

$b=42,9728$ $\log b=1,6331939$

$a=1,00746$ $\log a=0,00322612$

Il seguente prospetto fa vedere che le differenze fra i valori delle ordinate desunte dalla curva, e quelli delle ordinate calcolate col mezzo della formola di Dulong e Petit sono notevolmente maggiori delle differenze riscontrate precedentemente.

PROSPETTO III.

Differenze di temperatura $T-\Theta$	Ordinate lette sulla curva	Ordinate calcolate colla formola di Dulong e Petit	Differenze
0°	0	0	—
50°	17,2	19,23	—2,12
100°	46,4	47,35	—0,95
150°	90,1	87,98	+2,12
200°	151,7	146,88	+4,82
250°	234,7	232,27	+2,43

La formolà parabolica da me proposta si presta meglio adunque di quella di Dulong e Petit, e per conseguenza mi valsi di essa per le esperienze ulteriori.

§. IV.

Calcolo delle costanti della formola perchè essa si presti alle indagini fatte colla pila n. 1.

Siccome lo scopo principale delle mie indagini era quello di desumere dai resultati delle esperienze e dall' applicazione della formola la temperatura del Sole, e siccome nelle esperienze del raggiamento solare, e di quello dei corpi assai caldi io mi serviva della pila termo-elettrica n. 1, così era necessario di modificare le

costanti a e b della formola stabilita per la pila n. 2, in guisa che la formola stessa colle nuove costanti potesse applicarsi alle esperienze fatte colla pila n. 1. A tal uopo feci delle apposite esperienze accogliendo il raggiamento sulla faccia delle due pile collocate successivamente alla medesima distanza dal cubo di Leslie, la cui temperatura si mantenne costantemente a 312° C, ed ottenni per la pila n. 1 la deviazione 28,0 e per la pila n. 2 la deviazione 78,0 in guisa che si ha il rapporto

$$\frac{\text{N. }1}{\text{N. }2} = \frac{28}{78} = 0{,}359 \quad \text{ossia} \quad \text{pila N. }1 = 0{,}359 \text{ N. }2.$$

Basterebbe adunque moltiplicare per questo valore le costanti a e b della formola primitiva per avere le nuove costanti adattate alla pila n. 1. — Ho pensato tuttavia di preparare addirittura la formola in guisa che mi permettesse di confrontare direttamente l'effetto termico prodotto sulla pila n. 1 dal raggiamento del Sole e da quello dei corpi roventi o incandescenti veduti sotto lo stesso angolo visuale sotto il quale quello ci apparisce, cioè 32′ 3″, 6. Avendo collocato la pila termo-elettrica in guisa che la faccia di essa distava 134 mm. dalla superficie irradiante del cubo di Leslie la quale, per causa del diaframma interposto, era limitata ad un circolo del diametro di 32,65 mm., ottenni alla bussola la deviazione di $98^{D},5$. Si trova facilmente che la pila avrebbe dovuto esser collocata alla distanza di metri 3,499 affinchè la superficie irradiante avesse presentata la stessa grandezza apparente del Sole; e utilizzando la legge dei quadrati inversi delle distanze, si dedusse immediatamente che in tal caso la deviazione alla bussola sarebbe stata uguale a 0,1444 divisioni. Si ha quindi per la pila n. 1 il rapporto

$$\text{N. }1 = \frac{0{,}1444}{98{,}5} = 0{,}0014665.$$

Basterà ora moltiplicare ambidue le costanti a e b per i due coefficienti di riduzione

0,359 e 0,0014665

per ottenere due nuove costanti m e n e la formola così ridotta è quella di cui mi sono servito per tutte le esperienze eseguite colla pila n. 1, per la quale vale adunque la formola

$$y = m\mathrm{T}^2(\mathrm{T}-\Theta) - n(\mathrm{T}-\Theta),$$
$$\log m = 1{,}2466088 - 10,$$
$$\log n = 5{,}5254189 - 10,$$

colla condizione che la pila s'intenda collocata a una distanza dal corpo raggiante eguale 107,17 volte il diametro di questo, così che il corpo apparisca sotto l'angolo visuale di 31′, 3″, 6 al pari del Sole.

§ V.

Verificazione dell'applicabilità della formola per temperature superiori ai 300 gradi.

Esperienze calorimetriche.

Per verificare se la formola continuava a rappresentare bene l'effetto termico del raggiamento anche quando il corpo raggiante avesse una temperatura superiore ai 300°, scelsi per primo cimento quella lamina di rame affumicata che si riscalda

mediante una fiammella ad alcool e che costituisce una delle sorgenti calorifiche usate già dal Melloni. Secondo l'opinione di questo e di altri fisici quella lamina riscaldata a quel modo assume una temperatura di circa 400°; e secondo alcuni altri di 390°.

Esposta la pila n. 1 al raggiamento di quella lamina, la lettura fatta alla bussola ebbe un tal valore che introdotto nella formola, dedussi da essa in due esperienze due valori differenti, ma compresi appunto fra 390° e 400°. È probabile infatti che la temperatura di quella lamina varii di qualche grado tra un'esperienza e l'altra, e quindi riguardai come favorevole l'esito di quel primo cimento. Tuttavia si rendeva necessaria qualche altra prova più concludente, fatta a temperature piuttosto elevate, ma misurabili. Perciò ebbi ricorso al raggiamento di una sfera di rame rovente, di cui determinai la temperatura col metodo calorimetrico. A tal uopo disposi nella fiamma di un grande beccuccio di Wiessnegg una sfera di rame sospesa ad un sottil filo di platino. Questa sfera aveva il suo centro sulla orizzontale che passava per i centri del foro dello schermo e della pila n. 1. Nel circuito era, come sempre, introdotta la bussola di Wiedemann, e quando da molto tempo la deviazione era costante si poteva ritenere che fosse pure costante la temperatura della sfera di rame. Allora, a un dato segnale, un assistente spostava lateralmente la fiamma e un altro spingeva tosto sotto alla sfera un vaso calorimetrico e lo innalzava in modo che la sfera stessa s'immergesse nell'acqua del calorimetro. Questa operazione si faceva tanto rapidamente, che non si poteva certo temere un raffreddamento sensibile della sfera nel tempo trascorso fra l'istante in cui veniva tolta la fiamma e quello in cui avveniva l'immersione nell'acqua. Poi l'esperienza si conduceva colle solite norme adottate per le misure calorimetriche.

Il calorimetro adoperato consisteva in un vaso di rame a doppie pareti, nel quale pescavano un termometro protetto da una guaina bucherata di ottone e un agitatore pure di ottone. Il vaso era fornito di un manico, che rendeva più facile e più spedita la manovra testè descritta. Il termometro era diviso in quinti di grado, ed era stato confrontato con un termometro campione. L'equivalente in acqua del calorimetro, del termometro e dell'agitatore era già stato determinato con esperienze precedenti. Si versava nel vaso circa mezzo litro d'acqua distillata. Detto Q il peso dell'acqua versata, q l'equivalente in acqua del vaso calorimetrico, del termometro e dell'agitatore, t_1 la temperatura dell'acqua al momento dell'immersione della sfera, t_2 la temperatura finale, t la temperatura della sfera, p il suo peso, e c il calore specifico medio del rame fra t e t_2, si ha

$$(Q+q)(t_2-t_1)=pc(t-t_2)$$

dalla quale si può dedurre t.

La quantità c fu determinata da Bède (Wüllner, *Physik*, III pag. 436, 1872) il quale trovò

$$c=0,0910+0,000023(t+t_2).$$

Veramente nelle esperienze, dalle quali fu dedotta questa formola, non fu oltrepassata la temperatura di 247°: in mancanza di meglio ho dovuto ammettere che la formola valga anche per valori di t molto più grandi.

Citerò tra le molte, due esperienze fatte di seguito.

Nella prima $Q = 498{,}2$, $q = 32{,}5$, $t_1 = 10{,}58$, temperatura dell'ambiente 11°,0 $t_2 = 29{,}18$, $p = 123{,}33$, ne risultò $c = 0{,}1092$ e $t = 762°{,}1$.

Nella seconda esperienza si ebbe

$t_1 = 11{,}15$, $t_2 = 29{,}60$, e si ricavò il valore di $t = 756{,}63$.

Calcolo delle letture fatte alla bussola.

Prima di lasciar cadere nell'acqua del calorimetro la sfera sulla quale si sperimentava, per fare la determinazione calorimetrica della sua temperatura, alla bussola erano già state fatte quattro letture. La prima lettura a circuito aperto serviva per stabilire la posizione dello zero; la seconda si faceva a circuito chiuso, intercettando il fascio dei raggi calorifici mediante uno schermo metallico a pareti doppie. D'ordinario queste letture riescivano poco diverse, segno evidente che la custodia proteggeva assai bene la pila, e che anche essendo aperta la porticina di essa custodia, l'effetto dell'ambiente esterno era assai piccolo. Nella prima delle due esperienze calorimetriche le due letture furono: circuito aperto (zero) = 66,5; circuito chiuso = 68,0. Nella seconda si ebbe: zero 64; circuito chiuso 65,5.

La differenza $1^D{,}5$ della bussola rappresenta l'effetto dell'ambiente sulla faccia della pila che riceve il raggiamento di esso ambiente (essendo aperta la porticina della custodia), ma potrebbe anche dipendere da qualche minima corrente termo-elettrica generata dai contatti dei reofori. Qualunque sia la causa di quella piccola deviazione di 1,5 divisioni, essa viene eliminata, perchè si procede poscia per differenze, cioè si sottrae dalle successive letture dovute all'effetto termico del raggiamento, la lettura seconda fatta a circuito chiuso essendo intercettato il raggiamento.

La terza lettura serve a misurare l'effetto termico della fiamma sola; la differenza tra la seconda e la quarta lettura dà l'effetto complessivo del raggiamento della sfera rovente, e della parte anteriore della fiamma che la circonda. In tal guisa si può facilmente conoscere l'effetto termico prodotto sulla pila dal raggiamento della sola sfera rovente. Com'è noto, e come io stesso verificai con molte esperienze, le fiamme azzurre del bruciatore di Bunsen sono quasi completamente diatermiche: perciò dalla differenza fra la quarta e la seconda lettura, che dà l'effetto complessivo, basta sottrarre quel numero di divisioni, che rappresentano l'effetto termico della parte anteriore della fiamma, il quale, in causa del debole poter emissivo della fiamma, è d'ordinario piccolo in confronto del numero di divisioni spettanti al raggiamento del corpo rovente.

Nella prima delle due esperienze calorimetriche si ebbe dalla differenza fra la II^a e la IV^a lettura 248,9 divisioni da cui togliendo 13,6 divisioni, dovute a quella parte anteriore della fiamma che riusciva visibile dalla pila, si ottenne $235^D{,}9$ quale misura dell'effetto termico prodotto sulla faccia della pila n. 1.

Il centro della sfera distava dalla faccia della pila 185 mm., e 66 mm. dal 1° schermo, il cui foro minore aveva il diametro di 15 mm. Il diametro della sfera era di 30 mm. Con semplice calcolo si trova che in tali condizioni ogni punto della pila riceveva il raggiamento non dalla sfera intera, ma da una calotta sferica: e l'effetto termico del raggiamento di quella calotta è equivalente a quello che produrrebbe un disco circolare del diametro di 21,42 mm. situato tangenzialmente alla sfera nella sua parte anteriore, e quindi ad una distanza dalla pila uguale a 170 mm. Perchè la superficie

circolare del diametro di 21,42 mm. apparisca sotto l'angolo visuale di 32′,3″,6, la faccia della pila avrebbe dovuto essere situata alla distanza di 2296,5 mm. in luogo di 170. Mettendo a profitto la legge dei quadrati inversi delle distanze si trova che se alla distanza di 170 mm. l'effetto termico era rappresentato da 235,9 divisioni della bussola, alla distanza di 2296,5 mm. esso corrisponde a 1,322 divisioni.

Per confrontare il risultato dell'esperienza calorimetrica, con quello della osservazione alla bussola si possono seguire due vie che conducono allo stesso scopo. Si può in primo luogo introdurre nella formola i valori di T e di T-Θ dati dall' esperienza calorimetrica e ricavare quindi da essa il valore di y. In questo caso si avrebbe

$$T = 273 + 762{,}1 = 1035{,}1$$
$$\Theta = 273 + 11^\circ{,}0 = 284{,}0$$
$$T - \Theta = 751^\circ{,}1$$

e dalla formola si ricava $y = 1{,}3943$.

Oppure si potrebbe in secondo luogo introdurre nella formola stessa il valore $y = 1{,}322$ desunto dalla osservazione alla bussola e ricavare da essa il valore di T e quindi di t.

Così operando e rammentando che la temperatura dell' ambiente era 11°,0 e perciò $\Theta = 11^\circ{,}0 + 273 = 284$ si ottiene $t = 1019^\circ{,}0$ $t = 746{,}0$. Ora sia che si confrontino fra di loro i due valori di y

1,3943 e 1,322 ovvero i due valori di t 762,1 e 746°,0

si vede che la differenza fra i valori calorimetrici, e i valori desunti dalle osservazioni alla bussola coll'uso della formola non differiscono moltissimo fra loro, ma però quanto basta per far sospettare che la formola non sarebbe applicabile a temperature ancor più elevate.

Fu allora che mi venne in mente che quella non grande differenza potesse dipendere dal potere emissivo della sfera di rame rovente, e pensai che siccome le esperienze che avevano servito di base per il calcolo delle costanti nella formola erano state fatte con una superficie raggiante coperta da nero fumo, forse ogni differenza sarebbe scomparsa, se anche alle temperature elevate la superficie raggiante fosse stata affumicata. Ideai allora un metodo, che credo nuovo, per confrontare l' effetto termico del raggiamento inviato da corpi aventi temperature elevate, e la cui superficie era prima nuda e poscia affumicata, in guisa che facendo il rapporto tra i due valori ottenuti si aveva un numero che rappresentava il potere emissivo del corpo nudo paragonato al poter emissivo del nero fumo; e ritenuto quest' ultimo, come si suole, uguale ad uno, si aveva in tal modo il poter emissivo specifico del corpo sottoposto all'esperienza.

Del metodo usato parlerò nel successivo articolo; ora dirò che da quelle indagini ebbi per il poter emissivo specifico del rame, nelle condizioni in cui esso si trovava, cioè circondato dalla fiamma, il valore 0,943.

Nella esperienza calorimetrica di cui ci siamo occupati la sfera di rame nudo produceva col suo raggiamento un effetto termico sulla pila, che misurato alla bussola era espresso da

$$y = 1{,}322.$$

Se quella sfera fosse stata coperta da nero fumo, l'effetto sarebbe stato

$y_1 = \frac{1,322}{0,943} = 1,402$, e dalla formola si ha che vi corrisponde il valore $t = 763,6$.

I valori 1,394 e 1,402

762°,1 » 763°,6

sono così concordanti che si può esserne assai soddisfatti, e conchiudere, che la formola può applicarsi anche alle temperature elevate qualora la superficie raggiante sia il nero fumo, ovvero quando si tenga conto del poter emissivo specifico della superficie raggiante.

Ho descritto minutamente questa esperienza per dare una giusta idea del modo con cui procedetti in queste ricerche. Tralascio di riferire molte altre esperienze calorimetriche fatte in simil guisa, le quali mi diedero sempre risultamenti del pari soddisfacenti. Passo invece a descrivere il già ricordato metodo.

§ VI.

Metodo per determinare il potere emissivo specifico dei corpi ad alte temperature.

Per determinare il potere emissivo specifico dei corpi a temperature elevate, ideai un metodo quanto semplice, altrettanto preciso. Ognuno conosce la forma che presenta la fiamma del gas illuminante nei bruciatori del Bunsen, quando è libero l'accesso all'aria nell'interno del bruciatore stesso. Ho fatto degli studî sulla temperatura dei varî strati di codesta fiamma (*Sulla temperatura delle fiamme.* Atti del R. Istituto veneto Vol. III, 1877) dai quali risulta che la parte superiore interna di essa compresa fra il vertice del cono interno e il vertice del manto esterno, ha una temperatura che non supera i 1200°. Collocando dunque in quel luogo della fiamma un corpo, questo assumerà una temperatura al certo inferiore a quella della fiamma, che sarà dipendente da varie circostanze, cioè dalla massa, dal calore specifico, dalla maggiore o minore conducibilità per il calore, dal potere emissivo; e se il corpo è sostenuto, come è necessario, da qualche filo o asticciuola, anche la conducibilità di questi eserciterà notevole influenza. Però si può ritenere con certezza, che ove la fiamma si mantenga invariata, il medesimo corpicciuolo collocato nella identica posizione assumerà la stessa temperatura in due o più esperienze successive. Ora se in una di queste esperienze successive il corpo si lascia colla sua superficie nuda, e nella seconda lo si ripone nella fiamma dopo averlo coperto con nero fumo, è evidente che si avrà il modo di paragonare l'effetto termico del raggiamento inviato prima dalla superficie nuda, poscia dalla superficie affumicata, e così si potrà stabilire il valore del potere emissivo del corpo, paragonato a quello del nero fumo. È condizione essenziale però che il nero fumo si mantenga aderente alla superficie del corpo durante l'esperienza. Questa cosa si verifica appunto qualora il corpo sia collocato nella posizione suindicata della fiamma: se esso fosse presso il vertice del cono interno della fiamma, il nero fumo si dileguerebbe ben presto combinandosi coll'ossigeno dell'aria penetrata nell'interno del bruciatore.

Diedi la forma di dischi circolari del diametro di 10 mm. ai corpi che sottoposi all'esperienza; dal centro di quei dischi partiva in direzione perpendicolare un filo o asticciuola possibilmente della stessa sostanza, che presentava l'aspetto di un manico il quale era sostenuto da un cannello di porcellana posto orizzontalmente (fig. 2). In tal guisa il disco veniva a trovarsi in posizione verticale entro quella parte della fiamma che non faceva dileguare il nero fumo: in breve tempo diventava rovente o incandescente, e irradiava, come un piccolo sole, i raggi che passando a traverso i fori dei diaframmi pervenivano sulla faccia della pila opportunamente collocata. Si faceva da prima un'esperienza col disco nudo; indi una seconda col disco coperto da nero fumo; poscia si ripetevano entrambe per assicurarsi che fossero concordanti.

Ecco i risultamenti ottenuti per alcuni corpi.

Rame

				Rapporto
6 dicembre	Disco nudo	105,9	divisioni	0,950
	» affumicato	113,5	»	
1 »	Disco nudo	106,3	»	0,929
	» affumicato	114,8	»	
» »	Disco nudo	114,4	»	0,939
	» affumicato	121,8	»	
12 settembre	Disco nudo	58,5	»	0,945
	» affumicato	62,0	»	
1 »	. . . .			0,956

Medio poter emissivo del rame nudo collocato nell' interno della fiamma 0,943

Ferro

11 settembre	Ferro nudo	77,75	divisioni	0,888
	» affumicato	87,5	»	
12 »	Ferro nudo	63,5	»	0,873
	» affumicato	72,75	»	
26 »	Ferro nudo	116,0	»	0,886
	» affumicato	131,0	»	

Medio poter emissivo del ferro 0,882

Platino

11 settembre	Platino nudo	35,5	divisioni	0,364
	» affumicato	97,5	»	
3 »	Platino nudo	18,75	»	0,338
	» affumicato	55,5	»	
26 »	Platino nudo	36,0	»	0,360
	» affumicato	100,0	»	
» »	Platino nudo	81,0	»	0,337
	» affumicato	240,0	»	

Medio poter emissivo del platino 0,350

Cilindri di ossicloruro di magnesio del Carlevaris.

Siccome mi proponeva di fare delle esperienze sul raggiamento dei cilindretti di ossicloruro di magnesio del Carlevaris resi incandescenti dalla fiamma ossidrogenica, così volli determinare anche il poter emissivo di quella sostanza. I cilindretti hanno il diametro di circa 6 mm.: io collocavo quello su cui voleva sperimentare in posizione orizzontale in guisa che l'estremità penetrava in una ordinaria fiamma del bruciatore Bunsen, e occupava la stessa posizione che nelle esperienze precedenti avevano i dischetti di rame, di ferro, di platino.

Ottenni così facendo:

12 settembre	Cil.° d'ossicloruro di magnesio	nudo	15,5 div.	0,596
» »	» » »	affum.	26,0 »	
3 »	» » »	nudo	14,8 »	0,580
» »	» » »	affum.	25,5 »	
26 »	» » »	nudo	23,9 »	0,572
» »	» » »	affum.	41,6 »	

Medio poter emissivo dell'ossicloruro di magnesio. 0,58

Dunque alle temperature elevate il poter emissivo del rame, del ferro, del platino, dell'ossicloruro di magnesio è rappresentato dai numeri 0,943; 0,882; 0,35; 0,58.

§ VII.

Verificazione dell'applicabilità della formola pel caso di temperature superiori a 800°.

Se si chiama E il poter emissivo specifico dei corpi raggianti, la nostra formola allora diventa

$$y = m.\mathrm{ET}^2 (\mathrm{T} - \Theta) - n (\mathrm{T} - \Theta),$$

e, se le esperienze sono fatte col nero fumo, $\mathrm{E} = 1$.

Per verificare se quella formola è applicabile anche quando le temperature sono superiori a quelle delle esperienze calorimetriche, io mi giovai di quelle stesse esperienze che hanno servito per la determinazione del valore di E. Comincierò col riferire le esperienze fatte con dischi di rame.

Sottoposi successivamente all'esperienza tre dischetti di rame del diametro di 10 mm.: il primo aveva la grossezza di 1 mm, il secondo di 2, il terzo di 3 mm. È certo che ognuno di quei dischi collocato nel medesimo luogo della fiamma assume una temperatura diversa; il più sottile una temperatura più elevata degli altri; anzi se il disco di rame fosse più sottile per es. di $^1/_4$ di mm. esso raggiungerebbe la temperatura di fusione del rame, che, com'è noto, si ritiene di 1050° all'incirca, e comincerebbe in fatto a fondersi. Perciò dobbiamo presumere che il disco sottile (1 mm. di grossezza) assuma nella fiamma una temperatura di circa 1000°, e gli altri due dischi una temperatura più bassa. Vediamo i risultati delle esperienze.

3 sett. Rame affumicato, disco (1^{mm}), diam. = 10 mm, distanza dalla pila 438 mm., temp. dell'ambiente 28°C, $\Theta = 273 + 28 = 301$, deviazione 15,9 divisioni.

Fatto il solito calcolo per avere la deviazione che si sarebbe ottenuta qualora la pila fosse stata collocata alla distanza di 1071, 7 mm., si ottiene $y = 2{,}6554$ divisioni.

Introdotto questo valore nella formola, dove in questo caso E=1 si ricava da essa

$$T = 1260, \text{ e quindi } t = 987^\circ.$$

Con altra esperienza fatta collo stesso disco ebbi:

26 sett. Rame affumicato, disco sottile (1^{mm}), distanza dalla pila 163 mm., temp. dell'ambiente 18°C, $\Theta = 291$, deviazione 108,0 divisioni,

$$y = 2{,}498 \text{ divisioni},$$

a cui corrispondono $T = 1233^\circ{,}5$ $t = 960^\circ{,}5$.

Col disco di rame *della grossezza di 2 mm.* feci pure due esperienze:

1 dic. Rame affumicato, disco mezzano (2^{mm}), distanza dalla pila 150 mm., temp. dell'ambiente $t = 11^\circ$, $\Theta = 284$, deviazione 121,8 divisioni,

$$y = 2{,}386, \quad \text{dalla formola si ricava}$$
$$T = 1211, \qquad t = 938{,}0.$$

6 dic. Disco rame affumicato (2^{mm}), distanza dalla pila 157 mm.

$$\Theta = 284, \text{ deviazione } 113{,}5,$$
$$y = 2{,}432,$$
$$T = 1218^\circ, \qquad t = 945^\circ.$$

1 dic. Rame affumicato, disco grosso (3^{mm}), distanza dalla pila 150 mm,,

deviazione 114,3 divisioni

$$\text{temperatura } 11^\circ{,}0, \qquad \Theta = 284^\circ{,}0,$$
$$y = 2{,}239,$$
$$T = 1190{,}7, \qquad t = 917^\circ{,}7.$$

6 dic. Rame affumicato, disco grosso (3^{mm}), distanza dalla pila 157mm.

$$y = 2{,}272,$$
$$T = 1196{,}3, \qquad t = 923^\circ{,}3.$$

Le temperature di 987° e 960° trovate pel disco sottile di rame, quelle di 938° e 945° pel disco mezzano, e le temperature 917,7 e 923,3 trovate pel disco grosso hanno tutta la probabilità di essere le esatte temperature possedute da quei corpi.

Ferro

Il disco di ferro era sottile assai, pure del diametro di 10 mm. Riferirò una sola esperienza.

26 sett. Disco di ferro affumicato, distanza dalla pila 163 mm.

deviazione 131 divisioni

$$y = 3{,}030,$$
$$\Theta = 291, \qquad T = 1308^\circ{,}0, \qquad t = 1035^\circ.$$

Platino

Il disco di platino era sottilissimo; esso pure del diametro di 10 mm. Si ebbe:

$$y = 3{,}847,$$
$$T = 1410, \qquad t = 1147^\circ.$$

Cilindro di ossicloruro di magnesio nella fiamma del bruciatore di Bunsen.

26 sett. Cilindro di ossicloruro di magnesio affumicato. Diam.° mm.6,1, distanza 163 mm. deviazione 41,6 divisioni

$$y = 4{,}091,$$

$$\Theta = 291°, \qquad T = 1432{,}5, \qquad t = 1159°{,}5.$$

Dunque collocati nella fiamma del bruciatore di Bunsen i dischi di rame hanno assunto una temperatura diversa a norma della minore o maggiore grossezza: il disco sottile raggiunse la temperatura di 987°, il mezzano di 945°, il grosso di 923°. Il disco sottile di ferro 1035°, il disco di platino 1147°, e il cilindro d'ossicloruro di magnesio 1160°.

Si comprende come quest'ultimo abbia assunto una temperatura più elevata di quella degli altri corpi, che essendo metallici hanno una grande conducibilità pel calore, e quindi mediante l'asticciuola, pure metallica, che li sosteneva, perdevano di continuo una certa quantità di calore che comunicavano al cannello di porcellana. Invece l'ossicloruro di magnesio è una sostanza assai poco conduttrice e quindi comunicava poco calore alle branche della morsetta che lo sosteneva.

Esperienze fatte con un cilindretto di ossicloruro di magnesio (del Carlevaris) *reso incandescente dalla fiamma di una miscela di gas illuminante e di ossigeno.*

I cilindretti di ossicloruro di magnesio, che il prof. Carlevaris con molto vantaggio sostituì ai cilindri di calce per ottenere la luce di Drummond, non si trovano d'ordinario in commercio; io potei averne per cortesia dal collega prof. Fr. Filippuzzi. Il cilindretto da me usato in queste esperienze ha la grossezza di 6,1 mm. e la sezione circolare. Nelle prime sperienze sia che i due gas non uscissero con sufficiente pressione, o che io avessi tenuto il cilindretto non abbastanza vicino al forellino d'uscita dei due gas, la fiamma avuta era calda tanto da fondere il platino, ma la luce prodotta dall' incandescenza dell'ossicloruro di magnesio era bensì vivace però non splendidissima. — Nelle esperienze posteriori riuscii ad ottenere una luce abbagliante, ed anche l'effetto termico del raggiamento riuscì molto maggiore di prima. La fiamma era ridotta minima, ma aveva un calore talmente intenso che faceva fondere il platino come fosse cera. S'intende che anche in queste, come in tutte le esperienze, si procedeva per via di differenza delle letture fatte alla bussola, sottraendo dalla prima lettura fatta allorchè il raggiamento era dovuto al cilindretto incandescente e alla fiammella che batteva contro di esso, la seconda lettura che rappresentava il raggiamento della fiammella (dopo rimosso il cilindretto) e dei corpi circostanti: sarà bene di avvertire eziandio che un doppio schermo munito di un foro alquanto più grande della base del cilindretto, era interposto tra questo e la pila, e riduceva al minimo valore l'influenza del raggiamento dovuto ai corpi circostanti.

Ora riferirò i risultamenti delle fatte esperienze:

I.ª Serie.

Cilindretto d'ossicloruro di magnesio nudo del diam.° di mm. 6,1, temp. dell'ambiente 24°,4 C, distanza dalla pila mm. 588,0.

I.ª *Esperienza.* Deviazione osservata 11,2 divisioni.

Col solito calcolo si trova che se la distanza della pila fosse stata millimetri 6,1 × 107,17 (affinchè la superficie raggiante apparisse sotto l'angolo di 32′, 3″,6) la lettura sarebbe stata $y = 9{,}05$ div. Rammentando ora che il potere emissivo dell'ossicloruro di magnesio è $= 0{,}584$ si deduce immediatamente che se il cilindretto fosse stato coperto di nero fumo, ossia se il poter emissivo di esso fosse stato eguale all'unità, il raggiamento avrebbe prodotto un effetto termico eguale a

$$\frac{9{,}051}{0{,}584} = 15{,}499 \text{ divisioni.}$$

Introducendo questo valore di $y = 15{,}499$ nella formola, e rammentando che, per essere $t_1 = 24{,}4$, è $\Theta = 297{,}4$ si ricava da essa

$$T = 2169^{\circ} \text{ e perciò } t = 1896^{\circ}.$$

II.ª *Esperienza.* Si ripete l'esperienza nelle identiche condizioni. — Deviazione letta alla bussola 12,3 div., deviazione calcolata per la distanza 6,1 × 107,17

$$y_1 = 9{,}9404;$$

deviazione dedotta pel potere emissivo eguale ad uno

$$y = \frac{y_1}{E} = \frac{y_1}{0{,}584} = 17{,}06;$$

dalla formola si ricava $T = 2236$, $t = 1963^{\circ}$.

III.ª *Esperienza.* Lettura 12,2 div.

Si ricava $y_1 = 9{,}859$, $y = 16{,}84$,

$T = 2227{,}5$, $t = 1954^{\circ}{,}5$.

II.ª Serie.

I.ª *Esperienza.* La luce era brillantissima.

Distanza dalla pila 420 mm., temperatura dell'ambiente 24°,0 C.

Deviazione letta 31,6 divisioni.

» calcolata per la solita distanza $y_1 = 13{,}00$

Tenendo conto del poter emissivo 0,584

$y = 22{,}25$ pel poter emissivo unitario;

dalla formola si ottiene $T = 2440^{\circ}$, $t = 2167^{\circ}$.

II.ª *Esperienza.* La massima deviazione fu ottenuta in questa IIª esperienza, nella quale il cilindretto d'ossicloruro di magnesio splendeva come un piccolo sole.

Distanza dalla pila mm. 420.

Deviazione letta in tre prove successive:

42,5 divisioni
41,0 »
42,0 »
valore medio 42ᴰ,0.

Alla distanza 107,17 × 6,1 mm. si avrebbe avuto $y_1 = 17{,}68$ e se il potere emissivo fosse stato eguale all'unità

$$y = \frac{17{,}68}{0{,}584} = 29{,}58;$$

dalla formola si ricava

$$T = 2670, \qquad t = 2397^{\circ}.$$

I numeri trovati di 2167° o 2397°, sebbene superiori a quelli trovati nelle esperienze della I^a serie, non sembreranno certo esagerati ove si consideri, come già dissi, che m'era riuscito di ridurre la fiammella a un dardo piccolissimo ma talmente caldo che il platino si fondeva immediatamente, e che la luce emanata dal cilindretto reso incandescente da quel dardo era splendidissima, quale non m'era riuscito di ottenere altre volte e specialmente nell'occasione in cui feci la I^a serie delle esperienze succitate.

I risultamenti ottenuti credo verranno giudicati come assai soddisfacenti da tutti coloro che si sono occupati di simili indagini; e parmi si possa da essi conchiudere che la formola

$$y = m \, E \, T^2 \, (T - \Theta) - n \, (T - \Theta)$$

che sostenne così bene i cimenti a cui fu sottoposta fino a 2000 gradi, possa essere con fiducia applicata anche al caso di temperature più elevate, e quindi possa essa servire a dare la temperatura del Sole.

Vedremo quali valori essa offra per T quando in luogo di y si sostituiscano le deviazioni ottenute esponendo la pila al raggiamento solare.

Ma prima è necessario ch'io dica il modo da me seguito nel fare le osservazioni sul raggiamento termico del Sole. È ciò che passo ad esporre nel seguente paragrafo.

§ VIII.

Raggiamento termico del Sole.

Le osservazioni sul raggiamento termico del Sole vennero fatte colla pila n. 1 (Duboscq) collocata sul terrazzo attiguo alla soffitta ov'era collocata la bussola. Con somma facilità la pila poteva al momento dell'osservazione esser inclinata in guisa, che la faccia di essa esposta al Sole, riceveva i raggi in direzione normale. Queste osservazioni furono principiate nel luglio, ma, per causa di varie circostanze ed impedimenti, non poterono esser condotte con tutta regolarità se non a cominciare dalla fine di agosto.

Ad ogni osservazione si facevano quattro letture alla bussola: la prima a circuito aperto per stabilire il punto di partenza della scala, che corrispondeva alla posizione di riposo dell'ago della bussola; la seconda a circuito chiuso, lasciando chiusa la custodia della pila: la terza aprendo la porticina della custodia in guisa che la faccia della pila riceveva il raggiamento solare: la quarta lasciando aperta la porticina, ma intercettando i raggi solari mediante un piccolo schermo circolare a doppie pareti e collocato alla distanza di circa un metro dalla pila, così che l'ombra di esso si projettava sulla porticina aperta e perciò anche sulla faccia della pila. Per conseguenza in quest'ultima osservazione, la faccia della pila accoglieva il raggiamento della parte di cielo che circonda il Sole, e che necessariamente esercitava la sua influenza anche nella terza osservazione; laonde facendo la differenza fra la terza e la quarta lettura si otteneva, espresso in divisioni della scala, l'effetto termico del raggiamento solare. — A questo proposito debbo notare che la quarta lettura riesciva quasi sempre negativa, indicando, com'è naturale, l'effetto di un raffreddamento della faccia della pila, che irradiava del proprio calore verso lo spazio del cielo meno caldo di essa.

La corrente elettrica generata dal raggiamento solare è così intensa, che, facendo uso della solita pila n. 1 e chiudendo il circuito mediante i soliti reofori e la bussola, le deviazioni dell'ago magnetico escono dai limiti della scala. Perciò ho dovuto introdurre nel circuito una resistenza atta a scemare la intensità della corrente termoelettrica quanto bastava per mantenere le deviazioni entro i limiti della scala. Mi valsi a tal uopo del reostato di Siemens, e dopo molte prove trovai come più opportuna la resistenza di 16 unità Siemens. Tutte le osservazioni solari s' intendono dunque fatte coll'aggiunta di una resistenza pari a 16 unità del Siemens oltre la resistenza offerta dalla pila, dai reofori, e dal filo della bussola.

Allo scopo di determinare la grossezza dello strato atmosferico attraversato dai raggi solari prima di giungere sulla pila termo-elettrica, nelle prime esperienze si notava l'ora precisa della terza osservazione, dalla quale, coi dati desunti dalle effemeridi, si poteva calcolare il valore della distanza zenitale. Più tardi si ebbe ricorso alle determinazioni dirette mediante un teodolite. Quando uno degli sperimentatori aveva compiute le due prime letture alla bussola, l' altro che stava sul terrazzo apriva la porticina della custodia della pila e poscia faceva col teodolite l' osservazione dell'altezza del Sole sull'orizzonte, mentre contemporaneamente il primo faceva la terza lettura alla bussola. Ogni volta si faceva anche l' osservazione dello stato igrometrico dell'aria atmosferica, e per avere indicazioni pronte si ebbe ricorso a un igrometro a capello, la cui graduazione venne effettuata mediante confronto con un igrometro a condensazione o con un psicrometro. Trascrivo lo specchio che dà l'umidità relativa corrispondente ai gradi segnati sulla scala dell'igrometro a capello usato in queste osservazioni, avvertendo che l'indice si spingeva al di là di 100 quando l'umidità dell'aria era rilevante.

Prospetto IV.

Igrometro	umidità relativa
60°	0,361
65°	0,405
70°	0,450
75°	0,500
80°	0,550
85°	0,596
90°	0,646

Si fecero anche le osservazioni barometriche; ma vedremo in seguito che tanto queste indicazioni, quanto quelle dell' igrometro non possono esser utilizzate se non nel caso in cui si facciano osservazioni simultanee a differente altezza.

Prima di dare alcuni prospetti riassuntivi di alcune giornate di osservazione, sarà utile qualche indicazione sul modo usato nel calcolare il valore di E che rappresenta la grossezza dello strato atmosferico attraversato dai raggi del Sole.

Se la distanza zenitale Z del Sole all'ora dell'osservazione non supera i 60 gradi, si ha il valore di E con sufficiente esattezza dalla formola $E = \sec Z$. Ma quando il Sole è più basso, riesce indispensabile di calcolare E mediante una formola che

conduca a valori esatti. All'osservatorio meteorologico di Montsouris si fa uso della formola già adoperata dal Pouillet nelle sue ben note osservazioni attinometriche, ma quella formola, quando la distanza zenitale è grande, dà per E dei valori troppo piccoli. La formola di Bouguer e quella di Laplace calcolata da Forbes danno invece dei valori concordanti ed esatti [1].

Io ho dato la preferenza ai valori di E dedotti da quelle formole, e sono quelli che trovansi registrati nei seguenti prospetti riassuntivi delle fatte osservazioni.

Per avere quei valori con prontezza ho costruito una curva, le cui ascisse rappresentavano la distanza zenitale del Sole, e le ordinate il corrispondente valore di E. A tracciare la curva mi valsi dei valori contenuti nel seguente specchio che furono calcolati da Forbes colla formola di Laplace.

PROSPETTO V.

Distanza zenitale z	grossezza dell'atmosf^a^ E	Distanza zenitale z	grossezza dell'atmosf^a^ E
0 gradi	1,000	75 gradi	3,809
10 »	1,016	80 »	5,57
20 »	1.065	85 »	10,22
30 »	1,156	86 »	12,2
40 »	1,306	87 »	14,9
50 »	1,555	88 »	18,9
60 »	1,995	89 »	25,1
70 »	2,902	90 »	35,5

Fra le moltissime osservazioni fatte dall'agosto al dicembre trascriverò per esteso quelle effettuate nei due giorni 28 e 29 settembre, che nel registro di osservazione ho segnato col nome di *giornate auree,* perchè in esse il cielo si mantenne costantemente sereno, l'aria tranquilla e assai trasparente.

PROSPETTO VI.

Osservazioni sul raggiamento termico del Sole, 28 settembre 1877.

Ora	Distanza Z	Deviazioni alla bussola y	Igrometro
$8^h,30'$	64°,54′	D 188,0	89
$9^h,0$	69°,42′	» 191,0	89
$10^h.0$	53°.27′	» 202,0	86
$11^h.35'$	47°,36′	» 209.2	82
$12^h,0$	47°,34′	» 210,0	80
1^h	50°,12′	» 207,0	74
$2^h,15'$	57°,23′	» 191,0	71
$3^h.0$	63°,23′	» 184,5	68
$4^h,0$	72°,43′	» 164,0	69
$4^h,35'$	78°.36′	» 131,0	76

(1) M. R. Radau. Veggasi il *Moniteur scientifique du doct. Quesneville.* Mai 1877. pag. 528.

PROSPETTO VII.

29 settembre H = 768,0 t = 16°,5C

Ora	Distanza zenitale Z	Lettura alla bussola y	Igrometro
8,45′	63,48′	D 180,5	92,5
9,5′	60,22	» 186,5	92,5
9,35′	56,36	» 192,0	92,0
10,5′	53,21	» 197,0	91,0
10,35′	50,48	» 200,0	90,0
11,5′	49,0	» 201,0	88,5
11,35′	48,0	» 204,5	86,0
12,2′	48,0	» 205,0	82,0
1,40′	53,48	» 190,0	—
2,5′	56,36	» 189,0	74,0
3,5′	64,30	» 174,0	74.0
3,45′	70,36	» 155,0	71,0
4,30′	78,5	» 130,0	74,0
4,50′	81,24	» 109,0	74,0

Sebbene le due giornate 28 e 29 settembre sieno state assai favorevoli per questo genere di osservazioni, tuttavia si scorge che a pari distanza zenitale, cioè a pari grossezza dello strato atmosferico attraversato dai raggi, le osservazioni antimeridiane non sono appieno concordi con quelle pomeridiane. Fra le osservazioni del 29 settembre troviamo a mo' d'esempio che l'osservazione delle 9ʰ,35′ diede una deviazione di 192 divisioni, e quella delle ore 2ʰ,5′ solamente 189 divisioni, sebbene la distanza zenitale fosse in ambedue i casi di 56°,36′. Così in quelle del 28 settembre si ebbero 191 divisioni quando lo strato atmosferico corrispondeva a 9 ore antimer. a 60°,42′ di distanza zenitale, mentre a ore 2ʰ,15′ si ebbe l'identica deviazione di 191 divisioni, ma lo strato atmosferico attraversato era minore, perchè corrispondeva alla distanza zenitale di soli 57°,23′.

In generale trovai che le osservazioni antimeridiane danno deviazioni alquanto maggiori di quelle corrispondenti alle osservazioni pomeridiane, sebbene quasi sempre l'igrometro indichi nel pomeriggio un grado minore di umidità che nel mattino. Ma anzi questa coincidenza ci dà la chiave per spiegare il fenomeno.

Nelle ore antimeridiane gli strati più bassi dell'atmosfera, quelli che possono influire sull'igrometro, contengono molto vapor acqueo, mentre gli strati superiori dell'atmosfera ne contengono in minor copia. Di mano in mano che il Sole si eleva, anche questo vapore inferiore si eleva e si distribuisce nelle regioni più alte dell'atmosfera. Nel mattino gli strati superiori dell'atmosfera sono meno pregni di vapor acqueo e quindi assorbono meno calore; nel pomeriggio invece l'assorbimento diventa maggiore per l'azione preponderante del vapor acqueo diffuso negli strati superiori dell'atmosfera, sebbene gli strati inferiori sieno intanto divenuti più secchi.

Coi dati contenuti nei due precedenti prospetti si possono costruire delle curve prendendo per ascisse i valori di E (grossezza dello strato atmosferico attraversato dai raggi solari) corrispondenti alle distanze zenitali registrate nella seconda colonna, e per ordinate i valori delle deviazioni lette alla bussola. Si otterrebbero per ogni

giornata due curve che non si sovrappongono. Io ho preferito di costruire per ogni giornata una sola curva, quella cioè che si riferisce alle osservazioni pomeridiane, perchè in generale i punti offerti da quelle osservazioni si allineano bene, e riesce facile e sicuro il tracciato della curva. Credo inutile di allegare a questa Memoria le molte curve tracciate; invece mi limiterò a dare riuniti in prospetti i valori delle coordinate desunti da alcune di esse curve.

PROSPETTO VIII.

Giorno dell'osservazione	E	y	Giorno dell'osservazione	E	y
28 settem.	1,30	217 (1)	10 ottobre	2,00	191,5
»	1,40	213 (1)	»	2,30	182,5
»	1,50	210	»	2,80	170,9
»	1,60	205,3	19 ottobre	1,80	197,4
»	1,80	198,0	»	2,00	190,5
»	2,00	191,2	»	2,50	174,9
»	2,20	185,0	»	3,00	161,8
»	2,60	172,3	»	3,50	149,3
»	3,00	162,0	»	4,00	137,5
»	3,20	158,0	»	4,50	125,5
»	3,60	152,0	»	5,00	114,0
»	4,00	145,0	»	5,50	104,2
»	4,97	131,0	»	6,00	98,8
29 settem.	1,40	206,8 (2)	»	6,50	90,0
»	1,50	202,9	»	7,00	83,0
»	2,00	184,8	21 ottobre	1,80	200,9
»	2,50	169,0	»	2,40	179,8
»	2,60	166,1	»	3,00	166,6
»	3,00	160,2	»	3,60	156,1
»	3,20	153,0	»	4,20	146,1
»	3,50	145,5	»	4,80	137,2
»	4,00	138,0	»	5,40	128,3
»	4,50	132,7	1 novem.	1,80	197,3
»	4,84	130,0	»	2,00	187,5
»	5,00	128,1	»	2,50	170,2
»	5,50	123,0	»	3,00	156,0
»	6,69	109,0	»	3,50	145,0
2 ottobre	1,60	198,7	»	4,00	136,7
»	2,00	178,5	»	4,50	130,0
»	2,50	164,9	»	5,00	123,6
»	3,00	155,0	»	5,50	118,0
»	3,30	150,0	»	6,00	112,0
»	3,60	147,3	17 dicem.	2,7	180,0
3 ottobre	1,60	181,5	»	3,3	165,5
»	2,00	164,8	»	3,9	154,0
»	2,50	149,2	22 dicem.	2,7	162,3
»	3,00	135,8	(Igr.° 100)	3,3	148,0
»	3,50	125,0	»	3,9	137,6
»	4,00	117,0	»	4,5	128,8
10 ottobre	1,60	206,0	»	5,1	120,3
»	1,80	198,0	»	5,7	112,5

(1) Questi due punti sono desunti dalla curva delle esperienze prolungata alquanto al di là del primo punto di osservazione che è il terzo registrato nel Prospetto E = 1,5 y = 210.

(2) Questo punto fu desunto dalla curva prolungata al di là del primo punto di osservazione che è il secondo registrato E = 1,5, y = 202,9.

§ IX.

Valutazione dell'assorbimento termico esercitato dall'atmosfera.

Le deviazioni y osservate alla bussola sono prodotte dal fascio di raggi solari incidenti sulla faccia della pila termo-elettrica dopo aver attraversato uno strato più o meno grosso d'aria a seconda della minore o maggiore altezza del Sole sull'orizzonte. In siffatto tragitto l'effetto termico dei raggi solari riesce notevolmente affievolito per l'assorbimento esercitato dall'aria e specialmente dal vapor acqueo in essa diffuso; e volendo confrontare l'effetto del raggiamento termico del Sole con quello di corpi caldi situati a piccola distanza dalla pila (il cui raggiamento attraversando un brevissimo strato d'aria non soffre per conseguenza un indebolimento sensibile in paragone all'altro) è necessario di conoscere quanto grande sia la diminuzione dovuta a questo assorbimento, per poter calcolare l'effetto totale del raggiamento solare incidente sulla faccia della pila.

Sarebbe adunque necessario di conoscere la legge di assorbimento dei raggi solari nello attraversare l'atmosfera terrestre.

Si ammette da molti che questa legge sia espressa dalla formola

$$q = ab^E$$

dove q è la quantità di calore ricevuta nell'unità di tempo sull'unità di superficie, perpendicolarmente alla direzione dei raggi, in un punto della superficie terrestre, a e b sono costanti, ed E è un numero che rappresenta la grossezza dell'atmosfera attraversata dai raggi, prendendo per unità l'altezza dell'atmosfera stessa. Il numero a esprime la quantità di calore che nell'unità di tempo sarebbe ricevuta sull'unità di superficie normale alla direzione dei raggi al limite superiore dell'atmosfera; ed è la quantità che importa di determinare: b è il rapporto in cui viene diminuita questa quantità quando i raggi hanno attraversato normalmente l'atmosfera terrestre, e si suol chiamare coefficiente d'assorbimento.

Il sig. Violle ha procurato di tener conto dello stato igrometrico dell'aria, e fece delle osservazioni contemporanee a differenti altezze sul Monte Bianco. Trovò che il fenomeno era assai bene rappresentato dalla formola

$$y = a.p^{\frac{H + (Z - z)kf}{760}E}.$$

nella quale a, p, k sono costanti;

Z = altezza dello strato atmosferico a partire dal quale non v'è più vapore sensibile;

z = altezza del luogo d'osservazione;

f = tensione media del vapore acqueo contenuto negli strati d'aria compresi fra Z e z;

E = grossezza dello strato atmosferico attraversato (¹).

Questo è certamente il metodo migliore per esprimere e valutare la legge dell'assorbimento atmosferico: ma esso esige che si facciano delle osservazioni simultanee a differenti altezze, e non è applicabile al caso di osservazioni fatte in una determinata stazione.

(¹) Annales de Chimie et de Physique. *Mémoire sur la température du soleil* par J. Violle. Paris 1877, Vol. X, pag. 319.

Perciò dovetti appigliarmi ad altri metodi.

Tentai dapprima di applicare la formola $y = ab^E$ alle curve da me ottenute in molte giornate di osservazione, ma ho dovuto convincermi che questa semplicissima formola non basta a rappresentare il fenomeno per tutta intera una giornata. Tentai di applicare allora varie altre formole empiriche e specialmente le due forme esponenziali più complesse

$$q = ab^{\frac{E}{\gamma + E}},$$
$$q = \alpha + m\beta^E + n\gamma^E,$$

dove a, b, m, n, α, β, γ sono tutte costanti empiriche. Ma nessuna delle formole adoperate è atta a rappresentare con bastante precisione l'andamento di tutto il fenomeno.

Mi limiterò a riferire i risultamenti ottenuti colla formola $y = ab^{\frac{E}{\gamma + E}}$. Assumendo le tre coppie di valori

$$\left.\begin{array}{ll} E = 1{,}5 & y = 203{,}8 \\ E = 2{,}25 & y = 174{,}0 \\ E = 3{,}00 & y = 152{,}0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{risultò } \gamma = 7{,}06180 \\ \log b = 8{,}966537 - 10 \\ a = 309{,}27 \end{array}$$

E	y osservata	y calcolata	Differenza
1,5	203,8	—	—
1,75	192,6	192,76	0,16
2,00	182,8	182,88	0,08
2,25	174,0	—	—
2,50	166,0	165,98	— 0,02
2,75	158,9	158,71	— 0,17
3,00	152,1	—	—
4,5	132,7	134,42	+ 1,72

In questo caso la formola si presta abbastanza bene.

Applicata la stessa formola alla curva del 28 settembre, intervallo E = 1,4 E = 2,6 diede il valore

$$a = 292{,}25.$$

Applicata a quella del 1 novembre, intervallo E = 2,0 E = 3,2 diede

$$a = 333{,}34$$

10 ottobre $a = 339{,}95$.

Da altre curve si ebbero risultati tanto più piccoli quanto maggiore era l'intervallo assunto per calcolare le costanti della formola.

21 ottobre, intervallo E = 1,8 ed E = 10

$$a = 260{,}9$$

» » E = 1,8, E = 6

$$a = 272{,}2.$$

Ma tra i valori calcolati e i valori osservati si riscontrano delle differenze troppo grandi come ne dà prova il seguente specchio

E	y osservata	y calcolata	Differenza
1,8	200,9	—	—
2,4	179,8	183,97	+ 4,17
3,0	166,6	169,41	+ 2,81
3,6	156,1	156,79	+ 0,61
3,9	151,1	—	—
4,2	146,1	145,7	— 0,32
4,8	137,2	136,1	— 1,1
5,4	128,3	127,58	— 0,72
6,0	120,0	—	—

Le differenze troppo grandi in più che presentano i valori calcolati in prossimità di $E = 1,8$ provano che il valore di a calcolato, che corrisponde ad $E = 0$, deve riuscire notevolmente minore del vero.

Ho dovuto quindi rinunziare alla speranza di servirmi d'una sola formola empirica e adattarmi a dividere ogni curva in varie porzioni, ed applicare ad ognuna di queste porzioni un'equazione della forma

$$y = ab^E,$$

determinando nei singoli casi i valori delle costanti a e b. Naturalmente si ottiene così, per ogni giornata di osservazione, una serie di valori differenti di a ed un'altra serie di valori di b. Credo opportuno di qui compendiare in un prospetto i risultati ottenuti applicando questo metodo di calcolo ad alcune giornate di osservazione.

Prospetto IX.

Giorno dell' osservazione	per E compreso fra	Valori ottenuti dalla formola		Valore medio di E
		a	b	
28 settembre .	1,4 e 2,0	273,68	0,83533	1,7
	2,0 » 2,6	270,49	0,84080	2,3
	2,6 » 3,2	250,79	0,86557	2,9
	3,2 » 5,0	221,71	0,89954	4,1
29 settembre .	1,4 » 2,0	272,3	0,82173	1,7
	2,0 » 2,6	263,75	0,8371	2,3
	2,6 » 3,2	237,17	0,8721	2,9
	3,2 » 4,4	210,24	0,9054	3,8
	4,4 » 7,0	196,33	0,909	5,7
3 ottobre . .	1,5 » 2,1	271,96	0,77931	1,8
	2,1 » 2,7	240,92	0,8256	2,4
	2,7 » 3,3	234,20	0,8342	3,0
	3,3 » 3,9	206,55	0,8667	3,6
21 ottobre . .	1,8 » 2,4	280,25	0,8312	2,1
	2,4 » 3,0	243,9	0,8807	2,7
	3,0 » 3,6	230,7	0,8972	3,3
	3,6 » 4,2	232,2	0,8955	3,9
	4,2 » 4,8	226,8	0,900	4,5
	4,8 » 5,4	234,6	0,894	5,1

14 ottobre . .	1,7 » 2,3	251,20	0,8212	2,0
	2,3 » 2,9	233,08	0,8484	2,6
	2,9 » 3,5	217,49	0,8689	3,2
	3,5 » 7,74	222,25	0,8635	5,6
17 dicembre . .	2,7 » 3,3	262,7	0,869	3,0
	3,3 » 3,9	245,9	0,887	3,6
22 dicembre .	2,7 » 3,3	245,8	0,8575	3,0
	3,3 » 3,9	220,9	0,8856	3,6
	3,9 » 4,5	212,7	0,8943	4,2
	4,5 » 5,1	213,2	0,8938	4,8
	5,1 » 5,7	212,7	0,8943	5,4

Facciamo ora qualche considerazione sui valori ottenuti per b e per a. I valori di b in ogni giornata di osservazione vanno aumentando col crescere della grossezza E dello strato atmosferico, e in differenti giornate per un medesimo valore di E si hanno valori differenti per b. Questi due fatti erano già stati notati da altri osservatori, ma qui riescono evidentissimi. — Come si disse b rappresenta il rapporto fra la quantità di raggi solari che perverrebbero sulla faccia della pila nel luogo dell'osservazione dopo aver attraversato normalmente la grossezza $E=1$ dell'atmosfera, e la quantità di raggi che essa riceverebbe se l'atmosfera non esistesse, cioè se fosse $E=0$. È naturale che essendo diverso lo stato igrometrico dell'aria nelle differenti giornate, anche i valori di b ottenuti dalla formola per un medesimo valore di E abbiano a riuscire differenti.

Che il valore di b in tutte le giornate vada crescendo coll'aumentare di E è un fatto conforme alle leggi dell'assorbimento. Infatti l'assorbimento dei raggi che attraversano corpi trasparenti ha luogo in proporzione maggiore nei primi strati, poi negli strati successivi esso diventa minore.

Le osservazioni dei giorni 29 settembre, 24 ottobre, 21 ottobre, 22 dicembre dimostrano che al di là di una certa grossezza di E il coefficiente d'assorbimento b diventa costante.

Consideriamo ora i valori di a. Nessuno di quei valori rappresenta nelle unità assunte per la costruzione della curva la quantità vera di calore che verrebbe ricevuta sull'unità di superficie al limite dell'atmosfera. Si vede però che al diminuire della grossezza E il valore di a cresce, ed è evidente che se si avesse potuto fare delle osservazioni con grossezze di E ancora minori, si avrebbe ottenuto per a dei valori più elevati. Se si costruiscono graficamente i valori di a prendendo per ascisse la media aritmetica fra i due valori di E (media che trovasi registrata nell'ultima colonna del precedente prospetto) che servirono al calcolo di ciascun valore di a, e per ordinate i singoli valori di a, si trova che i varî punti così ottenuti si schierano presso a poco in una linea retta. Questa regolarità nella distribuzione dei valori di a è tanto meno imperfetta quanto più le condizioni atmosferiche della giornata, in cui si fecero le osservazioni, furono buone.

Io quindi, in mancanza di un metodo più rigoroso, mi credetti autorizzato a prendere quale valore vero della quantità di calore che cade sull'unità di superficie,

nell'unità di tempo al limite superiore dell'atmosfera, l'intercetta fra l'origine e il punto di tragitto della retta testè considerata per l'asse delle y. Per ottenere maggiore precisione, anzichè limitarmi a una semplice costruzione grafica, ho determinato col metodo de' minimi quadrati quale fosse l'equazione

$$a = m + n\,E$$

della retta che meno di ogni altra si discosta nei singoli casi dai punti rappresentanti i valori di a in corrispondenza delle varie grossezze medie E, ed ho assunto come valore della quantità cercata il numero m. Questo calcolo fu fatto per varie curve ottenute in condizioni molto differenti, e diede per m dei risultati, che, quando si consideri la moltiplicità delle cause che necessariamente turbano le osservazioni di questo genere, sono abbastanza concordi fra loro.

Ecco i risultati ottenuti per le giornate di osservazione indicate nel precedente prospetto.

28 settembre	$a = 317,17$
29 »	$a = 328,66$
3 ottobre	$a = 329,72$
14 »	$a = 306,96$
21 »	$a = 298,96$
17 dicembre	$a = 346,70$
22 »	$a = 354,45$
Valor medio di	$a = 326,08$

I calcoli fatti per altre quattro giornate diedero per valor medio $a = 318,7$. Media delle 11 giornate $a = 323,4$ div.

Perchè si possa apprezzare giustamente il grado di precisione raggiunto con questa determinazione, basterà ch'io dica che essendo a rappresentato in divisioni lette alla bussola quando nel circuito erano introdotte 16 unità Siemens di resistenza, una divisione corrisponde a circa un decimo di grado, sicchè il massimo divario fra i valori di a, che più si discostano e la media non supera i 3 gradi.

Ho voluto indagare quale sarebbe il valore che dovrebbe assumere b nei singoli casi, affinchè risultasse per a il valore ora determinato. Trovai che se al valore di b calcolato coi dati di due osservazioni si toglie la quantità 0,08, si ottiene un nuovo valore $b_1 = b - 0,08$, che dà per a dei valori soddisfacenti. Così se coi dati desunti dalle curve di osservazione (Prospetto VIII) si calcola il valore di a col mezzo della solita formola $y = a b_1^E$ attribuendo a b_1 i valori trovati per b (Prospetto IX) diminuiti della quantità 0,08, si hanno valori che si discostano assai poco dalla media trovata $a = 323,4$, come ne dà prova il seguente specchio, nel quale i valori di y ed E sono tolti dal prospetto VIII, il valore di b dal prospetto IX e si fece $b_1 = b - 0,08$.

28 settembre

E	y	b	b_1	$a = \frac{b_1}{y^E}$
1,4	213,0	0,835	0,755	315,68
2,0	191,2	0,840	0,76	331,03
2,6	172,3	0,865	0,785	323,23
3,2	158,0	0,900	0,82	298,16

		29 settembre		
1,4	206,8	0,822	0,742	314,04
2,0	184,8	0,837	0,757	322,49
2,6	166,1	0,872	0,792	304,57
3,2	153,0	0,905	0,825	283,16
4,4	132,7	0,909	0,829	308,59
		21 ottobre		
1,8	200,9	0,831	0,751	328,46
2,4	179,8	0,881	0,801	306,25
3,0	166,6	0,897	0,867	305,49
3,6	156,1	0,897	0,816	323,15
4,2	146,1	0,896	0,820	343,21
4,8	137,2	0,900	0,814	355,67

Si può dare anche un'altra prova alla regola ora accennata. Se dalle varie curve delle osservazioni si desumono i valori di y corrispondenti a un medesimo valore di E si hanno, com'è da prevedere, numeri differenti. — Per es. per $E = 2,7$ si ha

28 settembre	174,0
29 »	163,3
30 »	164,0
2 ottobre	160,0
18 »	175,0
19 »	169,0
21 »	172,2
10 »	172,4
1 novembre	164,0
10 dicembre	168,0
17 »	180,0
22 »	162,2

Il medio aritmetico di quei valori corrisponde a

$$y = 168,7$$

e se si cerca il medio valore di b corrispondente a $E = 2,7$ si trova essere

$$b = 0,86.$$

Facendo ora $b_1 = 0,86 - 0,08 = 0,78$ e sostituendo questi valori di y, b_1 ed E nella formola $y = ab_1^E$, si ricava

$$a = 330$$

valore assai prossimo al medio 323,4.

Se in luogo di $b_1 = 0,78$ si avessero assunti i due valori 0,75 e 0,80 si avrebbe ottenuto rispettivamente per a i due valori

308 e 367,

il che prova che basta una piccola differenza nel valore del coefficiente d'assorbimento b, perchè risultino valori molto diversi per a: e prova altresì che il metodo seguìto per stabilire il valor medio di a è assai opportuno, essendo che i valori estremi che hanno fornito quel valor medio si discostavano da questo di una quantità minore di quella che risulta col variare di due o tre centesimi il coefficiente di assorbimento.

Possiamo adunque accettare con molta fiducia questo valore

$$a = 323$$

per rappresentare la così detta *costante solare* espressa in divisioni della scala della bussola da me adoperata, con 16 unità Siemens di resistenza introdotte nel circuito, oltre quella offerta dalla pila termo-elettrica n. 1, dai reofori, e dal filo della bussola.

Rimane ora da determinare a che cosa corrisponda questo valore di a, per poter fare il confronto fra l'effetto termico prodotto dal raggiamento solare, e quello ottenuto col raggiamento delle sorgenti calorifiche sottoposte all'esperienza, e poter in fine stabilire quale sia la temperatura effettiva del Sole.

§ X.

Determinazione della temperatura effettiva del Sole.

Abbiamo veduto che la costante solare, cioè l'effetto termico che produrrebbe il raggiamento solare incidendo normalmente sulla faccia affumicata della pila n. 1, qualora l'atmosfera terrestre non esistesse, o, ciò che torna lo stesso, ove la pila termo-elettrica si trovasse al limite superiore dell'atmosfera è espresso da $a = 323$ divisioni. Le osservazioni del raggiamento solare furono fatte con 16 unità Siemens di resistenza introdotte nel circuito, mentre le esperienze sul raggiamento di sorgenti termiche artificiali, le quali hanno servito a stabilire la formola che rappresenta la legge del raggiamento, ed anche quelle, col mezzo delle quali venne verificata l'applicabilità della formola stessa al raggiamento di corpi aventi temperature molto elevate, furono fatte senza che nel circuito ci fosse altra resistenza all'infuori di quella offerta dalla pila termo-elettrica, dal filo della bussola e dai reofori.

Per poter fare i necessarî confronti fra le une e le altre esperienze, e per poter applicare la formola al raggiamento solare, è necessario di convertire il valore di $a = 323$ risultante dalle osservazioni solari nel valore y che lo stesso raggiamento solare avrebbe prodotto se fossero state tolte le 16 unità Siemens di resistenza. A tal uopo importa di conoscere il valore della resistenza offerta dalla pila n. 1, dai reofori, e dal filo della bussola. Vennero fatte molte ed accurate esperienze per determinare complessivamente e separatamente quelle tre resistenze. Credo inutile di qui riferirle, e solo dirò i risultati.

Dodici esperienze diedero quale medio valore della resistenza complessiva il numero

$$3,408;$$

i valori che più si discostano dal medio erane i due

$$3,374 \text{ e } 3,496.$$

Altre nove esperienze diedero per valore medio

$$3,411.$$

Io adottai quindi il numero

$$R = 3,41$$

per esprimere quella resistenza complessiva, la quale era così ripartita:

filo della bussola	$r = 1,522,$
reofori	$r_1 = 0,552,$
pila n. 1	$r_2 = 1,336.$

Ora è facile il calcolare il valore di y, che riesce eguale a

$$y = \frac{19,41}{3,41} a = 5,6921 . a ,$$

e ritenuto $a = 323$

$$y = 1838,5 \text{ divisioni.}$$

Si suol chiamare *temperatura effettiva* del Sole quella che dovrebbe avere un corpo incandescente di pari grandezza e situato alla stessa distanza del Sole per produrre il medesimo effetto termico y, qualora esso fosse dotato del medesimo poter emissivo, quando cioè fosse per esso $E = 1$.

In questo caso è applicabile senz'altro la formola

$$y = m\,T^2 (T - \Theta) - n (T - \Theta),$$

e ritenuto che le osservazioni sieno state fatte mentre la temperatura dell'ambiente era 24°, per cui $\Theta = 297$, si ottiene da essa il valore

$$T = 10238°,4,$$

e quindi la temperatura effettiva del Sole espressa in gradi della scala centigrada riesce eguale a

$$t = 9965°,4,$$

che rappresenta la temperatura effettiva del Sole, desunta dal raggiamento termico di quell'astro, tenendo il dovuto conto dell'assorbimento esercitato dall'atmosfera terrestre. Che se si avesse voluto trascurare la correzione richiesta da codesto assorbimento, allora si dedurrebbe dalla solita formola una temperatura minore. Infatti nelle osservazioni fatte dal settembre in poi, il massimo effetto lo si ebbe all'ora del mezzogiorno del dì 28 settembre e corrisponde a 210,0 divisioni che danno per y il valore

$$y = 5,6921 \times 210 = 1195,4.$$

Introdotto questo valore nella solita formola si ottiene

$$T = 8883,8,$$
$$\text{e} \quad t = 8610,8.$$

Il risultamento da me ottenuto abbisogna tuttavia di una modificazione quando si voglia tener conto, oltre che dell'assorbimento esercitato dall'atmosfera terrestre anche di quello dovuto all'atmosfera che circonda il Sole. Giusta le esperienze del Secchi l'atmosfera solare esercita un potente assorbimento sui raggi provenienti dalla fotosfera; in virtù di esso solamente 12 centesime parti del raggiamento del Sole potrebbero oltrepassare i limiti dell'atmosfera solare, mentre 88 centesime parti verrebbero da questa assorbite. Ritenendo esatto questo valore offerto dal Secchi, si può calcolare l'effetto termico che produrrebbe il Sole quando fosse privo dell'atmosfera che lo circonda. Esso sarebbe eguale a

$$y = 1838,5 \times \frac{100}{12} = 15320,8;$$

dalla formola si ottiene

$$T = 20653,7,$$
$$\text{e quindi} \quad t = 20380,7.$$

Ci sono ancora due cause che possono alquanto modificare questi risultamenti, ma non al certo di molto, poichè gli effetti di esse sono contrarî e possono compensarsi.

Una di queste cause è il valore del poter emissivo specifico del Sole: può darsi ch'esso sia minore dell'unità, e in tal caso la temperatura *reale* del Sole sarebbe più elevata.

L'altra causa è la trasparenza dei varî strati dell'atmosfera solare: sebbene questa trasparenza sia piccola, pure è certo che noi riceviamo i raggi dei varî strati sovrapposti, e quantunque la loro temperatura sia al certo inferiore a quella della fotosfera sottoposta, pure al raggiamento di essa si aggiunge anche una parte del raggiamento di questi strati, sicchè in tal caso basta una temperatura più bassa del Sole per produrre il riscaldamento misurato coi nostri strumenti.

Laonde parmi di poter conchiudere che la *vera temperatura* del Sole non debba esser gran fatto diversa da quella che venne chiamata *temperatura effettiva* di quell'astro, e questa non debba esser inferiore di molto ai *dieci mila gradi*, ove si tenga conto solamente dell'assorbimento esercitato dall'atmosfera terrestre; nè di molto superare i *venti mila gradi* quando si voglia eziandio aver riguardo all'assorbimento prodotto dall'atmosfera solare, e questo corrisponda a $\frac{88}{100}$ del raggiamento totale(¹).

(¹) Mi torna cosa gradita il dichiarare che in queste indagini mi fu di non lieve giovamento la intelligente cooperazione degli egregi miei assistenti d.r M. Bellati e d.r G. De Lucchi, e che, ogni qual volta occorse, ebbe la cortesia di prestarsi anche il chiarissimo collega prof. A. Naccari.

Fig. 2ª

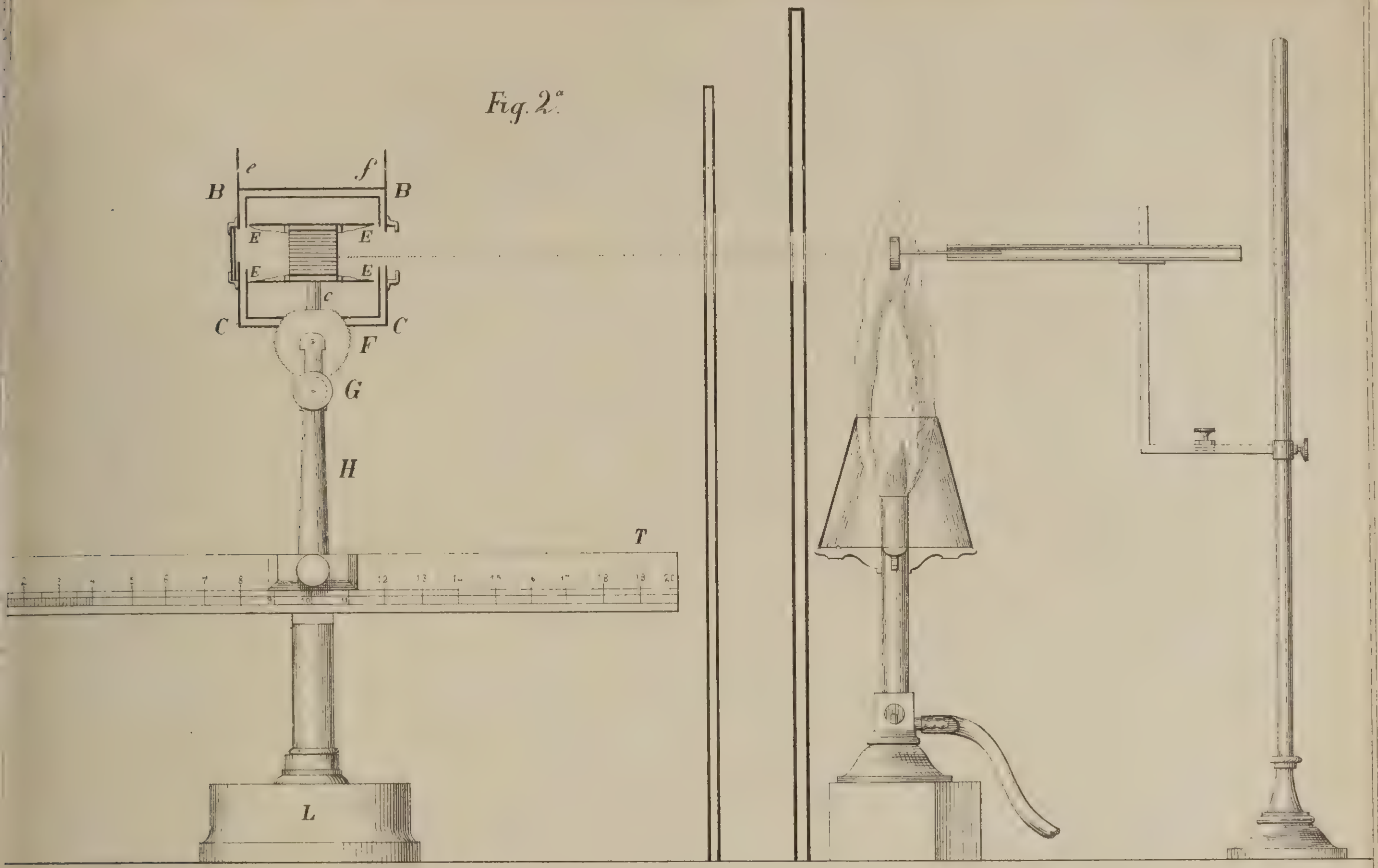


Fig. 3ª

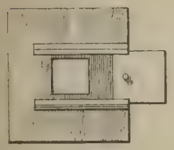


Fig. 1ª

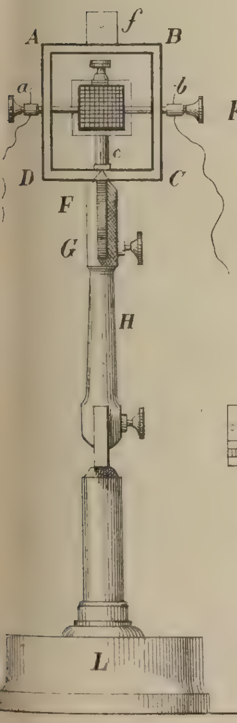
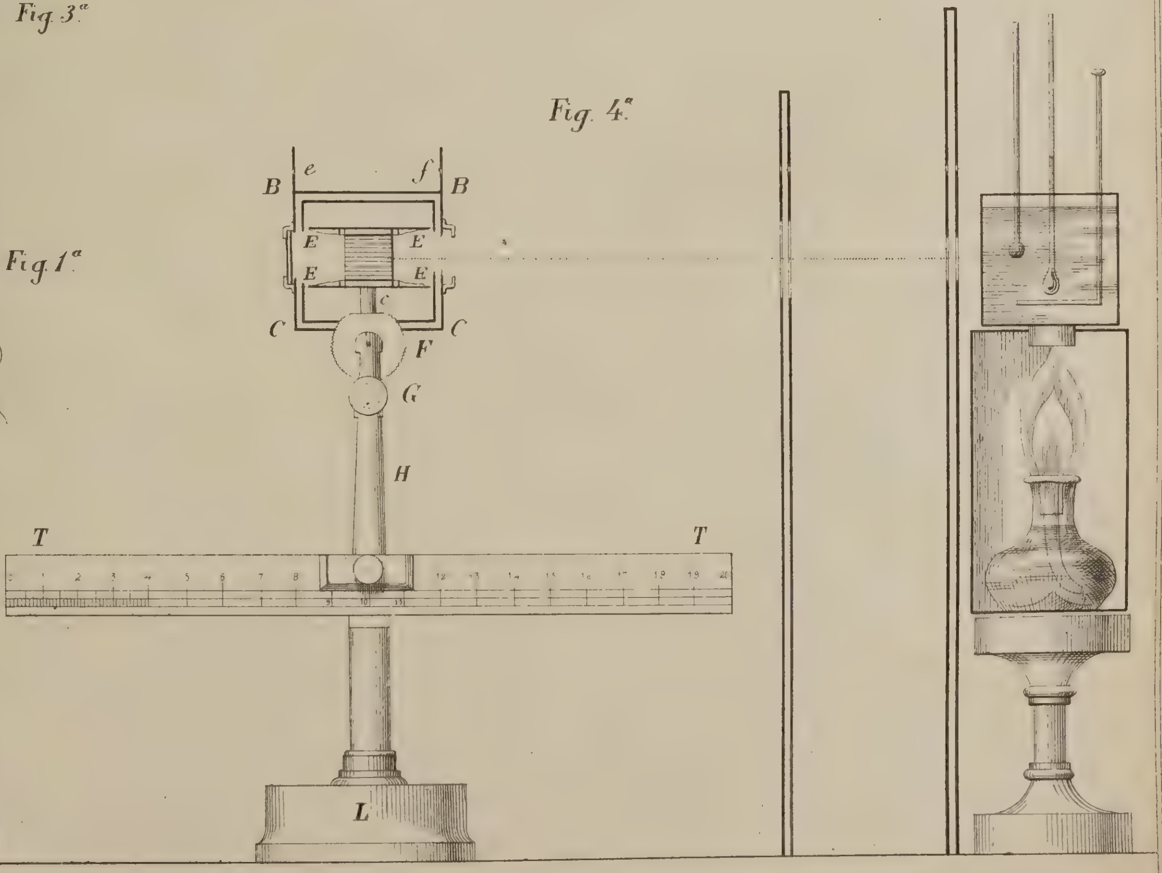


Fig. 4ª



LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

La determinazione grafica delle forze interne nelle travi reticolari.

Memoria dell'ing. prof. G. B. FAVERO,

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 3 marzo 1878.

INTRODUZIONE

Fra i problemi di cui la Statica Grafica si occupa, quello di determinare le forze interne nelle travi, è per avventura il più importante, atteso il grande uso che nelle costruzioni si fa di travi reticolari ed omogenee.

Le espressioni analitiche di quelle forze sono spesso complicate, ed il loro calcolo numerico esige in generale un tempo notevolmente più lungo, di quello che occorre per una determinazione grafica. Questa è perciò preferibile in tutti quei casi nei quali l'esattezza, che si può ottenere col graficismo, sia sufficiente per il caso che si tratta: e ciò avviene quasi sempre in pratica. L'uso dei metodi grafici ha cominciato quindi ad estendersi fra i costruttori, specialmente dopochè robusti ingegni, anche esclusivamente cultori delle matematiche pure, si sono occupati di migliorare ed estendere i metodi stessi.

Se si considerano nel loro insieme i metodi grafici sviluppati principalmente da Culmann, Fleeming Jenkin, Cremona, per giungere alla determinazione delle forze interne nelle travi reticolari, si trova che il poligono delle forze, il poligono funicolare e le figure reciproche sono per così dire i cardini intorno ai quali tutti i procedimenti si aggirano.

Del poligono delle forze e del poligono funicolare si serve il prof. Culmann tanto per trovare le reazioni sugli appoggi, quanto per giungere a determinare lo sforzo in ogni asta del sistema reticolare. Le proprietà statiche delle figure reciproche, già riconosciute del prof. Clerk Maxwell, condussero ai metodi proposti dal prof. Fleeming Jenkin; ed il nuovo modo di ottenere le figure reciproche, proposto dal prof. Cremona, lo condusse a quegli eleganti diagrammi, che gli sono dovuti, e dei quali difficilmente si può immaginare alcun che di più pronto; semprechè, per un dato sistema di forze esterne, siano già trovate le reazioni sugli appoggi, e si vogliano determinare gli sforzi in *tutte* le aste di una trave.

Se si ricerca ora quale sia l'idea dominante, che servì quasi di guida in tutti gli studî ora accennati, si riconosce facilmente che l'intendimento comune a cui mirarono tutte le ricerche, si fu costantemente la conoscenza dell'intensità delle

forze interne della trave, dovute ad un dato sistema fisso di forze esterne. Si trattò dunque sempre della valutazione d' una *grandezza* incognita, dovuta a cause determinate ed invariabili, o considerate come tali.

Ma la questione presenta anche un altro lato. Si può cioè proporsi di determinare non l' *intensità* (la *grandezza*) delle forze interne, come effetto di forze esterne determinate; ma di determinare la *legge di variazione* delle forze interne stesse, come conseguenza di forze esterne, supposte variabili. Tale legge di variazione delle forze interne può, come è chiaro, studiarsi anche prescindendo dalla loro intensità effettiva; poichè per lo studio della legge di variazione bastano i rapporti fra i successivi valori assunti dalle forze interne, divenute variabili.

Ora siccome le forze esterne possono variare di numero, di intensità, di posizione e di senso, così lo studio delle leggi secondo cui variano le forze interne, si presenta a primo aspetto come un campo vastissimo di ricerche. Siccome però, come in seguito si esporrà, la relazione fondamentale fra le forze esterne e le interne è assai semplice, così un tal campo viene sensibilmente a restringersi, e lo studio delle leggi di variazione resta da tale circostanza molto facilitato. E ciò tanto più quando si abbiano in mira i casi della pratica, per i quali i modi di variare delle forze esterne sono limitati e semplici, e tali quindi riescono pure le leggi di variazione delle forze interne, che ne sono la conseguenza.

Lo studio delle leggi con cui variano le forze interne delle travi, nella supposizione di forze esterne variabili, si presta direttamente alla ricerca dei valori massimi e minimi, a cui possono giungere quelle forze interne. La ricerca invece delle intensità di queste forze, quali esse risultano da un sistema determinato, invariabile, di forze esterne, esclude di natura sua le questioni di massimo e di minimo; le quali sono sempre basate sul confronto fra loro di un numero infinito di grandezze o rapporti di grandezze; e tale confronto riesce sempre malagevole, senza la conoscenza della legge, da cui quelle grandezze o quei rapporti sono collegati. Infatti, finchè la ricerca si limita alla determinazione delle intensità delle forze interne, quale effetto di un sistema determinato, invariabile, di forze esterne, si potrà bensì decidere del massimo e del minimo valore fra un numero finito di casi, che isolatamente si siano considerati, ma non fra l'infinito numero di casi possibili. A meno che non riesca in qualche caso speciale, d'intravvedere qual sarebbe il risultato dell'esame per tutti i nuovi casi che si potrebbero considerare.

Ma sebbene lo studio delle leggi con cui variano le forze interne, si presti più propriamente alla ricerca dei massimi e minimi valori di quelle forze, tale studio può essere utilizzato altresì alla determinazione delle intensità effettive delle forze interne, quale conseguenza di un sistema determinato, invariabile, di forze esterne. Questo studio si presta cioè anche alla soluzione di quel problema, che fu l'oggetto principale delle ricerche finora fatte su questo argomento. È chiaro infatti, che la conoscenza della legge di variazione delle forze interne, conduce a conoscere l'intensità di queste forze per uno qualunque degl'infiniti sistemi di valori assunti dalle forze esterne, supposte variabili. Ora quando sia dato un sistema determinato di forze esterne, nulla vieta di considerarlo come uno fra gli infiniti sistemi di valori, che può essere assunto da un sistema variabile di forze esterne. Si potrà anzi supporre

a beneplacito un sistema variabile di forze esterne, e pure a beneplacito supporre la legge della loro variabilità; purchè questo arbitrio della scelta si assoggetti alla sola condizione, che fra gl' infiniti valori assunti dal sistema variabile di forze, sia compreso anche il dato sistema di forze esterne.

La conoscenza delle leggi con cui variano le forze interne d'una trave, abbraccia quindi un numero maggiore di problemi, poichè essa serve non solo a trovare i valori massimi e minimi assunti da quelle forze, ma può essere utilizzata eziandio alla determinazione quantitativa delle forze interne per un determinato sistema invariabile di forze esterne.

Anche le reazioni sugli appoggi si possono considerare dal medesimo punto di vista. Anzichè cioè ricercare quale ne sia il valore per un determinato sistema di forze esterne, si può domandare quale sia la legge, con cui quelle reazioni variano, nel caso che il sistema di forze esterne sia supposto variabile. E la conoscenza di una tal legge può essere poi applicata, analogamente a quanto sopra si disse per le forze interne, sia alla ricerca dei valori massimi e minimi delle reazioni stesse, sia anche alla determinazione dell' intensità di tali reazioni per un determinato sistema di forze esterne.

Ma seppure questo nuovo modo di trattare la questione potesse essere interessante dal lato teorico, esso perderebbe però per la pratica ogni valore, qualora i procedimenti grafici, che ne fossero la conseguenza, fossero lunghi e complessi; e non potessero per alcun modo misurarsi con quelli oggi noti e diffusi. Ma, come si vedrà nel seguito di questa Memoria, la cosa non è così. Per molti problemi anzi, il metodo grafico qui proposto è più rapido e più pronto degli altri metodi conosciuti; mentre poi per tutte le questioni di massimo e di minimo, per le quali non è possibile il confronto coi soliti metodi grafici, esso è abbastanza breve, da potersene consigliare l' applicazione in quei casi della pratica, nei quali la ricerca del massimo e del minimo è di speciale importanza.

Il metodo è applicabile non solo alla determinazione degli sforzi sopportati dai singoli membri delle travi reticolari; ma anche, come si mostrerà in una Memoria ulteriore, alla determinazione degli sforzi di taglio e dei momenti nelle travi omogenee.

La causa principale che le costruzioni dedotte del metodo qui proposto riescono semplici, sta nel fatto che la legge con cui in pratica variano le forze esterne è semplicissima, e che semplicissima riesce pure la legge con cui variano le forze interne. Perciò anche nei casi, nei quali si tratta di determinare l' intensità delle forze interne corrispondenti ad un dato sistema di forze esterne, e nei quali dunque, come sopra si disse, è arbitraria la legge di variazione, che si può assumere per quest' ultime, riesce conveniente di assumere quello stesso modo di variazione che ha luogo comunemente in pratica, e dal quale si ottengono facili e brevi costruzioni.

La presente Memoria ha per iscopo di far conoscere qualcuno dei procedimenti grafici, dedotti dal nuovo metodo, per mostrarne l'applicabilità ad alcune forme di travi reticolari. Egli è perciò che si sono limitate al puro necessario le considerazioni d'ordine teorico. Si è fatta invece più ampia parte alle applicazioni, cimentando il nuovo metodo rispetto a diversi casi della pratica.

Si è pure creduto di far precedere alle considerazioni meccaniche ed alle applicazioni una breve considerazione intorno ai tipi geometrici delle travi reticolate, la quale ha lo scopo anzitutto di far vedere come tutti i sistemi di travi reticolate generalmente usati, possano derivarsi da un unico concetto fondamentale; e poscia di far conoscere come le proprietà meccaniche su cui riposa il nuovo metodo, siano comuni a tutti i tipi di travi reticolate.

I. Tipi geometrici di sistemi rigidi nel piano.

1. Siano P e Q (fig. 1) due curve piane, collocate nel piano degli assi OX, OY, ai quali s' intendano riferite; e sia M un corpo qualunque rigido. Si prendano nel corpo due punti A e B, e per essi si faccia passare un piano π, che s' intenderà fisso al corpo. Si faccia ora muovere il corpo in modo, che il piano π coincida costantemente col piano degli assi, e che inoltre i due punti A e B restino rispettivamente nelle curve P e Q.

Egli è chiaro che in generale il corpo potrà prendere in tali condizioni un infinito numero di posizioni diverse rispetto agli assi. Fatto coincidere infatti uno dei due punti presi nel corpo (per es. A) con un punto della rispettiva curva (P), preso ad arbitrio, non vi sarà in generale che un numero finito di posizioni del corpo M, per le quali l'altro punto si trovi sull' altra curva. Ma la prima coincidenza si può fare in un numero infinito di modi: il numero totale delle posizioni sarà dunque infinito.

Diremo per brevità *mobilità* questa proprietà del corpo di poter prendere diverse posizioni; e quando la mobilità sia ristretta dalle condizioni sopra accennate, la indicheremo colla notazione (1).

2. Se si sopprime una delle curve, per es. la Q, e si assoggetta il corpo M alle sole due condizioni, che il piano π coincida col piano degli assi, e che il punto A si trovi sulla curva P, la mobilità del corpo diventa infinitamente maggiore. Preso infatti sulla curva P un punto ad arbitrio, e fattovi coincidere il punto A, il corpo potrà prendere ancora infinite posizioni, che si otterrebbero facendolo rotare intorno ad un asse passante per A, e normale al piano degli assi OX, OY.

Analogamente alla notazione superiore, indicheremo in questo caso con (2) la mobilità del corpo M rispetto agli assi.

Se si sopprime anche la curva P, e si assoggetta il corpo unicamente alla condizione che il piano π coincida con quello degli assi, allora con una considerazione simile alle precedenti si arriva a conchiudere che, in questo caso, la mobilità del corpo M rispetto agli assi dovrà analogamente essere segnata con (3).

3. Resterebbe ora da sopprimere anche l' ultima condizione, quella cioè che il piano π coincida col piano degli assi; ma ciò condurrebbe a considerare la mobilità del corpo nello spazio, mentre per lo scopo di questa Memoria basta considerarne la mobilità nel piano. Nelle seguenti ricerche adunque, parlando della mobilità rispettiva dei corpi s' intenderà sempre che essa avvenga nel piano, ossia in altre parole, che ognuno dei corpi considerati abbia un piano fisso, obbligato a coincidere costantemente con un piano comune.

4. Se i due punti A e B coincidono, non si potrà soddisfare alla condizione che essi trovinsi rispettivamente sulle due curve P e Q, se non nel caso che queste abbiano uno o più punti comuni. Scelto allora uno di questi punti comuni, e collocativi i due punti coincidenti A e B, il corpo M potrà rotare intorno all'asse passante per il punto scelto, e normale al piano degli assi OX, OY; e potrà prendere quindi infinite posizioni rispetto agli assi. La sua mobilità sarà dunque anche in questo caso notata con (1), come nel caso che i due punti A e B siano distinti.

Per lo scopo di questa Memoria non occorre entrare nella discussione di altri casi particolari. Tale sarebbe per es. quello, in cui la curva P avesse dei punti, coi quali facendo coincidere il punto A del corpo, non vi fosse più alcuna posizione, per la quale il punto B si potesse trovare sulla Q; o quello in cui la distanza fra due punti qualunque, presi rispettivamente sulle due curve P e Q, fosse sempre maggiore della distanza A B fra i due punti presi nel corpo; ecc.

5. Se le curve sono tre P, Q ed R (fig. 2), e tre pure i punti A, B, C, presi nel corpo M, per i quali passi il piano π; e si voglia che i tre punti si trovino rispettivamente sulle tre curve, allora non vi sarà in generale che un numero finito di posizioni del corpo M rispetto agli assi, che soddisfi alle poste condizioni. Si dirà in questo caso che il corpo è *fisso* rispetto agli assi, e la sua mobilità dovrà indicarsi colla notazione (0).

6. Si considerino ora due corpi M ed N (fig. 3), ambedue rigidi, e si supponga che due curve P e Q siano invariabilmente connesse col corpo M, supposto fisso nel piano. Si prendano nel secondo corpo due punti A e B, e si assoggettino alla condizione di trovarsi rispettivamente sulle due curve P e Q. Un ragionamento affatto simile a quello fatto sopra, ci condurrà a conchiudere che in questo caso la mobilità del corpo N rispetto al corpo M sarà quella caratterizzata dalla notazione (1). Similmente, se si sopprime una delle curve, per es. la Q, la mobilità di N rispetto ad M sarà espressa dalla nota (2); se si sopprime anche la curva P la mobilità prenderà la nota (3). Che se si suppone, che le curve siano tre P, Q ed R, e tre i punti A, B e C, presi nel corpo N, ed obbligati a stare nelle tre curve, allora questo corpo resterà fisso rispetto ad M, e la sua mobilità sarà quindi notata con (0). In questo caso adunque i due corpi costituiscono un *sistema rigido.*

Ora si osservi, che qualora si supponga fisso nel piano il corpo N, invece del corpo M, e mobile invece quest'ultimo; restando però le curve P, Q ed R fisse pur sempre al corpo M e mobili quindi con esso, si troverà facilmente, che la mobilità di M rispetto ad N è espressa ancora da (0), (1), (2), (3); secondochè si considerano tre curve, o due od una, oppure si sopprimono totalmente. Generalizzando quindi alcun poco l'idea, si potrà dire che la mobilità rispettiva di due corpi può notarsi con (0), (1), (2) o (3), secondochè l'uno di essi sia obbligato ad avere tre punti sopra tre curve fissate all'altro corpo, o due punti sopra due curve, od un punto sopra una curva, o finalmente i due corpi siano affatto indipendenti l'uno dall'altro.

7. Si considerino ora due corpi M ed N (fig. 4), e si supponga che una curva P sia invariabilmente connessa col corpo M, ed una seconda curva Q invariabilmente connessa col corpo N. Si facciano muovere i due corpi uno rispetto all'altro, in modo però che il punto A, appartenente al corpo N, si trovi costantemente sulla curva P,

ed il punto B, appartenente al corpo M, costantemente sulla curva Q. Anche in questo caso si vedrà facilmente, che preso ad arbitrio un punto della P e fattovi coincidere il punto A, non vi sarà in generale che un numero finito di posizioni del corpo N, tali che il punto B trovisi nella curva Q, posizioni che si otterranno, tenendo fermo il corpo M, e facendo rotare il corpo N intorno ad asse passante per A, normale al piano della figura. La mobilità adunque rispettiva dei due corpi dovrà notarsi con (1).

Che se le curve siano tre, e due di queste siano invariabilmente connesse col corpo M, mentre la terza sia invariabilmente connessa col corpo N; e si ponga la condizione, che due punti dati del corpo N si trovino rispettivamente sulle due curve connesse al corpo M, ed un punto dato di quest' ultimo si trovi sulla curva connessa col corpo N; si troverà facilmente che in questo caso i due corpi sono fissi rispettivamente; cioè la loro mobilità rispettiva dovrà notarsi con (0).

8. Se dunque per brevità di linguaggio si chiami *legame* la condizione, per la quale un punto dato di un corpo debba trovarsi sopra una curva data, invariabilmente connessa ad un altro corpo, si potranno riassumere le superiori considerazioni nella proposizione seguente:

« Se fra due corpi si stabiliscono l legami, la loro mobilità rispettiva sarà espressa da $(3-l)$; dove $l=0, 1, 2, 3$ ».

Quando $l=3$, i due corpi costituiscono un sistema rigido. Se si prendesse $l=p$, dove p sia intero positivo e >3, ciò vorrebbe dire, analogamente, che fra i due corpi si stabiliscono più di tre legami, ossia che le curve sono più di tre. In tal caso è generalmente impossibile di soddisfare a tutte le condizioni. Se però per un numero finito di posizioni rispettive dei due corpi esse fossero soddisfatte, si potranno sempre sopprimere in generale $p-3$ delle date curve, mantenendo la rigidità del sistema.

Per maggiore semplicità delle figure, i corpi saranno in seguito indicati mediante piccoli circoli, e l'esistenza d' un legame fra due corpi sarà indicata da un arco congiungente i due corpi. Le figure 5, 6 e 7 indicheranno dunque che fra i corpi 1 e 2 esistono uno, due e tre legami rispettivamente.

9. Si prendano ora a considerare tre corpi 1, 2, 3 (fig. 8); e si stabiliscano tre legami fra i corpi 1 e 2, e tre legami pure fra i corpi 2 e 3. I tre corpi costituiranno evidentemente un sistema rigido, poichè tanto i due corpi 1 e 2, presi per sè, come i due corpi 2 e 3, formano un sistema rigido. La mobilità rispettiva dei tre corpi potrà dunque notarsi con (0). Se si sopprime uno dei legami fra 2 e 3, la mobilità del sistema dei tre corpi diventa (1); poichè, soppresso il legame, il corpo 3 acquista la mobilità (1) rispetto a 2, ossia rispetto al sistema composto dei due corpi 1 e 2, fra i quali sussistono i tre legami, ed i quali quindi costituiscono un solo sistema rigido. Con simile ragionamento si vedrà, che qualora dei sei legami esistenti in origine se ne tolgano due, uno fra 1 e 2, l' altro fra 2 e 3, la mobilità del sistema dei tre corpi diventa (2). Questa mobilità diventa (2) anche nel caso, che si lascino intatti i tre legami fra 1 e 2, e se ne sopprimano due fra 2 e 3. Seguitando così a sopprimere i legami uno per uno, non importa con qual ordine, si troverà facilmente, che la mobilità del sistema dei tre corpi cresce

successivamente e prende le notazioni (3), (4), (5) e (6); la quale ultima ha luogo, quando tutti i legami siano soppressi.

10. Ritornando ora alla fig. 8, si sopprima un legame fra 2 e 3, e se ne aggiunga poscia uno fra 1 e 3, col che si avrà la fig. 9. Anche a questo modo si ottiene un sistema rigido, poichè la mobilità che era (0) nella figura primitiva, diventa (1), quando si sopprime un legame fra 2 e 3, e ritorna (0) coll'aggiungere il legame fra 1 e 3. Infatti i due corpi 1 e 2 mantengono sempre i loro tre legami, e costituiscono quindi sempre un sistema rigido: fra questo sistema rigido, considerato come un solo corpo, ed il corpo 3 restano poi stabiliti tre legami, tanto se tutti tre abbiano luogo fra il corpo 2 ed il 3, come se due legami siano stabiliti fra il 2 ed il 3, ed il terzo legame fra 1 e 3.

11. Se ora nella fig. 9 si toglie uno dei legami fra 1 e 2, e se ne aggiunge uno fra 1 e 3, si ha la fig. 10; e non sarà difficile dimostrare, seguendo le tracce delle considerazioni superiori, che anche in questo caso si ha un sistema rigido di tre corpi.

Sebbene però le disposizioni dei legami indicate nelle figure 8, 9 e 10, costituiscano sempre un sistema rigido di tre corpi, esse presentano queste differenze. Nella fig. 8 vi sono due combinazioni o coppie di corpi, ognuna delle quali costituisce per sè un sistema rigido: cioè la coppia 1, 2 e la coppia 2, 3; mentre ognuna di queste coppie è costituita da due corpi collegati da tre legami. Nella fig. 9 invece vi è una sola coppia, quella formata dai due corpi 1 e 2, che costituisca un sistema rigido per sè, poichè solamente i corpi 1 e 2 sono direttamente uniti da tre legami: le altre due coppie, cioè 2, 3 ed 1, 3 non costituiscono sistemi rigidi per sè; mentre fra 2 e 3 vi sono due soli legami, e fra 1 e 3 un solo legame. Nella fig. 10 finalmente non vi è alcuna coppia di corpi, che formi sistema rigido per sè, poichè i due corpi di ognuna delle tre coppie sono uniti solamente da due legami.

Egli è perciò che tanto la fig. 8, che la fig. 9 si possono considerare come sistemi rigidi formati di due corpi, anzichè di tre; basta perciò riguardare nella fig. 8 la coppia 1, 2, oppure la 2, 3 come un corpo unico; e nella fig. 9 la coppia 1, 2. La fig. 10 invece non può in alcun modo riguardarsi come sistema rigido formato da due corpi.

Considerando le fig. 8 e 9 come sistemi rigidi formati da due corpi, esse ricadono nel caso della fig. 7; siccome però nelle figure 8 e 9 uno dei corpi è esso stesso un sistema rigido di due, così per distinzione si dirà, che la fig. 7 rappresenta un sistema rigido *semplice*; le figure 8 e 9 invece sistemi rigidi *composti*. Per distinguere poi queste disposizioni da quella indicata nella fig. 10, si dirà, che le figure 7, 8 e 9 rappresentano sistemi rigidi di *secondo ordine*, e che la fig. 10 rappresenta un sistema rigido di *terzo ordine*.

Quando alcuni dei corpi collegati formano un sistema rigido per sè, in forza dei legami che li uniscono fra loro direttamente, tale sistema sarà detto *parziale* rispetto al sistema totale dei corpi.

Intanto si osservi che qualunque sia la disposizione adottata, per rendere rigido un sistema di tre corpi occorrono sei legami.

12. Le idee precedenti relative ai sistemi rigidi semplici e composti, all'ordine loro ed ai sistemi parziali, si estendono e si generalizzano, considerando sistemi costituiti da un maggior numero di corpi.

Il sistema di quattro corpi, collegati come è indicato nella fig. 11, può considerarsi in più modi come sistema di secondo ordine, composto. Esso contiene i sistemi parziali 1, 2; 2, 3; 3, 4; (1, 2), 3; (2, 3), 4. ecc. Da esso, togliendo un legame fra 3 e 4 ed aggiungendone uno fra 1 e 4, si ha la disposizione della fig. 12, che costituisce un altro sistema composto, pure di secondo ordine. Un sistema composto di secondo ordine si ha pure togliendo un legame fra 1 e 2, ed aggiungendolo fra 1 e 3 (fig. 13). Togliendo poi nella fig. 12 un legame fra 2 e 3, ed aggiungendolo fra 1 e 4; oppure togliendo nella fig. 13 un legame fra 2 e 3 ed aggiungendolo fra 1 e 4 si hanno i sistemi composti indicati dalle figure 14 e 15, i quali sono di terzo ordine. Infatti nella fig. 14 i corpi 1 e 2 costituiscono per sè un sistema rigido: similmente i corpi 3 e 4 nella fig. 15. Si ricade dunque, tanto per l'una che per l'altra di queste due figure nel tipo della fig. 10, che rappresenta i sistemi di terzo ordine.

Se ora nella fig. 14 si toglie un legame fra 1 e 2, e se ne aggiunge uno fra 1 e 3; oppure se nella fig. 15 si toglie un legame fra 3 e 4, e se ne aggiunge uno fra 2 e 4, si hanno le disposizioni delle figure 16 e 17, che rappresentano sistemi semplici di quarto ordine. Questi ultimi sono caratterizzati dalla proprietà, che in essi non si trova alcuna combinazione nè di due nè di tre corpi, i quali costituiscono un sistema rigido per sè, in forza dei legami da cui sono direttamente collegati.

13. Dalla disposizione della fig. 11 si possono dedurre molti altri sistemi composti di secondo e di terzo ordine, e molti altri semplici di quarto, oltre quelli che come esempî sono indicati nelle figure 12, 13, 14, 15, 16 e 17. La deduzione si può fare facilmente in varie guise, sempre togliendo un legame fra due corpi ed aggiungendone un altro fra altri due. La mobilità del sistema, che è (0) evidentemente nella disposizione della fig. 11, diventa (1) quando si toglie uno dei legami, e deve ritornare (0) coll'aggiungere l'altro legame. Affinchè però questo avvenga, bisogna avere l'avvertenza nell'aggiungere il secondo legame, che esso colleghi fra loro due corpi, che rispettivamente divennero mobili col togliere il primo legame. Senza di ciò il secondo legame non farebbe che ricongiungere parti fra loro già fisse, senza togliere la mobilità delle altre. Intanto si osservi che sopprimendo successivamente i legami della fig. 11, la mobilità del sistema dei quattro corpi va crescendo da (0) fino a (9); e che il numero dei legami necessarî e sufficienti a rendere rigido il sistema dei quattro corpi è sempre 9.

14. Risultati analoghi ai superiori si hanno esaminando i sistemi rigidi che si possono avere con cinque corpi, con sei ecc. Si potrà dunque dire in generale, che un sistema di n corpi può rendersi rigido in varie maniere, in modo che esso può presentarsi come sistema composto d'un ordine inferiore ad n, o come sistema semplice d'ordine n; che il numero necessario e sufficiente di legami por ottenere la rigidità è sempre $3n - 3$, e che la mobilità del sistema, qualora si sopprimono successivamente tutti i legami, cresce da (0) fino a $(3n - 3)$. Fra tutti i sistemi

rigidi possibili con n corpi, meritano attenzione specialmente quelli che sono dell'ordine n^{mo}, quelli cioè, nei quali non esiste alcuna combinazione di un numero di corpi inferiore ad n, la quale costituisca un sistema rigido per sè.

Un sistema di ordine n fra n corpi si ottiene sempre direttamente come segue: Si attribuisca ai corpi, presi in un ordine qualunque, un numero progressivo, e considerandoli come vertici se ne formi un poligono chiuso; si suddivida poi l'area del poligono in triangoli mediante una spezzata non interrotta. Si sostituiscano quindi ad ogni lato del poligono due legami, e ad ogni lato della spezzata un legame. Le figure 18, 19 e 20 mostrano questa disposizione per 5, 6 e 9 corpi, presi con numeri progressivi.

15. Si supponga ora che le curve, che servono a stabilire i legami fra i corpi, siano curve circolari. In tal caso la condizione di collegamento, che risulta da una di queste curve, si può immaginare realizzata mediante un' asta fermata a snodatura ai due corpi, che devono essere collegati. Così se la curva P (fig. 21) sia una circonferenza col centro D invariabilmente connessa col corpo M, ed il corpo N debba avere costantemente un suo punto A sulla P, basterà immaginare un' asta DA, eguale in lunghezza al raggio del circolo, e fermata al corpo M con una snodatura in D, ed al corpo N con una snodatura in A.

Similmente se il corpo N (fig. 22) avesse due punti A e B obbligati a muoversi rispettivamente lungo due circonferenze P e Q, aventi i centri D ed E, ed invariabilmente connesse col corpo M, ciò potrebbe realizzarsi mediante le due aste DA, EB, fissate analogamente alla DA della fig. 21.

La stessa disposizione si otterrebbe, se il corpo N avesse un punto A obbligato a stare sopra una circonferenza P, invariabilmente connessa col corpo M; ed il corpo M avesse un punto E obbligato a restare sopra una circonferenza Q′, invariabilmente connessa col corpo N (n. 7).

Se i punti A e B coincidono in A si ha la disposizione della fig. 23 (n. 4).

Se le curve di collegamento sono tre circonferenze, si avranno tre aste, DA, EB, FC; ed i due corpi saranno fissi uno rispetto all'altro (fig. 24).

16. Riguardo ai corpi collegati non si è fatta finora alcuna supposizione, ritenendoli unicamente corpi rigidi. Si supponga ora, che i corpi siano aste rigide rettilinee, o triangoli, costituiti da tre aste rigide, unite a snodatura nei vertici. Quanto alle curve di unione, si mantenga la supposizione che siano circolari, ossia che il collegamento sia fatto da aste fermate alle estremità mediante snodature.

In tali supposizioni si potranno dai superiori tipi geometrici dedurre, in molte maniere, forme svariatissime di sistemi rigidi composti di aste.

Eccone alcuni esempî:

Dalla fig. 7 si ottiene il sistema rigido rappresentato dalla fig. 25, supponendo che i due corpi 1 e 2 della fig. 7 siano due aste 11′, 22′ (fig. 25); il collegamento fra i due corpi si fa allora mediante le tre aste 12, 12′, 1′ 2′, che rappresentano i raggi delle curve circolari di unione.

Nella fig. 21 e nelle seguenti si sono indicate le snodature con piccoli circoli per maggiore chiarezza.

Dalla fig. 7 si può dedurre anche il sistema rigido fig. 26, supponendo che il

corpo 1 della fig. 7 sia, nella 26, il triangolo 11′ 1″, ed il corpo 2 sia l'asta 22′: le tre aste di collegamento sono allora 12′, 1′2, 1″2′.

Anche il sistema fig. 27 può considerarsi come un caso particolare della fig. 7. I due corpi sarebbero in questo caso i due triangoli 11′ 1″ e 22′ 2″, e le tre aste di collegamento le 1′2, 1′2″, 1″2′.

Confrontando il tipo della fig. 28 con quello della fig. 27, si rileva intanto, che il sistema fig. 28 ha un'asta di più di quelle che siano necessarie per renderlo rigido. Ciò può dedursi anche dalla considerazione, che per collegare n punti nel piano sono sufficienti $2n - 3$ aste: ora nella fig. 28, che ha sei punti (nodi) vi sono 10 aste invece di 9.

Dalla fig. 8 si può ottenere il sistema fig. 29, supponendo che i tre corpi della fig. 8 siano i tre triangoli 11′ 1″, 22′ 2″, 33′ 3″: i tre collegamenti fra il primo ed il secondo corpo saranno allora formati dalle tre aste 12, 1″2, 1″2′, e quelli fra il secondo ed il terzo dalle tre aste 2″3, 2″3′, 2′3′.

Dalla fig. 10 si ha il sistema rigido fig. 30, supponendo che i tre corpi della fig. 10 siano le tre aste 11′, 22′, 33′; allora i due collegamenti fra il primo ed il secondo corpo sono formati dalle due aste 1′2, 1′2′; quelli fra il secondo corpo ed il terzo dalle aste 2′3, 2′3′; e finalmente quelli fra il terzo ed il primo dalle aste 3′1, 3′1′.

Dalla stessa fig. 10 possono pure derivarsi i sistemi rigidi fig. 31, 32, 33. Nel primo i tre corpi sono i tre triangoli 11′1″, 22′2″, 33′3″, e le tre coppie di aste di collegamento sono le 12″, 1″2; 2″3″, 2′3; 3′1″, 31′. Nel secondo (fig. 32) i tre corpi sono il triangolo 11′ 1″, l'asta 22′ ed il triangolo 33′ 3″. Le aste di collegamento sono facili da trovarsi. Nel terzo (fig. 33) i tre corpi sono il triangolo 11′ 1″, l'asta 22′ ed il triangolo 33′ 3″. Fra il primo ed il secondo corpo vi sono le due aste di collegamento 1′2, 12′; fra il secondo ed il terzo le due aste 23, 2′3″; e fra il terzo ed il primo le due aste 13′, 1″3″.

Dalla fig. 12 si deduce facilmente il sistema rigido fig. 34, nel quale i quattro corpi sono le quattro aste 11′, 22′, 33′, 44′: si hanno tre collegamenti tanto fra il primo ed il secondo, che fra il secondo ed il terzo corpo; si hanno invece due soli collegamenti fra il terzo ed il quarto, cioè le aste 34′, 3′4′, ed un solo collegamento, cioè l'asta 41′ fra il quarto ed il primo corpo.

Dalla fig. 16 si deduce il sistema rigido di quarto ordine fig. 35, supponendo che i quattro corpi siano i quattro triangoli 11′ 1″, 22′2″, 33′3″, 44′4″.

Dalla fig. 18 si deduce il sistema rigido di quinto ordine, fig. 36, supponendo che i cinque corpi siano le cinque aste 11′, 22′, 33′, 44′, 55′. Ecc.

17. Similmente dato un sistema rigido formato da aste, nel quale non ve ne siano di sovrabbondanti, si potrà ridurlo, generalmente in più modi, all'uno od all'altro dei tipi geometrici sopra indicati. Nel dare qui alcuni esempî di tali riduzioni, si sono per la maggior parte preferiti quei sistemi, che s' incontrano nelle costruzioni, come tipi di travi reticolate.

Molte di queste travi sono costituite da una serie di triangoli riuniti per modo, che ogni triangolo ha un lato comune col triangolo immediatamente successivo, un altro lato comune col triangolo che immediatamente precede, ed il terzo lato non

comune con alcun altro triangolo; ad eccezione però del primo e dell' ultimo triangolo della serie, che hanno ognuno due lati non comuni con altri triangoli.

In tale disposizione può avvenire che un nodo sia vertice comune di due, tre, quattro o più triangoli (figure 37, 38, 39, 40 e 41).

Quando nessun nodo è vertice comune a più di quattro triangoli, la trave si può sempre ridurre al tipo della fig. 42, nel quale due corpi immediatamente successivi sono sempre connessi da tre legami. Così nella fig. 37 si possono a tale scopo assumere per corpi le aste 11′, 22′, 33′, ecc. ed il triangolo 66′6″. Nella fig. 38 si possono assumere per corpi i triangoli 11′1″, 22′2″, 33′3″, 44′4″. Nella fig. 39 le aste 11′, 22′, 33′, 44′. Nella fig. 40 le aste 11′, 22′, 33′, 44′ ed il triangolo 55′5″. In tal modo le figure 37, 38, 39 e 40 si riducono tutte al tipo indicato dalla fig. 42.

Che se un nodo sia vertice comune a più di quattro triangoli, il sistema non può più ridursi al semplice tipo della fig. 42; ma bisogna ricorrere ad altri tipi. Così nella fig. 41 si possono considerare come corpi successivi le aste 11′, 22′, 33′, 44′ e 55′, e si troverà facilmente, che il collegamento fra questi corpi ha luogo secondo il tipo della fig. 43, che può in più modi considerarsi come un sistema rigido composto, di secondo ordine, fra cinque corpi.

Il sistema della fig. 44 può ridursi al tipo della fig. 45, considerando come corpi i triangoli 11′1″, 33′3″, 66′6″, e le aste 22′, 44′, 55′. Il tipo fig. 45 può, similmente al 43, considerarsi in più modi di secondo ordine fra sei corpi.

Il sistema della fig. 46 può ridursi al suo tipo geometrico, considerando come corpi i due triangoli 11 1″ e (15) (15)′ (15)″, e tutte le aste verticali 22′, 33′, 44′, ecc. In tal modo si troverà che la fig. 46 si riduce al tipo fig. 47, che è pure un sistema composto, di secondo ordine, fra quindici corpi.

Il sistema della fig. 48 può ridursi, assumendo per corpi le aste 11′, 22′, 33′, ecc. .... (10) (10)′. Si ottiene così il tipo fig. 49, composto, di secondo ordine, con sistemi parziali di terzo. Infatti i tre corpi 1, 2, 3, ed i tre 8, 9, 10 formano due sistemi parziali semplici, di terzo ordine. Considerando ciascuno di questi sistemi, come un solo corpo, la fig. 49 si riduce alla fig. 50. Ora in questa i tre corpi (1, 2, 3), 4, 5, ed i tre (8, 9, 10), 6, 7 formano altri due sistemi parziali di terzo ordine. Considerandoli ciascuno come un solo corpo, si ha la fig. 51, che rappresenta un sistema di secondo ordine.

18. Come si vede da questo esempio un sistema composto, formato da un certo numero di corpi, può ridursi ad un numero minore di corpi, considerando come equivalenti ad un corpo solo i sistemi parziali ch'esso può contenere: e ciò può farsi generalmente in più modi.

Fra queste riduzioni ad un numero minore di corpi, quando sono possibili, merita specialmente di essere considerata quella che può farsi relativamente ad uno dei legami del sistema. Questa riduzione consiste in ciò, che si mantengono separati fra loro i due corpi fra i quali ha luogo il legame che si considera; ma si fanno del resto tutte le riduzioni possibili. Così per es. volendo ridurre il tipo fig. 49 al minimo numero possibile di corpi relativamente al legame che ha luogo fra i due corpi 6 ed 8, si avrà la fig. 52, che rappresenta un sistema di quattro corpi. Una

simile riduzione rispetto al legame fra i corpi 3 e 4, conduce alla fig. 53, che pure rappresenta un sistema di quattro corpi. Se invece la riduzione si fa rispetto al legame che ha luogo fra i corpi 5 e 6, si ha la fig. 51 fra due soli corpi.

Ritornando ora alla fig. 48 si osservi, che se si congiungesse il nodo 4 col nodo 6′ mediante un'asta, il sistema avrebbe un'asta sovrabbondante. La figura infatti contiene 20 punti, per collegare i quali bastano $2 \times 20 - 3 = 37$ aste, e tante sono quelle segnate in figura. Se si aggiungesse l'asta 46′, se ne avrebbero 38, cioè una di troppo.

19. Nel sistema fig. 54 si possono considerare come corpi i due triangoli 11′1″ ed 88′8″, e le aste 22′, 33′, ecc. Si ottiene così il tipo fig. 55, che è un sistema semplice di ottavo ordine. In esso infatti non esiste alcun sistema parziale; come si può dedurre dalla circostanza, che, considerando una combinazione qualunque di m corpi fra gli otto della figura ($m < 8$), si trova che essi sono uniti con un numero di legami sempre inferiore a $3m - 3$, e non possono quindi costituire per sè un sistema rigido (n. 14).

Le diagonali della fig. 54 formano una sola spezzata, che si estende dal nodo 2 al nodo 7′, toccando tutti gli altri nodi.

I sistemi rappresentati dalle figure 56 e 58 si riducono facilmente ai tipi 57 e 59, che dopo gli esempî già dati, riescono chiari senza ulteriori spiegazioni. Le figure 57 e 59 rappresentano sistemi semplici di nono e di undecimo ordine: come facilmente si deduce da una considerazione simile a quella fatta per la fig. 55.

I sistemi fig. 60, 62, 64 si riducono facilmente ai tipi 61, 63, 65, che sono tutti sistemi composti, di secondo ordine; il 61 contiene poi due sistemi parziali di quinto.

I sistemi delle travi Bollman e Fink, fig. 66 e 68, si riducono facilmente ai tipi fig. 67 e 69, di cui il primo è un sistema semplice di settimo ordine, il secondo un sistema composto di terzo.

II. Forze interne nei sistemi rigidi.

20. Si abbia ora uno dei sistemi rigidi sopra considerati, formato da n corpi, uniti insieme mediante curve qualunque; e siano al sistema applicate delle forze esterne, sotto l'azione delle quali esso trovisi equilibrato; sia perchè le forze esterne si equilibrino fra sè, sia perchè il sistema abbia dei punti d'appoggio.

Suppongasi in generale che il sistema abbia subìta una riduzione, cosicchè esso possa considerarsi composto di m corpi, e siano questi numerati progressivamente $1, 2, \ldots, k, \ldots, m$. Alcuni di questi corpi saranno allora sistemi parziali: nel caso che il sistema sia semplice, sarà $m = n$.

Il corpo k avrà in generale un certo numero di punti, obbligati a restare sopra curve invariabilmente connesse con altri corpi; e vi sarà inoltre un altro certo numero di curve, invariabilmente connesse al corpo k, sulle quali dovranno restare costantemente altri punti appartenenti ad altri corpi. Ora quando un punto appartenente ad un corpo deve trovarsi sopra una curva invariabilmente connessa con un altro, ha luogo in generale, sotto l'azione delle forze esterne, un'azione reciproca dei due corpi

l'uno sull'altro, azione passante per il punto in questione e diretta secondo la normale alla curva; qualora, come qui intendiamo di fare, si prescinda affatto dalla resistenza d'attrito. Se quest'azione, considerata come forza applicata all'un corpo, ha il valore N, essa avrà il valore — N, considerata come forza applicata all'altro corpo.

Suppongasi ora primieramente che il sistema sia libero: in tal caso ognuno dei corpi del sistema sarà in equilibrio per sè, sotto l'azione di quelle fra le forze esterne che sono ad esso applicate, e sotto l'azione delle forze N, che derivano da quei corpi con cui esso è collegato.

Per esprimere questo equilibrio con notazioni algebriche, siano $R^{(1)}{}_k$, $R^{(2)}{}_k, \ldots$ quelle fra le forze esterne del sistema, che sono applicate al corpo k; ed $N^{(1)}{}_k, N^{(2)}{}_k, \ldots$ le azioni degli altri corpi sul corpo k, derivanti dai legami. Siano inoltre rispetto ad un sistema d'assi ortogonale X_k, Y_k le componenti di R_k; P_k, Q_k le componenti di N_k; e finalmente M_k, L_k i momenti delle R_k, N_k rispettivamente, riferiti all'origine degli assi.

L'equilibrio del corpo k sarà espresso dalla coesistenza delle tre equazioni

$$\text{A)}\begin{cases} 1. \quad \Sigma X_k + \Sigma P_k = 0 \\ 2. \quad \Sigma Y_k + \Sigma Q_k = 0 \\ 3. \quad \Sigma M_k + \Sigma L_k = 0 \end{cases}$$

I corpi essendo m di numero, si avranno in tutto $3m$ equazioni. Esse però non sono tutte fra loro indipendenti. Infatti siccome nel sistema degli m corpi esistono contemporaneamente gli N ed i —N, così vi esistono pure contemporaneamente i P ed i —P, i Q ed i —Q, gli L ed i —L. Se dunque nella 1. si fa $k=1, 2, \ldots, m$, e si somma il sistema d'equazioni che ne risultano, e si procede similmente colla 2. e colla 3., si otterranno le note equazioni fra le forze esterne

$$\text{B)}\begin{cases} \Sigma X = 0 \\ \Sigma Y = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{cases}$$

nelle quali la ΣX rappresenta la somma di tutte le X, che derivano dalle forze esterne applicate al sistema; e similmente le ΣY, ΣM.

21. Volendo utilizzare le A) per trovare i valori delle P, Q, L, si osservi che il numero delle curve del sistema è $3m - 3$ (n. 14); e siccome da ogni curva deriva una forza N, così le quantità P, Q, L contenute nelle A) sono $3(3m - 3)$ di numero; mentre le A) non istabiliscono fra queste quantità, che $3m - 3$ equazioni, attese le B). Occorrono adunque altre $2(3m - 3)$ equazioni per poter determinare le P, Q , Queste si trovano facilmente osservando che le P, Q, L sono inoltre collegate fra loro come segue. Dette a e b le coordinate del punto d'applicazione della N, e t la tangente dell'angolo che la N fa con le x positive, sarà

$$\text{C)}\begin{cases} Q - tP = 0 \\ L - bP + aQ = 0 \end{cases}$$

Applicando queste equazioni alle P, Q, L di tutto il sistema, si avranno $2(3m - 3)$ equazioni, che unite alle $3m - 3$ contenute nelle A), danno un totale di $3(3m - 3)$

equazioni fra le $3(3m - 3)$ quantità P, Q, L, e possono servire a determinarle.

Siccome poi fra le N, P, Q, L esistono sempre le relazioni

$$\text{D)} \left\{ \begin{array}{l} P = \alpha N \\ Q = \beta N \\ L = \gamma N \end{array} \right.$$

così, trovati i valori delle P, Q, L, si possono avere quelli delle N mediante le D).

Più direttamente si hanno i valori delle N, sostituendo nelle A) i valori delle P, Q, L dati dalle D). Le A) stabiliranno allora fra le $3m - 3$ incognite N un sistema di $3m$ equazioni, che però, attese le B), si riducono a $3m - 3$.

22. Quanto alla natura di queste ultime equazioni, contenenti le incognite N, si osservi in primo luogo, che rispetto alle incognite stesse, esse sono lineari. In secondo luogo le quantità ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k vi figurano linearmente, e non sono comprese, neppure implicitamente, nei coefficienti α, β, γ. Infatti i punti d'applicazione e le direzioni delle N dipendono dalla forma del sistema rigido dato e delle curve di collegamento dei suoi corpi, e non già dalle forze esterne, le quali, se variassero, potrebbero far mutare l'intensità delle N, ma non le loro direzioni, nè i punti per cui passano. In altre parole le quantità α, β, γ, che figurano nelle D) sono indipendenti dalle R, e dipendono unicamente dalle quantità t, a, b, considerate nelle C), e di cui sono funzioni.

Ritenute dunque $3m - 3$ equazioni del sistema A), opportunamente scelte, e portate nei secondi membri le ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k, i primi membri costituiranno un sistema di forme lineari, ed il valore di ogni incognita N, sarà dato dal rapporto D: T fra due determinanti, dei quali T non conterrà le ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k, e D le conterrà linearmente in una sola colonna. Ora siccome ogni determinante è una funzione lineare degli elementi d'una sua colonna, ne viene che il determinante D, e quindi ciascuna delle incognite N sono funzioni lineari delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k; e tali, in forza delle D), sono pure le P, Q, L.

23. Se il sistema rigido dato non è libero, allora alle R bisognerà aggiungere le reazioni dei punti d'appoggio. In tal caso le N, P, Q, L diventeranno dunque funzioni lineari non solo delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k, sopra contemplate, e le quali provengono immediatamente dalle forze esterne; ma anche di quelle X, Y, M, che provengono dalle reazioni dei punti d'appoggio. Cerchiamo ora qual è il valore di queste X, Y, M.

Siano A_1, A_2, A_3, ... i punti d'appoggio, e per distinzione dalle X_k, Y_k, M_k, indichiamo con X_a, Y_a, M_a le incognite cercate. Supponendo sempre che sussista l'equilibrio, queste incognite potranno determinarsi mediante le B); purchè nei primi membri alle ΣX, ΣY, ΣM s'intendano aggiunte le X_a, Y_a, M_a, e purchè tale determinazione si possa far dipendere da tre sole incognite, il cui valore possa esser dato dalle tre equazioni B). Quest'ultima condizione si verifica sempre, quando il sistema abbia non più di tre punti A, obbligati a stare sopra altrettante curve, fisse rispetto agli assi. Siano in questo caso le reazioni di queste curve espresse da F_1, F_2, F_3: queste F saranno dirette secondo le normali alle curve, e le X_a, Y_a, M_a saranno funzioni delle F. Espresse dunque le X_a, Y_a, M_a mediante le F, con equazioni

analoghe alle D), e sostituiti i loro valori nelle B), se ne dedurranno i valori delle F, e mediante questi si avranno i valori delle X_a, Y_a, M_a, da aggiungere a quelli delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k per avere i valori delle N, nel caso ora contemplato che vi siano dei punti d'appoggio.

Ma le X_a, Y_a, M_a sono funzioni lineari delle F, ed entrano nelle B) pure linearmente. Quando dunque nelle B) si sostituiscono i valori delle X_a, Y_a, M_a, espressi mediante le F, le B) diventano equazioni lineari rispetto alle incognite F. E siccome le B) d'altra parte sono funzioni lineari delle ΣX, ΣY, ΣM, e queste non entrano nei coefficienti delle F, così tanto i valori delle F, come i valori delle X_a, Y_a, M_a, sono funzioni lineari delle ΣX, ΣY, ΣM.

Ora siccome le N, P, Q, L sono, nel caso che esistano punti d'appoggio, funzioni lineari delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k e delle X_a, Y_a, M_a, come sopra si è osservato, così sostituendo alle X_a, Y_a, M_a i loro valori espressi per ΣX, ΣY, ΣM, si otterranno le N, P, Q, L, come funzioni lineari delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k, e delle ΣX, ΣY, ΣM. Ma queste ultime sono evidentemente funzioni lineari delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k, dunque si può dire:

« Quando il sistema rigido in equilibrio sia affatto libero, od abbia non più di tre punti obbligati a restare sopra altrettante curve fisse rispetto agli assi, tanto le F, come le N, P, Q, L sono sempre funzioni lineari delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k ».

24. Se esistono sistemi parziali, cioè se $m < n$, le azioni reciproche fra i corpi del sistema parziale sono funzioni lineari delle X, Y, M derivanti dalle forze esterne. Infatti le azioni reciproche dei corpi componenti il sistema parziale, sono, per ciò che precede, funzioni lineari delle X, Y, M, relative ad essi corpi e provenienti dalle forze esterne, ed inoltre delle P, Q, L provenienti dai legami del sistema parziale cogli altri corpi. Ma quest'ultime sono funzioni lineari delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k, come sopra si è detto; dunque le azioni reciproche dei corpi componenti il sistema parziale sono funzioni lineari delle X, Y, M suddette, e delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k; ma queste ultime alla lor volta sono funzioni lineari delle X, Y, M relative a tutto il sistema, dunque può dirsi che le azioni reciproche dei corpi componenti il sistema parziale sono funzioni delle X, Y, M relative a tutto il sistema.

25. Se le curve sono circolari, ed il collegamento sia fatto mediante aste (n. 15), ogni asta coincide colla direzione della N rispettiva, e sopporterà quindi uno sforzo longitudinale eguale ad N, cioè lo sforzo longitudinale sopportato dall'asta sarà una funzione lineare delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k derivanti dalle forze esterne. Che se inoltre i corpi del sistema sono costituiti da aste o da triangoli snodati ai vertici (n. 16), anche gli sforzi sopportati da tali aste, o dai lati di tali triangoli saranno funzioni lineari delle X, Y, M; come è facile dimostrare dopo ciò che nel numero precedente si è detto dei sistemi parziali.

Per un sistema rigido nel piano, composto di aste unite a snodatura, e mancante di aste sovrabbondanti, si ha dunque la proposizione seguente:

« Se un tale sistema sia in equilibrio sotto l'azione di forze esterne, tanto le reazioni dei punti d'appoggio, se ve ne sono, come gli sforzi longitudinali sopportati dalle aste, sono funzioni lineari delle X, Y, M, provenienti dalle forze esterne ».

26. Anche le curve, che servono a stabilire gli appoggi del sistema possono essere circolari; ed allora la condizione che un punto A del sistema debba trovarsi

sopra una tale curva, può intendersi realizzata mediante un'asta fissata a snodatura con un estremo al punto A in questione, coll'altro al centro del circolo. Per gli sforzi longitudinali sopportati da questa asta, vale allora ciò che sopra si è detto delle reazioni sui punti d'appoggio. Che se per realizzare la suddetta condizione invece di una semplice asta, si prende un secondo sistema rigido, composto di aste, e si fissa un suo punto a snodatura sul punto A del primo sistema, ed un altro punto al centro del circolo; in tal caso, come è facile dimostrare, lo sforzo sopportato da ogni asta del secondo sistema, sarà sempre in generale una funzione lineare delle X, Y, M provenienti dalle forze applicate al primo sistema. Fra i casi particolari, a cui conduce la supposizione che il sistema abbia tre punti obbligati a restare sopra tre curve rispettivamente, vi è quello che due di quei punti coincidano, nel qual caso si ha un punto fisso, intorno al quale il sistema può girare.

27. Le relazioni sopra trovate fra le forze esterne, gli sforzi sopportati dai punti d'appoggio e le azioni reciproche dei corpi del sistema, sono fondamentali per le ulteriori ricerche, e la loro semplicità rende facile lo studio delle leggi, secondo le quali al variare delle forze esterne variano le reazioni sugli appoggi e le azioni reciproche dei corpi, ossia le forze interne del sistema. In causa di una tale semplicità si può inoltre arrivare per gli ordinarî casi della pratica a facili costruzioni grafiche, che permettono di determinare con breve procedimento tanto le reazioni sugli appoggi, quanto gli sforzi delle aste ed i loro valori massimi o minimi.

Fra i tanti modi, nei quali si possono supporre variabili le forze esterne giova qui limitarsi a due soli, in vista dello scopo del presente scritto. Si supponga in primo luogo, che mantenendo fisso rispetto agli assi il sistema degli n corpi, tutto il sistema delle forze R, che lo sollecitano, si trasporti parallelo a se stesso in una data direzione rettilinea; cosicchè ognuna delle forze R, senza cambiare d'intensità e di senso, nè di posizione rispetto alle altre forze, si trasporti parallela a se stessa. Si domanda qual sia in questo caso la legge con cui varia l'azione reciproca N fra due corpi qualunque del sistema, e quella con cui variano le reazioni sugli appoggi.

Per valutare la traslazione del sistema di forze si prenda sopra una linea retta AB, tirata nella direzione del movimento, un punto A fisso rispetto agli assi (fig. 70); e s'immagini poi un punto O, invariabilmente connesso col sistema delle forze e collocato sulla AB. La distanza variabile $AO = u$ può servire a valutare la traslazione del sistema, durante la quale i punti d'intersezione delle forze colla AB determinano su di essa altrettante punteggiate eguali a quella determinata dal punto O.

Affine di avere l'espressione più semplice della N, s'immagini anzitutto ridotto il sistema al minor numero possibile di corpi rispetto a quel legame, da cui proviene l'azione N (n. 18). Fatta la riduzione, si notino i corpi coi numeri progressivi 1, 2, ..., m. Per una data posizione iniziale delle forze R si avrà dunque, per ciò che sopra si è detto,

$$N = A' \Sigma X_1 + A'' \Sigma X_2 + \text{ecc.} \dots + B' \Sigma Y_1 + B'' \Sigma Y_2 + \text{ecc.} \dots + C' \Sigma M_1 + C'' \Sigma M_2 + \text{ecc.}$$

Se ora il sistema delle forze si muove nel modo indicato, possono supporsi due casi:

a) che tutte le forze restino applicate a quei medesimi corpi del sistema, a cui erano applicate nello stato iniziale, variando solo il loro punto d'applicazione;

b) che il punto d'applicazione di una o più forze passi, durante la traslazione, da uno ad un altro dei corpi del sistema, o che una o più forze cessino affatto d'essere applicate al sistema.

Nel primo caso i valori delle ΣX_1, ΣX_2, ... e delle ΣY_1, ΣY_2, ... restano evidentemente inalterati, ed i valori delle ΣM_1, ΣM_2, ... diventano funzioni lineari della u. Infatti, restando inalterata l'intensità ed il senso delle forze, il momento d'ogni forza R (fig. 70) varia in proporzione della normale OQ, calata dall'origine delle coordinate sulla direzione della R. Ora siccome la R si trasporta parallela a se stessa, essa determina nella OQ una punteggiata simile a quella da essa determinata nella AB, ossia simile alla punteggiata generata dal punto O. Perciò le normali calate dall'origine delle coordinate sulle direzioni delle forze, e quindi i momenti di queste, sono funzioni lineari di u.

Il valore sopra dato di N si trasforma quindi in questo caso in una funzione lineare di u.

Un simile risultato si sarebbe evidentemente ottenuto, prendendo a considerare le reazioni F sugli appoggi, le quali sono funzioni lineari delle ΣX, ΣY, ΣM relative a tutto il sistema; per lo che si potrà porre

$$F = D' \Sigma X + E' \Sigma Y + G' \Sigma M$$

Riassumendo si avrà adunque la seguente proposizione:

« Se le forze sollecitanti il sistema sono dotate di traslazione rettilinea, durante la quale mantengono inalterata la loro posizione relativa e restano applicate ai medesimi corpi rispettivamente, tanto una reazione qualunque sugli appoggi, quanto l'azione reciproca di due corpi qualunque, è rappresentabile dalle ordinate di una linea retta ».

Se il sistema è composto di aste, la proposizione vale naturalmente per gli sforzi longitudinali sopportati da un'asta qualunque del sistema.

28. Per rappresentare la reazione d'un appoggio, oppure l'azione fra due corpi qualunque (o lo sforzo sopportato da un'asta, qualora il sistema sia composto da aste), si possono prendere come ascisse sopra una retta qualunque AB (fig. 71) i valori delle u, e portarvi normalmente i valori della F, o della N che si considera: si avrà allora una retta SS, che rappresenterà la legge con cui varia la F, o la N considerata.

Ora siccome AB ed SS hanno sempre un solo punto d'intersezione, così si avrà la proposizione:

« Vi è sempre una sola posizione del sistema di forze, per la quale una data reazione sugli appoggi, od una data azione qualunque fra due corpi, si annulla ».

29. Nel secondo caso, siano u_1, u_2, ..., u_q, u_{q+1}, ... i successivi valori di u, per i quali l'una o l'altra delle forze R cessa di essere applicata ad un corpo per essere applicata ad un altro. Finchè la posizione del sistema di forze si mantiene tale, che il valore di u resta compreso fra due dei valori superiori, immediatamente successivi, finchè sia, cioè, $u_q < u < u_{q+1}$, varrà senz'altro la conclusione del caso precedente, cioè tanto una F, quanto una N qualunque sarà rappresentabile dalle ordinate d'una retta.

Ma se si prendono due valori della u, dei quali uno immediatamente preceda, l'altro immediatamente segua il valore u_q, e si confrontino fra loro i due valori di N corrispondenti a questi due valori della u, si vedrà che per $u = u_q$ ha luogo in generale discontinuità nel valore di N. Siano infatti k e k' i due corpi fra i quali ha luogo il passaggio del punto d'applicazione della forza R per il valore $u = u_q$. Le due somme ΣX_k, $\Sigma X_{k'}$, che entrano nel valore di N, cambiano bruscamente di valore per $u = u_q$, mentre la prima perde e la seconda guadagna bruscamente quella X, che proviene dalla forza R. Lo stesso dicasi delle due somme ΣY_k, $\Sigma Y_{k'}$ e delle due ΣM_k, $\Sigma M_{k'}$. Ora siccome i coefficienti $A^{(k)}$, $A^{(k')}$ sono in generale fra loro diversi, e così pure i coefficienti $B^{(k)}$, $B^{(k')}$ ed i $C^{(k)}$, $C^{(k')}$, ne viene che per $u = u_q$ il valore di N è discontinuo. Alla stessa conclusione si arriverebbe, supponendo, che per $u = u_q$ l'una o l'altra delle forze R cessasse bruscamante d'essere applicata al sistema.

Venendo ora alle reazioni sugli appoggi, queste sono funzioni lineari di ΣX, ΣY, ΣM, e di queste quantità le due prime, finchè tutte le forze restano applicate al sistema, restano inalterate durante la traslazione; mentre la ΣM è una funzione lineare continua di u. Infatti l'essere una forza applicata piuttosto ad un corpo che ad un altro è una circostanza che resta affatto senza influenza sul valore di ΣM. Che se per il valore u_q l'una o l'altra delle forze cessi affatto d'essere applicata al sistema, si troverà con simile ragionamento, che in tal caso anche il valore di F diventa discontinuo per $u = u_q$.

Per questo secondo caso potrà adunque dirsi:

« Se le forze sollecitanti il sistema sono tutte dotate della stessa traslazione rettilinea, ed una od alcune di esse cambiano punto d'applicazione da un corpo all'altro durante il moto, o cessano d'essere applicate al sistema, allora l'azione reciproca N fra due corpi qualunque è rappresentabile da tronchi di rette, separati gli uni dagli altri per tutti quei punti, per i quali una forza cambia punto d'applicazione da un corpo all'altro, o cessa di agire sul sistema (fig. 72) ».

« Le reazioni F invece diventano discontinue solamente, quando l'una o l'altra forza cessi d'essere applicata al sistema ».

Il cambiamento nel punto d'applicazione da un corpo all'altro del sistema, cambiamento che determina la discontinuità della N, s'intende naturalmente riferito ai corpi del sistema ridotto, di quel sistema cioè che si ottiene col ridurre il primitivo al minor numero possibile di corpi rispetto a quel legame che si considera (n. 18, 20).

30. Si faccia ora una seconda supposizione relativa alla variabilità delle forze esterne. Ritenuto lo stesso sistema di forze R, e la sua traslocazione rettilinea nel senso della AB, come sopra, si supponga che le forze R non siano direttamente applicate ai corpi del sistema, ma ogni forza R_μ si decomponga prima in due R'_μ, R''_μ, parallele alla R_μ, e queste si applichino poi a due punti E'_μ, E''_μ, di cui almeno uno appartenga al sistema degli n corpi. Si supponga poi che mentre le R si muovono parallele a se stesse, i punti E restino fissi rispetto agli assi.

Siccome in questo caso ogni forza R_μ mantiene la propria intensità ed il proprio senso, e cambia solamente di posizione rispetto agli assi, così le R'_μ, R''_μ, obbligate a passare per i punti fissi E'_μ, E''_μ varieranno d'intensità. Se K, K', K'' sono i punti in cui le R_μ, R'_μ, R''_μ tagliano rispettivamente la AB, si avrà $R_\mu : R'_\mu : R''_\mu = K'K'' : KK'' : KK'$, dove $K'K''$ è costante e le KK'', KK' sono funzioni lineari di u. Ne viene

che R'_μ ed R''_μ sono anch' esse funzioni lineari di u, e tali quindi saranno pure le loro componenti rispetto agli assi ed i loro momenti. Per cui tutte le X, Y, M del sistema saranno in questo caso funzioni lineari della variabile u. Quindi, attese le superiori espressioni di N e di F (n. 27), anche queste quantità saranno funzioni lineari della u. Si avrà dunque la seguente proposizione:

« Se le forze sollecitanti il sistema sono tutte dotate della stessa traslazione rettilinea, ed ogni forza sia decomposta in due parallele, applicate a due punti fissi, di cui almeno uno appartenga al sistema degli n corpi; in tal caso tanto una reazione qualunque sugli appoggi, quanto l' azione fra due corpi qualunque è rappresentabile dalle ordinate d' una linea retta ».

31. Suppongasi ora che il cammino percorso dal punto O (n. 27) sia suddiviso in intervalli, e che i punti E'_μ, E''_μ, relativi alla forza R_μ restino inalterati, finchè O si trova entro uno di quegli intervalli; ma cambino bruscamente di posizione, quando O passa da un intervallo al seguente. Per tutta generalità supporremo, che, cambiando bruscamente di posizione, i punti E possano non solo passare dall' uno all' altro dei corpi costituenti il sistema rigido; ma possano anche cessare affatto dall' appartenere al sistema. Se in tal caso si ricerca qual sia l' andamento dei valori di N e di F, mentre O, col crescere progressivo di u, percorre successivamente i diversi intervalli, si troverà facilmente, ricorrendo alle superiori espressioni di N e di F, che la N è in generale discontinua per tutti i valori u_1, u_2, ... di u, che corrispondono ai limiti fra un intervallo e l' altro; mentre il valore di F diventa discontinuo solamente per quei valori di u, per i quali qualcuno dei punti E cessa bruscamente di appartenere al sistema rigido.

Finchè u resta compreso entro uno stesso intervallo, tanto la N che la F sono rappresentabili dalle ordinate d' una linea retta. L' andamento totale tanto della N che della F potrà dunque indicarsi con una figura analoga alla 72, nella quale ad ogni ascissa limite u_q corrispondono in generale due diverse ordinate.

32. Può avvenire però, come caso particolare, che le due ordinate corrispondenti ad ogni ascissa limite u_1, u_2, ... siano fra loro eguali, nel qual caso i successivi tronchi rettilinei, indicati nella fig. 72, formeranno una spezzata non interrotta (fig. 74). Un tale caso particolare sarebbe il seguente.

Suppongasi che una delle forze esterne, per es. la R_μ, durante il moto di traslazione, prenda successivamente le posizioni r', r'', r''', ecc. (fig. 73), le quali corrispondano ai valori u_1, u_2, u_3, ...; e siano E'_μ, E''_μ, E'''_μ, ... altrettanti punti, collocati rispettivamente sulle r', r'', r''', ..., ed appartenenti, tutti od in parte, al sistema degli n corpi. Suppongasi poi, che per valori di u compresi fra u_1 ed u_2 le R'_μ, R''_μ siano applicate ai punti E'_μ, E''_μ rispettivamente: per valori di u compresi fra u_2 ed u_3 le R'_μ, R''_μ siano applicate ai punti E''_μ, E'''_μ rispettivamente: ecc. Analoghe supposizioni si facciano per le altre forze esterne R.

In tal caso le funzioni lineari di u, esprimenti i valori delle ΣX_1, ΣX_2, ..., ΣY_1, ΣY_2, ..., ΣM_1, ΣM_2, restano inalterate, sebbene O passi da un intervallo all'altro, finchè R'_μ, R''_μ, sebbene cambino punto di applicazione, agiscono però sempre sopra un medesimo corpo del sistema. Che se per un valore limite u_q una delle R'_μ, R''_μ passa da un corpo all' altro o cessa di agire sul sistema, in tal caso quelle funzioni

vengono alterate. È però facile dimostrare, che i valori di quelle funzioni corrispondenti ad una u, la quale preceda immediatamente u_q, differiscono infinitamente poco da quelli corrispondenti ad una u, la quale segua immediatamente u_q. Le ΣX_1, ΣX_2, ... non cambiano dunque bruscamente di valore per $u = u_q$. Ne viene che neppure i valori di N, che ne dipendono cambieranno bruscamente di valore per $u = u_q$: questi valori saranno dunque in generale rappresentati dalle ordinate d'una spezzata (fig. 74), la quale avrà i suoi vertici in corrispondenza di quelli fra i valori limiti di u, per i quali il punto d'applicazione d'una R'_μ od R''_μ qualunque, passi da un corpo all'altro del sistema, o cessi affatto d'appartenere al sistema stesso.

Quanto ai valori di F, essi dipendono unicamente da ΣX, ΣY, ΣM, e quindi saranno rappresentati da una spezzata simile alla superiore solo nel caso, che vi siano intervalli di u, per i quali l'uno o l'altro dei punti E non appartenga al sistema degli n corpi, altrimenti la F sarà rappresentata da una semplice retta.

Ricorderemo intanto che in questa discussione si suppone sempre, che il sistema degli n corpi sia stato ridotto al minor numero possibile rispetto a quella curva, da cui dipende la N che si considera (n. 18).

Le conchiusioni, a cui si giunse colla discussione del caso particolare ora sviluppato, sono immediatamente applicabili alle travi reticolari dei ponti. Per queste travi le forze R sono i pesi delle ruote dei veicoli, i punti E sono quelli a cui sono fissate le travi trasversali. Varrà dunque per le travi principali del ponte la seguente proposizione:

« Durante il passaggio d'uno o più veicoli, le cui ruote conservino le loro rispettive distanze, gli sforzi sopportati da un'asta qualunque, o dai punti d'appoggio, sono rappresentabili dalle ordinate d'una spezzata ».

33. Ogni forza R, che sollecita il sistema rigido, dà luogo a due componenti X ed Y e ad un momento M (n. 20). Fra queste quantità avranno luogo delle relazioni analoghe alle D) (n. 21), cioè le X, Y, M saranno eguali alla R moltiplicata per determinati coefficienti, che si manterranno inalterati, qualora la R non cambii nè direzione, nè punto di applicazione, ma varii solamente d'intensità. Se ora nelle espressioni di N ed F (n. 27), si sostituiscono a tutte le X, Y, M i loro valori espressi per le rispettive R, tanto il valore di N, che quello di F, si trasformano in funzioni lineari delle R. Ne viene che tanto gli sforzi sopportati dalle aste, che le reazioni dei punti d'appoggio sono funzioni lineari delle forze R, e potranno esprimersi con $N = \Sigma \delta_\mu R_\mu$, $F = \Sigma \varepsilon_\mu R_\mu$, dove i coefficienti δ_μ, ε_μ restano inalterati, finchè le forze mantengono inalterata la loro direzione, ed il loro punto d'applicazione.

Questa proprietà degli sforzi N ed F può del resto dedursi direttamente dalla considerazione, che ognuno di quegli sforzi non può essere che la somma algebrica dei singoli sforzi causati dalle singole forze; e che ogni singolo sforzo è necessariamente proporzionale direttamente alla forza che lo produce, qualora si supponga che tale forza varii bensì d'intensità, ma non cambii nè di direzione, nè di punto d'applicazione.

Se la forza è una sola, e si prenda l'asse delle x parallelo alla sua direzione, allora, detta X la forza, si avrà $N = \delta X$, $F = \varepsilon X$. E se inoltre il sistema rigido abbia tre punti obbligati a restare su tre curve fisse, dette F_1, F_2, F_3 le reazioni di queste curve, si potrà porre, analogamente alla D) del n. 21,

$$X_1 = \alpha_1 F_1 \qquad X_2 = \alpha_2 F_2 \qquad X_3 = \alpha_3 F_3$$
$$Y_1 = \beta_1 F_1 \qquad Y_2 = \beta_2 F_2 \qquad Y_3 = \beta_3 F_3$$
$$M_1 = \gamma_1 F_1 \qquad M_2 = \gamma_2 F_2 \qquad M_3 = \gamma_3 F_3$$

per cui le equazioni B) del n. 20 diverranno

$$X + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3 = 0$$
$$\beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \beta_3 F_3 = 0$$
$$M + \gamma_1 F_1 + \gamma_2 F_2 + \gamma_3 F_3 = 0.$$

Posto quindi

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

si avrà

$$F_1 = - \begin{vmatrix} X & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ M & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} : T, \text{ ecc.}$$

Se si prende l'origine degli assi nella direzione della forza X, si ha dunque

$$F_1 = - \frac{X}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \alpha_1}, \quad F_2 = - \frac{X}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \alpha_2}, \quad F_3 = - \frac{X}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \alpha_3},$$

e quindi

$$F_1 : F_2 : F_3 = \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} : \frac{\partial T}{\partial \alpha_3}.$$

Se invece si indicano con O_1, O_2, O_3 i punti d'incontro della F_2 colla F_3, della F_3 colla F_1 e della F_1 colla F_2, e si ponga l'origine successivamente nei tre punti O_1, O_2 ed O_3 si avrà

$$F_1 = - \frac{M_1}{T_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial \gamma_1}, \quad F_2 = - \frac{M_2}{T_2} \cdot \frac{\partial T}{\partial \gamma_2}, \quad F_3 = - \frac{M_3}{T_3} \cdot \frac{\partial T}{\partial \gamma_3}$$

dove M_1, M_2, M_3; T_1, T_2, T_3 sono i valori assunti da M e da T in quei tre punti. Ma in questo caso si ha

$$T_1 = \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial \gamma_1}, \quad T_2 = \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial \gamma_2}, \quad T_3 = \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial \gamma_3},$$

dunque

$$F_1 = - \frac{M_1}{\gamma_1}, \quad F_2 = - \frac{M_2}{\gamma_2}, \quad F_3 = - \frac{M_3}{\gamma_3}$$

nelle quali equazioni le $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ indicano le tre altezze del triangolo $O_1\, O_2\, O_3$. Se dunque si dicono q_1, q_2, q_3 le tre normali calate dai vertici del detto triangolo sulla direzione della X, si avrà $M_1 = q_1 X$, $M_2 = q_2 X$, $M_3 = q_3 X$, e quindi

$$F_1 \gamma_1 + X q_1 = 0, \quad F_2 \gamma_2 + X q_2 = 0, \quad F_3 \gamma_3 + X q_3 = 0,$$

come facilmente si può dimostrare anche direttamente.

III. Travi triangolari.

A. *Nozioni geometriche.*

34. Nella denominazione di *travi triangolari* si comprendono nel presente scritto tutti quei sistemi, che risultano da una serie di triangoli riuniti nel modo indicato al n. 17.

Ogni triangolo della serie, in una trave PQ (fig. 75), per es. il triangolo ABC, ha per lo meno un lato BC non comune ad alcun altro triangolo. Se questo lato si sopprime, la trave si decompone, per così dire, in due parti per sè rigide, la PAB e la QAC, le quali restano unite a snodatura nel punto A.

Se invece di sopprimere il lato BC, si sopprime un lato il quale sia comune ad un altro triangolo della serie, per es. il lato AB (fig. 76 e 77), che è comune al triangolo ABD, allora sono da distinguersi due casi, secondochè, cioè, nel triangolo ABD sia il lato BD (fig. 76), oppure AD (fig. 77) quello, che non è comune ad alcun altro triangolo della serie. Nel primo caso colla soppressione del lato AB la trave si decompone ancora in due parti per sè rigide, PAD e QAC, unite a snodatura in A; nel secondo invece le due parti rigide PDB e QAC, in cui si decompone la trave, restano collegate dalle due aste AD e BC, costituendo con quelle aste un quadrilatero deformabile.

Il primo e l' ultimo triangolo della serie hanno ciascuno due lati non comuni con altri triangoli. Sopprimendo uno di questi due lati per es. AB (fig. 78), la trave si decompone nella parte rigida QBC e nell' asta AC, le quali restano unite a snodatura in C, e costituiscono le due parti rigide, in cui si decompone la trave per la soppressione dell' asta AB. Se invece si sopprime il lato che è comune al secondo (o penultimo) triangolo della serie, per es. il lato BC, allora la trave si decompone nella parte rigida QDC, e nell' asta AB, le quali parti restano unite mediante le due aste AC e DB, e costituiscono, come nel caso generale, le due parti rigide, in cui si decompone la trave.

Quando sopprimendo un'asta, le due parti rigide in cui si decompone la trave, restano unite a snodatura in un punto, noi chiameremo un tal punto *centro di rotazione relativo a quell'asta*, o semplicemente *centro dell'asta,* quando la chiarezza non ne soffra. Qualora, sopprimendo un'asta, le due parti rigide restano unite da due aste, colle quali esse formano un quadrilatero deformabile, intenderemo prolungate queste due aste fino al loro punto d'incontro, e questo punto d'incontro sarà pure detto centro di rotazione relativo all'asta soppressa.

In tal modo per ogni asta di una trave triangolare vi sono sempre due parti rigide ad essa relative, quelle cioè in cui la trave si decompone, quando l'asta si sopprime; e per ogni asta vi è pure un centro che le è relativo.

35. Se le forze che sollecitano la trave sono tutte parallele fra loro, come quando essa è caricata da pesi, in tal caso la trave può essere semplicemente appoggiata su due punti, in modo che le reazioni dei punti d'appoggio siano parallele alle forze sollecitanti. Confrontando questo modo di appoggiare la trave col caso generale (n. 23), si vede che qui si hanno due soli punti, e che le due curve su cui essi devono trovarsi sono due rette normali alla direzione delle forze. Supponendo che le forze siano pesi, le reazioni degli appoggi saranno verticali.

Se invece la trave ha un punto fisso, intorno al quale possa muoversi a cerniera, ed un altro punto obbligato a restare sopra una curva circolare, come per es. avviene nei ponti ad arco snodati, allora sebbene le forze sollecitanti siano parallele (verticali), le reazioni saranno oblique.

36. Si consideri ora una trave semplicemente appoggiata a due punti, e sollecitata

da una sola forza (peso) P, che si trasporti parallela a se stessa. Si supponga che questo peso non sia immediatamente applicato alla trave, ma sia sostenuto da travi semplici $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, ... (fig. 79), disposte l'una in seguito all'altra, e semplicemente appoggiate ai sostegni verticali e_1, e_2, e_3, ...; e che questi ultimi finalmente trasmettano l'azione della forza P ai punti E_1, E_2, ..., E_n. Di questi punti il primo e l'ultimo potranno non appartenere alla trave; degli altri supporremo che siano nodi qualunque della trave. Anche i punti A e B d'appoggio supponiamo esser nodi della trave.

Ciò premesso, si considerino ora i due punti d'appoggio A e B ed i punti E in relazione a quelle due parti rigide, in cui si decompone sempre una trave triangolare, quando si sopprime un'asta (n. 34). Quanto ai punti d'appoggio, data l'asta e determinate le due parti rigide che le corrispondono, può avvenire che uno dei due punti d'appoggio, per es. A, appartenga all'una delle due parti rigide, e l'altro punto d'appoggio (B) all'altra parte: oppure che ambedue i punti d'appoggio A e B appartengano alla medesima parte rigida. Quanto ai punti E, prescindendo dai due estremi E_1 ed E_n, che possono non appartenere alla trave, gli altri potranno generalmente suddividersi in due gruppi, comprendendo in un gruppo quelli che appartengono all'una, e nell'altro quelli che appartengono all'altra delle due parti rigide relative ad una data asta. Si avranno allora per es. i punti E_2, E_3, ..., E_r appartenenti alla prima parte rigida, ed i seguenti E_{r+1}, E_{r+2}, ..., E_{n-1}, appartenenti alla seconda parte.

Se però le due parti rigide fossero unite a snodatura, come quelle che competono all'asta BC (fig. 75), e che nel nodo A comune alle due parti cadesse uno dei punti E, per es. E_λ, allora questo punto E_λ può riguardarsi come comune alle due parti rigide. I punti precedenti invece E_2, ..., $E_{\lambda-1}$ apparterrebbero esclusivamente alla prima parte rigida, i seguenti $E_{\lambda+1}$, ..., E_{n-1} esclusivamente alla seconda.

Avuto riguardo a ciò che in seguito si esporrà, meritano attenzione speciale i punti E_r ed E_{r+1}, sopra indicati, cioè l'ultimo appartenente alla prima parte rigida, ed il primo appartenente alla seconda; come pure il punto comune E_λ. Questi punti E_r, E_{r+1}, E_λ saranno quindi detti in seguito *punti di passaggio.*

37. Come casi speciali di quelli ora considerati, sono da rilevarsi i seguenti:

Che una delle due parti rigide manchi affatto di punti E; nel qual caso, invece di due punti di passaggio E_r, E_{r+1}, ve ne sarà uno solo;

Che ad una delle due parti rigide non appartengano altri punti E, che il punto comune E_λ;

Che i due gruppi in cui si suddividono i punti E non costituiscano due serie di punti immediatamente successivi, come i due gruppi E_2, E_3, ..., E_r ed E_{r+1}, E_{r+2}, ..., E_{n-1}, sopra indicati, ma che vi siano trasposizioni da una serie all'altra. Tale sarebbe per es. il caso, in cui nella serie ordinata E_2, E_3, ..., E_{n-1} di punti ve ne fossero quattro successivi E_r, E_{r+1}, E_{r+2}, E_{r+3}, dei quali i due E_r, E_{r+2} appartenessero alla prima parte rigida, e gli altri due E_{r+1}, E_{r+3} appartenessero alla seconda. In tal caso i due gruppi sarebbero E_2, E_3, ..., E_r, E_{r+2} ed E_{r+1}, E_{r+3}, ..., E_{n-1}. Vedremo più innanzi (n. 51) un esempio di simile trasposizione.

B. *Forze interne nelle travi a reazione verticale.*

38. Premesse le superiori considerazioni, il primo problema da risolvere sarà quello di rappresentare graficamente la legge con cui variano le reazioni sugli appoggi, e gli sforzi sopportati da un'asta qualunque del sistema durante il transito del peso P, che supporremo si muova lungo la $M_1 M_n$ (fig. 79), partendo dalla posizione iniziale M_1, e procedendo fino alla posizione finale M_n.

Come è chiaro si tratta qui di un caso particolare della ricerca fatta al n. 32; per cui tanto le reazioni sugli appoggi, quanto gli sforzi sopportati dalle aste saranno in generale rappresentabili da linee rette o da linee spezzate, che ora si tratta di costruire.

Prima però di procedere a tale costruzione, essendo le travi triangolari di comunissimo uso nella pratica, non sembra fuor di luogo il dimostrare direttamente per questa specie di travi, che quelle reazioni e quegli sforzi sono realmente rappresentabili da linee rette semplici o da spezzate.

Siano dunque $P_1, P_2, \ldots, P_n$ le pressioni, che durante il transito del peso P, vengono trasmesse da sostegni $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ai punti $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Di queste pressioni la prima e l'ultima, nella disposizione della fig. 79, non agiscono sulla trave.

Si cerchi anzitutto la reazione F_1 dell'appoggio in A. Prendendo i momenti rispetto al punto B, ed indicando con $b_2, b_3, \ldots$ i bracci di leva (positivi o negativi) delle $P_2, P_3, \ldots$ rispetto al punto B, e con l la distanza AB, si avrà

$$P_2\, b_2 + P_3\, b_3 + \ldots + P_{n-1}\, b_{n-1} - F_1\, l = 0. \tag{1}$$

Ciò posto, indichiamo con u la distanza variabile del peso P dalla verticale condotta per M_1, e poniamo $M_1 M_2 = d$, $M_{n-1} M_n = d'$, $AM'_1 = g$, $BM'_n = g'$, $l + g + g' = L$.

Finchè il peso P resta sopra la trave semplice $M_1 M_2$, cioè finchè $o < u < d$, si avrà

$$P_1 = P\,\frac{d-u}{d}, \quad P_2 = P\,\frac{u}{d} \tag{2}$$

e le altre pressioni $P_3, P_4 \ldots$ saranno tutte nulle. Dunque in tale supposizione la (1) diventa

$$F_1\, l = P\,\frac{b_2}{d}\,.\,u\,. \tag{3}$$

Se il peso P, oltrepassato N_2, trovasi fra M_2 ed M_{n-1}, il suo momento rispetto a B sarà sempre eguale alla somma dei momenti delle componenti P_2, $P_3, \ldots$ rispetto allo stesso punto. Si potrà dunque porre in questo caso

$$P\,(l + g - u) = P_2\, b_2 + P_3\, b_3 + \ldots + P_{n-1}\, b_{n-1}$$

e quindi la (1) diventerà

$$F_1\, l = P\,(l + g - u). \tag{4}$$

Se finalmente il peso P trovasi fra M_{n-1} ed M_n si avrà

$$P_{n-1} = P\,\frac{L-u}{d'}, \quad P_n = P\,\frac{u-(L-d')}{d'}: \tag{5}$$

le altre pressioni $P_2, P_3, \ldots, P_{n-2}$ saranno nulle. La (1) diventa quindi in questo caso

$$F_1 l = P \frac{b_{n-1}}{d'} (L - u). \tag{6}$$

Dalle equazioni (3), (4) e (6) si rileva che F_1 è sempre una funzione di primo grado di u, la quale però non si conserva la stessa nei tre intervalli $M_1 M_2$, $M_2 M_{n-1}$, $M_{n-1} M_n$. Prendendo dunque u come ascissa, il valore di F_1 sarà rappresentabile entro ognuno di questi intervalli dalle ordinate d'una linea retta, diversa però da un intervallo all'altro.

Siano s', s'', s''' le tre rette, relative ai tre intervalli. Quando il peso P trovasi precisamente in M_2, ciò che ha luogo per $u = d$, tanto la (3) che la (4) danno per F_1 il medesimo valore $F_1 = P\frac{b_2}{l}$, poichè $l + g - d = b_2$. Similmente quando il peso P trovasi in M_{n-1}, ciò che ha luogo per $u = L - d'$, tanto la (4) che la (6) danno per F_1 il medesimo valore $F_1 = - P\frac{g' - d'}{l}$, poichè $b_{n-1} = d' - g'$. Dunque la retta s' taglia la retta s'' in un punto situato nella verticale condotta per M_2: e similmente la retta s'' taglia la retta s''' in un punto situato nella verticale condotta per M_{n-1}. Inoltre per $u = 0$, $u = L$, ed $u = l + g$, si ha $F_1 = 0$.

Risulta adunque, riassumendo, che il valore di F_1, ossia della reazione sul punto A, durante il transito del peso P da M_1 ad M_n è rappresentato dalle ordinate di una spezzata a tre lati, la quale comincia in M_1, e termina in M_n, ed ha due vertici, uno sulla verticale per M_2, l'altro sulla verticale per M_{n-1}: il lato intermedio della spezzata taglia inoltre l'orizzontale $M_1 M_n$ nel punto dov'essa è incontrata dalla verticale condotta per il punto B.

Trovato in generale l'andamento della spezzata, facile riuscirebbe la discussione dei casi particolari, quali sarebbero quelli, in cui mancassero i punti E nell'intervallo fra M'_1 ed A, o fra A e B, oppure fra B ed M'_n, ecc.

Un analogo risultato si troverebbe naturalmente per la reazione sul punto B, il cui valore per l'intervallo da M_1 ad M_2 sarà dato dalla

$$F_2 l = - P \frac{g - d}{d} \cdot u, \tag{7}$$

per l'intervallo da M_2 ad M_{n-1} dalla

$$F_2 l = P (u - g), \tag{8}$$

e finalmente per l'intervallo da M_{n-1} ad M_n dalla

$$F_2 l = P \frac{L - u}{d'} (L - g - d'). \tag{9}$$

39. Cerchiamo ora la legge secondo la quale varia lo sforzo N in un'asta qualunque della trave. Soppressa quest'asta, la trave, come sopra si è detto, si decompone in due parti rigide, l'una a destra l'altra a sinistra, unite fra loro sia a snodatura sia mediante due aste (n. 34). Se, soppressa l'asta, si vuole conservato l'equilibrio di una delle due parti, per es. di quella a sinistra, bisognerà all'asta soppressa sostituire una forza equivalente allo sforzo N sopportato dall'asta.

Questa parte a sinistra sarà allora sollecitata dalla forza N, dalla reazione o dalle reazioni che la parte a destra esercita su quella a sinistra in causa della snodatura o delle due aste che uniscono le due parti, inoltre da quelle forze $P_2, P_3, \ldots$, che hanno i loro punti d'applicazione E sulla parte a sinistra, e finalmente dalla reazione F_1 dell'appoggio A, o dalle reazioni F_1, F_2 degli appoggi A e B, qualora uno od ambedue quegli appoggi appartengano alla parte a sinistra (n. 36).

Suppongasi ora che il centro dell'asta che si considera, non si trovi nella direzione dell'asta stessa, e si riferiscano i momenti a questo centro. Sia SS (fig. 79) l'asta in questione, O il suo centro, ed $OQ = q$ la normale calata dal punto O sulla direzione dell'asta. Siano inoltre $b'_2, b'_3, \ldots$ i bracci di leva delle $P_2, P_3, \ldots$, ed f_1, f_2 i bracci di leva delle F_1, F_2 rispetto allo stesso centro O dell'asta.

Si avrà allora per l'equilibrio

$$N_q + P_2 b'_2 + P_3 b'_3 + \ldots - \overline{F_1 f_1} - \overline{F_2 f_2} = 0. \tag{10}$$

I momenti relativi alla reazione della snodatura, od alle reazioni delle aste di collegamento non figurano nell'equazione, poichè essi sono nulli rispetto al centro dell'asta. I termini $P_2\, b'_2$, $P_3\, b'_3, \ldots$, saranno tanti, quante sono le forze $P_2, P_3, \ldots$, i cui punti E sono nodi della parte rigida a sinistra; e quanto ai termini $F_1 f_1$, $F_2 f_2$, essi figureranno o no nell'equazione, secondochè i punti di appoggio A e B appartengono o no alla parte sinistra che si considera. Indichiamo questa eventualità con una linea orizzontale tirata sopra i termini stessi.

Ora le $P_2, P_3, \ldots$, e le F_1, F_2 sono o nulle o funzioni di primo grado della u; dunque il valore di N sarà sempre, dovunque si trovi il peso P fra M_1 ed M_n, una funzione di primo grado della u.

Vediamo ora entro quali intervalli della u, questa funzione si mantenga inalterata. Finchè P si trova fra M_1 ed M_2, si è trovato

$$P_2 = P\frac{u}{d}, \quad P_3 = P_4 = \ldots = P_n = 0, \quad F_1 = P\frac{b_2}{ld}u, \quad F_2 = -P\frac{g-d}{ld}u,$$

dunque l'equazione superiore diverrà, finchè $o < u < d$,

$$N_q + P\frac{b'_2}{d}u - \overline{P\frac{b_2 f_1}{ld}u} + \overline{P\frac{(g-d)f_2}{ld}u} = 0. \tag{11}$$

Se E_r sia, nella serie dei punti E, l'ultimo che appartenga alla parte a sinistra, e P trovisi fra M_2 ed M_r, il momento di P rispetto al centro dell'asta, eguaglia la somma dei momenti delle componenti $P_2, P_3, \ldots, P_r$ rispetto allo stesso punto. Sarà adunque

$$P(f_1 + g - u) = P_2 b'_2 + P_3 b'_3 + \ldots + P_r b'_r$$

e sarà inoltre $P_{r+1} = P_{r+2} = \ldots = P_n = 0$. Di più per tutto l'intervallo da M_2 ad M_{n-1}, e quindi anche per quello da M_2 ad M_r, si ha

$$F_1 = P\frac{l+g-u}{l}, \quad F_2 = P\frac{u-g}{l}.$$

Dunque fra M_2 ed M_r si avrà dalla (10)

$$Nq + P(f_1 + g - u) - \overline{P\frac{f_1(l+g-u)}{l}} - \overline{P\frac{f_2(u-g)}{l}} = 0. \tag{12}$$

Se il punto seguente E_{r+1} appartiene alla parte rigida a destra, ed il peso P trovisi fra M_r ed M_{r+1}, si ha, come è facile dedurre,

$$P_r = P \frac{(l+g-b_{r+1})-u}{b_r-b_{r+1}}, \quad P_{r+1}=P \frac{u-(l+g-b_r)}{b_r-b_{r+1}}$$

ed inoltre $P_2=P_3=...=P_{r-1}=0$, e così pure $P_{r+2}=P_{r+3}=...=P_n=0$; mentre i valori di F_1 e di F_2 restano i medesimi come per l'intervallo precedente.

Dunque fra M_r ed M_{r+1} la (10) diventerà

$$Nq + P \frac{b'_r(l+g-b_{r+1}-u)}{b_r-b_{r+1}} - P\frac{\overline{f_1(l+g-u)}}{l} - P\frac{\overline{f_2(u-g)}}{l} = 0. \qquad (13)$$

Se E_{r+1} sia, nella serie dei punti E, il primo che appartiene alla parte destra, e P trovisi fra M_{r+1} ed M_{n-1}, allora si ha $P_2=P_3=...=P_r=0$, cioè la parte sinistra non è più sollecitata dalla forza P, e l'equazione diverrà per questo intervallo

$$Nq - P\frac{\overline{f_1(l+g-u)}}{l} - P\frac{\overline{f_2(u-g)}}{l} = 0. \qquad (14)$$

Finalmente se P trovisi fra M_{n-1} ed M_n, anche in questo caso la parte a sinistra non è più sollecitata dalla forza P, ed è soggetta eventualmente alle due reazioni F_1 ed F_2, che in questo caso hanno i valori

$$F_1 = P\frac{b_{n-1}}{ld'}(L-u), \qquad F_2 = P\frac{L-g-d'}{ld'}(L-u):$$

per questo ultimo intervallo si avrà dunque

$$Nq - P\frac{\overline{f_1 b_{n-1}(L-u)}}{ld'} - P\frac{\overline{f_2(L-g-d')(L-u)}}{ld'} = 0. \qquad (15)$$

Dalle formole (11)...(15) risulta che la funzione di primo grado in u, esprimente il valore di N, resta inalterata entro i cinque intervalli seguenti: da M_1 ad M_2, da M_2 ad M_r, da M_r ad M_{r+1}, da M_{r+1} ad M_{n-1} e da M_{n-1} ad M_n. Quando il peso P trovasi precisamente nei punti limiti M_2, M_r, M_{r+1} ed M_{n-1}, si ha per N lo stesso valore, sia che si prenda l'equazione dell'intervallo che precede, sia che si prenda quella dell'intervallo che segue il punto limite, come facilmente si può verificare colle equazioni superiori. Siccome poi si ha $N=0$ tanto per il punto M_1 quanto per il punto M_n, così riassumendo si vede che i successivi valori della N, ossia dello sforzo dell'asta, durante il transito del peso P da M_1 ad M_n, sono rappresentabili in generale dalle ordinate d'una spezzata a cinque lati, la quale comincia in M_1, finisce in M_n ed ha i suoi quattro vertici nelle verticali condotte per i punti M_2, M_r, M_{r+1}, ed M_{n-1}.

40. Fra i diversi casi particolari, rileveremo i seguenti:

a) Se l'asta che si considera è tale, che l'appoggio A appartenga alla parte rigida a sinistra e sia compreso fra le verticali condotte per M_2 ed M_r, e l'appoggio B

analogamente appartenga alla parte rigida a destra, e sia compreso fra le verticali condotte per M_{r+1} ed M_{n-1}, allora le equazioni (12) e 14) diventano

$$Nq + P(f_1 + g - u) - P\frac{f_1(l+g-u)}{l} = 0$$

$$Nq - P\frac{f_1(l+g-u)}{l} = 0 .$$

Per $u = g$ si ha dalla prima $N = 0$; per $u = l + g$ si ha dalla seconda $N = 0$. Dunque:

« Quando a ciascuna delle due parti rigide relative ad un'asta appartenga un punto d'appoggio nelle condizioni sopra dette, la spezzata dell'asta taglia la $M_1 M_n$ nei due punti, dove questa è incontrata dalle verticali condotte per A e per B».

In questo stesso caso le (11) e (15) diventano

$$Nq + P\frac{b'_2}{d}u - P\frac{b_2 f_1}{ld}u = 0$$

$$Nq - P\frac{f_1 b_{n-1}(L-u)}{ld'} = 0 .$$

b) Se ora M_2 si trovi sulla verticale condotta per A ed M_{n-1} sulla verticale condotta per B, sarà $b_2 = l$, $b'_2 = f_1$, $b_{n-1} = 0$, e quindi per i due intervalli $M_1 M_2$ ed $M_{n-1} M_n$ si ha $N = 0$, cioè:

« Quando a ciascuna delle due parti rigide spettanti ad un'asta appartenga un punto d'appoggio, ed i due punti E_2, E_{n-1} si trovino rispettivamente sulle verticali condotte per A e per B, allora l'asta non soffre alcuno sforzo per tutte le posizioni di P esterne alle verticali stesse».

c) Se quelle fra le forze $P_2, P_3, \ldots$, che sollecitano la parte sinistra, sono tutte nulle, ed i due punti di appoggio A e B appartengono alla parte destra, la (10) darà $N = 0$. Se invece siano tutte nulle quelle fra le $P_2, P_3, \ldots$, che sollecitano la parte destra, ed ambedue i punti d'appoggio A e B appartengano alla sinistra, allora si avrà

$$P_2 b'_2 + P_3 b'_3 + \ldots - F_1 f_1 - F_2 f_2 = 0$$

poichè le forze $P_2, P_3, \ldots, P_n, -F_1, -F_2$ hanno sempre un momento nullo rispetto a qualunque punto del piano. Anche in tal caso dunque si ha $N = 0$. Siccome poi quando l'uno dei due casi ora considerati si avvera per la parte sinistra, l'altro si avvera per la parte destra e viceversa, così si può dire:

« Finchè durante il transito del peso P una delle due parti rigide appartenenti ad un'asta non è soggetta ad alcuna azione dovuta al peso P, nè ad alcuna reazione dei punti d'appoggio, lo sforzo in quell'asta è nullo ». Ciò che del resto è per se stesso evidente.

In tal caso una parte della spezzata coincide colla retta $M_1 M_n$.

d) Se i quattro punti E_r, E_{r+1}, E_{r+2}, E_{r+3} sono tali, che il primo ed il terzo appartengano alla parte rigida a sinistra, ed il secondo ed il quarto alla parte rigida a destra, ed il peso P trovisi nell'intervallo fra M_{r+1} ed M_{r+2}, allora si avrà

$$P_{r+1} = P\frac{(l+g-b_{r+2})-u}{b_{r+1}-b_{r+2}} , \quad P_{r+2} = P\frac{u-(l+g-b_{r+1})}{b_{r+1}-b_{r+2}}$$

ed entro l'intervallo suddetto si avrà dalla (10)

$$Nq + P\frac{b'_{r+2}(u+b_{r+1}-l-g)}{b_{r+1}-b_{r+2}} - P\frac{f_1(l+g-u)}{l} - P\frac{f_2(u-g)}{l} = 0, \qquad (16)$$

e la spezzata dell'asta avrebbe sei lati invece di cinque. Similmente si procederebbe se vi fossero altre trasposizioni di questo genere fra i punti E.

e) Se l'asta avesse un solo punto di passaggio E_λ (n. 36), un tal punto sarebbe pure centro dell'asta, e quindi il momento della P_λ rispetto a quel punto sarebbe sempre nullo. Se ne deduce facilmente che la funzione di primo grado di u, che rappresenta il valore di N resterebbe inalterata da M_2 ad M_λ e cambierebbe poi da M_λ ad M_{n-1}. La spezzata in questo caso avrà dunque solamente quattro lati: i suoi punti estremi resteranno gli M_1 ed M_n, ed i tre vertici si troveranno sulle verticali condotte per M_2, M_λ ed M_{n-1}.

Non ci occuperemo d'altri casi particolari, che facilmente possono svolgersi in base alle superiori equazioni.

41. Nella superiore discussione si è supposto che il centro dell'asta, che si considera, non si trovi nella direzione dell'asta stessa. Se tale condizione non è adempiuta, lo sforzo N dell'asta diviene generalmente infinito.

Atteso però il significato che sopra si è dato al centro dell'asta (n. 34), bisogna eccettuare il caso, in cui questo centro sia uno dei nodi dell'asta, come sarebbe il caso per l'asta AB (fig. 76), il cui nodo A è anche il suo centro. In tal caso lo sforzo dell'asta non diventa infinito.

Per un'asta in tali condizioni possono avvenire due casi, cioè 1° che l'altro nodo B non sia uno dei punti E; 2° che il nodo B sia uno dei punti E. Nel primo caso si vede facilmente che gli sforzi delle tre aste BD, BA, BC, durante il transito del peso P, si equilibrano costantemente intorno al punto B, e mantengono costanti i loro rapporti. Ora gli sforzi di una delle due aste BD e BC sono rappresentabili dalle ordinate d'una spezzata; dunque anche gli sforzi della BA godranno della stessa proprietà.

Nel secondo caso l'azione del peso P sul nodo B, durante il transito, è semplicemente una forza verticale, applicata in B, cioè una delle P_2, P_3, ..., P_n, la quale od è nulla, oppure si esprime mediante una funzione lineare della variabile u. Il punto B adunque è sempre in equilibrio, durante il transito del peso P, sotto l'azione di questa forza e degli sforzi delle tre aste in esso concorrenti. Ora siccome due di questi sforzi, cioè quelli dovuti alle aste BD e BC, sono essi pure funzioni lineari della u, così anche lo sforzo dell'asta BA sarà una funzione lineare della u. Infatti decomponendo ciascuno degli sforzi delle BD e BC in una forza orizzontale ed una verticale, e sommando poi algebricamente tutte le forze orizzontali e tutte le verticali applicate in B, non comprese quelle provenienti dall'asta BA, si potrà indicare la somma delle orizzontali con $\alpha+\beta u$, e quella delle verticali con $\alpha'+\beta' u$. Ora queste due somme, ossia le due quantità $\alpha+\beta u$ ed $\alpha'+\beta' u$, per l'equilibrio, devono dare sempre una risultante diretta nel senso dell'asta BA; queste quantità devono dunque, qualunque sia il valore di u, conservare fra loro un rapporto costante. Ora ciò non sarebbe possibile, essendo u variabile, se i

rapporti $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$ non fossero eguali fra loro. Posto dunque $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = k$, la risultante nella direzione della BA, ossia lo sforzo di quest'asta sarà espresso da $\sqrt{(\alpha + \beta u)^2 + (\alpha' + \beta' u)^2}$, cioè da $(\alpha + \beta u)\sqrt{1 + k^2}$, cioè questo sforzo è una funzione lineare di u.

Lo sforzo della BA sarà dunque rappresentabile in ambedue i casi dalle ordinate d'una spezzata.

Riassumendo adunque gli ottenuti risultati, potremo conchiudere:

« Durante il transito di un peso P nelle supposte condizioni, tanto le reazioni sugli appoggi, quanto lo sforzo sopportato da un'asta qualunque di una trave triangolare, sono rappresentabili dalle ordinate d'una spezzata ».

Veniamo ora alla costruzione di tali spezzate ed alla determinazione degli sforzi sopportati dalle aste.

IV. Spezzate delle aste.

A. *Spezzate quando la trave non si estende oltre gli appoggi.*

42. Si consideri anzitutto il caso che la trave non si prolunghi oltre i punti d'appoggio, che E_2 ed E_{n-1} (fig. 79) cadano rispettivamente in A e B, o nelle verticali condotte per questi punti, e che i tratti $M_1 M_2$, $M_{n-1} M_n$ si annullino. In tale supposizione tanto la spezzata relativa alle pressioni sui punti d'appoggio, quanto quelle relative alle singole aste, restano comprese fra le due verticali condotte per i punti d'appoggio.

Per maggiore chiarezza del disegno, la spezzata, che si tratta di costruire, sarà riferita non alla retta $M_1 M_n$, ma ad una sua parallela $A_1 B_1$ (fig. 80), tirata sotto lo schema della trave.

Per costruire una spezzata qualunque basta conoscere i suoi due punti estremi, ed i suoi vertici successivi. Congiunti allora per ordine questi punti con linee rette si ha la spezzata che si cerca.

La spezzata relativa alla pressione in A si riduce, nel caso attuale, ad una semplice linea retta, compresa fra le due verticali passanti per i punti d'appoggio; poichè, essendosi annullati i due tratti $M_1 M_2$ ed $M_{n-1} M_n$, il primo ed ultimo lato della spezzata trilatera sopra considerata (n. 38) sono spariti.

Quando il peso è in M_2 (fig. 80) il valore di F_1, dato dalla (4) diventa $F_1 = P$, essendo in questo caso $g = 0$, $u = 0$. Quando il peso è in M_{n-1}, si ha dalla stessa $F_1 = 0$, essendo in questo caso $g = 0$, $u = l$. Presa dunque nella scala delle forze $A_1 C_1 =$ al peso P, e congiunto C_1 con B_1, la $C_1 B_1$, riferita alla $A_1 B_1$, rappresenterà colle sue ordinate le pressioni sopportate dall'appoggio A, durante il passaggio del peso P.

Se la scala con cui si valutano le forze fosse tale, che il peso P fosse rappresentato dalla distanza orizzontale AB fra i punti d'appoggio, allora si prenderebbe $A_1 C_2 = AB$, e la $C_2 B_1$ sarebbe la retta cercata.

Se si prende sulla verticale condotta per A un punto C_3 ad arbitrio, e si tira

la $C_3 B_1$, si vede che due ordinate qualunque DM_3, GN_3 della $C_3 B_1$ hanno fra loro lo stesso rapporto, che due ordinate corrispondenti DM_1, GN_1 della $C_1 B_1$.

Se si tratta adunque dei rapporti fra i valori delle pressioni sopportate dall'appoggio A, e non del loro valore effettivo, può servire una retta qualunque $C_3 B_1$, che congiunga il punto B_1 con un punto qualsiasi della verticale condotta per A.

La retta $C_3 B_1$, può considerarsi come omologica-affine della $C_1 B_1$ rispetto alla $A_1 B_1$, presa come asse di omologia.

Ricercando le spezzate relative tanto ai punti d'appoggio, come alle singole aste del sistema, occorre spesso, come si vedrà in seguito, di considerare delle linee o spezzate analoghe alle $C_1 B_1$, $C_2 B_1$, $C_3 B_1$ sopra costruite. Per maggiore chiarezza riesce quindi opportuno d'introdurre le seguenti denominazioni: *Spezzata vera*, quella, la quale, come la $C_1 B_1$, dà colle sue ordinate lo sforzo realmente sopportato dal punto d'appoggio, o dall'asta; *Spezzata relativa alla luce*, quella, la quale, come la $C_2 B_1$, dà colle sue ordinate lo sforzo nel caso che la distanza fra i punti d'appoggio (la luce) fosse assunta a rappresentare il peso P; finalmente *Spezzata omologica*, quella, le cui ordinate, come quelle della C_3B_1, sono semplicemente proporzionali a quelle della spezzata vera. Naturalmente anche la spezzata relativa alla luce è anch'essa omologica-affine della spezzata vera.

Quanto alla reazione in B, per averne la spezzata vera, basta portare la $A_1 C_1$ in $B_1 C'_1$ e congiungere C'_1 con A_1. Similmente si possono avere la spezzata relativa alla luce, ed una spezzata omologica qualunque relative alla reazione in B.

43. Veniamo ora alla spezzata relativa ad un'asta qualunque, per es. all'asta SS (fig. 81), la quale abbia il centro O, due punti di passaggio M ed N, e soddisfaccia, quanto ai punti d'appoggio, alle condizioni del n. 40 *a*). In tal caso la spezzata sarà generalmente trilatera, essendosi annullati il primo e l'ultimo lato della spezzata a cinque lati (n. 39 in fine). I suoi punti estremi cadranno in A_1 e B_1, ed i suoi due vertici cadranno sulle verticali condotte per i punti M ed N, i quali corrispondono ai punti E_r ed E_{r+1} del caso generale. La spezzata si potrà dunque costruire, tostochè siano trovati i suoi due vertici su queste verticali.

Le ordinate N_m, N_n relative a questi due vertici, si avranno dalla (13), omettendo l'ultimo termine, e ponendo prima $u = l + g - b_r$, il quale valore darà l'ordinata N_m; e poscia $u = l + g - b_{r+1}$, col che si otterrà il valore N_n. Si avrà così per la prima ordinata

$$N_m q + P b'_r - P \frac{f_1 b_r}{l} = 0$$

e per la seconda

$$N_n q - P \frac{f_1 b_{r+1}}{l} = 0.$$

Abbassate le verticali MM', NN', OO' si ponga $A_1 M' = m$, $B_1 N' = n$, $A_1 O' = a$, $B_1 O' = b$, ed essendo $A_1 B_1 = l$, si avrà

$$b'_r = a - m,\ b_r = l - m,\ b_{r+1} = n,\ f_1 = a,$$

e quindi il valore della prima ordinata sarà

$$N_m = P \frac{bm}{lq}$$

e quello della seconda sarà

$$N_n = P \frac{an}{lq}.$$

Per costruire questi valori si può procedere come segue.

Calata sulla SS la normale OQ, si prenda $A_1 Q_1 = OQ$, e fatto $A_1 P$ eguale al peso P nella scala delle forze, si tiri $B_1 Q_2$ parallela a PQ_1. Preso poscia $O'Q'$ eguale ad $A_1 Q_2$ si tirino per A_1 e per B_1 due rette $A_1 M_0$, $B_1 N_0$, rispettivamente normali alle $B_1 Q'$, $A_1 Q'$. Si otterranno così sulle verticali condotte per M ed N due punti M_0 ed N_0, che sono i vertici cercati della spezzata. La spezzata che si cerca è dunque la $A_1 M_0 N_0 B_1$. Infatti si ha $OQ = q$, $A_1 P = P$, $A_1 B_1 = l$, e quindi $A_1 Q_2 = \frac{lq}{P}$. Ma $A_1 M' : M' M_0 = O'Q' : O'B_1$; ossia per essere $A_1 M' = m$, $O'Q' = A_1 Q_2 = \frac{lq}{P}$, $O'B_1 = b$, sarà

$$M' M_0 = P \frac{bm}{lq}.$$

Similmente si dimostra che

$$N' N_0 = P \frac{an}{lq}.$$

Allo stesso risultato si può arrivare colla seguente costruzione. Preso $O'Q' = OQ$ (fig. 82), si tirino per A_1 e per B_1 due rette $A_1 M_1$ e $B_1 N_1$ rispettivamente normali alle $B_1 Q'$, $A_1 Q'$. Si projettino poi in M'_1, N'_1 i punti M_1, N_1, e preso $A_1 P = P$ nella scala delle forze, si tirino per P le PM'_0, PN'_0 rispettivamente parallele alle $B_1 M'_1$, $B_1 N'_1$. Fatto poi $M'M_0 = A_1 M'_0$, $N' N_0 = A_1 N'_0$, si avrà la spezzata $A_1 M_0 N_0 B_1$, che si cercava.

Questa spezzata è, come risulta dalla costruzione, la spezzata vera dell'asta SS, e rappresenta quindi colle sue ordinate gli sforzi sopportati dall'asta durante il transito del peso P.

44. Se si volesse la spezzata relativa alla luce, la costruzione sarebbe più semplice, poichè in tal caso dovendosi porre $P = l$, i valori delle ordinate dei vertici diventano

$$N_m = \frac{bm}{q}, \qquad N_n = \frac{an}{q}.$$

Preso dunque (fig. 83) $O'Q' = q$, basta tirare le $A_1 M_1$, $B_1 N_1$ rispettivamente normali a $B_1 Q'$, $A_1 Q'$ e la $A_1 M_1 N_1 B_1$ sarà la spezzata relativa alla luce, che si cercava.

Se è data la spezzata relativa alla luce si può facilmente dedurne la spezzata vera, o viceversa. Basta infatti aumentare o diminuire le ordinate corrispondenti ai punti M′ ed N′ nel rapporto delle due lunghezze l e P, valutata quest'ultima nella scala delle forze.

Che se trattisi di costruire semplicemente una spezzata omologica, si osservi che per tale spezzata basta che le ordinate corrispondenti ai punti M′ ed N′ abbiano il rapporto $\frac{N_m}{N_n}$, cioè $\frac{bm}{an}$. La quantità q, ossia la distanza $O'Q'$ diventa quindi arbitraria. Per costruire una spezzata omologica basta adunque prendere ad arbitrio

un punto Q' (fig. 84) sulla verticale condotta per O, e tirare le rette $A_1 M_2$; $B_1 N_2$ rispettivamente normali alle $B_1 Q'$, $A_1 Q'$. La spezzata $A_1 M_2 N_2 B_1$ sarà la cercata.

Si osservi intanto che per la costruzione di una tale spezzata omologica non occorre conoscere nè l'inclinazione dell'asta rispetto all'orizzontale, nè il suo braccio di leva rispetto al proprio centro, bastando conoscere la posizione dei punti M', N', O' rispetto ai punti A_1 e B_1. Ora siccome d'altra parte la spezzata omologica, avendo le sue ordinate proporzionali ai veri sforzi sopportati dall'asta, è atta a rappresentare la legge con cui quegli sforzi variano durante il transito del peso P, così si potrà stabilire la proposizione:

« La legge con cui variano gli sforzi d'un'asta durante il transito d'un peso, dipende unicamente dalle distanze orizzontali del suo centro e dei suoi punti di passaggio dai punti d'appoggio ».

45. Nel triangolo $A_1 B_1 Q'$ (fig. 82 ed 83) le tre rette $O'Q'$, $A_1 M_1$, $B_1 N_1$ sono le tre normali calate dai vertici del triangolo sui lati opposti; similmente le tre rette $O'Q'$, $A_1 M_0$, $B_1 N_0$ (fig. 81), e le tre $O'Q'$, $A_1 M_2$, $B_1 N_2$ (fig. 84). Queste normali passano sempre, come è noto, per un medesimo punto; dunque:

« I lati estremi delle spezzate trilatere ora considerate si tagliano sempre nella verticale passante per il centro dell'asta ».

Questa proprietà facilita la costruzione della spezzata. Trattandosi infatti di costruire la spezzata vera, dopo determinato il punto Q', basterà tirare una delle due rette $A_1 M_0$, $B_1 N_0$ (fig. 81), prolungandola, se occorre, finchè essa incontri in un punto V la verticale condotta per il centro dell'asta; l'altra retta si avrà allora congiungendo questo punto V con A_1 oppure con B_1. Lo stesso dicasi quando si tratta di costruire la spezzata relativa alla luce.

Più semplice ancora riesce la costruzione per trovare una spezzata omologica. Essendo infatti in tal caso arbitrario il punto Q', lo sarà pure il punto V. Per cui la costruzione si riduce semplicemente alla seguente: Preso ad arbitrio un punto V sulla verticale condotta per il centro dell'asta (fig. 84), lo si unisca con A_1 e B_1. Le rette $A_1 V$, $B_1 V$ intersecheranno le verticali condotte per i punti di passaggio M ed N nei punti M_2 ed N_2, e la $A_1 M_2 N_2 B_1$ sarà una spezzata omologica.

46. Se si prolunga la $M_1 N_1$ (fig. 83), cioè il lato intermedio della spezzata fino ad incontrare la $A_1 B_1$ in O'', si avrà

$$O''N' : N'N_1 = O''M' : M'M_1,$$

ossia

$$\frac{O''N_1}{O''M'} = \frac{N'N_1}{M'M_1} = \frac{N_n}{N_m} = \frac{an}{bm} = \frac{O'A_1 \,.\, N'B_1}{B_1O' \,.\, A_1M'}$$

cioè

$$A_1M' \,.\, B_1O' \,.\, O''N' + N'B_1 \,.\, M'O'' \,.\, O'A_1 = 0$$

dunque: $A_1 N' . B_1 M' . O'O''$ sono tre coppie di punti conjugati d'un'involuzione. Questa proprietà può anche dimostrarsi, osservando che i tre punti $M_1 N_1 V$ ed il punto all'infinito nella direzione verticale, determinano un quadrangolo completo, i cui lati opposti sono segati dalla trasversale $A_1 B_1$ nelle dette tre coppie di punti.

Se la direzione del peso P coincide colla verticale passante per O'', ed il peso stesso s'intenda decomposto in due componenti verticali P_m, P_n applicate ai punti

di passaggio M ed N, queste produrranno in A e B due reazioni R_a, R_b tali, che sotto l'influenza delle forze P_m, P_n, R_a, R_b l'asta SS non sopporterà alcuno sforzo. Tanto dunque la risultante delle R_a e P_m, quanto quella delle R_b e P_n passano per il punto O′. Ora tanto le P_m, P_n che le $-R_a$, $-R_b$ sono componenti del peso P. Possiamo dunque stabilire in generale questa proposizione:

« Se la risultante R_1 di due forze parallele F_1, F_2 coincide in direzione, senso e grandezza colla risultante di altre due forze parallele F_3, F_4, anche la risultante R_2 delle due forze $\pm F_1$, $\mp F_3$ coinciderà in direzione, senso e grandezza colla risultante delle $\pm F_2$, $\mp F_4$. Tagliando con una trasversale le direzioni delle sei forze F_1, F_4, F_2, F_3, R_1, R_2 si hanno tre coppie di punti conjugati in involuzione ».

La proposizione vale anche quando le forze F non siano parallele, come facilmente si può dimostrare.

Se O″ fosse a distanza infinita si avrebbe $\frac{O''N'}{O''M'}=1$, cioè $N_m = N_n$, ed inoltre numericamente $A_1 M' : B_1 N' = O' A_1 : O' B_1$. Abbiamo dunque la seguente proposizione:

« Se la verticale condotta per il centro dell'asta taglia la luce $A_1 B_1$, e l'intervallo orizzontale M′N′ fra i punti di passaggio in parti fra loro proporzionali, l'asta sopporta uno sforzo costante, durante il transito del peso P nell'intervallo dei punti di passaggio ».

Se invece fosse a distanza infinita il punto O′, allora la verticale condotta per O″ dividerebbe la luce $A_1 B_1$ e l'intervallo orizzontale fra i punti M, N in parti fra loro proporzionali. Si ha dunque la seguente proprietà:

« Se il centro d'un'asta è a distanza infinita, il suo sforzo sarà nullo quando la direzione del peso P taglia gl'intervalli $A_1 B_1$ ed M′N′ in parti proporzionali ».

Nei due casi ora indicati i punti O′ ed O″ diventano rispettivamente centri dell'involuzione.

47. Se l'asta ha un punto comune di passaggio M (fig. 85), questo è pure centro dell'asta; e la spezzata è bilatera. Essa ha il suo vertice nella verticale condotta per M (n. 40 *e*)). Per costruirla basterà quindi avere l'ordinata corrispondente al punto M′. Per ottenere questa ordinata, basterà tralasciare l'ultimo termine della (12) e porre poi $u = l + g - b\lambda$: osservando che in questo caso $l - f_1 = b\lambda$, si avrà

$$Nq = P\,\frac{b\lambda\,(l - b\lambda)}{l}$$

ossia ponendo $A_1 M' = a$, $B_1 M' = b$, sarà $b\lambda = b$, ed $l - b\lambda = a$, quindi

$$N = P\,\frac{ab}{lq}.$$

Preso dunque $A_1 P = P$ nella scala delle forze, e fatto $A_1 Q_1 = MQ$, si tiri $B_1 Q_2$ parallela a PQ_1 e preso $M'Q' = A_1 Q_2$ si conducano per A_1 e B_1 le $A_1 M_0$, $B_1 M_0$ rispettivamente normali alle $B_1 Q'$, $A_1 Q'$. Il punto M_0 si troverà sulla verticale per M, e la $A_1 M_0 B_1$ sarà la spezzata vera relativa all'asta che si considera.

Per avere la spezzata relativa alla luce basta prendere $M'Q' = MQ$ (fig. 86), e procedere come sopra.

Si avrà finalmente una spezzata omologica prendendo M_1 ad arbitrio sulla verticale condotta per M e tirando le $A_1 M_1$, $B_1 M_1$ (fig. 86).

Esempî. Per la trave AB fig. 87 domandansi: la spezzata vera delle aste 24, 35; la spezzata relativa alla luce per l'asta 56; una spezzata omologica per l'asta 46.

Per l'asta 24 i punti 2 e 4 sono punti di passaggio ed il punto 3 è il centro. Si ha quindi la costruzione della fig. 88.

L'asta 35 ha un punto comune di passaggio, cioè il nodo 4. Si avrà quindi la costruzione fig. 89.

L'asta 56 ha i due punti di passaggio 4 e 6 ed ha il centro O, esterno alle verticali condotte per i punti di appoggio. Calata dunque la verticale OL' e la normale OL, si farà $O'L' = OL$ (fig. 90), e congiunte le A_1L', B_1L', si tireranno per A_1 e B_1 le A_1M_1, B_1N_1 normali rispettivamente alle B_1L', A_1L'. La $A_1M_1N_1B_1$ è dunque la spezzata dell'asta 56, relativa alla luce. Le A_1M_1, B_1N_1, $O'L'$ devono concorrere in uno stesso punto L'', ciò che può servir di controllo alla costruzione.

Una omologica della 46 si costruisce facilmente, prendendo sulla verticale condotta per il centro 5 il punto V_1 ad arbitrio e procedendo poi come indica la fig. 91.

48. Quando i tipi di travi che si considerano sono quelli adottati generalmente nella costruzione dei ponti in ferro, avviene spesso che volendo costruire le spezzate relative alla luce, le ordinate ne diventino troppo lunghe relativamente al resto del disegno. È preferibile allora costruire una spezzata che sia relativa ad una parte aliquota della luce, per es. alla metà, ad un quarto, ad un dodicesimo o simile. Per ottenere una tale spezzata invece di prendere $O'Q'$ (fig. 82), eguale ad OQ, si prenderà $O'Q' = 2.OQ$, $= 4.OQ$, $= 12.OQ$ e simili e si procederà del resto come sopra; oppure si userà altro procedimento equivalente (come si vedrà nelle fig. 92, 93, 94, ...). Chiamando c il coefficiente che si premette alla OQ, sarà bene, per l'uso ulteriore che dovrà farsi della spezzata, notare lateralmente alla stessa il valore di c, ponendo $c = 2, 4, 12, \ldots$ Si vede del resto che attribuendo a c anche altri valori non interi, si può avere una spezzata omologica qualunque. Per cui una spezzata omologica qualunque può considerarsi come una spezzata relativa alla luce, per la quale siasi usato uno speciale coefficiente c. In questo senso può dirsi che ad ogni spezzata omologica spetta un coefficiente c.

Ora due ordinate y_1, y_2 relative ad una medesima ascissa, ma una appartenente alla spezzata vera, l'altra alla spezzata relativa alla luce, stanno fra loro come il peso P (valutato nella scala delle forze) sta alla luce l, cioè $y_1 : y_2 = P : l$. E fra due ordinate y_2, y_3, l'una appartenente alla spezzata relativa alla luce, l'altra alla spezzata che ha il coefficiente c, si ha $y_2 : y_3 = l : \frac{l}{c}$. Dunque $y_1 : y_3 = cP : l$.

49. Nelle costruzioni finora esposte i punti A_1, B_1, M', N', O', nei quali le verticali condotte per A, B, M, N, O incontravano la orizzontale A_1B_1 sono fra loro distinti. Avviene però spesso che due o più di tali punti coincidono, il che dà luogo a forme speciali delle spezzate.

Il caso sopra trattato che l'asta abbia un punto comune di passaggio, può riguardarsi come quello in cui i punti M', N'. O' coincidono in un solo punto.

Il caso in cui A_1 ed O' coincidono s'incontra nella trave fig. 92, nella quale AB, A7, B7 siano linee rette. Volendo infatti la spezzata di una delle diagonali 1.2, 2.3, ..., 5.6, per es. della 3.4, i due punti di passaggio sono i nodi 2 e 4,

ed il centro dell'asta lo stesso punto A d'appoggio. Per costruire dunque la spezzata relativa alla luce, procedendo colla regola generale si abbasserà da A la normale AQ sulla direzione dell'asta, si prenderà $A_1 Q' = AQ$ e congiunto Q' con A_1 e con B_1 si tirerà per A_1 una normale $A_1 M_1$ alla $B_1 Q'$, e per B_1 una normale $B_1 N_1$ alla $A_1 Q'$; e si congiungerà finalmente M_1 con N_1. Nella figura 92 alla $Q' B_1$ si è sostituita la $Q' N_1$, essendo $A_1 N_1 = \frac{1}{3} A_1 B_1$, col che si è introdotto il coefficiente $c = 3$. Ora la $A_1 Q'$ coincide colla verticale per A, dunque la $B_1 N_1$ coinciderà colla $A_1 B_1$, cioè il punto N_1 sarà quello dove la $A_1 B_1$ è incontrata dalla verticale condotta per il nodo 4. La spezzata cercata sarà dunque la $A_1 M_1 N_1 B_1$, col lato $B_1 N_1$ coincidente colla $A_1 B_1$.

Se si cercasse la spezzata vera basterà alla $A_1 Q'$ sostituire la $A_1 Q_2$ determinata come sopra (fig. 81).

Una spezzata omologica qualunque si ha finalmente prendendo ad arbitrio il punto M_1 nella verticale condotta per il nodo 2, e tirando le $A_1 M_1$, $M_1 N_1$, $N_1 B_1$.

Qualora si cercassero le spezzate delle diagonali 6.8, 8.9, 9.10, ecc. si troverebbe che O' e B_1 coincidono, e si procederebbe analogamente a quanto si è praticato per la coincidenza di A_1 ed O'.

Il caso ora trattato ci porge occasione di osservare, che qualora il centro cade sopra una delle verticali passanti per i punti di appoggio, e non vi cadano i punti di passaggio, si avrà sempre una spezzata trilatera con un lato coincidente colla $A_1 B_1$. Infatti uno dei valori N_m, N_n (n. 43) si annulla, qualora sia $a = 0$, oppure $b = 0$.

50. Quando si cercano le spezzate relative ad un'asta che fa parte del primo o dell'ultimo triangolo della trave, s'incontra pure il caso, che due o più dei detti punti coincidono.

Sebbene la costruzione di queste spezzate non presenti difficoltà, tuttavia non sembra inutile dire brevemente dei casi che si presentano.

Il primo e l'ultimo triangolo hanno ciascuno, come sopra si è notato (n. 34), due lati non comuni con altri triangoli. Ognuno di questi due triangoli ha per conseguenza:

un vertice dove concorrono due sole aste;
un vertice dove ne concorrono tre e non più;
un vertice dove ne concorrono più di tre.

Il punto d'appoggio A, oppure B, può essere collocato in uno di questi tre vertici.

Supponga si in primo luogo che l'appoggio sia collocato nel vertice nel quale concorrono due sole aste (fig. 93).

Allora per l'asta A.1 il centro è in 2, il primo punto di passaggio coincide con A, il secondo è il nodo 1. Preso dunque $O'_1 Q' = 2.Q$, si conduca per B_1 una normale alla $A_1 Q'$ fino all'incontro in N_1 colla verticale condotta per il nodo 1, e si congiunga A_1 con N_1. La spezzata bilatera $A_1 N_1 B_1$ sarà quella dell'asta A.1, relativa alla luce. Infatti coincidendo A_1 con M', è facile riconoscere, che uno dei lati estremi della spezzata, che altrimenti sarebbe trilatera, si annulla, e restano solamente il lato intermedio $A_1 N_1$, e l'altro lato estremo $N_1 B_1$. Similmente si costruirebbero la spezzata vera ed un'omologica qualunque. Se il secondo punto di passaggio fosse il nodo 2, invece del nodo 1, allora, oltre alla coincidenza di A_1

con M′, vi sarebbe quella di N′ con O′; e la spezzata invece del vertice N_1 avrebbe il vertice N'_1, dove la $N_1 B_1$ incontra la verticale condotta per O′. Similmente si opererebbe, se il secondo punto di passaggio fosse qualche altro nodo. Nella figura si è preso $c = 3$ (n. 48), cioè $A_1 O'_1 = \frac{1}{3} A_1 O'$.

Per l'asta A.2 il centro è il nodo 1, il primo punto di passaggio è il punto A, il secondo il nodo 1 stesso. Si ha dunque coincidenza dei punti A_1 ed M′, e dei punti O′ ed N′. Con un ragionamento simile al precedente, si potrà costruire la spezzata relativa alla luce $A_1 N_1 B_1$ (fig. 94), che riesce pure bilatera. Che se il secondo punto di passaggio fosse il nodo 2, o qualche altro nodo, allora il vertice N_1 della spezzata si trasporterebbe lungo la $B_1 N_1$ fino a quel punto, in cui questa retta resta tagliata dalla verticale condotta per quel nodo che serve di punto di passaggio.

Resta da considerare l'asta 1.2. Per quest'asta il centro è O, il primo punto di passaggio il nodo 1, ed il secondo il nodo 3. Come dunque si vede, qui i punti sono tutti distinti, e si rientra quindi nel caso generale. Se però il nodo 1 non fosse punto di passaggio; ma dopo il primo punto in A, il seguente fosse nel nodo 2, od in un altro nodo, vi sarebbe coincidenza del punto A_1 col punto M′, e si otterrebbe una spezzata bilatera $A_1 N_1 B_1$ (fig. 95).

51. Suppongasi in secondo luogo che il punto d'appoggio sia collocato in uno degli altri due vertici del primo od ultimo triangolo, nel quale dunque concorreranno tre (o più) aste (fig. 96).

Se si considerano in questo caso le due parti rigide relative all'asta A.1, si vede che la parte a sinistra è costituita dall'asta 1.2; la parte a destra invece da tutto il resto della trave, ad eccezione dell'asta stessa, che s'intende soppressa (n. 34). I due punti d'appoggio A e B appartengono adunque ambedue alla parte a destra. Quanto ai punti E (n. 36), si vede che il punto E_2 è lo stesso punto A, il punto E_3 è il nodo 1, il punto E_4 è il nodo 2. Ora E_2 ed E_4 appartengono alla parte rigida a destra, mentre E_3 appartiene a quella a sinistra. Si ha dunque qui una trasposizione, quale fu contemplata al n. 37.

Finchè dunque il peso P trovasi fra M_2 ed M_3, ossia fra le verticali condotte per A e per il nodo 1, varrà l'equazione (16), purchè si ommettano i due ultimi termini, col che essa diventa

$$Nq + P \frac{b'_{r+2}(u + b_{r+1} - l - g)}{b_{r+1} - b_{r+2}} = 0\,,$$

ossia, per essere nel caso attuale $g = 0$, $r = 1$

$$Nq + P \frac{b'_3(u + b_2 - l)}{b_2 - b_3} = 0\,.$$

Ma si ha evidentemente $b_2 = l$, e calando le verticali per A e per i nodi 1 e 2, e ponendo $O'M' = m$, $A_1 M' = m'$, si ha inoltre $b'_3 = m$, $b_2 - b_3 = m'$. Dunque

$$Nq + P \frac{mu}{m'} = 0\,. \tag{17}$$

Quando invece il peso P trovasi fra le verticali condotte per i nodi 1 e 2, sarà applicabile l'equazione (13), purchè si ommettano gli ultimi due termini, col che essa diventa

$$\mathrm{N}q + \mathrm{P}\frac{b'_r(l+g-b_{r+1}-u)}{b_r-b_{r+1}} = 0.$$

Per il caso nostro si avrà $r=3$, $g=0$, $b'_3=m$, $b_3-b_4=m$, $l-b_4=m+m'$, col che l'equazione diventa

$$\mathrm{N}q + \mathrm{P}(m+m'-u) = 0. \qquad (18)$$

Quando il peso P ha oltrepassata la verticale corrispondente al nodo 2, la parte rigida a sinistra è del tutto scarica, e quindi lo sforzo dell'asta A.1 è nullo (n. 40 *c*)). La spezzata dell'asta A.1 è dunque trilatera, col terzo lato $\mathrm{O'B_1}$ coincidente colla $\mathrm{A_1B_1}$. Per avere gli altri due lati basta costruire il vertice corrispondente alla verticale condotta per il nodo 1. A tal fine basta porre in una o nell'altra delle superiori equazioni (17), (18) $u=m'$, e si avrà

$$\mathrm{N}q + \mathrm{P}m = 0.$$

Calata dunque la normale 2.Q sulla direzione dell'asta, e preso M′Q′ eguale a quella normale, si farà M′R eguale al peso P nella scala delle forze, e si tirerà per R una normale alla O′Q′, la quale incontrerà la verticale condotta per il nodo 1 nel vertice $\mathrm{M_1}$ cercato. La $\mathrm{A_1M_1O'B_1}$ sarà dunque la spezzata vera dell'asta A.1.

Da questa si potrà avere facilmente anche la spezzata relativa alla luce (n. 44). Quanto ad una spezzata omologica essa si ottiene, prendendo ad arbitrio il punto $\mathrm{M_1}$.

Per l'asta 1.2 vale un ragionamento analogo: essa pure ha una spezzata trilatera, di cui un lato $\mathrm{O'B_1}$ coincide colla $\mathrm{A_1B_1}$. Gli altri due lati s'incontrano nella verticale condotta per il nodo 1. Per determinare questo punto d'incontro si cali da A una normale $\mathrm{AQ_1}=q_1$ sulla direzione dell'asta 1.2, e si otterrà in modo simile al superiore l'equazione

$$\mathrm{N}q_1 + \mathrm{P}m' = 0$$

che dà luogo ad una costruzione simile a quella adottata per l'equazione $\mathrm{N}q + \mathrm{P}m = 0$.

Che se la spezzata di una delle due aste A.1, 1.2 è già costruita, si potrà avere la spezzata dell'altra asta dalla considerazione, che gli sforzi sostenuti dalle due aste durante il transito del peso P mantengono sempre fra loro il medesimo rapporto, poichè devono dare sempre nel nodo 1 una risultante verticale. Quegli sforzi stanno dunque fra loro come i lati di un parallelogrammo, la cui diagonale sia verticale, ed i cui lati siano paralleli alle aste suddette.

Quanto all'asta A.2, essa ricade nel caso generale, e la costruzione della sua spezzata non presenta difficoltà.

52. Come casi speciali di quelli ora considerati possono riguardarsi quelli, in cui l'asta A.1 od A.2 della fig. 93 diventi verticale. Si hanno in tal modo le disposizioni fig. 97 e 98. Quanto alla posizione del punto $\mathrm{E_2}$, che continueremo a supporre nella verticale condotta per A (n. 42), possono avvenire due casi. Questo punto può cioè coincidere col punto A oppure col nodo 1 (fig. 97): e similmente nella fig. 98 esso può coincidere col punto A, oppure col nodo 2.

Per la disposizione fig. 99 si ha per l'asta A.1 il centro nel nodo 2, il primo punto di passaggio in A, ed il secondo nel nodo 2. Si ha dunque coincidenza del punto $\mathrm{A_1}$ con M′, e si otterrà la spezzata bilatera relativa alla luce $\mathrm{A_1N_1B_1}$ (fig. 100).

Per l'asta A.2 il centro cade nel nodo 1, ed i due punti di passaggio sono A ed il nodo 2. Si ha dunque qui coincidenza dei tre punti $\mathrm{A_1M'O'}$. Seguendo anche

per questo caso il procedimento della costruzione generale, si troverà che il primo lato della spezzata si annulla, e che il secondo e l'ultimo sono i tratti $A_1 N'$, $N' B_1$ della orizzontale $A_1 B_1$. In altre parole tutta la spezzata coincide in questo caso colla $A_1 B_1$.

Per l'asta 1.2 il centro è O, il primo punto di passaggio è A, il secondo è il nodo 2. Vi è dunque coincidenza del punto A_1 con M'. Applicato il procedimento generale si otterrà la $A_1 N_1 B_1$, come spezzata relativa alla luce (fig. 101).

Supponiamo ora che il punto E_2 non sia in A, ma nel nodo 1 (fig. 102).

Se si considerano in questo caso le due parti rigide corrispondenti all'asta A.1, si vede che la parte a sinistra è formata dalla sola asta A.2, la parte a destra invece da tutto il resto della trave, esclusa la A.1. La parte a sinistra adunque è sollecitata dalla sola reazione dell'appoggio in A, oltrechè dallo sforzo dell'asta.

L'equazione generale (10) si riduce dunque in questo caso alla $Nq - F_1 f_1 = 0$, e siccome nel nostro caso $q = f_1$, così sarà $N = F_1$. Dunque la spezzata corrispondente all'asta A.1 è quella stessa indicante la reazione dell'appoggio in A (n. 42).

Per l'asta A.2, si ha, come è facile dimostrare, la stessa equazione $Nq - F_1 f_1 = 0$. Ma il centro della A.2 è il nodo 1, dunque $f_1 = 0$, e perciò $N = 0$. Dunque la spezzata dell'asta A.2 coincide tutta colla $A_1 B_1$.

Quanto finalmente alla terza asta 1.2 del triangolo, il suo centro è O, il primo punto di passaggio è il nodo 1, ed il secondo il nodo 3. Si ha dunque qui coincidenza del punto A_1 col punto M'; e si troverà facilmente che la spezzata relativa alla luce è la $A_1 N_1 B_1$.

Resterebbe ora a considerare la disposizione fig. 98, nella quale il lato A.2 è verticale. Siccome però una tale disposizione difficilmente può incontrarsi in pratica, così non ce ne occuperemo: tanto più che, qualora occorresse, il caso può sempre svolgersi colla guida dei principî sopra sviluppati.

53. Anche nel caso che il punto d'appoggio sia collocato in quel vertice del primo triangolo dove concorrono tre o più aste, può avvenire che l'asta A.1 (fig. 96) sia verticale; il che dà luogo alla disposizione fig. 103, nella quale saranno analogamente da distinguersi due casi secondo che il punto E_2 coincida col punto A (fig. 104), oppure col nodo 1 (fig. 105).

Quando il punto E_2 coincide con A (fig. 104), allora le spezzate delle aste A.1 ed 1.2 coincidono colla orizzontale $A_1 B_1$, come è facile dimostrare. Quanto all'asta A.2, la sua spezzata è bilatera, e di facile costruzione.

Quando invece il punto E_2 coincide col nodo 1 (fig. 105), allora l'asta A.1 ha la spezzata $M_1 N' B_1$, dove $A_1 M_1$ eguaglia il peso P nella scala delle forze. Si ha qui un caso particolare di quello superiormente sviluppato al n. 51.

La spezzata dell'asta 1.2 coincide totalmente colla $A_1 B_1$.

Per l'asta A.2 finalmente, il centro è O, il primo punto di passaggio è il nodo 1, il secondo il nodo 2. Si ha dunque coincidenza del punto A_1 con M', e si avrà quindi la spezzata relativa alla luce $A_1 N_1 B_1$.

Dai risultati sopra ottenuti si deduce intanto che:

« Quando uno dei punti di passaggio trovasi sulla verticale passante per uno degli appoggi, la spezzata diventa bilatera, ed ha il suo vertice nella verticale condotta per l'altro punto di passaggio ».

La stessa proposizione si ha pure direttamente dalle espressioni N_m, N_n (n. 43). Se infatti m od n si annullano, si annulla pure N_m od N_n.

54. Per molte travi generalmente usate nelle costruzioni, il centro O di alcune aste cade fuori del disegno, oppure talmente lontano dal resto della figura, da renderne difficile l'uso allo scopo di determinare le spezzate delle aste stesse. In tali casi giova attenersi al procedimento seguente, il quale è basato sulla costruzione di una figura, che è simile alla data, e della quale poi si fa uso per determinare la spezzata che si cerca.

Sia $S_1 S_2$ (fig. 106) un'asta, il cui centro sia il punto d'incontro delle $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, e della quale si voglia costruire la spezzata relativa alla luce, senza far uso di un tale punto d'incontro. I punti A_2, A_3, e B_2, B_3 siano collocati rispettivamente nelle verticali passanti per i punti d'appoggio A e B.

Si conducano per A_3 e B_3 due parallele $A_3 a$, $B_3 b$ alla $A_2 B_2$; e tirata la verticale $S_1 S_3$ si conduca la $B_2 S_3$, la quale taglierà in a e b le suddette parallele. Si tirino poi le verticali $a A'_2 A'$, $b B'_2 B'$, e preso $B_1 Q'$ eguale alla normale $B_2 Q$, calata da B_2 sulla direzione dell'asta, si tirino le $A' Q'$, $B' Q'$. Condotte poi per A_1 e B_1 due normali $A_1 F$, $B_1 G$ alle $B' Q'$, $A' Q'$ rispettivamente, si avrà la direzione del primo e dell'ultimo lato della spezzata.

Infatti sono simili i gruppi di tre punti $A' B' B_1$, $A'_2 B'_2 B_2$, $a b B_2$, $A_3 B_3 O$, $A_2 B_2 O$, $A_1 B_1 O'$, e simili pure i gruppi $S_3 b B_2$, $S_3 B_3 O$, $S_1 B_2 O$; per cui $S_3 b : S_3 B_2 = S_1 B_2 : S_1 O$. Ma si ha pure $S_3 b : S_3 B_2 = b B_3 : B_2 O = B'_2 B_2 : B_2 O$, ed $S_1 B_2 : S_1 O = B'_2 Q : O Q_1$, dunque $B'_2 B_2 : B_2 Q = B_2 O : O Q_1$, cioè $B' B_1 : B_1 Q' = B_1 O' : O' Q'_1$. Dunque il gruppo dei quattro punti $A' B' B_1 Q'$ è simile al gruppo $A_1 B_1 O' Q'_1$; e perciò le $A' Q'$, $B' Q'$ sono rispettivamente parallele alle $A_1 Q'_1$, $B_1 Q'_1$. Invece dunque di quest'ultime rette si può far uso delle due ad esse parallele per tirare le $A_1 F$, $B_1 G$, ossia per ottenere il primo e l'ultimo lato della spezzata.

I due vertici della spezzata stessa restano naturalmente determinati dall'incontro dei due lati estremi $A_1 F$ e $B_1 G$ colle verticali condotte per i punti di passaggio, le quali per maggiore chiarezza si sono tralasciate nella figura.

La spezzata vera si può ottenere sia deducendola dalla spezzata relativa alla luce (n. 44), oppure direttamente, prendendo invece di $B_1 Q'$ una lunghezza $B_1 Q_2$, la quale abbia colla $B_1 Q'$ lo stesso rapporto, che ha la luce $A_1 B_1$ colla retta rappresentante il peso P nella scala delle forze, e servendosi poi della $B_1 Q_2$ come si è fatto della $B_1 Q'$.

Per avere una spezzata omologica il procedimento è naturalmente più semplice. Trovati i punti A' e B', si prenda ad arbitrio un punto Q' sulla verticale condotta per B_1, e condotte le $A' Q'$, $B' Q'$, si tirino per A_1 e B_1 due rette rispettivamente parallele, oppure perpendicolari alle $A' Q'$, $B' Q'$. Queste due parallele o perpendicolari saranno il primo e terzo lato della spezzata omologica.

Se il punto O d'incontro delle $A_2 B_2$ ed $A_3 B_3$ cadesse a sinistra della figura, invece di cadere a destra, come si è supposto, allora invece della $B_2 S_3$ si tirerà la $A_2 S_3$ e si procederà analogamente per le altre linee che dipendono da B_2.

55. Quando il centro O d'un'asta trovasi a distanza infinita la costruzione diventa più semplice. In tal caso infatti la $A_3 B_3$ (fig. 107) diventa parallela alla $A_2 B_2$,

ed i punti a e b della figura 106 coincidono col punto S_3, e quindi A' e B' coincidono colla projezione di S_1 sulla A_1B_1. Per ottenere la spezzata relativa alla luce si ha dunque in questo caso la seguente costruzione: Abbassata sulla A_1B_1 la normale S_1S_0 e preso $B_1Q'=B_2Q$, si conducano per A_1 e B_1 due normali alla S_0Q', e queste saranno il primo ed il terzo lato della spezzata che si cerca.

Che se si volesse avere solamente una spezzata omologica qualunque basterebbe condurre per A_1 e B_1 due rette qualunque fra loro parallele. Queste sarebbero il primo ed il terzo lato della spezzata.

Il caso che il centro trovisi a distanza infinita è comune a tutte le aste intermedie delle travi a tavole parallele (fig. 108). Così per es. volendo una spezzata omologica dell'asta 5.6, la quale ha i due punti di passaggio nei nodi 4 e 6, si tireranno ad arbitrio le parallele A_1M_2, B_1N_2 e la $A_1M_2N_2B_2$ sarà la spezzata che si cerca.

56. Le superiori costruzioni cadono in difetto, quando il centro si trovi nella direzione dell'asta, alla quale appartiene. Allora lo sforzo dell'asta diventa in generale infinito, come fu sopra osservato (n. 41), e come mostrano le espressioni di N_m ed N_n (n. 43) facendovi $q=0$. Di questo caso, che non s'incontra naturalmente nelle costruzioni, non ci occuperemo. Merita però attenzione il caso, per il quale il centro dell'asta è uno dei suoi due nodi (n. 41). Bisogna allora ricorrere a considerazioni diverse dalle superiori per costruire la spezzata relativa a tali aste.

Sia S_1S_2 (fig. 109) l'asta proposta, avente il centro S_2, per la quale debba costruirsi la spezzata vera.

Suppongasi in primo luogo che nessuno dei punti E sia situato nel nodo S_1. In tal caso gli sforzi delle tre aste concorrenti in S_1 si equilibrano in qualunque posizione del peso P, e lo sforzo nella S_1S_2 mantiene quindi sempre lo stesso rapporto cogli sforzi delle S_0S_1, S_1S_3, ossia le spezzate delle tre aste S_1S_2, S_0S_1, S_1S_3 sono fra loro omologiche-affini (n. 42). Se dunque si suppone costruita la spezzata vera della S_0S_1, oppure della S_1S_3, basterà modificare le ordinate dei vertici dell'una o dell'altra di queste spezzate nel rapporto delle due rette S_1T, S_1U, oppure delle due S_1V, S_1U, appartenenti al parallelogrammo S_1TUV per avere le ordinate dei vertici della spezzata vera relativa alla S_1S_2. Se dunque è data la spezzata vera $A_1M_0N_0B_1$ dell'asta S_0S_1 si potrà costruire la spezzata della S_1S_2 prendendo S_1T, S_1T_1 eguali rispettivamente ad $M'M_0$, $N'N_0$, tirando le TU, T_1U_1 parallele ad S_1S_3 e prendendo poscia $M'M'_0$, $N'N'_0$ eguali rispettivamente ad S_1U, S_1U_1, col che resteranno determinati i vertici M'_0, N'_0 della spezzata $A_1M'_0N'_0B_1$, che si cercava.

Se per l'asta S_0S_1 si avesse la spezzata relativa alla luce, operando allo stesso modo, si otterrebbe la spezzata relativa alla luce della S_1S_2. Del resto la spezzata vera e la spezzata relativa alla luce possono sempre ottenersi l'una dall'altra facilmente (n. 44).

Per avere una spezzata omologica qualunque basta prendere senz' altro una spezzata omologica dell'asta S_0S_1 o della S_1S_3.

57. Qualora uno dei punti E coincide col nodo S_1 (fig. 110), allora questo punto diventa il secondo punto di passaggio per l'asta S_0S_1 ed il primo punto di passaggio per la S_1S_3, e quindi le spezzate relative alle aste S_0S_1, S_1S_3 non

sono più fra di loro omologiche-affini. La spezzata dell'asta $S_1 S_2$ avrà in questo caso tre vertici, di cui uno sulla verticale passante per S_1 e gli altri due sulle verticali corrispondenti agli altri due punti di passaggio delle $S_0 S_1$, $S_1 S_3$. Per ottenere questi ultimi vertici, si costruiscano prima le spezzate vere relative alle aste $S_0 S_1$, $S_1 S_3$, che supporremo essere le $A_1 M_0 N_0 B_1$, $A_1 M''_0 N''_0 B_1$. Costruito poi il parallelogrammo $S_1 T_1 V_1 U_1$, nel quale i lati $S_1 T_1$, $S_1 V_1$ sono rispettivamente eguali alle ordinate $M' M_0$, $M' L$, si avrà nella diagonale $S_1 U_1$ l'ordinata $M' M'_0$ che determinerà il primo vertice della spezzata che si cerca. Procedendo in modo analogo, si otterrà l'ordinata $N' N'_0$ relativa al vertice N'_0. Resta dunque solamente da trovare l'ultimo vertice, quello cioè che cade nella verticale condotta per S_1. Per determinarlo basta evidentemente supporre, che la direzione del peso P coincida colla detta verticale. Si avranno allora nel punto S_1 quattro forze che si equilibrano, cioè gli sforzi delle tre aste ed il peso P. Basterà dunque projettare nella direzione della $S_1 S_2$ gli sforzi delle due altre aste, che sono rappresentati dalle ordinate RM''_0, RN_0, ed il peso P, e prendere la somma algebrica delle projezioni. Applicando questo procedimento si avrà la spezzata vera quadrilatera $A_1 M'_0 R_0 N'_0 B_1$, dove P fu preso eguale alla metà della luce.

La spezzata relativa alla luce potrà dedursi dalla spezzata vera. Se però fossero date le spezzate relative alla luce delle aste $S_0 S_1$, $S_1 S_3$, si potrebbe procedere come sopra, sempreché per rappresentare il peso P si prenda una retta eguale alla luce AB.

Anche una spezzata omologica qualunque potrà facilmente costruirsi dopo le considerazioni superiori.

B. *Osservazioni sulla natura degli sforzi.*

58. Prima di procedere oltre, gioverà esporre qui alcune osservazioni relative alla natura degli sforzi sopportati dalle aste finora considerate, appartenenti alle travi che non si prolungano oltre i punti d'appoggio. Si osservi in primo luogo che le ordinate d'una spezzata bilatera sono tutte positive o tutte negative. Dunque:

« Quando un'asta possiede una spezzata bilatera, lo sforzo a cui quell'asta va soggetta durante il passaggio del peso P è sempre una tensione o sempre una pressione ».

Le ordinate d'una spezzata trilatera possono essere tutte d'un segno, oppure da un punto d'appoggio fino ad un certo punto della luce possono essere positive e per la parte residua della luce negative. Ora siccome i lati estremi d'una spezzata trilatera si tagliano sempre in un punto della verticale condotta per il centro (n. 45), così quando il centro trovasi compreso fra le verticali passanti per i punti d'appoggio A e B, le ordinate della spezzata trilatera sono tutte di un segno; quando invece il centro è esterno ai punti d'appoggio, le ordinate per una parte della luce sono di un segno, e per l'altra parte di segno opposto. Dunque:

« Se il centro d'un'asta, avente una spezzata trilatera, cade fra le verticali condotte per i punti d'appoggio, lo sforzo dell'asta è sempre una tensione o sempre una pressione durante il transito del peso P ».

« Se invece il centro è esterno a quelle verticali, l'asta sopporta prima una tensione e poi una pressione, o viceversa ».

È pure per sè evidente che, se uno dei lati della spezzata coincide coll'asse $A_1 B_1$ per quel tratto lo sforzo dell'asta è nullo. Ora questa coincidenza ha sempre luogo, quando il centro si trova sopra una delle verticali passanti per i punti d'appoggio, senza che vi si trovino i punti di passaggio (n. 49). Dunque:

« Quando il centro cade sopra una delle verticali passanti per i punti d'appoggio e non vi cadano i punti di passaggio, lo sforzo dell'asta è nullo per una parte della luce, ed è una pressione od una tensione per l'altro tratto ».

Se tutta la spezzata coincide coll'asse $A_1 B_1$ tutte le ordinate sono nulle. Ora ciò ha luogo quando il centro ed un punto di passaggio trovansi ambedue sopra una delle verticali condotte per i punti d'appoggio. Infatti se m ed a sono nulli, oppure lo siano n e b, i valori di N_m ed N_n (n. 43) sono ambedue nulli. Dunque:

« Lo sforzo dell'asta è nullo durante tutto il transito del peso P, se il centro ed uno dei punti di passaggio cadono sulla medesima verticale passante per un punto d'appoggio ».

59. Quando i due punti d'appoggio A e B appartengono uno alla parte rigida a destra, l'altro a quella a sinistra d'un'asta, allora la posizione del centro e dei punti di passaggio bastano pure a decidere se lo sforzo sopportato dall'asta durante il transito del peso P sia una tensione od una pressione. Per fissare le idee intenderemo sempre che il transito sia fatto da A verso B.

Per poter facilmente determinare la natura dello sforzo d'un'asta giova osservare: 1° che quando il peso P si trova fuori dell'intervallo determinato dalle due verticali corrispondenti ai punti di passaggio, allora una delle due parti rigide della trave, corrispondenti all'asta, è sollecitata dallo sforzo dell'asta stessa e dalla reazione di uno dei punti d'appoggio, le quali due forze danno una risultante che passa per il centro dell'asta; 2° che quando due forze, che operano nel piano secondo le rette AB, CD (fig. 111), hanno una risultante passante per il punto O, i sensi in cui agiscono le due forze devono essere quelli comprendenti lo spazio angolare dove trovasi il punto O; oppure quelli comprendenti lo spazio angolare opposto al vertice. Così nella fig. 111 le due forze agiranno nei due sensi EC, EB; oppure nei due EA, ED.

Ciò premesso siano A e B (fig. 112) le verticali condotte per i punti d'appoggio, ed SS la direzione (non verticale) d'un'asta qualunque. Il piano resterà diviso da queste rette nei sei spazî indefiniti Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, Σ_5 e Σ_6.

Con una facile discussione dei singoli casi si trova ora quanto segue:

Se l'asta SS ha una spezzata trilatera, essa sarà continuamente soggetta a tensione durante il transito del peso P, se il suo centro cade nello spazio Σ_2;

sarà continuamente soggetta a pressione se il suo centro cade nello spazio Σ_5;

sarà prima soggetta a pressione e poi a tensione, se il suo centro cade nello spazio Σ_3, oppure Σ_4;

sarà prima soggetta a tensione e poi a pressione, se il suo centro cade nello spazio Σ_1 oppure Σ_6;

sarà prima soggetta a tensione e poi non soggetta a sforzo alcuno, o viceversa, secondochè il suo centro cade nella verticale A o B, superiormente alla direzione SS dell'asta;

sarà prima soggetta a pressione e poi non soggetta a sforzo alcuno, o viceversa, secondochè il suo centro cade nella verticale A o B, inferiormente alla direzione SS dell'asta.

Quando il centro cade nell'asta stessa, e col nodo S_1 non coincida uno dei punti E (fig. 109), allora per lo sforzo dell'asta vale la stessa regola, che vale per le due aste S_0S_1, S_1S_3 se la somma dei due angoli $S_0S_1S_2$, $S_2S_1S_3$ è maggiore di due retti; altrimenti lo sforzo della S_1S_2 è di segno opposto a quelli delle altre due aste. Se col nodo S_1 coincide uno dei punti E (fig. 110), la spezzata è quadrilatera e lo sforzo può cambiare due volte di segno.

60. Se l'asta ha un punto comune di passaggio (n. 36), essa ha una spezzata bilatera (n. 47). L'asta sarà allora sempre soggetta a tensione, durante il transito del peso P, se il suo centro cade nello spazio Σ_2; invece sarà soggetta sempre a pressione, se cade nello spazio Σ_5. Se il centro cade sopra una delle verticali passanti per i punti d'appoggio, lo sforzo dell'asta è nullo, durante tutto il transito del peso P. Infatti il valore di N (n. 47) si annulla tanto per $a=0$, quanto per $b=0$. Anche se uno dei punti di passaggio cade nella verticale per A o per B, senza che vi cada il centro, l'asta ha una spezzata bilatera, poichè uno dei lati della trilatera si annulla. Se la posizione dei punti di passaggio M ed N sulle verticali per A o B si indica con (AM) o (BN), allora dai precetti superiori relativi alle spezzate trilatere, si deducono facilmente per ordine i seguenti relativi alle bilatere.

Posizione del centro nello spazio	Posizione dei punti di passaggio	Natura dello sforzo
Σ_2	(AM), (BN)	tensione
Σ_5	(AM), (BN)	pressione
Σ_3, Σ_4	(AM)	tensione
Σ_3, Σ_4	(BN)	pressione
Σ_1, Σ_6	(AM)	pressione
Σ_1, Σ_6	(BN)	tensione

61. Quando l'asta SS è verticale non si hanno più i sei spazî $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_6$ (fig. 112), ma quattro spazî indefiniti Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 (fig. 113). Per riconoscere in questo caso la natura degli sforzi a cui l'asta va soggetta durante il transito del peso P, giova osservare, che ogni asta verticale ha un nodo superiore ed un nodo inferiore. Quando l'asta si sopprime, e si ottengono così due parti rigide distinte (n. 34), avviene sempre che ad una di queste parti appartiene il nodo superiore, all'altra il nodo inferiore dell'asta verticale soppressa. Diremo per brevità *parte superiore* quella alla quale appartiene il nodo superiore, e *parte inferiore* quella a cui appartiene il nodo inferiore. Così nella fig. 108 per l'asta verticale 4.5 si ha la parte superiore 0.4.3.1.0, e l'inferiore 5.6.10.11.5.

Ciò premesso, mediante considerazioni analoghe alle superiori, si troveranno facilmente i seguenti caratteri per istabilire la natura degli sforzi sopportati da un'asta verticale, ritenendo sempre che il transito del peso P si faccia da A verso B.

Quando l'asta possiede una spezzata trilatera:

se il centro dell'asta e la parte superiore trovansi ambedue nello spazio Σ_2 o nello spazio Σ_3, l'asta è premuta durante tutto il transito;

se il centro dell'asta trovasi in uno dei due spazî Σ_2 o Σ_3, e la parte superiore nell'altro, l'asta è tesa durante tutto il transito;

se il centro trovasi negli spazî Σ_1 o Σ_4 a distanza finita od infinita, l'asta passa dallo stato di pressione a quello di tensione o viceversa, secondochè il peso P, nel suo transito, incontra prima la parte superiore e poi l'inferiore, o viceversa;

se il centro cade nella verticale passante per il punto A d'appoggio, lo sforzo dell'asta passa da una tensione a zero, o da una pressione a zero, secondochè il peso P incontra prima la parte inferiore, oppure la superiore. Similmente:

se il centro cade nella verticale passante per il punto B d'appoggio, lo sforzo passa da zero ad una tensione, oppure da zero ad una pressione, secondochè il peso P incontra prima la parte superiore, oppure l'inferiore.

Se il centro è uno dei nodi dell'asta, valgono le osservazioni del n. 60 (in fine).

62. Quando il punto di passaggio M trovasi sulla verticale condotta per l'appoggio A, od il punto N sulla verticale condotta per l'appoggio B, allora l'asta possiede una spezzata bilatera, e va soggetta unicamente a tensione, oppure a pressione, durante tutto il transito del peso P. Valgono allora i seguenti criterî, nei quali per brevità si sono indicate, come sopra, con (AM), (BN) le dette coincidenze.

Se ha luogo la coincidenza (AM):

Si avrà tensione:

a) se il centro cade nello spazio Σ_2, ed il peso P incontri prima la parte inferiore, e poi la superiore;

b) se il centro cade negli altri spazî o nella verticale per l'appoggio B, ed il peso P incontri prima la parte superiore, e poi l'inferiore.

Si avrà invece pressione:

a) se il centro cade in Σ_2, ed il peso P incontri prima la parte superiore, e poi l'inferiore;

b) se il centro cade negli altri spazî o nella verticale per A, ed il peso P incontri prima la parte inferiore, e poi la superiore.

Analogamente per la coincidenza (BN) si avrà tensione:

a) se il centro cade nello spazio Σ_3, ed il peso P incontri prima la parte superiore, e poi l'inferiore;

b) se il centro cade negli altri spazî, o nella verticale per A, ed il peso P incontri prima la parte inferiore, e poi la superiore.

Si avrà invece pressione:

a) se il centro cade nello spazio Σ_3, ed il peso P incontri prima la parte inferiore e poi la superiore;

b) se il centro cade negli altri spazî o nella verticale per A, ed il peso P incontri prima la parte superiore, e poi l'inferiore.

Se il centro cade in una delle verticali condotte per i punti d'appoggio, in modo che i tre punti A, M, O, oppure i tre B, N, O si trovino sopra una stessa verticale, allora lo sforzo dell'asta è sempre nullo durante tutto il transito del peso P (n. 58 in fine).

C. *Spezzate quando la trave si estende oltre gli appoggi.*

63. Il caso che nessuno dei punti E si trovi sulla verticale passante per il punto d'appoggio A oppure B; e quello che la trave si prolunghi al di là dei punti d'appoggio è meno frequente in pratica. Quando ciò avvenga, la costruzione delle spezzate può senza difficoltà dedursi dalle equazioni fondamentali superiormente sviluppate (numeri 38, 39, 40). Ci limiteremo perciò a mostrare la costruzione delle spezzate nei seguenti casi.

Sia data la trave fig. 114, la quale si prolunga oltre gli appoggi, e debbasi costruire la spezzata vera relativa alla reazione del punto A d'appoggio. Tale spezzata, come fu dimostrato (n. 38) ha tre lati: essa comincia in E'_1, finisce in E'_n, ha i suoi due vertici sulle verticali condotte per M_2 ed M_{n-1}, ed il suo lato intermedio passa per il punto B_1. Se adunque si determina un altro punto appartenente al lato intermedio, questo lato e quindi tutta la spezzata potrà costruirsi.

Ora l'ordinata della spezzata per il punto A_1 si ha dall'equazione (4), ponendo in essa $u = g$, col che si ottiene $F_1 = P$. Si ha dunque la seguente costruzione della spezzata rappresentante la legge con cui varia la reazione del punto A d'appoggio.

Si prenda $A_1 P'$ eguale al peso P valutato nella scala delle forze, e si tiri la $E'_2 P' B_1 E'_{n-1}$, la quale incontrerà le verticali condotte per M_2 ed M_{n-1} nei punti E'_2, E'_{n-1}. Condotte poscia le $E'_1 E'_2$ ed $E'_{n-1} E'_n$, si avrà la spezzata cercata $E'_1 E'_2 E'_{n-1} E'_n$.

Se si volesse la spezzata relativa alla luce, bisognerebbe prendere $A_1 P'$ eguale ad $A_1 B_1$; e per avere una spezzata omologica, P' si prenderà ad arbitrio.

64. Supponiamo ora che debbasi costruire la spezzata vera d'un'asta avente i due punti di passaggio E_r ed E_{r+1} (fig. 114), collocati in modo, che il punto di sostegno A trovisi fra le verticali condotte per M_2 ed M_r, ed il punto di sostegno B fra quelle condotte per M_{r+1} ed M_{n-1}. Suppongasi inoltre che i due punti di sostegno A e B appartengano rispettivamente alle due parti rigide relative all'asta che si considera. Avremo dunque il caso contemplato al n. 40 *a*). L'asta avrà una spezzata a cinque lati, la quale riferita alla orizzontale $A_1 B_1$ (fig. 115) comincerà in E'_1 e finirà in E'_n; passerà inoltre per i due punti A_1 e B_1 ed avrà i suoi quattro vertici sulle verticali condotte per M_2, M_r, M_{r+1}, M_{n-1} (n. 39 in fine).

Ora la parte di spezzata, che è compresa fra le verticali condotte per A e per B, è la stessa come se la trave non si prolungasse oltre i punti d'appoggio; ciò che è facile riconoscere, ricercando i valori delle ordinate che coincideno colle verticali passanti per M_r ed M_{r+1}. Questa parte si potrà dunque costruire nei modi superiormente spiegati.

Sia dunque $A_1 E'_r E'_{r+1} B_1$ questa parte della spezzata. Per completarla basterà allora prolungare i lati $E'_r A_1$, $E'_{r+1} B_1$ fino ad incontrare rispettivamente le verticali condotte per M_2 ed M_{n-1}. Si avranno così gli altri due vertici $E'_2 E'_{n-1}$ della spezzata, che sarà la $E'_1 E'_2 E'_r E'_{r+1} E'_{n-1} E'_n$.

Secondochè il tratto $A_1 E'_r E'_{r+1} B_1$ fra le verticali condotte per i punti d'appoggio sarà relativo ad una spezzata vera, relativa alla luce od omologica, tale riuscirà

pure l'intera spezzata. Se invece di due punti di passaggio E_r, E_{r+1}, si avesse un solo punto comune E_λ, restando inalterate le altre condizioni, la costruzione procederebbe in modo analogo; si avrebbero in tal caso fra le verticali condotte per i punti d'appoggio due soli lati $A_1 E'_\lambda$, $B_1 E'_\lambda$ invece di tre; e tutta la spezzata sarebbe a quattro lati, anzichè a cinque.

65. Come secondo caso supporremo che si debba costruire la spezzata d'un'asta, le cui due parti rigide siano tali, che ambedue i punti d'appoggio A e B appartengano alla parte a destra.

Se E_r ed E_{r+1} (fig. 116) sono i due punti di passaggio di tale asta, è chiaro che quando il peso P avrà oltrepassato il punto M_{r+1}, la parte rigida a sinistra non sarà più sollecitata da alcuna forza; dunque a partire dal punto E'_{r+1} fino ad E'_n la spezzata coinciderà coll'asse $A_1 B_1$ (n. 40 *c*)). Nell'intervallo invece da E'_1 fino ad E'_{r+1} la spezzata avrà due vertici, collocati rispettivamente sulle verticali condotte per M_2 ed M_r (n. 39 in fine). Per trovare la posizione di questi vertici, si noti che nell'intervallo da M_2 ad M_r vale l'equazione (12), purchè si sopprimano i due ultimi termini, col che essa diventa

$$N\,q + P\,(f_1 + g - u) = 0.$$

Se O sia il centro dell'asta, condotta la verticale OO', richiamando il significato delle lettere (n. 38 e 39), sarà $d = E'_1 M'_2$, $b'_2 = - M'_2 O'$, $f_1 = - A_1 O'$, $g = E'_1 A_1$, $b'_r = - M'_r O'$. Dunque quando il peso P è in M_2, si avrà ponendo $u = d$

$$N_2\,q + P b'_2 = 0.$$

Quando invece il peso P è in M_r si avrà, ponendo $u = f_1 + g - b'_r$,

$$N_r\,q + P b'_r = 0.$$

Allo stesso risultato si arriva, considerando le equazioni (11) e (13) che spettano agli intervalli da M_1 ad M_2 e da M_r ad M_{r+1}.

Le ordinate N_2 ed N_r della spezzata corrispondenti ai punti M'_2 ed M'_r stanno dunque fra loro come b'_2 sta a b'_r, cioè come $M'_2 O'$ ad $M'_r O'$. Di qui si ricava la seguente costruzione della spezzata vera. Preso $M'_2 Q'$ eguale a q, cioè eguale alla normale calata dal centro O sulla direzione dell'asta, si prenda $M'_2 P'$ eguale alla forza P nella scala delle forze, e si tiri la $P' E'_2$ normale alla $O' Q'$. Il punto E'_2 sarà un vertice della spezzata. Tirata poi la $E'_2 O'$, questa incontrerà in E'_r la verticale condotta per M_r, e determinerà così il secondo vertice. La parte di spezzata compresa fra E'_1 ed E'_{r+1} sarà dunque la $E'_1 E'_2 E'_r E'_{r+1}$.

La costruzione della spezzata relativa alla luce, e d'una spezzata omologica non presenta dopo ciò alcuna difficoltà.

Se il punto O' fosse a distanza infinita, il ramo $E'_2 E'_r$ della spezzata sarebbe parallelo alla $A_1 B_1$. Dunque:

« Quando un'asta nelle superiori condizioni ha il suo centro a distanza infinita, lo sforzo da essa sopportato rimane costante, mentre il peso P transita per l'intervallo $M_2 M_r$ ».

66. Qualora il punto O' cadesse fuori del foglio, o non potesse essere utilizzato, per costruire la spezzata, nel modo superiormente indicato, si dovrà ricorrere ad una costruzione simile a quella del n. 54. Tale sarebbe per es. la seguente:

Sia $S_1 S_2$ (fig. 117) l'asta proposta, ed il suo centro sia il punto d'incontro

delle $S_3 S_1$, $S_4 S_2$. Tirata $S_1 S_4$, si conduca per S_2 la $S_2 S'_1$ parallela ad $S_1 S_3$, e per S'_1 la $S'_1 Q_1$ parallela alla $S_1 S_2$. Si prenda poscia $M'_2 Q'_1$ eguale alla normale $S_2 Q_1$. Fatto inoltre $M'_2 P'$ eguale alla forza P, valutata nella scala delle forze, si determini il punto P'_1 in modo che sia $M'_2 P'_1 : M'_2 P' = S_4 S'_1 : S_4 S_1$; ciò che potrà facilmente ottenersi tirando $S'_1 K$ parallela ad $S_1 M'_2$, KK' orizzontale e $K' P'_1$ verticale. Si tiri poi $P'_1 N'_1$ normale alla $Q'_1 O'_1$, e tirate le $P' E'_2$, $E'_2 E'_r$ rispettivamente parallele alle $P'_1 N'_1$, $N'_1 O'_1$ si avranno nei punti E'_2, E'_r i due vertici della spezzata $E'_1 E'_2 E'_r E'_{r+1}$. Infatti è facile dimostrare che le figure dei punti $S'_1 D S_2 S_4 Q_1$ e $P'_1 N'_1 O'_1$ sono simili a quelle dei punti $S_1 S_2 O S_4 Q$ e $P' E'_2 O'$ rispettivamente, ed hanno eguale rapporto lineare. Dunque la retta $E'_2 E'_r$ passerà per O', che sarà sulla verticale condotta per O.

Se il punto O è a distanza infinita, la costruzione si semplifica come segue: Tirata $S_4 Q_1$ (fig. 118), parallela all'asta data $S_1 S_2$, si cali la normale $S_2 Q_1$, e fatto $M'_2 Q'_1 = S_2 Q_1$ si tiri per P' la $P' E'_2$ normale alla $Q'_1 O'_1$. Tirata quindi la orizzontale $E'_2 E'_r$, si avrà la spezzata $E'_1 E'_2 E'_r E'_{r+1}$.

67. Nel caso che esistesse un punto di passaggio comune, questo sarebbe pure centro dell'asta. Allora i tre punti M'_r, E'_{r+1} ed O' della fig. 116 coinciderebbero in un punto $E'\lambda$, e nel tratto $E'_1 E'\lambda$ la spezzata avrebbe due lati in vece di tre.

Esempi. Siano tre travi triangolari $E_1 E_2$, $E_2 E_{n-1}$, $E_{n-1} E_n$ (fig. 119), unite a snodatura nei punti E_2, E_{n-1}, delle quali la intermedia è sostenuta nei punti A e B. Domandasi la spezzata delle aste 3.5 e 6.7 durante il transito del peso P da M_1 ad M_n.

Applicando i procedimenti superiori si otterrà per l'asta 3.5 la spezzata $E'_1 E'_2 E'\lambda$ (fig. 120); e per l'asta 6.7 la spezzata $E'_n E'_{n-1} E'_r E'_{r+1}$ (fig. 121).

D. *Spezzate per più pesi.*

68. Si voglia ora costruire per una data asta la spezzata relativa al transito di due pesi P_1 e P_2, anzichè di un solo peso P, i quali però si muovano in modo sopra la trave, che la loro rispettiva distanza rimanga costante.

In tal caso è chiaro che lo sforzo sopportato dall'asta durante il transito dei due pesi, è uguale ad ogni istante alla somma algebrica dei due sforzi causati nell'asta da ognuno dei pesi per sè. Ora questi sforzi sono rappresentati dalle ordinate delle due spezzate vere dell'asta, le quali siano relative ai due dati pesi.

Sia data per es. l'asta 5.7 della trave fig. 122, la quale non si prolunghi oltre gli appoggi, e siano $A_1 M_0 N_0 B_1$ ed $A_1 M'_0 N'_0 B_1$ le due spezzate vere dell'asta relative ai due pesi, e le quali saranno fra loro omologiche-affini. Per una posizione qualunque dei pesi, per es. quella indicata in figura, lo sforzo dell'asta sarà rappresentato dalla somma $RT + R_1 T_1$ delle due ordinate corrispondenti alla posizione dei pesi. Ora è chiaro che se i pesi si muovono, avanzandosi, in modo però che la ordinata RT non esca dal lato $N_0 B_1$ della propria spezzata, e similmente l'ordinata $R_1 T_1$ non esca dal lato $A_1 M'_0$, allora la somma $RT + R_1 T_1$ sarà rappresentabile essa pure dalle ordinate d'una linea retta. Se dunque sia V il punto, in cui la direzione del primo peso P_1 incontra la $A'_1 B'_1$, e si prenda $VM = RT + R_1 T_1$, il luogo dei punti M sarà una linea retta. Quando l'una o l'altra delle ordinate RT, $R_1 T_1$ passa da un lato della propria spezzata al successivo, il punto M descrive una retta diversa.

Ne viene che anche la linea generata dal punto M sarà una spezzata, la quale però avrà tanti vertici, quante volte l'una o l'altra delle ordinate RT, $R_1 T_1$ passa da un lato all'altro della propria spezzata, oppure ne entra o ne esce; ossia in altre parole quante volte l'uno o l'altro dei pesi P_1 e P_2 si trovano sopra uno dei quattro punti A_2, 5, 7, B_2. La spezzata in questione avrà dunque otto vertici, indicando con questo nome anche i due suoi punti estremi. La costruzione di tali vertici non presenta alcuna difficoltà: basta cercare le otto posizioni in cui l'uno o l'altro dei detti pesi coincidono coi suddetti quattro punti; e per ognuna di quelle posizioni fare la somma algebrica delle ordinate RT, $R_1 T_1$, che vi corrispondono. Si otterrà in tal modo la spezzata richiesta $A'_1 M_2 M_3 \dots M_8$; la quale sarà la spezzata vera dell'asta relativa ai due pesi.

Similmente si procederebbe se i pesi fossero tre o più. Siccome però non avremo nel seguito alcuna occasione di far uso di spezzate relative a più pesi, così ci limiteremo al cenno superiore.

V. *Sforzi sopportati dai punti di appoggio e dalle aste.*

69. La spezzata relativa alla reazione di uno dei punti di appoggio oppure ad un'asta qualunque, è, per così dire, la linea fondamentale; tanto per la determinazione dello sforzo corrispondente ad uno o più pesi collocati sopra la trave, in posizione invariabile; quanto anche per la ricerca dello sforzo massimo o minimo, quando quei pesi s'intendano variabili di posizione.

Comincieremo dal primo dei due problemi, che ha per iscopo di determinare quale è lo sforzo corrispondente ad un dato sistema di pesi fissi, collocati sulla trave; e passeremo poi all'altro problema di ricercare, cioè, nella supposizione che quei pesi siano mobili, quale è la posizione che devono assumere per rendere massimo lo sforzo.

Ora siccome il procedimento è il medesimo tanto per le questioni che si riferiscono alle reazioni dei punti d'appoggio, come per quelle che si riferiscono agli sforzi delle aste della trave, così in seguito parleremo in generale solamente delle aste, restando inteso che le regole esposte sono similmente applicabili alle reazioni dei punti d'appoggio.

A. *Sforzi dovuti a pesi concentrati.*

70. Se la trave è caricata da un solo peso P_1 (fig. 123) dato di posizione, e si voglia conoscere lo sforzo sopportato da un'asta determinata della trave, basterà evidentemente costruire la spezzata vera relativa a quell'asta, e prendere l'ordinata $R_1 T_1$, che si trova nella direzione del peso dato. Questa ordinata valutata nella scala delle forze darà lo sforzo sopportato dall'asta. I criterî poi esposti ai n. 58 a 62 potranno servire a determinare se si tratti di una tensione o di una pressione. A questo riguardo è però bene osservare, che la spezzata costituisce una linea continua; e quindi basta conoscere per una posizione qualunque del peso P_1 se l'asta sia in istato di tensione o di pressione per poter conoscere un tale stato in qualunque altra posizione. Questa osservazione permette spesso nei singoli casi di decidere facilmente, anche senza ricorrere ai precetti indicati, se si tratta di tensione o di pressione.

Se la trave è caricata da varî pesi $P_1, P_2, P_3, \ldots$ eguali fra loro, e si voglia conoscere lo sforzo sopportato da un'asta determinata, si costruirà la spezzata vera relativa ad uno dei pesi, e si sommeranno poi algebricamente le ordinate corrispondenti alle loro direzioni.

Così nella fig. 123, per l'asta 5.7, basterà fare algebricamente la somma $R_1T_1 + R_2T_2 + R_3T_3$ e valutarla nella scala delle forze per avere lo sforzo cercato.

71. Se la trave è caricata da varî pesi $P_1, P_2, P_3, \ldots$, fra loro differenti, si potrebbero costruire le spezzate vere dell'asta, relative ad ogni peso, e sommare poi algebricamente le ordinate corrispondenti alle direzioni dei pesi, avendo cura di prendere ogni ordinata nella corrispondente spezzata vera. Ma siccome le spezzate vere corrispondenti a pesi diversi, sono fra loro omologiche-affini, e le ordinate corrispondenti ad una medesima ascissa stanno fra loro come i diversi pesi, così basterà costruire una sola spezzata, per es. quella relativa al peso P_1, e servirsi di questa; purchè però le ordinate corrispondenti alle direzioni dei pesi $P_2, P_3, \ldots$, prima di essere sommate algebricamente colla ordinata corrispondente al peso P_1, siano moltiplicate per i rapporti $\frac{P_2}{P_1}$, $\frac{P_3}{P_1}$, ... Se dunque nella fig. 123 i tre pesi P_1, P_2, P_3 siano fra loro differenti e si supponga, che la spezzata in essa segnata sia la spezzata vera corrispondente al peso P_1, si dovrà prendere la somma

$$R_1T_1 + \frac{P_2}{P_1} \cdot R_2T_2 + \frac{P_3}{P_1} \cdot R_3T_3 .$$

Anzichè però servirsi della spezzata relativa ad uno dei pesi, giova meglio costruire la spezzata relativa alla luce. In tal caso, detta l la luce stessa, e dette $h_1, h_2, h_3, \ldots$ le ordinate corrispondenti alla direzione dei pesi, lo sforzo dell'asta sarà dato dall'espressione

$$\frac{P_1h_1}{l} + \frac{P_2h_2}{l} + \frac{P_3h_3}{l} + \ldots$$

Per ottenere graficamente questa espressione, si può procedere nel modo seguente. Si costruisca la spezzata dell'asta relativa alla luce (fig. 124). Si prendano le A_1P', A_1P'', A_1P''' eguali ai pesi dati, valutati nella scala delle forze, si projettino i punti T_1, T_2, T_3, in T'_1, T'_2, T'_3, e si tirino per P', P'', P''', tre rette rispettivamente parallele alle $B_1T'_1$, $B_1T'_2$, $B_1T'_3$. Si otterranno così i segmenti A_1S', A_1S'', A_1S''', la cui somma algebrica darà lo sforzo cercato. Quando la posizione della spezzata relativa alla luce riuscisse incommoda per il disegno, si ricorrerà alla regola del n. 48 per diminuirne le ordinate. In tal caso però le A_1P', A_1P'', A_1P''' si prenderanno eguali a tante volte i pesi dati, quante sono le unità del coefficiente c, che supponiamo numero intero. Nella figura si è preso $c = 2$.

Qualora alcuni dei pesi dati fossero fra loro eguali, la costruzione superiore si semplifica. Infatti se fra gli n pesi $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ve ne sono alcuni, per esempio $P_{m1}, P_{m2}, \ldots, P_{mk}$ tutti eguali a Q, l'espressione del numero precedente, ponendo $h_{m1} + h_{m2} + \ldots + h_{mk} = H$, diventa

$$\frac{QH}{l} + \ldots,$$

cioè per i pesi eguali si possono sommare le relative ordinate RT, ed operare poi sulla somma H, come sopra si è fatto per ognuna delle h_1, h_2, ...

Ecco un esempio di questo caso. La trave AB (fig. 125) di un ponte metallico, è carica di un treno di locomotive Engerth. Domandasi lo sforzo sopportato dall'asta 5.6, in causa del peso delle macchine.

Come peso delle ruote motrici (segnate in figura con circoli maggiori), si sono assunte 13 tonnellate, e come peso delle altre ruote 8,$^{ton.}$ 5. Si è poi costruita la spezzata relativa alla luce $A_1 M_1 B_1$, per la quale si è preso $c = 10$. Fatta quindi la somma delle ordinate corrispondenti alle ruote motrici, si è preso $A_1 T_1$ eguale ad $\frac{1}{4}$ di tal somma, e ciò per non estendere troppo il disegno. Similmente si è preso $A_1 T_2$ eguale ad $\frac{1}{4}$ della somma delle ordinate relative alle altre ruote. Assunto poi come scala delle forze $1^{mm} = 4$ tonnellate, si sono prese le distanze $A_1 P'_1$ ed $A_1 P'_2$ rispettivamente eguali a $4 \times 10 \times 13$ tonnellate, e $4 \times 10 \times 8{,}5$ ton., ossia eguali a 130^{mm} ed 85^{mm} rispettivamente. Tirate quindi le $P'_1 S'$, $P'_2 S''$ rispettivamente parallele alle $B_1 T_1$, $B_1 T_2$, si sono ottenuti i due segmenti $A_1 S'$, $A_1 S''$, la cui somma AT rappresenta lo sforzo cercato dell'asta 5. 6, che è di circa 190 tonnellate di tensione (n. 60).

Se si volesse per questo stesso caso trovare la reazione dell'appoggio in B, si potrebbe similmente servirsi della spezzata di questo appoggio relativa alla luce. Ma si potrà anche più semplicemente costruire due spezzate vere $C_1 A_1$, $C'_1 A_1$, nelle quali si è fatto $B_1 C_1 = 4 \times 13$ ton., ossia $= 13^{mm}$, $B_1 C'_1 = 4 \times 8{,}5$, ossia $= 8,^{mm} 5$. La reazione dell'appoggio in B sarà allora data dalla quarta parte della somma delle ordinate, corrispondenti alle ruote, e prese rispettivamente nelle due spezzate vere. Questa quarta parte è rappresentata nel disegno da $B_1 R$, che corrisponde a circa 105 tonnellate.

73. Per rendere più rapida la costruzione, si osservi che onde ottenere speditamente la somma delle ordinate, non occorre portare col compasso ad una ad una queste ordinate l'una in seguito all'altra lungo una medesima retta. Più semplicemente si opera come segue. Presa col compasso la prima ordinata $r_1 t_1$, la si porti in $r_2 n$ di seguito alla seconda, e tenuta ferma una punta del compasso in n, lo si apra, portando l'altra punta in t_2. Con ciò l'apertura del compasso comprenderà la somma delle due prime ordinate. Questa apertura poi si porti in $r_3 n'$ di seguito alla terza ordinata, e si proceda come prima. In tal modo, secondo la capacità del compasso, si arriverà alla somma di una parte maggiore o minore di ordinate, o di tutte; e si renderà più rapida la costruzione della cercata somma totale. Similmente è da notare, che non occorrerà sempre di costruire tutta intera la spezzata; bastando limitarsi a quei lati che intersecano la direzione dei pesi.

74. Le spezzate delle aste possono servire a determinare gli sforzi da esse sopportati anche nel caso, che le forze agenti sopra la trave non siano fra loro parallele, ma abbiano direzioni qualunque. Siccome però questo caso generalmente non si presenta in pratica, così ci limiteremo al seguente esempio.

Sia AMNBROP (fig. 126) una travatura triangolare, fissata nei punti A e B, e

sollecitata dalle tre forze 1, 2, 3, dirette secondo le frecce, ed applicate ai nodi M, N, O. Domandasi qual sia lo sforzo sopportato dall'asta MN.

La sola condizione che i punti A e B siano fissi non basta a determinare la direzione e l'intensità delle reazioni in A e B; per cui il problema è indeterminato. Se si aggiunge la condizione che le reazioni in A e B siano parallele alla risultante delle tre forze 1, 2, 3, il problema diventa determinato; e si potrà ottenere lo sforzo nell'asta MN, operando come segue.

Sia O il centro dell'asta MN, di cui si ricerca lo sforzo. Si costruiscano tre circoli, due coi diametri AO ed OB rispettivamente, ed il terzo col centro in O e tangente alla MN; e si tirino per O altrettante parallele ed altrettante normali alle forze date. Le normali intersecheranno i due primi circoli nei punti I I′, II II′, III III′ rispettivamente: le parallele taglieranno il terzo circolo nei punti I″, II″, III″ rispettivamente. Si prenda poi I′. 1 eguale alla prima forza nella data scala, e tirata la I″. 1 si costruisca la spezzata I. 1′. 1″. q_1, i cui lati sono successivamente paralleli ai tre raggi I″ I′, I″ O, I″ 1. Similmente sulle O II″, OIII″ si determineranno i punti q_2, q_3. Si tirino finalmente le I N_1, II′ N_2, III′ N_3 rispettivamente normali alle I′ q_1, IIq_2, IIIq_3. La somma $M_1 N_1 + M_2 N_2 - ON_3$, valutata nella scala delle forze, rappresenterà lo sforzo sopportato dall'asta MN.

Questo procedimento, come è facile dimostrare, è basato sulla costruzione della spezzata vera relativa ad ognuna delle forze, e può estendersi naturalmente ad un numero maggiore di forze. Esso vale anche per il caso che le forze non siano applicate ai nodi, ma ad altri punti, esclusi quelli delle aste concorrenti in A e B; e resta il medesimo anche quando le reazioni in A e B diventino nulle, quando cioè le forze sollecitanti la trave formano un sistema per sè equilibrato, nel qual caso le due aste che concorrono in A e le due che concorrono in B non soffrono alcuno sforzo. Che se a tutti i nodi della trave, compresi i due A e B, fossero applicate delle forze, sotto l'azione delle quali essa fosse in equilibrio senza essere appoggiata, e si volesse conoscere lo sforzo d'un'asta determinata avente un centro C, basterà supporre aggiunti due triangoli A′AP, B′BR agli estremi della serie costituente la trave, e ciò col prendere due punti A′ e B′ ad arbitrio. Si opererà allora sui tre punti A′, B′, C, come sopra si è operato sui tre A, B, O.

B. *Sforzi dovuti a peso uniforme.*

75. Anche quando si tratti di peso uniformemente distribuito lungo la $M_1 M_n$ (fig. 127) sia per tutta la lunghezza, sia per una parte di essa, e si voglia conoscere lo sforzo sopportato da un'asta determinata, si può far uso della relativa spezzata.

Suppongasi che lungo la $M_1 M_n$ sia distribuito dal punto R′ al punto R″ un peso uniforme, la cui azione venga trasmessa alla trave mediante i sostegni verticali *e*, nel modo stesso indicato al n. 36. Si domanda quale sia lo sforzo causato dal detto peso sopra un'asta determinata della trave.

Sia per la data asta, UKIV una porzione della spezzata relativa alla luce, nella costruzione della quale, per tutta generalità, supporremo che siasi fatto uso del coefficiente *c*. Si prenda un punto M determinato dalla distanza variabile $M_1 M = u$,

e sia u compreso fra $M_1R'=u_1$ ed $M_1R''=u_2$. Calata l'ordinata $RT=y$ corrispondente al punto M, essa rappresenterà, nella scala delle forze, lo sforzo che l'asta in questione sopporterebbe, qualora sul punto M si collocasse un peso $\frac{l}{c}$, essendo l la luce AB. Ora nel caso nostro il peso collocato in M è la porzione elementare di peso uniforme compresa entro i limiti u ed $u+du$. Se un tale peso uniforme per unità di lunghezza sia espresso da p e si ponga $P=pl$, il peso elementare sarà espresso da $\frac{P}{l}du$. Lo sforzo dZ, causato da questo peso elementare si otterrà dunque dalla proporzione

$$\frac{l}{c}:y=\frac{Pdu}{l}:dZ$$

da cui $dZ=\frac{cPydu}{l^2}$. E lo sforzo totale Z dell'asta dovuto al peso uniforme compreso fra R′ ed R″ sarà dato da

$$Z=\frac{cP}{l^2}\int_{u_1}^{u_2}ydu\,.$$

Ma l'integrale $\int_{u_1}^{u_2}ydu$ esprime l'area compresa fra l'orizzontale A_1B_1, la spezzata e le due ordinate R_1T_1, R_2T_2 corrispondenti ai punti R′ ed R″. Detta S quest'area, sarà dunque

$$Z=\frac{cPS}{l^2}.$$

Se l'area S si trasforma in un rettangolo, che abbia per base la luce l e per altezza h, si avrà

$$Z=\frac{cPh}{l}\,.$$

Attesa la forma della spezzata, l'area S è sempre facilmente trasformabile con procedimenti grafici in un rettangolo di base l; per cui l'altezza h è una quantità facile da costruirsi. Portata allora quest'altezza in A_1H (fig. 128), e preso $A_1P'=cP$, si tirerà la $P'Z$ parallela a B_1H, ed il segmento A_1Z darà lo sforzo cercato dell'asta.

76. Se il peso uniforme è distribuito lungo varî tratti $R'_1R''_1$, $R'_2R''_2$, ..., fra loro staccati, si avranno più aree analoghe, la cui somma dovrà ridursi ad un rettangolo di base l. Se tutta la M_1M_n fosse caricata uniformemente bisognerà prendere in considerazione tutta l'area compresa fra la orizzontale A_1B_1 e la spezzata. Nel fare la riduzione dell'area o delle aree alla base l, bisogna naturalmente distinguere le aree positive dalle negative, quelle cioè che si trovano da una parte da quelle che si trovano dall'altra della orizzontale A_1B_1.

Se una trave fosse caricata da un peso uniforme, distribuito sopra una certa lunghezza ed inoltre da varî pesi isolati di data posizione, e si volesse conoscere lo sforzo sopportato da un'asta determinata in causa di questi carichi, bisognerà

sommare algebricamente lo sforzo causato dal peso uniforme con quello causato dai pesi isolati.

Così se nella fig. 125, oltre allo sforzo causato nell'asta 5.6 dal treno di locomotive Engerth, si volesse avere quello relativo al peso proprio della trave, che supporremo uniformemente distribuito sulla sua lunghezza e di una tonnellata per metro corrente, si potrebbe procedere come segue. Essendo la spezzata $A_1 M_1 B_1$ bilatera, così l'altezza h del rettangolo avente per base la luce $A_1 B_1$ ed un'area eguale a quella del triangolo $A_1 M_1 B_1$, si avrà prendendo semplicemente $M'm = \frac{1}{2} M'M_1$. Prendendo dunque, come sopra (n. 72), la scala delle forze di $1^{mm} = 4$ tonnellate, ed essendo la luce di 36^m e $c = 10$, si prenderà $A_1 P' = \frac{10 \times 36}{4} = 90^{mm}$, e fatto $A_1 H = M'm$, si tirerà la $P'Z$ parallela alla $B_1 H$. Il segmento $A_1 Z$ darà lo sforzo di tensione sopportato dall'asta 5.6 per il peso proprio della trave, e che è di circa 36 tonnellate. Questo sforzo aggiunto alle 190 tonnellate di tensione dovute al treno di locomotive dà un totale di circa 226 tonnellate.

77. Lo sforzo causato in un'asta da un peso concentrato può confrontarsi con quello prodotto da un peso uniformemente distribuito. A tale riguardo è notevole la seguente proprietà, che è relativa agli sforzi di quelle aste che hanno una spezzata bilatera.

Supponiamo che sia costruita la spezzata $A_1 M_1 B_1$ (fig. 129) relativa alla luce di una tale asta, e che nel costruirla siasi fatto uso del coefficiente c. L'ordinata $M'M_1$ rappresenterà nella scala delle forze lo sforzo sopportato dall'asta, qualora si caricasse la trave nella verticale passante per M' col peso $\frac{l}{c}$. Che se invece la trave si caricasse nella stessa verticale con un peso P concentrato, allora posto $M'M_1 = 2h$, lo sforzo X dell'asta si avrebbe dalla proporzione $X : 2h = P : \frac{l}{c}$, da cui

$$X = \frac{2cPh}{l}.$$

Che se lo stesso peso P si distribuisca uniformemente lungo la trave entro le verticali condotte per A_1 e B_1, qualunque del resto sia la distribuzione dei sostegni e, che trasmettono il peso alla trave; lo sforzo dell'asta sarà dato dalla

$$Z = \frac{cPS}{l^2} \quad \text{(n. 75)},$$

dove S indicherà tutta l'area del triangolo $A_1 M_1 B_1$. Ma si ha $S = lh$, dunque $Z = \frac{cPh}{l}$, cioè

$$Z = \tfrac{1}{2} X.$$

Dunque: « Un peso P sulla verticale passante per il vertice d'una spezzata bilatera, produce nell'asta rispettiva uno sforzo doppio di quello prodotto dallo stesso peso P distribuito uniformemente fra le verticali passanti per i punti estremi della spezzata ».

78. Le aree delle spezzate trilatere e bilatere, comprese fra le verticali passanti per i punti d'appoggio, possono facilmente esprimersi in funzione delle quantità fondamentali, che servono alla loro costruzione.

Sia $A_1 M_1 N_1 B_1$ (fig. 130) la spezzata relativa alla luce d'un'asta, il cui centro O trovisi fra le verticali suddette, per costruire la quale siasi fatto uso del coefficiente c. Avendosi (n. 43) $A_1 M' = m$, $B_1 N' = n$, $A_1 O' = a$, $B_1 O' = b$, $A_1 B_1 = l$; e ponendo inoltre $M' M_1 = y_1$, $N' N_1 = y_2$ si avrà (n. 44)

$$y_1 = \frac{bm}{cq}, \qquad y_2 = \frac{an}{cq}$$

e quindi l'area S del quadrilatero $A_1 M_1 N_1 B_1$, cioè

$$S = \tfrac{1}{2} m y_1 + \tfrac{1}{2} n y_2 + \tfrac{1}{2} (l - m - n)(y_1 + y_2)$$

diverrà con facile riduzione

$$S = \frac{l}{2cq}(an + bm - mn),$$

Nel caso che il punto M′ coincida con A_1, oppure N′ con B_1, la spezzata diventa bilatera e si ha rispettivamente $m = 0$, oppure $n = 0$; dunque in questi casi sarà $S = \frac{anl}{2cq}$, oppure $S = \frac{bml}{2cq}$. Se il centro O cade sulla verticale per A_1, oppure su quella per B_1, sarà $a = 0$, oppure $b = 0$; e quindi $S = \frac{ml}{2cq}(b - n)$, oppure $S = \frac{nl}{2cq}(a - m)$.

Se vi è un punto comune di passaggio, ossia se M′, N′, O′ coincidono (n. 47 e 49), sarà $l - m - n = 0$, e quindi $S = \frac{1}{2} m y_1 + \frac{1}{2} n y_2$, cioè per essere in questo caso $m = a$, $n = b$,

$$S = \frac{abl}{2cq}.$$

Se il centro è esterno alle verticali (fig. 131), e si ponga analogamente $A_1 M' = m$, $B_1 N' = n$, $A_1 O' = a$, $B_1 O' = b$, $M' M_1 = y_1$, $N' N_1 = y_2$; ed inoltre $M' O'' = z_1$, $N' O'' = z_2$, $M' O' = t_1$, $N' O' = t_2$, si avrà $z_1 + z_2 = l - m - n$, e $z_1 : z_2 = y_1 : y_2$, e sarà pure $y_1 = \frac{bm}{cq}$, $y_2 = \frac{an}{cq}$. Da questi valori si dedurrà facilmente l'area S_1 del triangolo $A_1 M_1 O''$

$$S_1 = \frac{bm^2 t_2 l}{2cq(an + bm)}$$

e l'area S_2 del triangolo $B_1 N_1 O''$

$$S_2 = \frac{an^2 t_1 l}{2cq(an + bm)}.$$

Le due aree S_1, S_2 hanno segno opposto, dunque l'area totale sarà

$$S_1 - S_2 = \frac{(bm^2 t_2 - an^2 t_1) l}{2cq(an + bm)}$$

e si avrà $S_1 = S_2$ quando sia

$$bm^2 t_2 = an^2 t_1.$$

79. Se il centro è a distanza infinita, i rapporti $\frac{a}{t_1}, \frac{b}{t_1}, \frac{a}{t_2}, \frac{b}{t_2}$ diventano eguali all'unità. Quanto ai rapporti $\frac{a}{q}, \frac{b}{q}$, essi possono facilmente ottenersi nel

modo seguente. Sia VU (fig. 132) una linea orizzontale, VC la direzione nella quale trovasi il centro a distanza infinita, VT una parallela all'asta, e siano ω ed α gli angoli formati da quelle rette, com' è indicato in figura. Ponendo mente al significato delle lettere a, b, q, si vedrà facilmente che quando il centro va all'infinito i rapporti $\frac{a}{q}$, $\frac{b}{q}$ diventano ambedue eguali a $\frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}\alpha}$. Si ha dunque per il caso del centro all'infinito

$$S_1 = \frac{m^2 l}{2c(m+n)} \cdot \frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}\alpha}, \qquad S_2 = \frac{n^2 l}{2c(m+n)} \cdot \frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$S_1 - S_2 = \frac{(m-n)l}{2c} \cdot \frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Le aree saranno dunque eguali, in questo caso, quando sia $m = n$.

80. Facendo ora uso della formola $Z = \frac{cPS}{l^2}$ (n. 75), si avrà l'espressione algebrica dello sforzo d'un'asta nel caso di un peso uniformemente distribuito.

Se l'asta ha il suo centro fra le verticali condotte per i punti d'appoggio, e la trave sia caricata da un peso $P = pl$ uniformemente distribuito fra le verticali stesse, lo sforzo da essa sopportato sarà espresso da

$$Z = \frac{p}{2q}(an + bm - mn),$$

la quale formola facilmente si modifica per i casi, sopra notati, nei quali sia $m = 0$, od $n = 0$; $a = 0$, oppure $b = 0$. Se l'asta ha un punto di passaggio comune, si ha

$$Z = \frac{abp}{2q}.$$

Se l'asta invece ha il suo centro esternamente alle verticali passanti per i punti di appoggio, ed il peso uniforme si estenda fra le verticali condotte per A_1 e per O'' (fig. 131), lo sforzo dell'asta sarà dato dalla

$$Z_1 = \frac{bm^2 t_2 p}{2q(an + bm)}.$$

Similmente se il peso uniforme si estende da O'' fino a B_1, lo sforzo, prescindendo dal segno, sarà espresso da

$$Z_2 = \frac{an^2 t_1 p}{2q(an + bm)}.$$

E quando il peso uniforme si estende a tutto l'intervallo compreso fra le verticali dei punti d'appoggio, sarà

$$Z = \frac{(bm^2 t_2 - an^2 t_1)p}{2q(an + bm)}.$$

Se il centro è a distanza infinita si ha più semplicemente nei tre casi superiori

$$Z_1 = \frac{m^2}{m+n} \cdot \frac{p\cos\omega}{2\operatorname{sen}\alpha}$$

$$Z_2 = \frac{n^2}{m+n} \cdot \frac{p\cos\omega}{2\operatorname{sen}\alpha}$$

$$Z = (m-n)\frac{p\cos\omega}{2\operatorname{sen}\alpha}.$$

Queste formole si semplificano ulteriormente, se la direzione VC, in cui trovasi il centro dell'asta, sia orizzontale: si ha allora $\omega = 0$, $\cos\omega = 1$. Questo caso si presenta per tutte le diagonali delle travi a tavole parallele orizzontali.

81. Al n. 36 si è supposto che il peso P, trasportandosi lungo la trave, fosse immediatamente sopportato da una serie di travi semplici $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, ..., appoggiate a sostegni verticali e_1, e_2, e_3, ..., col mezzo dei quali il peso P veniva finalmente a gravitare sui nodi della trave triangolare. Ora può avvenire che oltre alla serie di travi semplici $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, ..., vi sia una seconda serie di travi semplici $L_1 L_2$, $L_2 L_3$, ..., sostenute da altri sostegni verticali g_1, g_2, g_3, ..., analoghi agli e_1, e_2, e_3, ..., ed i quali trasmettano l'azione di un altro peso Q ai nodi della trave triangolare. Lo sforzo sopportato da un'asta determinata durante il transito del peso Q sarà pure rappresentabile da una spezzata; ma questa in generale sarà differente dalla spezzata dovuta al peso P. Anzi le due spezzate, sebbene relative ad una medesima asta, non saranno neppure generalmente omologiche-affini; poichè, come sopra si è veduto, la posizione dei vertici della spezzata dipende dalla posizione dei punti E, ai quali, mediante i sostegni e_1, e_2, e_3, ... viene trasmessa l'azione del peso; e questa posizione differirà in generale da quella dei punti G, relativi ai sostegni g_1, g_2, g_3, ... Se dunque lungo la serie delle travi $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, ... siano collocati dei pesi concentrati, ed altri pesi concentrati siano collocati lungo la serie delle travi $L_1 L_2$, $L_2 L_3$, ..., e si voglia conoscere lo sforzo sopportato da un'asta determinata in seguito a tutti questi pesi, bisognerà costruire due spezzate per la medesima asta, relative alle dette due serie di travi; e determinato lo sforzo per ciascuna serie farne poi la somma algebrica. La stessa regola vale pure, qualora invece di pesi concentrati si avessero dei pesi uniformemente distribuiti, collocati lungo le dette due serie di travi semplici. Le regole superiormente sviluppate si applicheranno allora ad ogni serie, e se ne sommeranno poi algebricamente i risultati.

Nell'esempio dato al n. 72 (fig. 125) si è supposto che il palco del ponte fosse sostenuto unicamente dai nodi superiori della trave, ai quali quindi veniva trasmesso il peso del treno di locomotive Engerth colà considerato. Ma si potrebbe anche supporre che il palco del ponte fosse sopportato in parti eguali dai nodi superiori e dagli inferiori; qualora cioè questo palco non fosse collocato superiormente alla trave, come indica la figura, ma fosse disposto lungo la orizzontale AB, e le travi trasversali fossero collegate contemporaneamente ai nodi superiori ed ai nodi inferiori della trave principale. In tal caso per l'asta 5.6 ivi considerata, bisognerebbe costruire due spezzate, una relativa alla serie dei nodi superiori, l'altra relativa alla serie dei nodi inferiori. Di queste spezzate la prima sarebbe quella $A_1 M_1 B_1$ già disegnata, la seconda sarebbe trilatera. Il peso di ciascuna ruota dovrebbe allora per metà essere considerato nell'una, per metà nell'altra spezzata. Similmente il peso proprio della stessa trave (fig. 125) si è al n. 76 considerato come distribuito uniformemente lungo il palco $A_2 B_2$, cioè gravitante sui nodi superiori della trave. Se questo peso s'intendesse gravitare anche sui nodi inferiori, bisognerebbe allora, come per il peso del treno di locomotive, considerare l'altra spezzata dell'asta 5.6, cioè quella relativa ai nodi inferiori.

Spesso avviene però che le due spezzate in gran parte coincidono, quando ambedue siano relative alla luce; e ciò facilita la loro costruzione. Eccone due esempî. Domandasi

qual sia lo sforzo sopportato dall'asta 1.3 della trave AB (fig. 133), in causa del peso proprio della trave, nella supposizione, che tale peso proprio sia per metà distribuito uniformemente lungo la tavola superiore $A_2 B_2$, e per metà lungo la tavola inferiore AB. Sia la luce della trave 16^m, ed il suo peso una tonnellata per metro corrente. Rispetto alla serie dei nodi A_2, 1, 3, 5, 7, B_2, che qui rappresentano i punti E, l'asta 1.3 possiede la spezzata trilatera relativa alla luce $A_1 M_1 N_1 B_1$, per la quale in figura si è preso $c = 6$. Per la serie dei nodi A, 2, 4, 6, B, che rappresentano i punti G, l'asta possiede invece la spezzata bilatera $A_1 L B_1$ la quale, qualora si ritenga $c = 6$, coincide nei tratti $A_1 M_1$, $B_1 N_1$ colla spezzata trilatera. Ora tirata $M_1 D$ parallela alla $A_1 N_1$, il triangolo avente per base $A_1 B_1$ e per altezza la $D'D$ avrà l'area eguale a quella del quadrilatero $A_1 M_1 N_1 B_1$. Preso dunque $A_1 H$ eguale alla semisomma delle due altezze $L' L$, $D' D$, il rettangolo avente la base $A_1 B_1$ e l'altezza $A_1 H$ avrà l'area eguale a quella del triangolo $A_1 L B_1$, più quella del quadrilatero $A_1 M_1 N_1 B_1$. Se dunque si prende la scala delle forze di $1^{mm} = 2$ ton., e si faccia $A_1 P = \frac{6.16}{2} = 48^{mm}$, tirata PZ parallela a $B_1 H$, il segmento $A_1 Z$ darà nella scala delle forze lo sforzo (pressione) sopportato dall'asta 1.3. Esso è di circa 23 tonnellate.

Come secondo esempio cerchiamo lo sforzo sopportato dalla diagonale 2.3 (fig. 133) in causa del peso proprio della trave, supposto distribuito come sopra. Si troverà facilmente che per la serie dei nodi superiori, l'asta 2.3 ha la spezzata $A_1 M_1 N_1 B_1$ (fig. 134), nella quale $c = 3$. Per i nodi inferiori invece la spezzata è $A_1 L K B_1$. Ora riducendo la somma delle aree dei due triangoli $Q K B_1$, $O N_1 B_1$ ad un rettangolo colla base $A_1 B_1$ si trova l'altezza $A_1 h_1$. Riducendo invece analogamente la somma delle aree dei due triangoli $A_1 M_1 O$, $A_1 L Q$ si trova l'altezza $A_1 h_2$. Fatta la differenza $A_1 H$ di queste due altezze, e preso $A_1 P = 24^{mm}$, poichè $c = 3$, si tiri PZ parallela a $B_1 H$. Il segmento $A_1 Z$ darà lo sforzo (pressione) sopportato dalla diagonale 2.3; esso è di circa 8 tonnellate.

Se invece di due serie di sostegni, se ne avessero tre o più si costruirebbero tre o più spezzate, procedendo come ora si è mostrato per due serie. Il caso di tre serie si presenterebbe per es., qualora nella trave AB (fig. 133) si considerasse il peso proprio come diviso in tre parti, di cui la prima fosse uniformemente distribuita lungo la AB, la seconda uniformemente distribuita lungo la $A_2 B_2$ e la terza finalmente come uniformemente distribuita lungo la linea spezzata A1234567B, costituita dalle diagonali. Se in tale supposizione si volesse avere lo sforzo sopportato da un'asta determinata, si dovrebbero per quest'asta costruire tre spezzate: una relativa ai nodi superiori $A_2 1357 B_2$, la seconda relativa agl'inferiori A246B, e la terza infine relativa alla serie A1234567B.

82. Che se si volesse anche tener conto della diversa sezione, e quindi del diverso peso che hanno le singole aste della trave, si avrebbe da sciogliere il seguente problema: Dato il peso d'un'asta determinata, supposta prismatica, domandasi lo sforzo che in causa di tal peso sopporta un'altra asta determinata della trave. Per avere lo sforzo cercato basterà in tal caso costruire una spezzata dell'asta di cui si cerca lo sforzo, e ciò per una serie di nodi arbitraria, purchè però nella serie vi

siano i due nodi appartenenti a quell'asta di cui è dato il peso. Oltre a questi due nodi basterà dunque prendere i punti d'appoggio A e B della trave.

Esempio. Data la trave fig. 133 e dato il peso dell'asta 5.6, supposta prismatica, domandasi quale sforzo questo peso produca nell'asta 2.4. Si costruisca la spezzata relativa alla luce dell'asta 2.4 rispetto ai nodi A, 5, 6, B, e si troverà la $A_1 N_1 B_1$ (fig. 135), per la quale si è preso $c = 2$; mentre i due punti di passaggio dell'asta 2.4 sono, per i nodi assunti, il punto A ed il nodo 5 (n. 53 in fine). Lo sforzo cercato sarà dunque proporzionale all'area del trapezio $N' N_1 RT$, determinato dalle verticali condotte per i nodi 5 e 6. Questo trapezio deve ora ridursi in un rettangolo avente la base $A_1 B_1$. In figura si è preso $B_1 G$ = alla semisomma delle basi, e $B_1 D$ = a quattro volte l'altezza $N_1 R$ del trapezio. Tirata poi GH parallela ad $A_1 D$, si è ottenuto il segmento $B_1 H$, tale che un rettangolo avente $A_1 B_1$ per base e $B_1 H$ per altezza sarebbe quadruplo del trapezio $N' N_1 RT$. Si è poi supposto che l'asta 5.6 pesi 250 chilogrammi; e siccome la sua projezione orizzontale equivale alla ottava parte della luce, così il peso P (n. 75) è, nel caso attuale, di $8 \times 250 = 2000$ chilogrammi. Se dunque come scala delle forze si prende $1^{mm} = 10$ chil., essendo $c = 2$, ed essendosi presa $B_1 H$ quadrupla, si dovrà porre $B_1 P' = \frac{2 \times 2000}{4 \times 10} = 100^{mm}$. Tirata quindi $P' Z$ parallela ad $A_1 H$ si avrà nella $B_1 Z$ lo sforzo cercato dell'asta 2.4, il quale è una tensione di 225 chil. circa. La $B_1 H$ si è presa quadrupla, per evitare le intersezioni sotto angolo troppo acuto.

Se l'asta di cui è dato il peso è verticale, e si voglia conoscere lo sforzo da essa prodotto in un'altra asta qualunque, si potrà supporre concentrato il peso dell'asta verticale nel suo nodo superiore od inferiore (n. 61), e si costruirà la spezzata dell'altra asta qualunque rispetto ai due punti d'appoggio e ad un tal nodo. Anche la ricerca dello sforzo longitudinale sopportato dall'asta verticale per il proprio peso, può, dopo le considerazioni superiori, facilmente eseguirsi.

VI. Sforzi massimi e minimi.

83. Supponiamo ora che il carico non sia fisso, ma che possa prendere diverse posizioni lungo la $M_1 M_n$ (fig. 79). Domandasi quale sia la posizione di questo carico, che rende massimo o minimo lo sforzo sopportato da un'asta determinata.

A. *Sforzi massimi e minimi per pesi concentrati.*

Si consideri prima il caso di uno o più pesi P_1, P_2, ... concentrati; i quali mentre transitano lungo la $M_1 M_n$ mantengono fra di loro invariata la rispettiva distanza. Supponiamo che i pesi transitino sopra la $M_1 M_n$ nella direzione da M_1 verso M_n, ed in un momento qualunque del transito riferiamo la posizione loro alla trave mediante la distanza variabile u di ogni peso P dal punto M_1, ponendo $M_1 P_1 = u_1$, $M_1 P_2 = u_2$, ... Le differenze $u_1 - u_2 = d_1$, $u_1 - u_3 = d_2$, ... saranno, per ciò che si è supposto, costanti.

Ora lo sforzo N, prodotto da un peso qualunque P sopra un'asta determinata, è sempre una funzione lineare di u (n. 39), cosicchè si potrà porre $N = \alpha + bu$. In

questa funzione i coefficienti α e b restano inalterati, finchè la direzione del peso P passa fra due vertici successivi della spezzata dell'asta che si considera; comprendendo nella parola *vertice* anche il primo e l'ultimo punto della spezzata. Ora si ha $u_1 - u = d$; dunque ponendo $a = \alpha + bd$, sarà $N = a + bu_1$. E quindi lo sforzo totale sopportato dall'asta sotto l'azione dei pesi $P_1, P_2, \ldots$ sarà espresso da

$$N = \Sigma a + u_1 \Sigma b,$$

nella quale espressione sotto i segni di sommazione s'intendono contenuti quei termini che appartengono ai pesi che si trovano sopra la trave. Per i pesi infatti che non vi fossero ancora montati, o che vi fossero già usciti, i coefficienti a e b sono nulli.

Le quantità Σa e Σb restano inalterate al variare di u_1, finchè nessuno dei pesi P passi oltre a qualche vertice della spezzata dell'asta. Infatti quando uno dei pesi, per es. P_k, passa oltre un vertice, i coefficienti α_k, b_k che gli sono relativi, cambiano bruscamente di valore, e quindi cambieranno pure bruscamente di valore le due somme Σ. Supponiamo ora che i pesi P si trovino in posizione tale, che essi possano muoversi alcun poco tanto avanzandosi quanto anche retrocedendo, senza che alcuno di essi passi oltre un vertice della spezzata. In tal caso il valore di N, col crescere di u_1 aumenterà o diminuirà, secondochè la derivata $\frac{dN}{du_1}$ sarà positiva o negativa. Ma si ha $\frac{dN}{du_1} = \Sigma b$; dunque lo sforzo N sopportato dall'asta cresce o diminuisce coll'avanzare dei pesi, secondochè la somma Σb è positiva o negativa. Se i pesi invece retrocedono, lo sforzo N diminuisce o cresce, secondochè la detta somma è positiva o negativa. Da questa considerazione risulta, che nella posizione sopra supposta, quando cioè i pesi possono alcun poco avanzarsi ed anche retrocedere senza che alcun peso passi oltre un vertice della spezzata dell'asta, non può aver luogo nè un massimo nè un minimo valore di N. Un tale valore massimo o minimo non può dunque aver luogo, se non che quando la direzione di qualcuno dei pesi P passi per un vertice della spezzata dell'asta. Se per brevità si chiami *coincidenza* un tale passaggio, si potrà dire:

« Quando lo sforzo sopportato da un'asta è massimo o minimo, ha luogo coincidenza di uno dei pesi con uno dei vertici della spezzata ».

Questa proposizione è per sè evidente, quando si tratta di un solo peso; poichè è chiaro che il massimo o minimo sforzo, ch'esso può produrre in un'asta determinata, non può aver luogo, senza che la direzione del peso passi per un vertice della spezzata dell'asta. Ma anche quando si tratta di più pesi, se ne può riconoscere direttamente la verità, osservando che gli sforzi sopportati da un'asta durante il transito di più pesi, sono pure rappresentabili da una spezzata; e che questa ha tanti vertici, quante sono le coincidenze dei pesi coi vertici della spezzata dell'asta (n. 68). Ora le massime e le minime ordinate d'una spezzata qualunque devono necessariamente essere quelle di qualche suo vertice; dunque il massimo o minimo sforzo d'un'asta non può aver luogo, se non quando la direzione di uno dei pesi passi per un vertice della spezzata dell'asta.

Se la somma Σb fosse nulla, allora lo sforzo N resterebbe inalterato, sia che i pesi si avanzino, sia che retrocedano; semprechè nessuno di essi oltrepassi un

vertice della spezzata dell'asta. In tal càso nella spezzata relativa al sistema di pesi vi è un lato orizzontale, per il quale quindi tutte le ordinate sono fra loro eguali.

84. Ma sebbene non possa aver luogo nè massimo nè minimo nello sforzo d'un'asta, senza la coincidenza di un peso con un vertice, una tale coincidenza non produce però necessariamente un caso di massimo o di minimo. Sia infatti per una data posizione dei pesi P, per la quale non hanno luogo coincidenze, la somma Σb positiva e si facciano avanzare i pesi, finchè avvenga un solo passaggio, per es. del peso P_k oltre il vertice V della spezzata dell'asta che si considera. La somma Σb cambierà allora bruscamente di valore. Se un tale nuovo valore è anch' esso positivo, è evidente che la coincidenza di P_k con V non darà luogo nè a massimo nè a minimo; poichè, essendo in tal caso il coefficiente differenziale $\frac{dN}{du_1}$ quantità positiva tanto prima che dopo il passaggio, il valore di N seguiterebbe a crescere tanto prima che dopo. Ad una simile conclusione si arriverebbe qualora la somma Σb fosse negativa tanto prima che dopo la coincidenza di P_k con V.

Se invece la detta somma cambia di segno dopo la coincidenza, allora, come è facile dedurre, avrà luogo massimo o minimo: e precisamente:

« La coincidenza di uno dei pesi con un vertice della spezzata dell'asta corrisponde ad un massimo o ad un minimo, secondochè la somma Σb passi da positiva a negativa o viceversa ».

Come casi particolari sono da rilevarsi i seguenti. Se vi sono due coincidenze successive tali, che per la prima di esse la somma Σb passi da un valore finito Σ' a zero, e per la seconda da zero ad un altro valore finito Σ'', si troverà facilmente, che qualora Σ' e Σ'' hanno il medesimo segno non ha luogo nè massimo nè minimo. Sa invece Σ' sia positiva e Σ'' negativa, la N è un massimo per tutte le infinite posizioni dei pesi P, comprese fra le due coincidenze: sarebbe invece un minimo se Σ' fosse negativa e Σ'' positiva.

La prima di tutte le coincidenze ha luogo quando il primo dei pesi P trovasi sul primo vertice (sul punto d'origine) della spezzata, e l'ultima quando l'ultimo peso trovasi sopra l'ultimo vertice (sul punto ultimo). Per la prima di queste coincidenze estreme, la somma Σb passa da zero ad una quantità finita, e per la seconda da una quantità finita a zero. Ma, come è facile vedere, nè per l'una nè per l'altra ha luogo massimo o minimo.

Si noti anche che nella presente ricerca si possono considerare come non esistenti i lati estremi della spezzata, qualora essi coincidano coll'asse al quale essa è riferita.

Ritornando ora al caso generale, si vede che la ricerca delle posizioni dei pesi P, per le quali lo sforzo d'un'asta determinata diventa massimo o minimo si riduce al seguente procedimento:

a) S'immagini che la serie dei pesi P transiti lungo la $M_1 M_n$, e si stabiliscano le coincidenze dei pesi coi vertici della spezzata dell'asta nell'ordine nel quale tali coincidenze successivamente si producono;

b) Per ogni coincidenza si esamini se la somma Σb cambia o no di segno. Tutte le coincidenze, per le quali quella somma da positiva diventa negativa corrisponderanno

ad altrettanti massimi; quelle invece per le quali quella somma da negativa diventa positiva corrisponderanno ad altrettanti minimi;

c) Per conoscere poi quale sia il massimo dei massimi ed il minimo dei minimi, si procederà alla valutazione di tutti i singoli massimi e di tutti i singoli minimi e dal loro confronto si potrà poi decidere quale sia fra di essi il maggiore o minore.

85. La parte *a*) del procedimento ora indicato si può facilmente eseguire come segue. Se i pesi che transitano sono r di numero, e la spezzata abbia s lati, e quindi $s+1$ vertici (comprendendovi il primo e l'ultimo punto), il numero delle coincidenze sarà $r\,(s+1)$. Così se $A_1 M_1 N_1 B_1$ (fig. 136) sia la spezzata d'un'asta, e sopra la trave debbano transitare i due pesi P_1 e P_2, mantenendo invariabile la loro distanza rispettiva, si avrà $r=2$, $s=3$, e quindi le coincidenze saranno 8. Queste coincidenze, nel caso della figura, disposte secondo l'ordine con cui succedono, sono le seguenti:

1.ª	La direzione del peso	P_1	passa per	il punto	A_1
2.ª	»	P_1	»	»	M
3.ª	»	P_2	»	»	A_1
4.ª	»	P_2	»	»	M
5.ª	»	P_1	»	»	N
6.ª	»	P_2	»	»	N
7.ª	»	P_1	»	»	B_1
8.ª	»	P_2	»	»	B_1

Queste coincidenze si vedono segnate nella parte inferiore della figura dove la posizione dei pesi è indicata dai loro indici. Esse si ottengono facilmente tirando due rette obblique qualunque, la cui distanza orizzontale eguagli quella dei pesi dati, come si vede nella figura stessa. Il modo più semplice in pratica di trovare le successive coincidenze sta nel segnare sopra una striscia di carta le distanze dei pesi P_1 e P_2 fra loro, e fare poscia scorrere la striscia lungo una retta AB (fig. 137), sopra la quale siansi segnati i punti A M N B, collocati nelle verticali passanti per i vertici della spezzata. Nella parte inferiore della figura 136 si sono segnate, come si disse, tutte le coincidenze: però, come si vedrà più avanti, basterà, per lo scopo al quale qui si vuol giungere, segnare solamente quelle che corrispondono ai valori massimi ed ai minimi.

86. Per poter eseguire la parte *b*) del procedimento superiore, cioè per poter esaminare se la somma Σb cambia o no di segno per una data coincidenza, bisogna trovare una norma per determinare il segno di essa somma corrispondente ad una posizione dei pesi P, per la quale non abbia luogo coincidenza alcuna, ma la quale del resto sia scelta comunque. Trovata questa norma sarà possibile di decidere se il segno di quella somma cambia o no per una coincidenza qualunque; bastando allora confrontare il segno di Σb relativo alla posizione dei pesi che immediatamente precede la coincidenza, col segno relativo alla posizione che immediatamente la segue.

Sia dunque, per una posizione qualunque dei pesi P, $R_k T_k$ (fig. 138) la direzione di uno dei pesi, per es. del peso P_k, ed EF quel lato della spezzata vera ad esso relativa, il quale viene intersecato dalla $R_k T_k$. Lo sforzo N_k sopportato dall'asta,

in causa del peso P_k, sarà dato dall'ordinata $R_k T_k$; ma tale sforzo, per ciò che sopra si è supposto (n. 83), è anche espresso da $\alpha_k + b_k u_k$; dunque l'equazione $N_k = \alpha_k + b_k u_k$, dove N_k si riguardi come ordinata, non è altro che l'equazione del lato EF della spezzata, e quindi la quantità b_k non è altro che la tangente trigonometrica dell'angolo ω_k, che il lato EF fa coll'asse $A_1 B_1$. La somma Σb, per una posizione qualunque dei pesi P, non è dunque altro che la somma delle tangenti trigonometriche degli angoli, che i lati delle spezzate vere, intersecati dalla direzione dei pesi, formano coll'asse $A_1 B_1$.

Ora, se la spezzata vera del peso P_k ha s lati, questi saranno successivamente intersecati dalla direzione di esso peso, durante il suo transito sopra la trave. L'angolo ω_k e la sua tangente trigonometrica b_k assumono dunque, durante il detto transito, s valori diversi, che si potranno individuare scrivendo $\omega_{k,1}$, $\omega_{k,2}$, ..., $\omega_{k,s}$ ed analogamente $b_{k,1}$, $b_{k,2}$, ..., $b_{k,s}$. Simile considerazione può farsi per gli altri pesi, ad ognuno dei quali spetta una spezzata vera pure di s lati; poichè tutte le spezzate vere d'un'asta, relative a diversi pesi, sono fra loro figure omologico-affini. Per indicare meglio tutti questi diversi valori, che possono essere assunti dalle quantità b, sottoposte al segno sommatorio Σ, potrà scriversi $\Sigma b_{k,m}$ in luogo di Σb.

Se dunque il lato EF (fig. 138) sia l'$m.^{mo}$ della spezzata vera relativa al peso P_k, ed a quel lato corrisponda il lato $E'F'$ d'una spezzata omologica-affine, avente il coefficiente c (n. 48), le EF, $E'F'$ passeranno per uno stesso punto O della $A_1 B_1$. Posto dunque l'angolo $E'OA_1 = \varepsilon_m$ sarà $b_{k,m} = \text{tg.}\ \omega_{k,m}$ e

$$\text{tg}\,\omega_{k,m} : \text{tg}\,\varepsilon_m = R_k T_k : R_k T'_k$$

Ma $R_k T_k : R_k T'_k = c P_k : l$ (n. 48), dunque $b_{k,m} = \frac{c P_k}{l}\ \text{tg}\,\varepsilon_m$.

Se ora da un punto O d'un'orizzontale OH (fig. 139) si tira una retta OL_m, la quale faccia colla OH l'angolo ε_m; e si prende OK eguale al peso P_k nella scala delle forze, allora, posta la verticale $KM = h_{k,m}$ si avrà $h_{k,m} = OK\,\text{tg}\,\varepsilon_m = P_k\,\text{tg}\,\varepsilon_m$; dunque

$$b_{k,m} = \frac{c}{l}\,h_{k,m}.$$

Se dunque per tutti i pesi P, sebbene abbiano spezzate vere distinte, si mantenga la medesima spezzata omologica-affine col coefficiente c, allora il fattore $\frac{c}{l}$, che moltiplica nella superiore equazione la $h_{k,m}$, è indipendente dagli indici k ed m; dei quali il primo rappresenta il numero d'ordine della forza P, il secondo invece rappresenta il numero d'ordine di quel lato della spezzata, che è tagliato dalla direzione della forza.

Se dunque nella somma $\Sigma b_{k,m}$ si pone per ogni $b_{k,m}$ che vi è contenuto, il suo valore dato dalla equazione superiore, la quantità $\frac{c}{l}$ diventerà fattore comune e si avrà

$$\Sigma b_{k,m} = \frac{c}{l}\,\Sigma h_{k,m}.$$

Per conoscere dunque il segno della somma $\Sigma b_{k,m}$ basterà trovare il segno

della somma $\Sigma h_{k,m}$. Il coefficiente c è evidentemente arbitrario, ossia è arbitraria la spezzata omologica-affine, a cui appartiene il lato E′F′ (fig. 138), purchè resti la medesima per tutti i pesi.

87. Vediamo ora mediante alcuni esempî come si possa facilmente conoscere il segno della $\Sigma h_{k,m}$ e quindi quello della Σb. Si abbia la trave AB (fig. 140), e sopra di essa si trovino i due pesi P_1 e P_2. Domandasi qual sia per questa posizione dei pesi il segno di Σb.

Si costruisca una spezzata omologica qualunque $A_1 M_2 N_2 B_1$ dell'asta che si considera, e si attribuisca ad ogni lato $A_1 M_2$, $M_2 N_2$, $N_2 B_1$ il rispettivo numero d'ordine 1, 2, 3, come si vede notato nella figura. Per un punto O d'un'orizzontale OH (fig. 141) si tirino poi le OL_1, OL_2, OL_3 parallele ai tre lati successivi 1, 2, 3 della spezzata. Si prendano quindi da O verso H le distanze O(1), O(2), eguali alle forze P_1 e P_2, sia nella data scala delle forze, sia in una scala diversa dalla data. Finalmente per i punti (1) e (2) si tirino delle verticali, che intersechino le OL.

Ciò fatto si osservi, che nella data posizione delle forze P_1 e P_2 (fig. 140), la forza P_1 taglia colla sua direzione il lato 2, e la forza P_2 taglia il lato 1: i coefficienti k ed m saranno dunque per la prima forza $k=1$, $m=2$, e per la seconda $k=2$, $m=1$. Perciò si avrà nel caso presente

$$\Sigma b_{k,m} = b_{1,2} + b_{2,1}$$

e quindi anche

$$\Sigma h_{k,m} = h_{1,2} + h_{2,1}.$$

Ora le $h_{1,2}$, $h_{2,1}$ si trovano già segnate nella fig. 141. Infatti, ricordando il significato che nel numero precedente si è attribuito ad $h_{k,m}$, si ha $h_{1,2}$ = alla verticale (1) 2, ed $h_{2,1}$ = alla verticale (2) 1. Dunque nel caso attuale

$$\Sigma h_{k,m} = (1)\,2 + (2)\,1.$$

Perciò se si considerano come positive le ordinate, che si trovano inferiormente alla OH, e come negative quelle che si trovano superiormente, si ha in questo caso $\Sigma h_{k,m} > 0$. Se dunque si suppone (ciò che intenderemo fatto in tutta questa ricerca), che il coefficiente c della spezzata $A_1 M_2 N_2 B_1$ sia positivo, si avrà pure $\Sigma b > 0$.

Ora si osservi che per ottenere il secondo membro dell'equazione superiore, cioè l'espressione (1) 2 + (2) 1 basta la sola ispezione della fig. 140. Infatti ogni termine di tale espressione contiene il numero d'ordine d'un peso e ad esso unito il numero d'ordine di quel lato della spezzata, che è tagliato dalla direzione di esso peso. Ora dalla fig. 140 si vede senz'altro, che il peso avente il numero d'ordine (1) taglia il lato 2, e che il peso avente il numero d'ordine (2) taglia il lato 1. Dunque si ha direttamente $\Sigma h_{k,m} = (1)\,2 + (2)\,1$.

Ma la stessa espressione (1) 2 + (2) 1, atteso il sistema d'indici usato nel costruire la fig. 141, indica immediatamente quali siano le verticali (od ordinate) di essa figura, che devono prendersi in considerazione per determinare il segno della $\Sigma h_{k,m}$. Basta dunque la sola ispezione della fig. 140 per sapere quali ordinate della fig. 141 devono considerarsi; per ogni peso P_k della prima figura, la cui direzione taglia il lato m della spezzata, si dovrà nella seconda figura prendere l'ordinata (k) m.

Si osservi inoltre che la fig. 141 è affatto indipendente dalla posizione che i pesi hanno sopra la trave. Se dunque i pesi P_1 e P_2 della fig. 140 cambiassero

posizione, avanzandosi per es. fino a prendere la posizione P'_1, P'_2, la fig. 141 resterebbe la stessa. Costruita dunque una volta questa fig. 141, essa può servire per determinare il segno di Σb per tutte le possibili posizioni dei pesi. Così, quando i pesi prendono le posizioni P'_1, P'_2 si vede tosto che essi tagliano colle loro direzioni i lati 3 e 2 rispettivamente: si prenderanno dunque le ordinate (1) 3 e (2) 2 della fig. 141, la prima delle quali è negativa e numericamente maggiore della seconda. La somma $\Sigma b = (1)\,3 + (2)\,2$ è dunque in questo caso negativa.

Se nella fig. 141 si sopprimono i punti (1) e (2) e le verticali passanti per essi, il resto della figura è indipendente dal numero e dalla intensità dei pesi. Segnata la figura senza quei punti e senza quelle verticali, essa può servire per qualunque sistema di pesi, che debba transitare sulla trave. Per ogni sistema basta introdurre le relative distanze nella orizzontale OH, e tirare le corrispondenti verticali.

88. Quando occorra di determinare il segno di Σb per molte successive posizioni dei pesi P, è preferibile di segnare le distanze rispettive dei pesi sopra una striscia di carta, e farla poi scorrere lungo la AB, come sopra si disse (n. 85). In tal caso il numero d'ordine che si attribuisce ai lati della spezzata può notarsi presso le loro projezioni sulla AB, come nella fig. 142, nella quale si è riprodotta la trave AB della fig. 140, attribuendo al tratto AM il numero 1, al tratto MN il numero 2, ed al tratto NB il numero 3. Se per es. la trave fosse caricata da cinque pesi $P_1, \ldots, P_5$, e questi rispetto alla trave, rappresentata da AB prendessero la posizione indicata colla striscia di carta CC, si vede tosto confrontando le due figure 142 e 143, che si tratterà di sapere se, in quest'ultima figura, la somma delle ordinate

$$\Sigma h_{k,m} = (1)\,3 + (2)\,2 + (3)\,2 + (4)\,1 + (5)\,1$$

sia positiva o negativa. Nel caso attuale, come è facile vedere, essa è positiva, non essendovi altra ordinata negativa che la (1) 3, e le altre prevalendo numericamente. Facendo poi scorrere la striscia di carta, si può con eguale facilità giudicare di altre posizioni, senza modificare le figure.

Notiamo intanto che le segnature $(1)\,3 + (2)\,2$, e simili, caratterizzano la posizione dei pesi rispetto ai lati della spezzata, cosicchè quelle segnature possono essere riguardate come l'espressione della posizione dei pesi rispetto a tale spezzata.

In moltissimi casi basterà la semplice ispezione delle figure 141 e 143 per giudicare se una determinata somma $\Sigma h_{k,m}$ sia positiva o negativa. Così nei tre casi superiori il segno di $\Sigma h_{k,m}$ si riconosce senza bisogno di fare effettivamente la somma algebrica delle ordinate. Qualora però la sola ispezione della figura non bastasse, si potrà eseguire la somma algebrica col compasso in un modo analogo a quello indicato al n. 73, senza tirare linee di sorta. E ciò potrà farsi tanto più, che qui non si tratta di ottenere con approssimazione maggiore o minore il valore di quella somma; ma unicamente di decidere se sia positiva o negativa; ed a ciò basta in generale un'operazione fatta col compasso rapidamente e senza troppa cura di esattezza.

89. Trovata così una norma per determinare il segno della somma Σb, corrispondente ad una data posizione dei pesi P, sarà facile decidere se per una data coincidenza (n. 85) abbia luogo o no un cambiamento di segno in detta somma. Basta evidentemente confrontare fra loro due posizioni dei pesi P, l'una precedente,

l'altra seguente alla data coincidenza, prendendo queste posizioni in modo che fra esse non vi siano altre coincidenze, oltre la data.

Così per es. se si domandasse per la coincidenza del peso P_1 col punto N nella fig. 140, se ha luogo o no cambiamento di segno, basta osservare che prima della coincidenza la posizione dei pesi è espressa da (1) 2 + (2) 2, e dopo la coincidenza da (1) 3 + (2) 2. Ora osservando la fig. 141, si vede facilmente che la somma (1) 2 + (2) 2 è positiva, mentre la (1) 3 + (2) 2 è negativa. Dunque per la proposta coincidenza ha luogo un cambiamento di segno dal positivo al negativo.

Cerchisi, per secondo esempio, se per la coincidenza del peso P_4 colla verticale per M (fig. 142) abbia luogo o no cambiamento di segno nella Σb.

Accostando il segno (4) della striscia di carta CC al punto M, si riconosce facilmente che la *posizione precedente* alla coincidenza è la

(1) 3 + (2) 2 + (3) 2 + (4) 1 + (5) 1,

e la *posizione seguente* invece è la

(1) 3 + (2) 2 + (3) 2 + (4) 2 + (5) 1.

Ora dalla semplice ispezione della fig. 143 si desume, che tanto per la prima che per la seconda posizione la Σb è positiva; poichè la sola ordinata negativa (1) 3 è evidentemente inferiore alla somma delle ordinate positive, che seguono.

Nel medesimo modo si potranno esaminare tutte le successive coincidenze, che hanno luogo durante il transito dei pesi dati sopra la trave: nel qual caso l'esame delle singole coincidenze si semplifica, poichè ogni posizione dei pesi P, la quale si considera come *posizione seguente* rispetto ad una data coincidenza, vale anche come *posizione precedente* per la coincidenza successiva. Siccome dunque le coincidenze sono $r(s+1)$ (n. 85), ed il valore di Σb avanti della prima coincidenza e dopo dell'ultima è nullo, così il segno di Σb dovrà determinarsi solamente per un numero $r(s+1)-1$ di posizioni per decidere sul cambiamento, o no, di segno delle $r(s+1)$ coincidenze.

Fra queste coincidenze basterà prender nota solamente di quelle che portano il carattere di massimo o di minimo. Per il caso dei due pesi della fig. 140 si troverà che la coincidenza del peso P_1 col punto N (fig. 144), è la sola che presenti il carattere di massimo: la posizione precedente, cioè la (1) 2 + (2) 2, è positiva; mentre la posizione seguente, cioè la (1) 3 + (2) 2, è negativa, come facilmente si desume dalla fig. 141. Per il caso dei cinque pesi della fig. 142 vi è pure un solo massimo, quello relativo alla coincidenza del peso P_3 col punto N (fig. 145). La posizione precedente (1) 3 + (2) 3 + (3) 2 + (4) 2 + (5) 1 è positiva; la seguente (1) 3 + (2) 3 + (3) 3 + (4) 2 + (5) 1 è invece negativa; come facilmente si ha dalla fig. 143.

90. In ciascuno dei due esempî ora addotti si è trovato un solo massimo. Ma avviene spesso che vi siano più coincidenze, che presentano il carattere di massimo, od il carattere di minimo. Si tratterà allora di eseguire la parte *c*) del procedimento accennato alla fine del n. 84. Ciò può farsi opportunamente segnando le une sotto le altre le diverse posizioni corrispondenti ai massimi, come nelle figure 144 e 145 si è segnata l'unica posizione di massimo. Costruita poi una spezzata $A_1\, M_1\, N_1\, B_1$ relativa alla luce, si caleranno le verticali indicanti le direzioni dei pesi fino ad incontrare la spezzata. Mediante le ordinate della spezzata che così si ottengono, si potrà determinare nel modo sopra indicato (n. 71, 72, 73) lo sforzo sopportato dall' asta

per ogni posizione di massimo, e decidere quindi quale sia il maggiore fra quegli sforzi. In tal modo resterà determinato il massimo dei massimi. Similmente si opererà qualora si trattasse di decidere fra varie posizioni di pesi, le quali tutte soddisfacessero alla condizione di minimo.

Invece della spezzata relativa alla luce si può più semplicemente far uso in questo confronto dei massimi e dei minimi di una spezzata omologica qualunque; usandone come se fosse la spezzata relativa alla luce. In tal modo si ottengono non gli sforzi veri sopportati dall'asta nei singoli casi di massimo o minimo; ma degli sforzi ad essi proporzionali. Ora questi ultimi bastano egualmente per decidere quale sia la posizione dei pesi corrispondente al massimo dei massimi od al minimo dei minimi.

91. Ritornando al valore di $\Sigma h_{k, m}$ superiormente considerato, è da osservare che quando siasi trovata l'espressione di un tale valore corrispondente ad una data posizione dei pesi, si possono variare le distanze rispettive dei pesi stessi, senza che ne resti perciò alterato il valore di $\Sigma h_{k, m}$; semprechè nel variare quelle distanze, la direzione di nessun peso passi oltre uno dei vertici della spezzata. Infatti i termini $(k)m$, di cui si compone il valore di $\Sigma h_{k,m}$, contengono unicamente l'indice del peso, e l'indice di quel lato della spezzata relativa all'asta, che è tagliato dalla direzione del peso stesso. Se dunque il peso P_k interseca colla sua direzione il lato m, esso potrà cambiare la sua posizione rispetto agli altri pesi, avanzandosi o retrocedendo, purchè non esca dai limiti della projezione orizzontale del lato m; mentre allora il termine $(k)\,m$ nel valore di $\Sigma h_{k, m}$ resterà inalterato. Ne viene che:

« Le coincidenze alle quali corrispondono sforzi massimi e minimi restano le medesime, sebbene le distanze rispettive dei pesi vengano alterate; purchè l'ordine con cui durante il transito si verificano le coincidenze resti inalterato».

È inoltre da notare che in tutta questa ricerca di massimo e di minimo, basta conoscere una spezzata omologica qualunque dell'asta che si considera, non essendo richiesta nè la spezzata vera, nè quella relativa alla luce. Ora una tale spezzata è indipendente dal braccio di leva q dell'asta rispetto al suo centro, ossia dalla direzione dell'asta. Dunque:

« Le posizioni di massimo e di minimo, come pure quelle corrispondenti al massimo dei massimi ed al minimo dei minimi, sono indipendenti dalla direzione dell'asta ».

92. Un caso che merita specialmente attenzione, in vista delle pratiche applicazioni, si è quello in cui fra i pesi P ve ne siano di eguali fra loro; in modo che il numero totale r dei pesi si ripartisca in r_1 pesi tutti eguali a P_a, r_2 pesi tutti eguali a P_b, r_3 pesi tutti eguali a P_c, ecc.; dove naturalmente $r_1 + r_2 + r_3 + \ldots = r$.

In questo caso la ricerca delle posizioni corrispondenti ai massimi ed ai minimi, la quale sarebbe piuttosto lunga, qualora il numero totale r dei pesi fosse grande, può essere sensibilmente abbreviata, ponendo mente a quanto segue.

Dagli esempî che precedono si scorge, che un dato lato della spezzata è talvolta tagliato dalla direzione di due o più pesi. Così nella ricerca del n. 89, nella posizione colà indicata come *precedente* tanto il peso P_2 che il peso P_3 tagliano colla loro direzione il lato 2 della spezzata; e nella posizione *seguente* lo stesso lato 2 è tagliato dalla direzione dei tre pesi P_2, P_3, P_4. Ora per ciò che si è osservato nel

numero precedente, un peso qualunque P_k può cambiare di posizione, senza che il valore di $\Sigma h_{k,m}$, e quindi di Σb, resti modificato; semprechè la direzione del peso che cambia di posizione intersechi sempre lo stesso lato della spezzata. Quando dunque due o più pesi tagliano colla loro direzione un medesimo lato della spezzata si potrà far coincidere la direzione di questi pesi, portandoli tutti sopra una medesima verticale, purchè questa tagli quel medesimo lato, che tagliavano prima i pesi. Allora, senza turbare le condizioni di carico, si potrà sostituire ai pesi coincidenti un peso unico eguale alla loro somma. Così nell'esempio sopra citato invece dei due pesi P_2 e P_3, che tagliano nella posizione precedente il lato 2, si potrà sostituire un peso unico $P_{2,3}$ eguale alla somma $P_2 + P_3$, il quale tagli il medesimo lato; ed ai tre pesi P_2, P_3, P_4, che nella posizione seguente tagliano lo stesso lato 2, si potrà sostituire un unico peso $P_{2,3,4}$ eguale alla loro somma, e che intersechi lo stesso lato. Similmente dicasi dei pesi P_4 e P_5 che nella posizione precedente tagliano il lato 1. In tal modo le due posizioni del n. 89 possono scriversi più semplicemente

$$(1)\,3 + (2,3)\,2 + (4,5)\,1$$

ed

$$(1)\,3 + (2,3,4)\,2 + (5)\,1,$$

cosicchè ognuna è ridotta a tre termini, invece di cinque; il che vuol dire, rapportandosi alla fig. 143, che non si dovranno più considerare cinque ordinate, ma solamente tre. Affine però di ottenere queste tre ordinate, bisognerà ora prendere sulla OH anche le distanze O (2, 3), O (4, 5), O (2, 3, 4), relative ai pesi $P_{2,3}$, $P_{4,5}$, $P_{2,3,4}$ nuovamente introdotti, e tirare per i punti (2, 3), (4, 5), (2, 3, 4) le rispettive verticali. Allora, per ciò che precede, la somma algebrica delle cinque ordinate (1) 3, (2) 2, (3) 2, (4) 1, (5) 1 dovrà eguagliare quella delle tre (1) 3, (2, 3) 2, (4, 5) 1; e quella delle cinque (1) 3, (2) 2, (3) 2, (4) 2, (5) 1 dovrà eguagliare quella delle tre (1) 3, (2, 3, 4) 2, (5) 1. Questa eguaglianza può anche direttamente dimostrarsi dalla stessa fig. 143, osservando che si ha necessariamente $O(2,3) = O(2) + O(3)$, $O(4,5) = O(4) + O(5)$, $O(2,3,4) = O(2) + O(3) + O(4)$, e quindi $(2,3)\,2 = (2)\,2 + (3)\,2$, $(4,5)\,1 = (4)\,1 + (5)\,1$, $(2,3,4)\,2 = (2)\,2 + (3)\,2 + (4)\,2$.

Quando dunque il numero r totale dei pesi è superiore al numero s dei lati della spezzata, si può, per la determinazione del segno di Σb, corrispondente ad una data posizione dei pesi, ricorrere alla seguente regola:

In luogo di quei pesi che tagliano colle loro direzioni un medesimo lato, si sostituisca un unico peso eguale alla loro somma, e si avrà così un numero minore di pesi, e quindi di ordinate da considerare.

È facile infatti vedere che il numero dei pesi, dopo fatta la detta sostituzione, non può mai essere superiore ad s.

93. La regola superiore sarebbe però di poca utilità pratica nella ricerca che ci occupa, se la determinazione del peso unico da sostituire, e la determinazione della rispettiva ordinata nella figura 143 esigessero una nuova costruzione per ogni nuova posizione assunta dai pesi durante il loro transito sopra la trave. Una tale nuova costruzione si può evitare, quando vi sono varî gruppi r_1, r_2, ... di pesi fra loro eguali nel modo supposto nel precedente numero. Basterà costruire opportunamente la figura relativa una volta tanto; e questa può allora servire per tutte le

possibili posizioni assunte dai pesi durante il loro transito sopra la trave. Come ciò possa farsi risulterà chiaramente dagli esempî seguenti.

Sopra una trave AB (fig. 146), di 16^m di luce, passa una locomotiva $a\ a\ a$, col rispettivo tender $b\ b\ b$. Ogni asse a ha il peso di $12^{ton.}$; ogni asse b il peso di $7^t,5$. Domandasi qual sia il segno di Σb per l'asta 4.5, quando la locomotiva ha la posizione indicata in figura.

Costruita una spezzata qualunque dell'asta $A_1 M_1 N_1 B_1$ (in figura si è disegnata una spezzata relativa alla luce col coefficiente $c=6$), si tirino la orizzontale OH (fig. 147), e le OL_1, OL_2, OL_3, parallele ai lati successivi della spezzata, il tutto come al n. 87. Condotta poi una verticale OC, si prendano sulla orizzontale CD le distanze $C.a$ $C.2a$, $C.3a$ eguali, nella scala delle forze, a $12^{ton.}$, $24^{ton.}$, $36^{ton.}$ rispettivamente, cioè al peso di uno, due, tre assi a. Nella figura si è adottata come scala delle forze $1^{mm}=1^{ton.}$. Similmente sulla verticale CO si prendano le distanze $C.b$, $C.2b$, $C.3b$, eguali al peso di uno, due, tre assi b. Si conducano quindi per i punti b, $2b$, $3b$ delle linee orizzontali, e per i punti C, a, $2a$, $3a$ delle rette inclinate a 45^0, come si vede in figura. Finalmente per i punti d'intersezione delle orizzontali colle inclinate si abbassino delle verticali fino ad intersecare le OL.

Preparata così la figura 147, essa serve senza altre costruzioni a determinare il segno di Σb per una posizione qualunque della data locomotiva. Per la posizione indicata in figura, si hanno due assi b corrispondenti al lato 1 della spezzata. Per questi due assi basterà dunque, come si dimostrò nel numero precedente, prendere una sola ordinata, quella corrispondente alla somma $7^t,5+7^t,5$, e relativa al primo lato della spezzata. Questa somma trovasi già fatta nella fig. 147. Essa è la $2b.k$, poichè $2b.k=2b.C=2\times 7^t,5$. Ma $2b.k=Ok'$, dunque l'ordinata da prendersi sarà la $k'1$. Al lato 2 della spezzata corrisponde un solo asse b: l'ordinata da prendersi sarà dunque quella che corrisponde all'ascissa Oq', e che è relativa al secondo lato, cioè la $q'2$; infatti si ha $Oq'=b.q=b.C=7^t,5$. Al lato terzo della spezzata corrispondono i tre assi a: si prenderà dunque l'ordinata corrispondente alla somma $12+12+12$, cioè quella che corrisponde all'ascissa Ou', e che è relativa al terzo lato della spezzata, cioè la $u'3$; poichè $Ou'=C.3a=3\times 12=36^{ton.}$ Si avrà dunque per la posizione data della locomotiva, e rendendo espliciti i segni

$$\Sigma h=k'1-q'2+u'3,$$

quantità che si trova essere positiva: dunque per quella posizione sarà pure $\Sigma b>0$.

Si vede facilmente che con un po'd'abitudine, basta l'ispezione della fig. 146 per sapere quali ordinate della fig. 147 si devono prendere.

Se si cerca quali siano le posizioni della locomotiva, che producono nell'asta 4.5 gli sforzi massimi o minimi, bisogna segnare le distanze delle ruote sopra una striscia di carta, e farla scorrere sia lungo la AB, sia lungo una sua parallela (n. 85, 88). Così operando si potranno con sufficiente prontezza esaminare le posizioni precedenti e le seguenti delle successive coincidenze, e quindi trovar quelle per le quali la Σb cambia di segno, ossia quelle le quali presentano il carattere di massimo o di minimo. Eseguendo questa ricerca per l'asta 4.5 della trave AB, si trovano due massimi e due minimi, che sono segnati nella figura sotto la trave: la posizione degli assi vi è indicata dalle rispettive lettere. Per decidere poi quale dei due massimi sia

maggiore, si è costruita una seconda spezzata dell'asta, cioè la $A_1 M'_1 N'_1 B_1$, le cui ordinate stanno a quelle corrispondenti della $A_1 M_1 N_1 B_1$, come il peso di un asse *b* sta al peso di un asse *a*. Fatta la somma algebrica delle ordinate dei due massimi, si trova, che il secondo massimo è maggiore del primo (n. 90), e corrisponde ad una pressione nell' asta 4.5 di circa $13^{ton.}$. Similmente si ha che il primo minimo è minore del secondo e corrisponde ad una tensione nell'asta 4.5 di circa $18^{ton.}$.

Si noti intanto che in questa ricerca non si tratta mai di conoscere quantitativamente il valore di Σh, ma solamente di decidere, se il suo segno sia positivo o negativo. A tale scopo basta generalmente conoscere le ordinate in modo approssimativo (n. 88 in fine). Invece dunque delle verticali kk', qq', ecc. (fig. 147) potrà essere sufficiente che siano tracciate nella figura varie linee verticali, abbastanza vicine fra loro, le quali servano di guida all'occhio: mentre allora l'ordinata si può prendere col compasso abbastanza esattamente, anche se nella sua precisa posizione non vi sia alcuna linea verticale.

94. Nella fig. 146 si è supposto che vi fossero solamente due diverse specie di pesi, cioè quelli degli assi *a* di $12^{ton.}$, e quelli degli assi *b* di $7^t, 5$. Vediamo ora un caso in cui vi sono tre specie di pesi. Sopra una trave AB (fig. 148), di 36^m di luce, transita un convoglio composto di una locomotiva Sigl, fornita del suo tender, e di tre vagoni. Ogni asse *a* della locomotiva ha il peso di $12^{ton.}$, ogni asse *b* del tender il peso di $10^{ton.}$, ed ogni asse *c* dei vagoni il peso di 8^{ton}. La posizione rispettiva degli assi è quella indicata dalla figura. Domandasi qual sia la posizione del convoglio, che rende massimo lo sforzo nell'asta 4. 6.

In questo caso si potrà dare alla fig. 149, che è analoga alla 147, la disposizione seguente. Tracciate leggermente varie linee verticali abbastanza vicine, si noteranno i pesi *a* lungo la CD ed i pesi *b* lungo la CO, e si tireranno poi le orizzontali e le inclinate a 45^0 come nella figura precedente. Quanto ai pesi *c*, se ne potrà tener conto col tirare una serie di rette vicine inclinate in senso opposto, come si vede in figura, determinando la loro inclinazione in modo, che il cateto verticale stia al cateto orizzontale come il peso *b* sta al peso *c*. Costruita poi la spezzata $A_1 M_1 B_1$ (fig. 148) dell'asta 4.6 (nella figura si è preso $c = 12$), e tirata nella fig. 149 l'orizzontale OH, si condurranno le OL_1, OL_2, parallele ai due lati della spezzata.

Disposta la figura a questo modo si prenderanno i pesi *a* nel senso orizzontale, i pesi *b* discendendo per le inclinate a 45^0, ed i pesi *c* ascendendo per le altre inclinate. Così per la posizione del treno indicata nella fig. 148 il primo lato della spezzata è incontrato da cinque pesi *c*. Per trovare nella figura 149 la corrispondente ordinata, si percorrerà coll'occhio, o meglio colla punta del compasso, la spezzata $3b . 2a . \lambda . k . k'$, tirata nella figura in linea più grossa, e si troverà così l'ordinata cercata $k'1$. Il secondo lato della spezzata $A_1 M_1 B_1$ è incontrato invece da quattro pesi *a*, tre pesi *b* ed un peso *c*. Nella figura 149 si percorrerà dunque la spezzata $C . 4a . \mu . q . q'$, e si troverà l'ordinata $q'2$. La somma algebrica delle due ordinate $k'1$ e $q'2$ essendo negativa, per la data posizione del treno si avrà dunque $\Sigma b < 0$.

Colla disposizione data alla fig. 149 si ha dunque da percorrere per qualunque

somma $n'a + n''b + n'''c$ dei pesi una linea spezzata simile alle $3b.2a.\lambda.k.k'$, $C.4a.\mu.q.q'$, e la quale conduce all'ordinata che si cerca.

Esaminando in tal maniera, coll'ajuto della striscia di carta, le successive coincidenze che si producono al passaggio del treno, si trova facilmente che ha luogo un solo massimo; e questo corrisponde alla posizione del treno, indicata sotto la fig. 148. L'asta 4.6 sopporta per questa posizione la pressione massima di circa 170 tonnellate.

Se oltre i tre gruppi di pesi a, b, c si avessero degli altri pesi disuguali isolati, questi si potrebbero portare lungo la OH, ed aggiungere la loro ordinata a quelle dovute ai gruppi di pesi.

Che se oltre i tre gruppi a, b, c vi fossero degli altri gruppi simili, questi potrebbero prendersi in considerazione con un sistema di rette orizzontali ed inclinate, costruito inferiormente alla OH, a somiglianza del sistema superiore, che serve per i primi tre gruppi. Siccome però in pratica difficilmente possono presentarsi casi così complessi, così basterà averne fatto un breve cenno per indicare il modo da seguirsi, quando essi si presentassero.

95. Negli esempî superiori la spezzata dell'asta era bilatera o trilatera. Se essa avesse più di tre lati, si procederebbe analogamente.

Se due o più lati della spezzata sono paralleli fra loro, allora si avranno due o più linee OL (fig. 141, 143,...) coincidenti. In tal caso esse possono ancora considerarsi come linee separate; ma, più semplicemente, potranno riguardarsi come una sola linea: avvertendo in tal caso di prendere sempre la somma di tutti i pesi, le cui direzioni intersecano i rispettivi lati paralleli della spezzata.

Se la spezzata è simmetrica rispetto alla verticale passante per il punto di mezzo della trave, e la serie dei pesi P sia pure simmetrica intorno ad una verticale, allora nella ricerca del massimo e del minimo, non occorrerà esaminare l'intero transito dei pesi; bastando farli avvanzare, finchè il loro asse di simmetria coincida con l'asse di simmetria della spezzata; poichè per il resto del transito si ripetono le stesse condizioni in ordine inverso.

Quando le coincidenze (n. 85) non hanno tutte luogo una dopo l'altra; ma due o più di esse abbiano luogo contemporaneamente, allora il cambiamento o meno di segno della Σb si determina, confrontando la posizione che precede, con quella che segue le dette coincidenze contemporanee; ciò che abbrevia l'operazione. Spesso, attese le piccole inesattezze inerenti al graficismo, vi è dubbio, se due o più coincidenze siano o no contemporanee. In tal caso esse potranno ritenersi senz'altro come contemporanee, senza sensibile errore.

Quando la somma Σh si compone di alcune ordinate positive e di alcune negative, può avvenire ch'essa sia nulla. In tal caso sarà pure nulla la Σb, ed allora valgono le considerazioni dei n. 83 ed 84 relative a questo caso. Talvolta avviene che, attese le inesattezze del graficismo, vi sia dubbio se la somma Σh sia nulla o meno. In tal caso essa potrà senza sensibile errore considerarsi come nulla, specialmente se l'intervallo, entro il quale essa sembra nulla, sia breve.

Se le posizioni dei pesi che hanno carattere di massimo oppure di minimo sono più d'una, e si procede alla ricerca del massimo dei massimi, o del minimo dei minimi (n. 90), si potranno nel fare il confronto fra due o più delle posizioni trovate,

sopprimere, o considerare come non esistenti quelle ordinate che fossero comuni, e fare il confronto solamente fra quelle che sono diverse.

B. *Sforzi massimi e minimi per peso uniforme.*

96. Più semplice assai è la ricerca della posizione che deve avere un peso uniformemente distribuito per rendere massimo o minimo lo sforzo in un'asta determinata.

Basta infatti costruire una spezzata omologica qualunque dell'asta data, e se l'area chiusa fra la spezzata e l'asse a cui essa è riferita, è in parte positiva, in parte negativa, si avrà il massimo ed il minimo sforzo (ossia lo sforzo massimo positivo o negativo), secondo che il peso uniforme si estenderà a tutti i tratti corrispondenti alle aree di un segno, od alle aree dell'altro. Nel caso che non vi siano che aree di un segno, l'asta sarà suscettibile solamente di uno sforzo massimo positivo oppure negativo.

Così per la trave della fig. 146 si avrà la massima tensione nell'asta 4. 5, quando il peso uniforme si estende da A fino ad O_1, essendo O_1 collocato sulla verticale condotta per O''. Si avrà invece la massima pressione, quando il peso uniforme si estende da O_1 fino a B. Per la trave della fig. 148 si avrà la massima pressione nell'asta 4. 6, quando il peso uniforme si estenda da A fino a B.

Per il caso che la spezzata sia di quelle considerate ai n. 78, 79, 80 si avranno dunque nelle formole riportate al n. 80, le espressioni degli sforzi massimi positivi o negativi.

Quando l'asta ha il centro esterno alle verticali passanti per i punti d'appoggio (fig. 131), si arriva anche direttamente all'espressione dello sforzo massimo nel modo seguente. Sia $S_1 S_2$ (fig. 150) l'asta considerata, e supponiamo che un dato peso uniformemente distribuito si estenda da A_2 fino ad una distanza orizzontale x oltre il sostegno e. Domandasi qual sia il valore di x, che rende massimo lo sforzo sopportato dall'asta $S_1 S_2$.

Ritenendo le denominazioni del n. 78 (fig. 131), e ponendo inoltre $= d$ la distanza orizzontale dei sostegni e ed e', ed $= p$ il dato peso uniforme per unità di lunghezza, sarà il peso totale espresso da $p(m+x)$, e la reazione in B sarà data da

$$\frac{p}{2l}(m+x)^2.$$

Inoltre il peso px, che trovasi fra i sostegni e ed e' produce in S_2 la pressione $\frac{p}{2d}x^2$. Considerando dunque la parte rigida $S_2 KB$ della trave, chiamando N lo sforzo nell'asta $S_1 S_2$ e q la normale OQ, calata sulla direzione della $S_1 S_2$ dal punto O d'incontro delle $C S_2$, $S_1 K$, si avrà, prendendo i momenti rispetto al punto O,

$$Nq - \frac{pb}{2l}(m+x)^2 + \frac{p(n+b)}{2d}x^2 = 0,$$

e volendo che N sia massimo, si avrà per determinare x l'equazione

$$\frac{b}{l}(m+x) - \frac{n+b}{d}x = 0$$

da cui

$$bmd + \left\{ bd - l(n + b) \right\} x = 0$$

ossia, essendo $l = a - b$, $d = l - m - n = a - b - m - n$,

$$x = \frac{bmd}{an + bm}$$

che è il valore, che si otterrebbe per $Z_1 = M'O''$ (fig. 131) dalle equazioni del n. 78.

Dal valore trovato di x, osservando che $d = a - b - m - n$, si ottiene

$$m + x = \frac{m(a-b)(b+n)}{an+bm} = \frac{ml(b+n)}{an+bm},$$

e quindi con facili riduzioni lo sforzo massimo N dell'asta $S_1 S_2$

$$N = \frac{bm^2(b+n)p}{2q(an+bm)} = \frac{bm^2 t_2 p}{2q(an+bm)}$$

che coincide col valore di Z_1 del n. 80.

Supponendo invece che il peso uniforme si estenda da B_2 verso A_2 fino ad una certa distanza x' oltre l'appoggio e', si troverebbe similmente, come espressione dello sforzo massimo dell'asta $S_1 S_2$, il valore di Z_2 del n. 80.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Fig. 1.

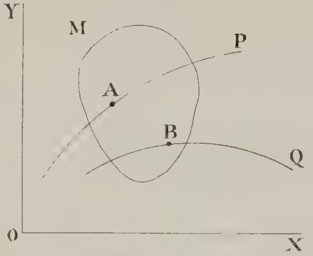


Fig. 2.

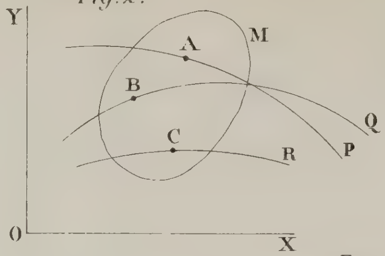
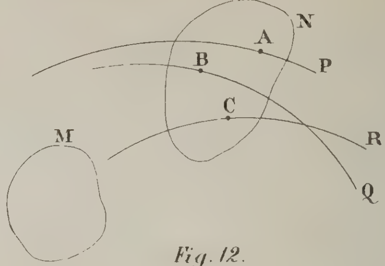


Fig. 3.



Fi

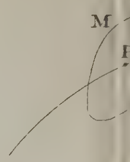


Fig. 9.

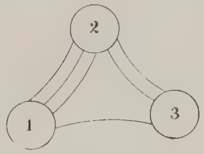


Fig. 10.

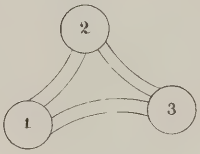


Fig. 11.

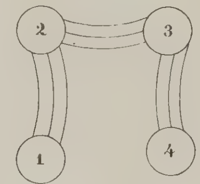


Fig. 12.

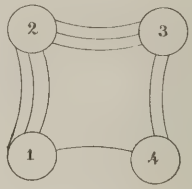


Fig. 13.

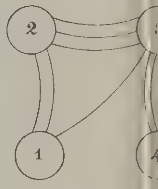


Fig. 19.

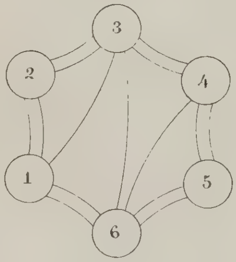


Fig. 20.

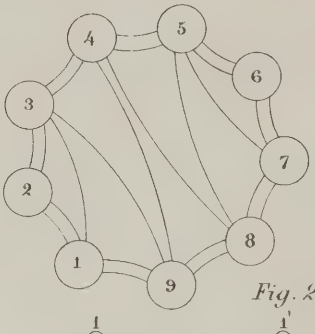


Fig. 21.

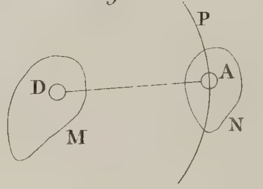


Fig. 22.

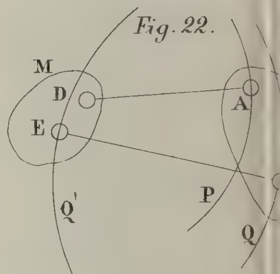


Fig. 26.

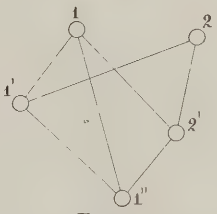


Fig. 27.

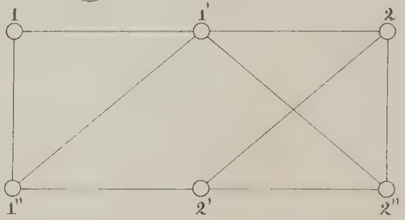


Fig. 28.

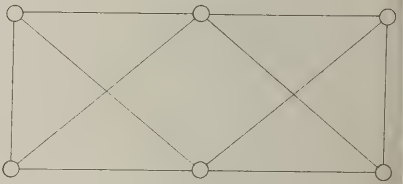


Fig. 32

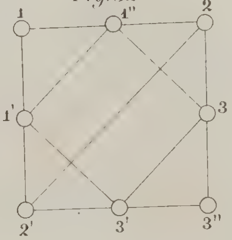


Fig. 33.

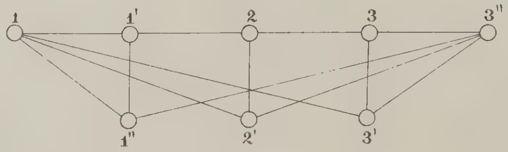


Fig. 34.

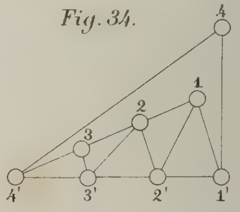


Fig. 38.

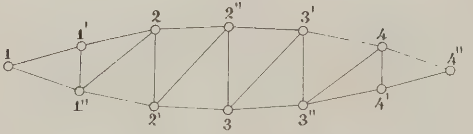


Fig. 39.

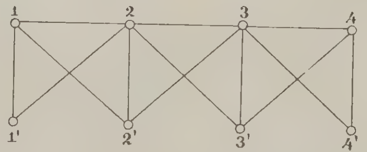


Fig. 40.

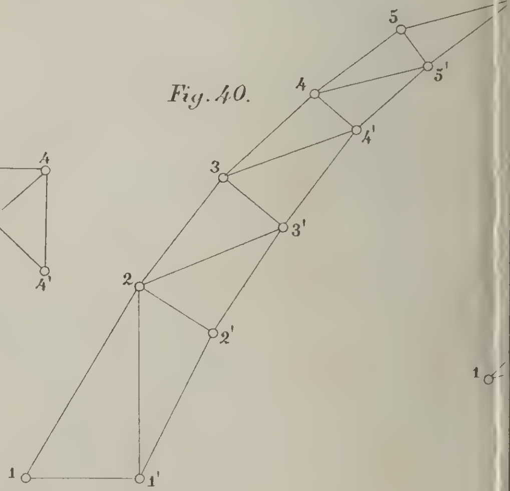
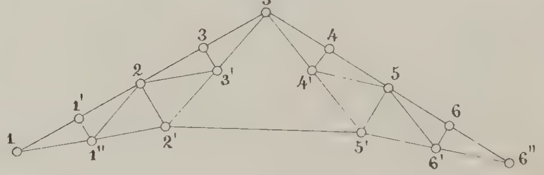


Fig. 44.



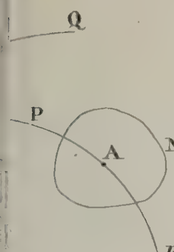


Fig. 5.

Fig. 6.

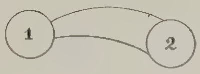


Fig. 7.

Fig. 8.

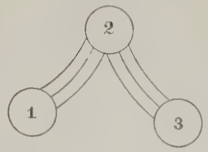


Fig. 14.

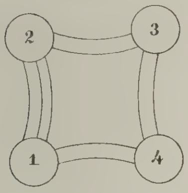


Fig. 15.

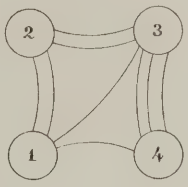


Fig. 16.

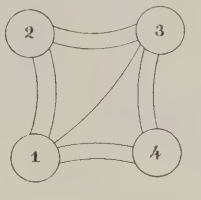


Fig. 17.

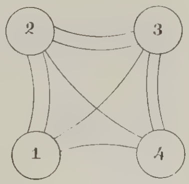


Fig. 18.

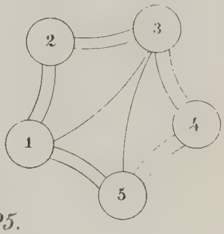


Fig. 23.

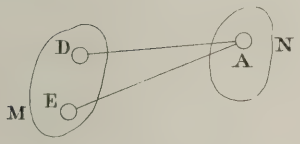


Fig. 24.

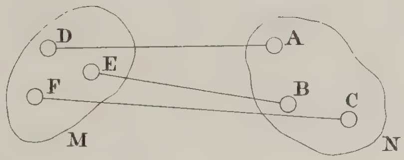


Fig. 25.

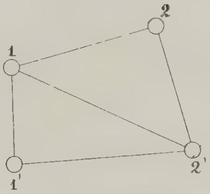


Fig. 29.

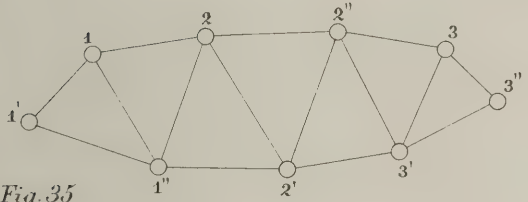


Fig. 30.

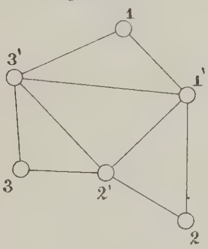


Fig. 31.

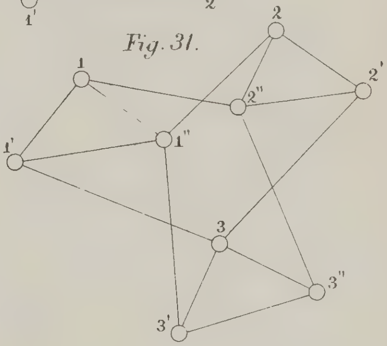


Fig. 35

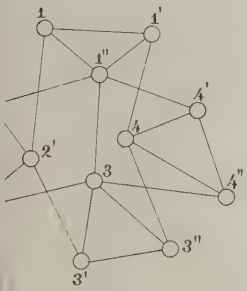


Fig. 36.

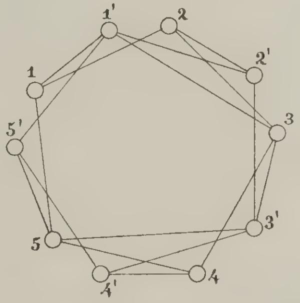


Fig. 37.

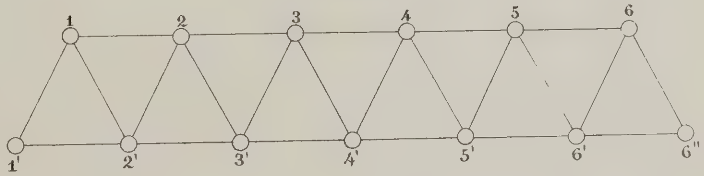


Fig. 41.

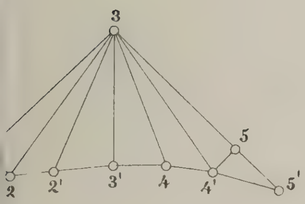


Fig. 42.

Fig. 43.

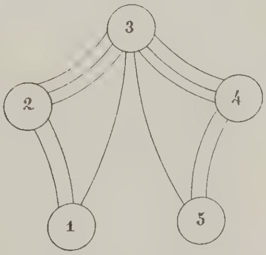
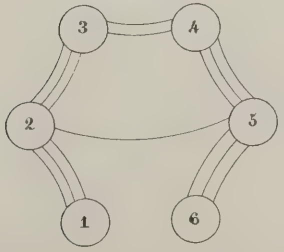


Fig. 45.



LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILL

Fig. 46.

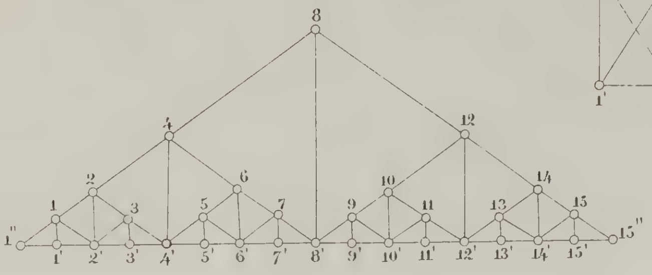


Fig. 48.

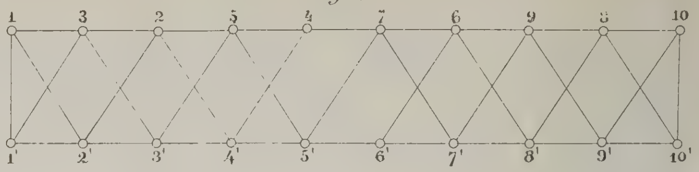
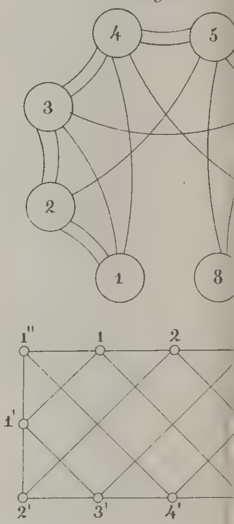


Fig. 55.



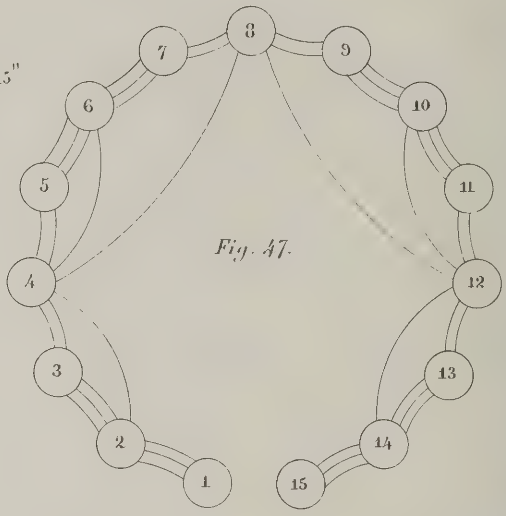


Fig. 47.

Fig. 54.

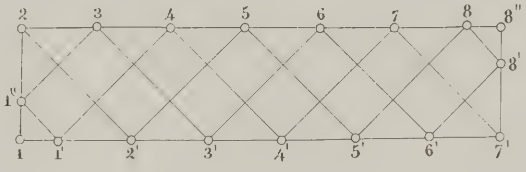


Fig. 53.

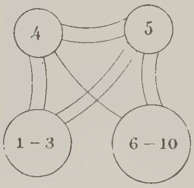


Fig. 59.

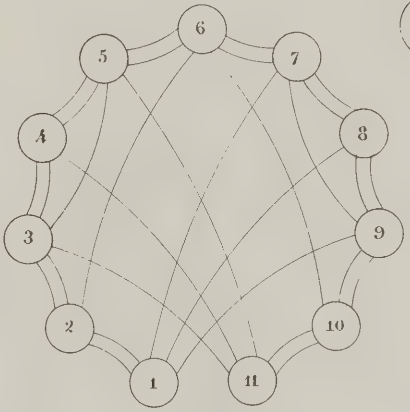


Fig. 60.

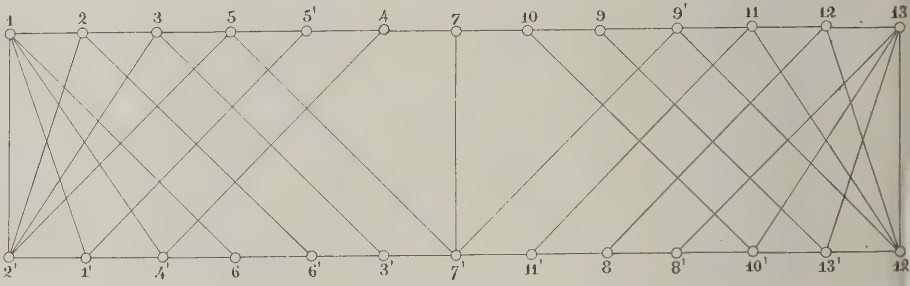


Fig. 63.

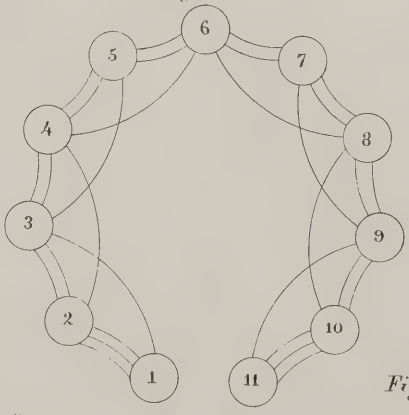


Fig. 64.

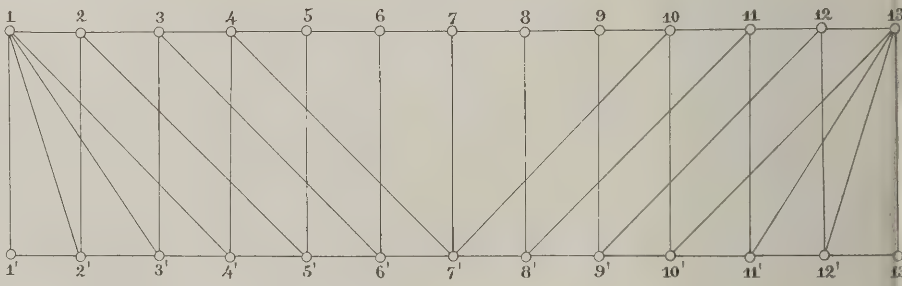


Fig. 68.

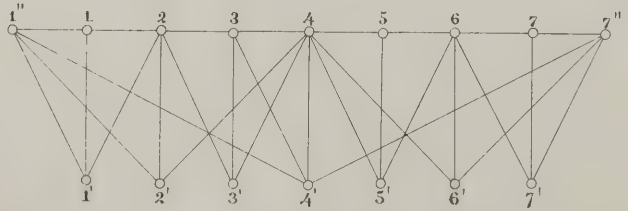


Fig. 69.

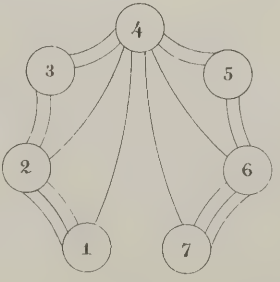
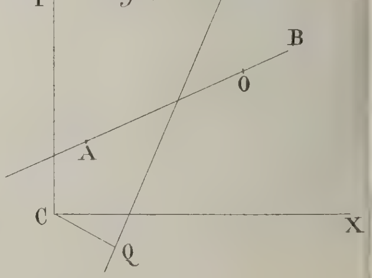


Fig. 70.



G. B. Fav... dis.

Fig. 49.

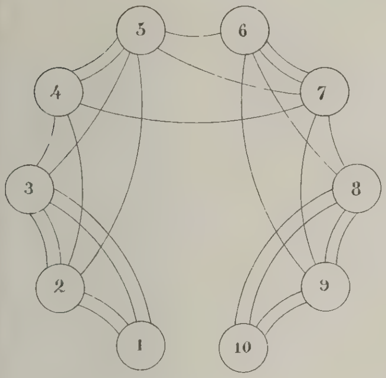


Fig. 50.

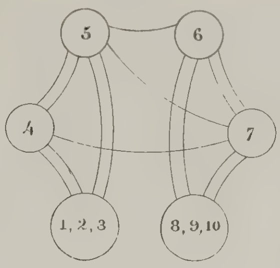


Fig. 51.

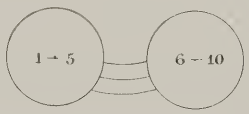


Fig. 52.

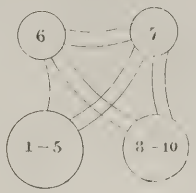


Fig. 58.

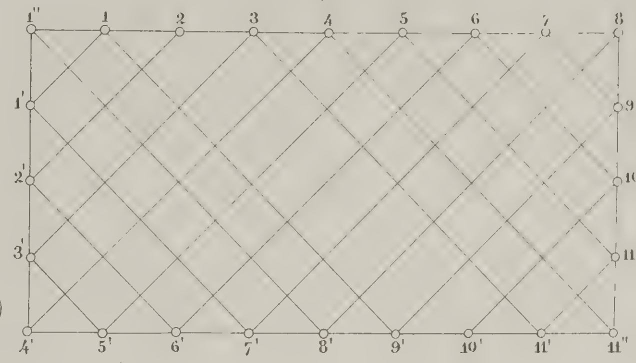


Fig. 56.

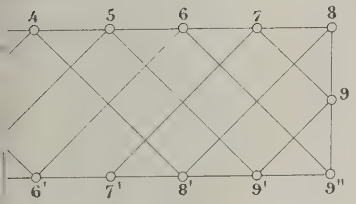


Fig. 57.

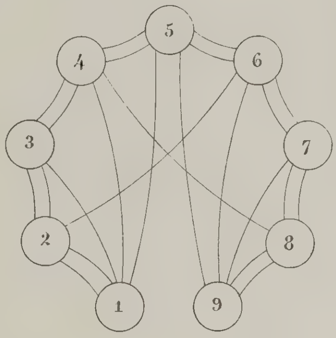


Fig. 61.

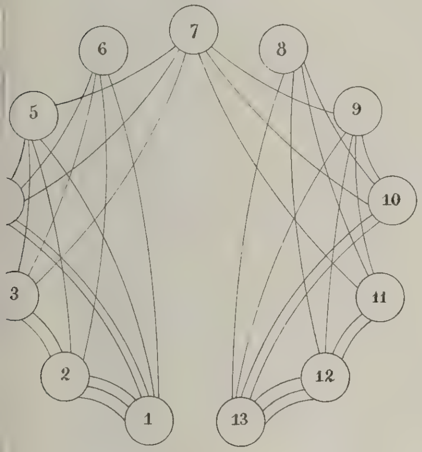


Fig. 62.

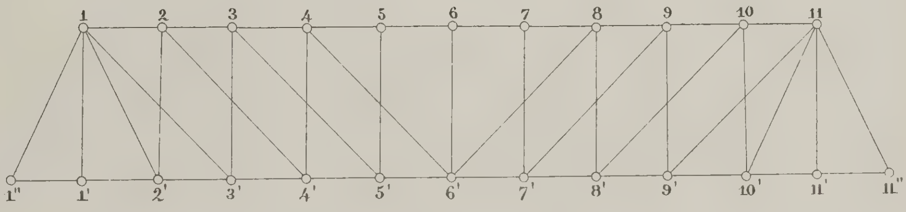


Fig. 65.

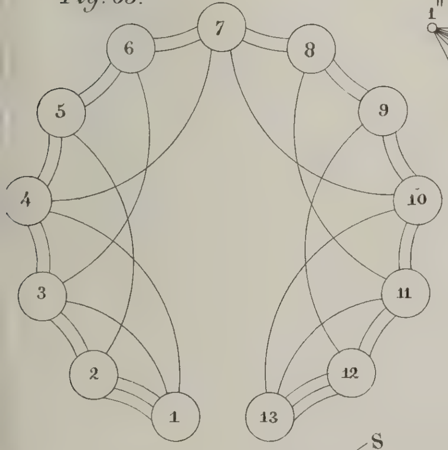


Fig. 66.

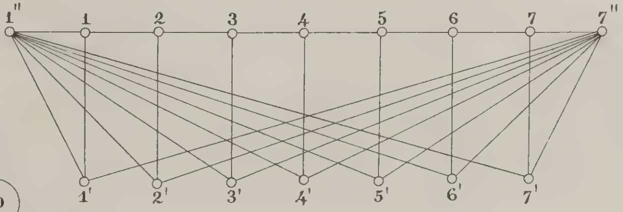


Fig. 67.

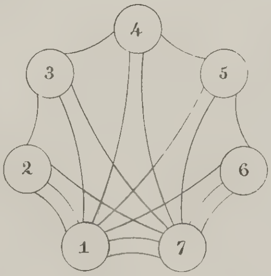


Fig. 71.

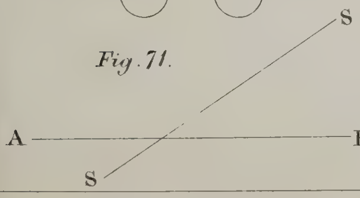


Fig. 72.

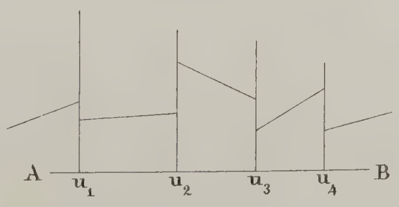
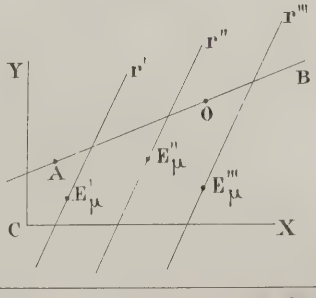


Fig. 73.



LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF

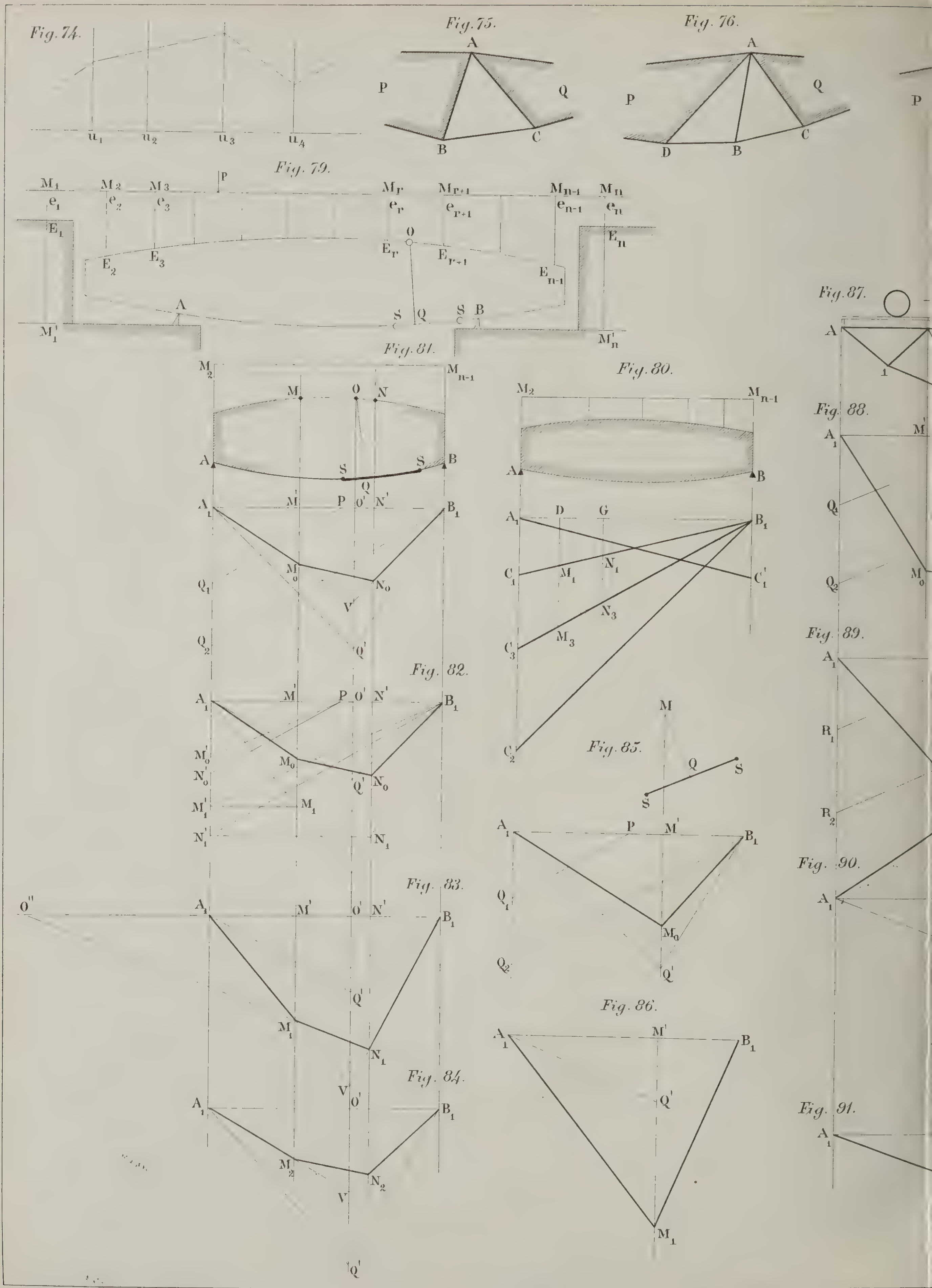


Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.

G. B. Favero di.

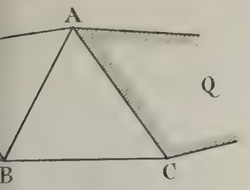


Fig. 77.

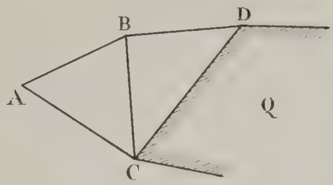


Fig. 78.

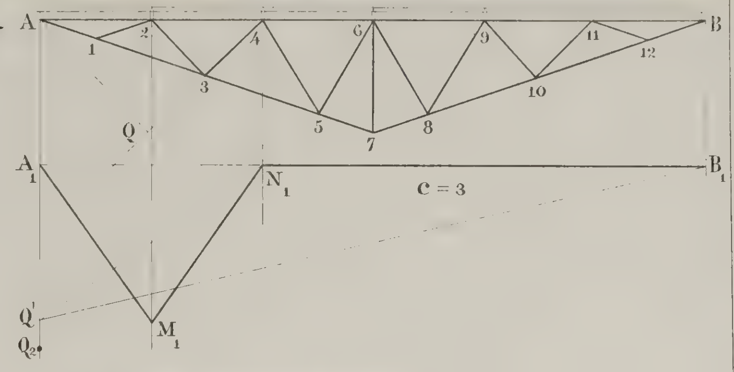
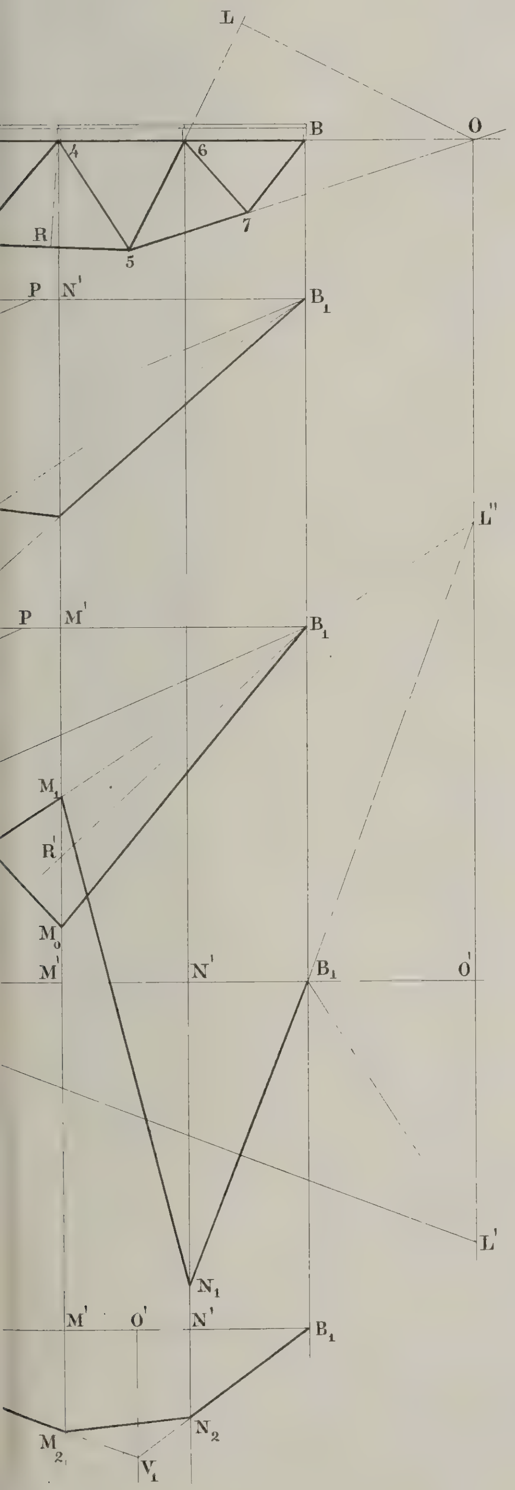


Fig. 92.



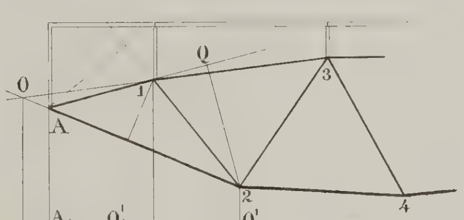


Fig. 93.

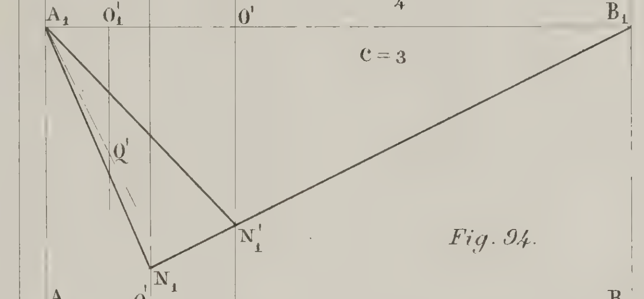


Fig. 94.

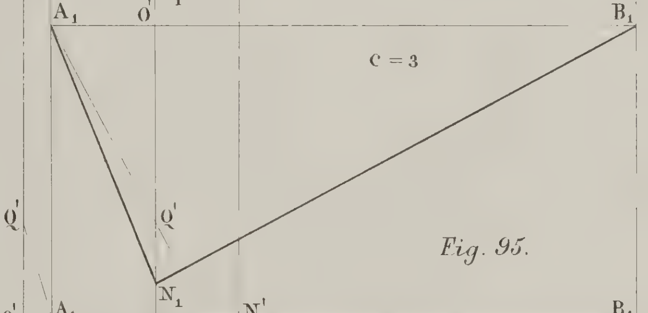
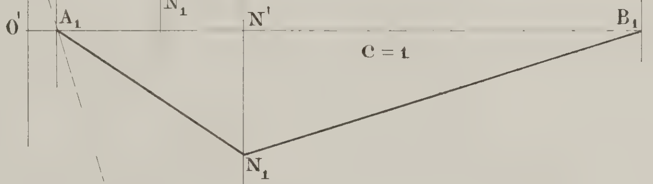


Fig. 95.



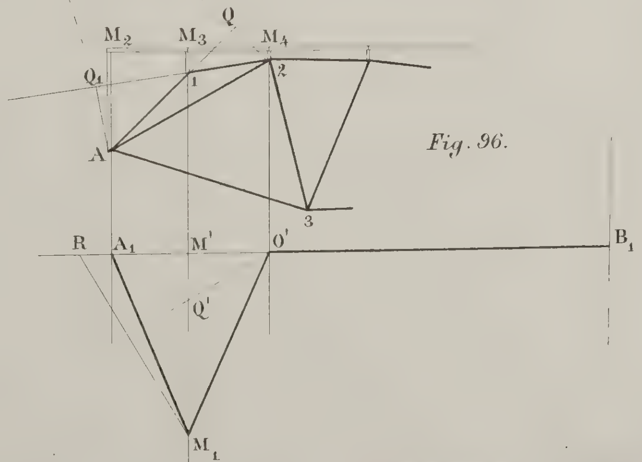


Fig. 96.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

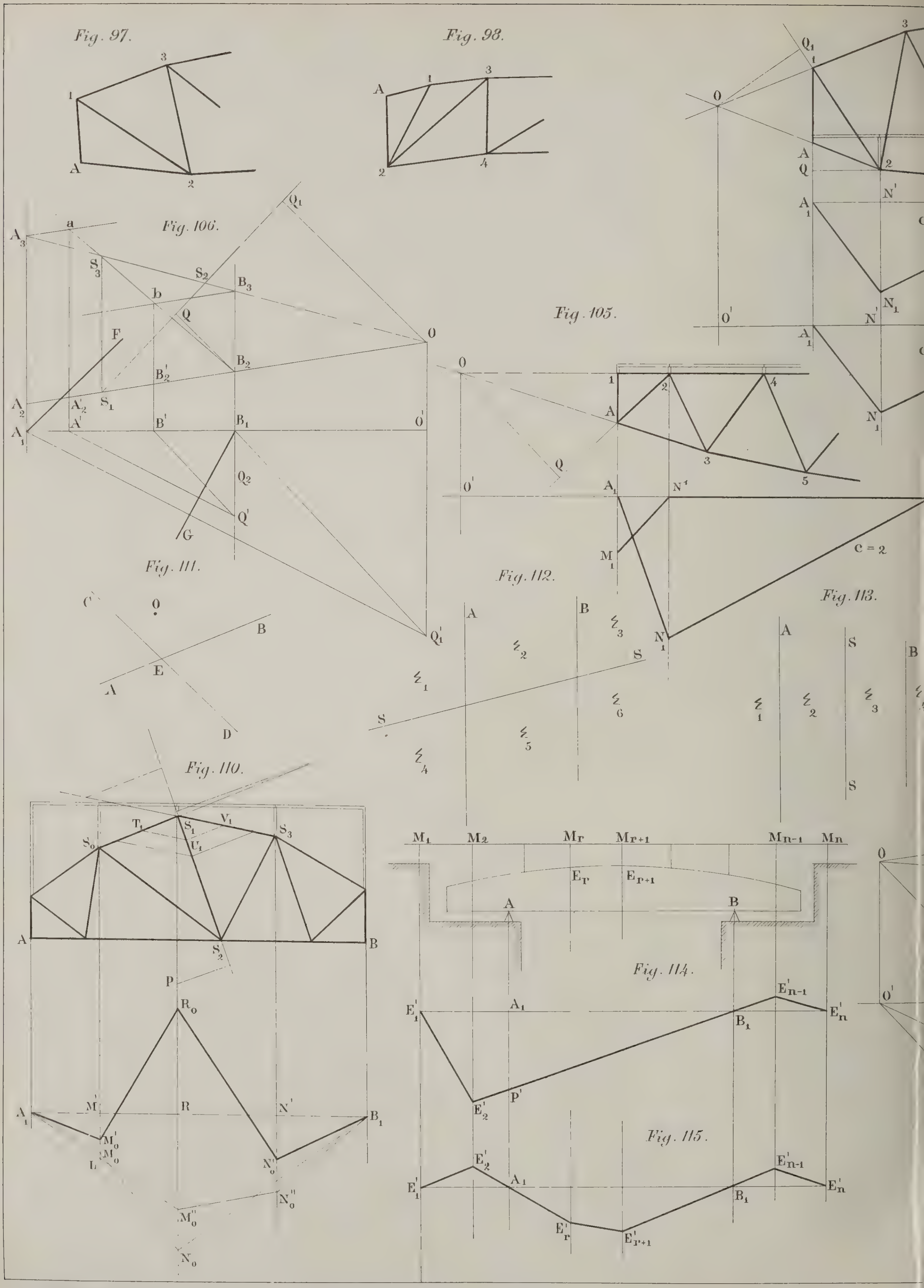


Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 110.
Fig. 114.
Fig. 115.

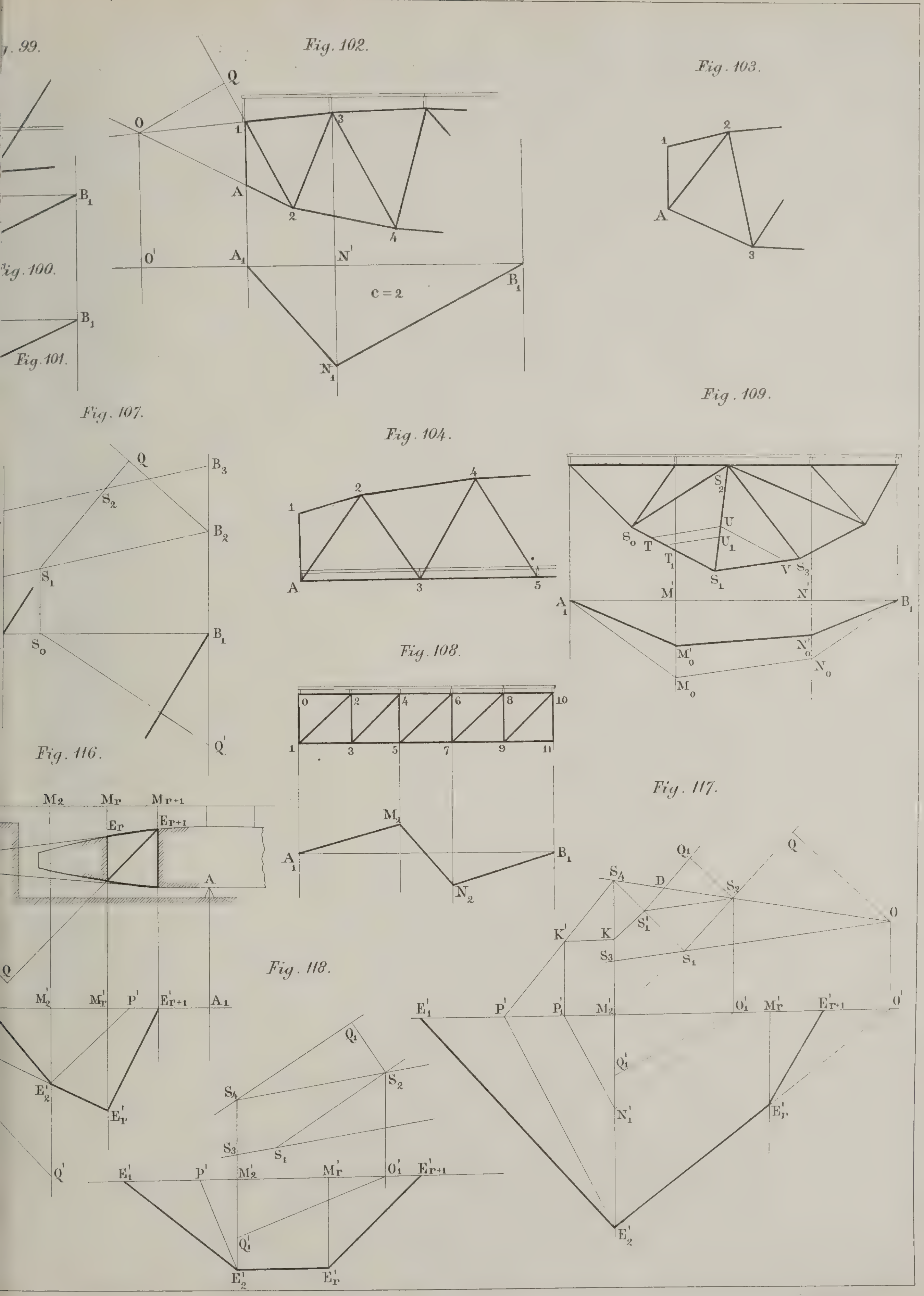


Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.
c = 2
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Fig. 119.

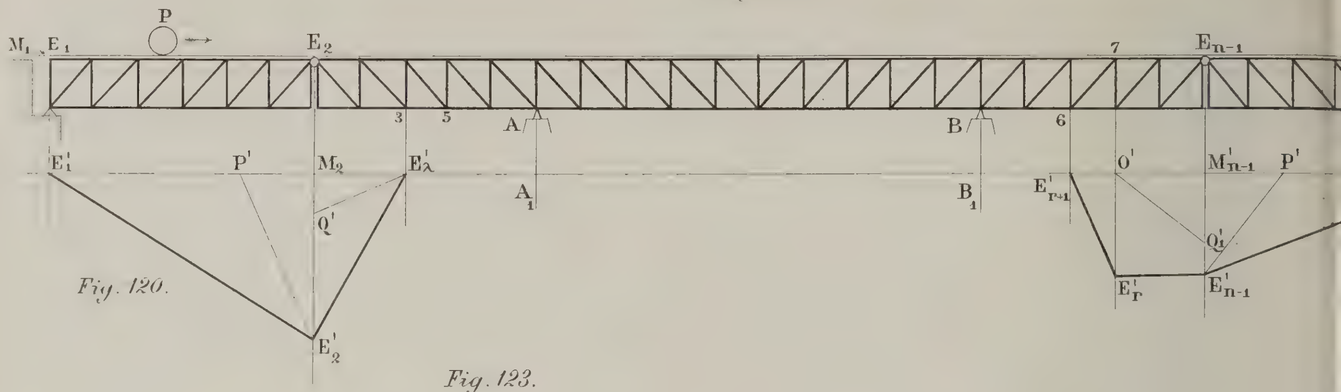


Fig. 120.

Fig. 123.

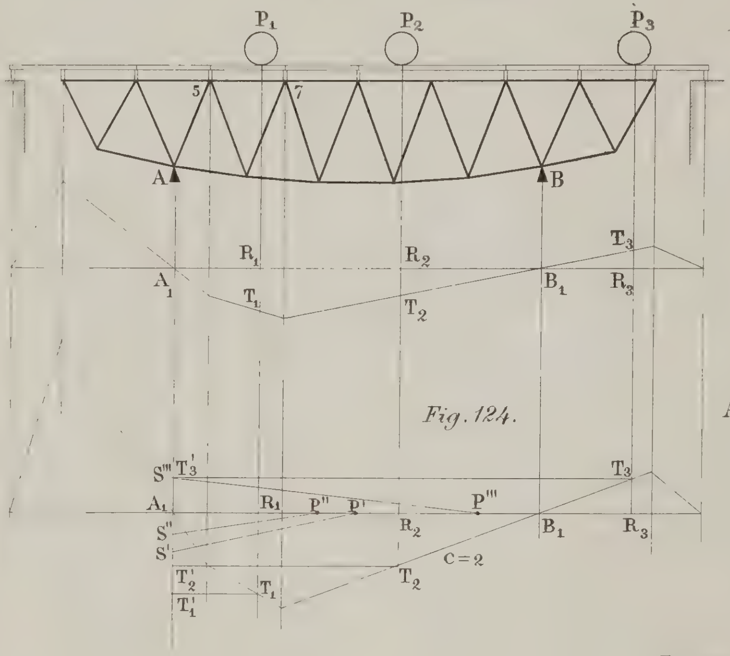


Fig. 124.

Fig. 126.

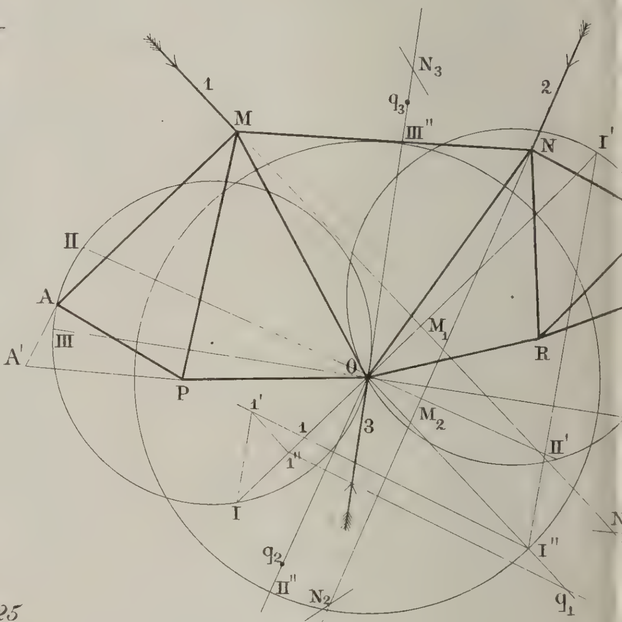
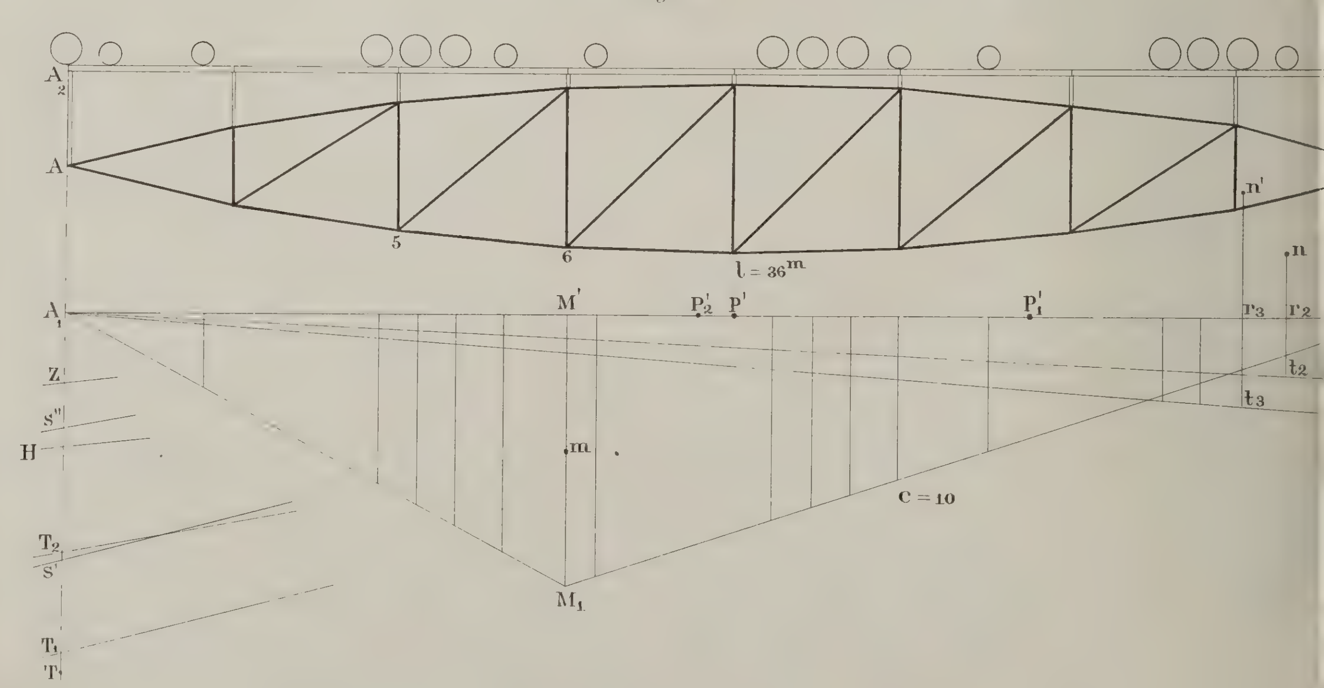


Fig. 125



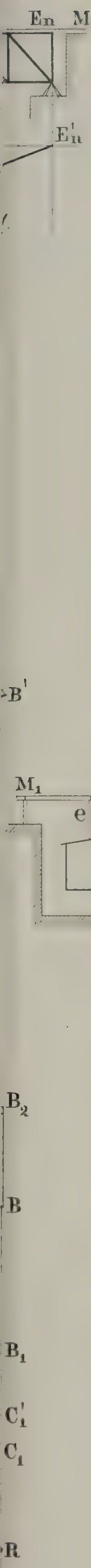


Fig. 122.

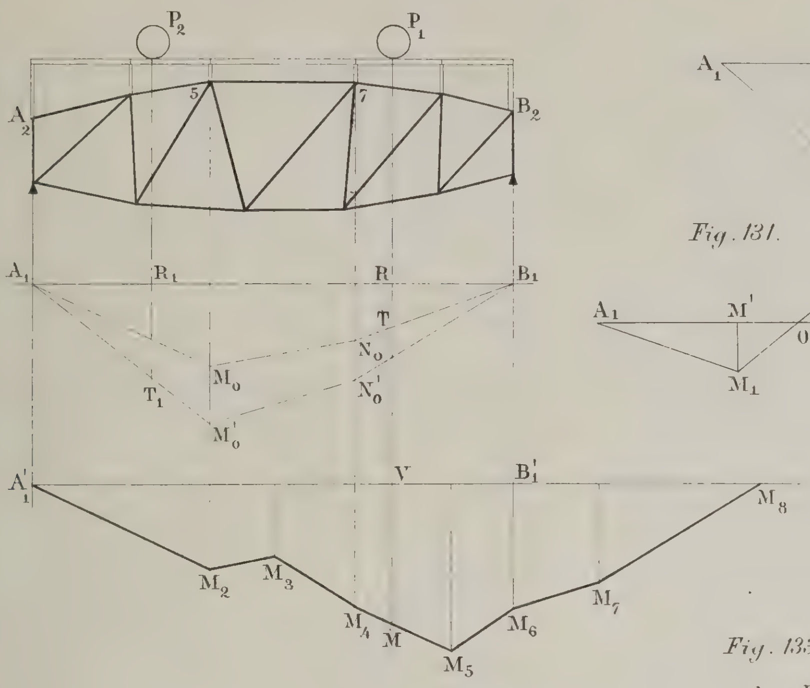


Fig. 130.

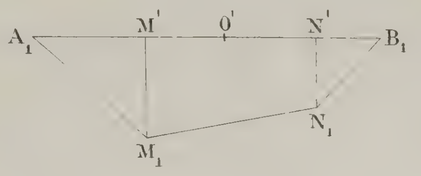


Fig. 131.

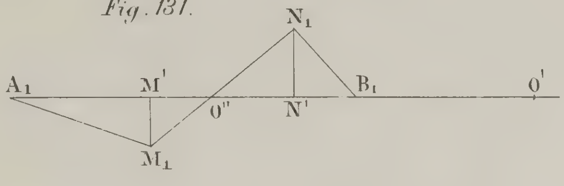


Fig. 132.

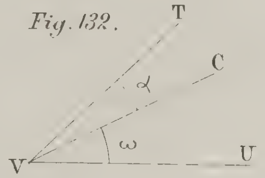


Fig. 133.

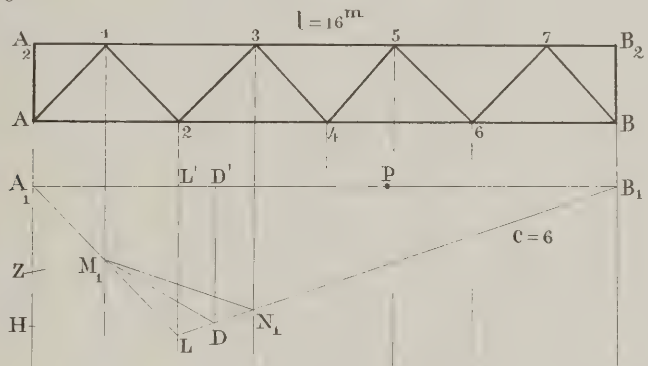


Fig. 134.

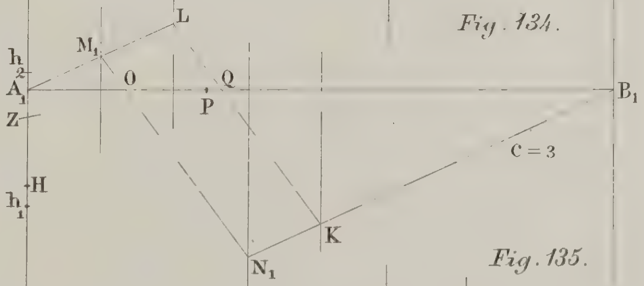


Fig. 135.

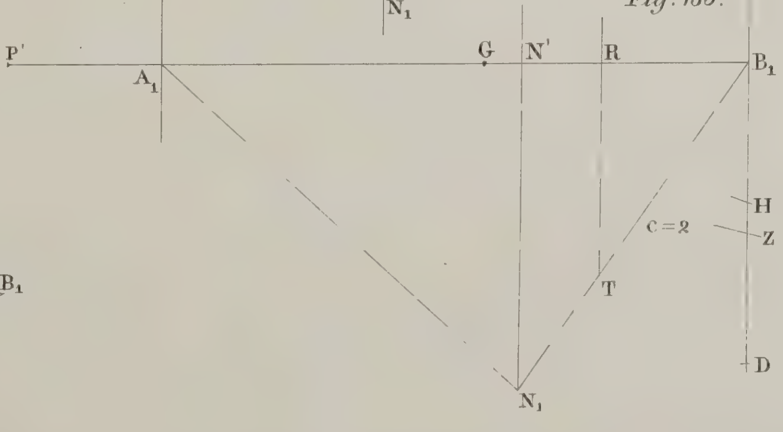


Fig. 127.

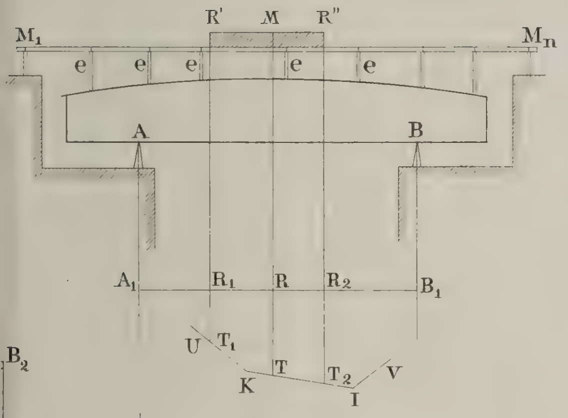


Fig. 128.

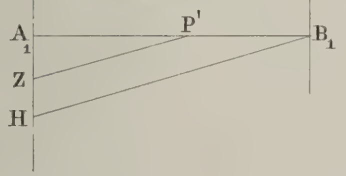
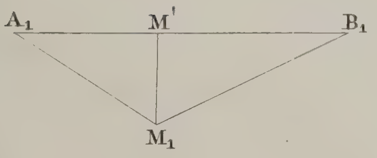


Fig. 129.



Lit. Danesi

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Fig. 136.

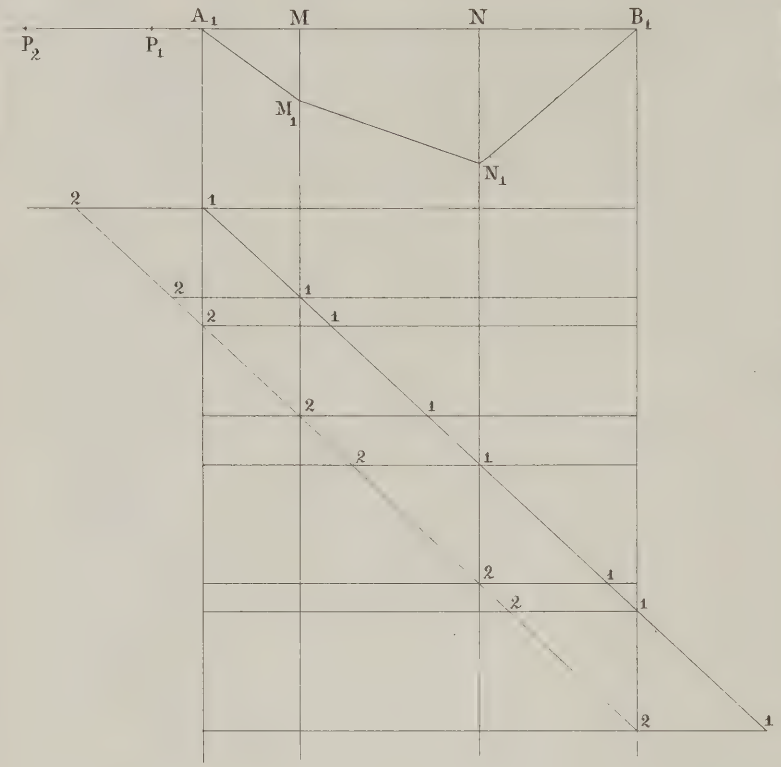


Fig. 137.

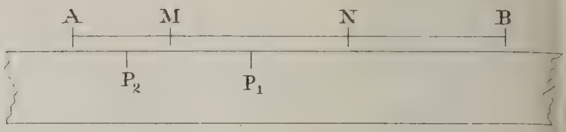


Fig. 147.

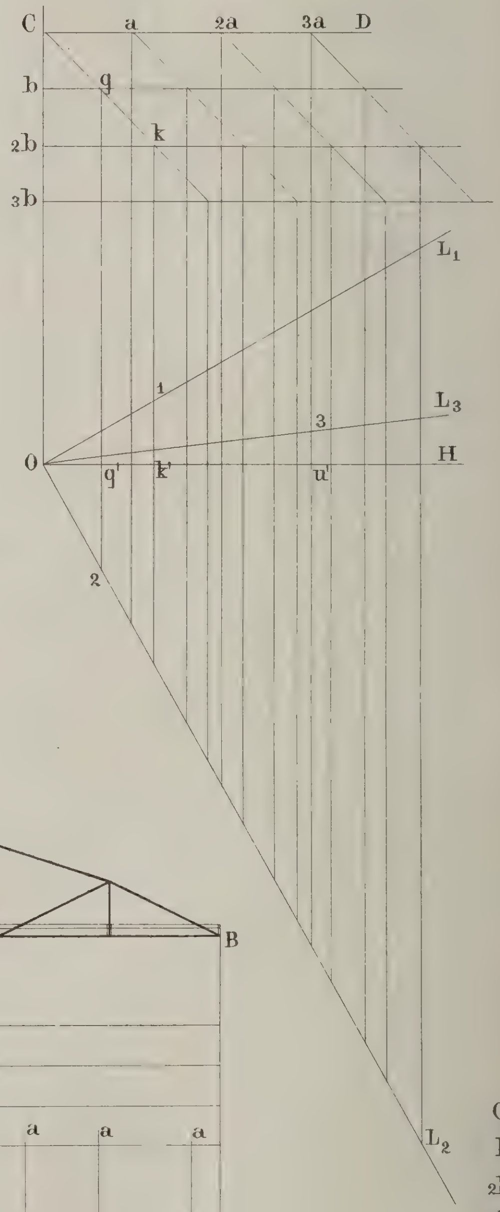
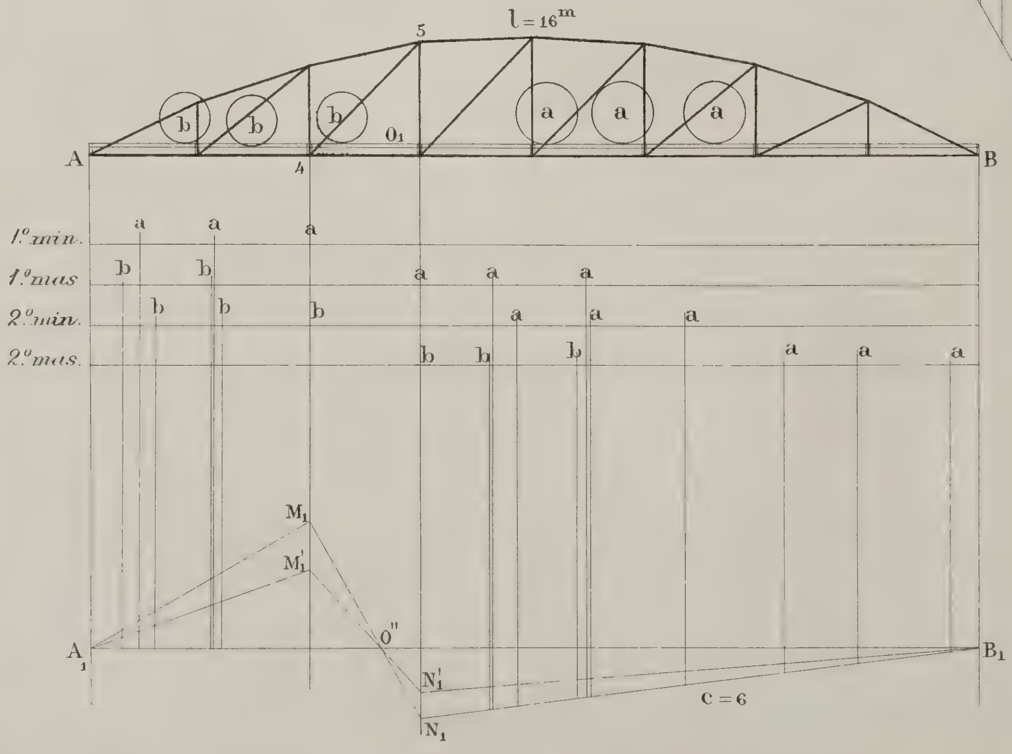


Fig. 146.



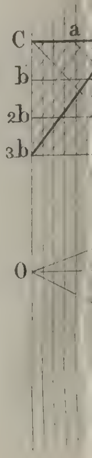


Fig. 138.

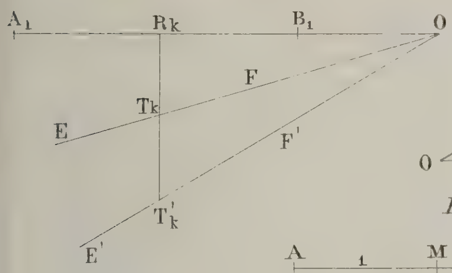


Fig. 139.

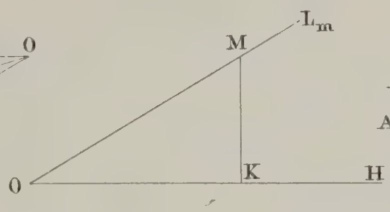


Fig. 140.

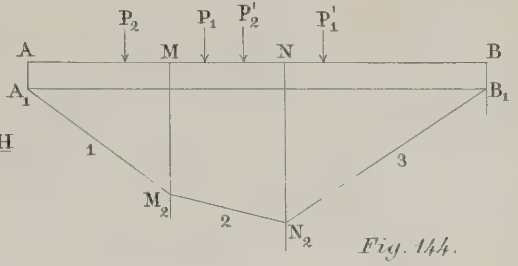
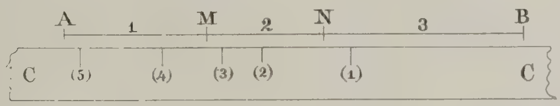


Fig. 142.



g. 141.

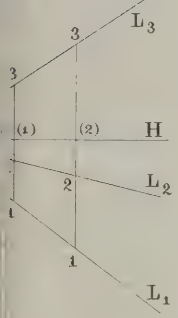


Fig. 143.

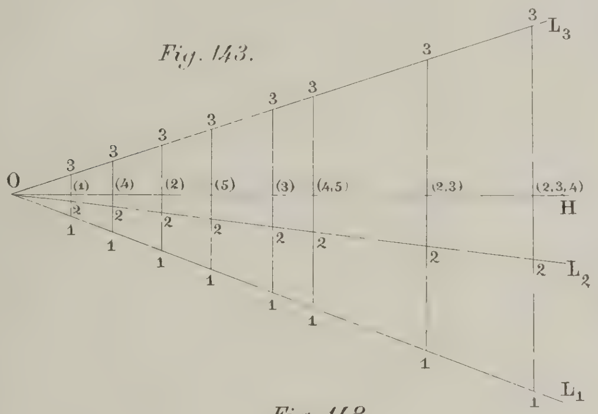


Fig. 144.

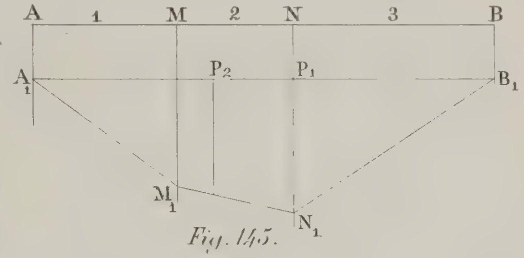


Fig. 145.

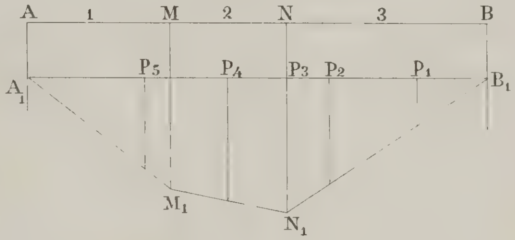
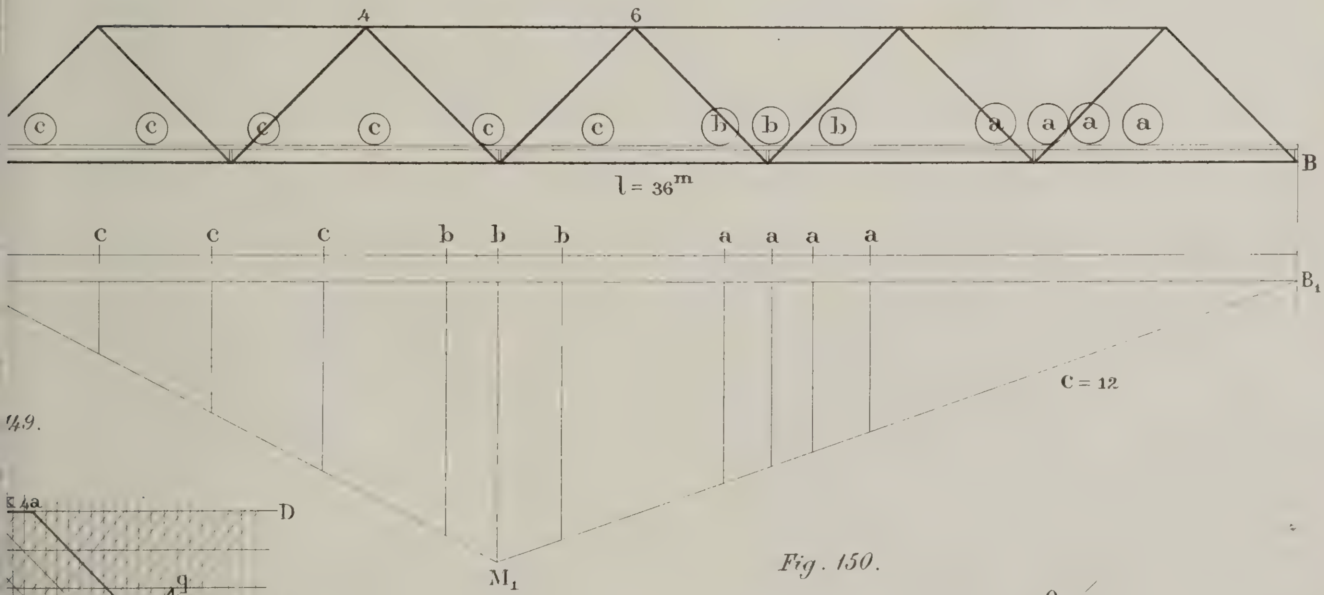


Fig. 148.



49.

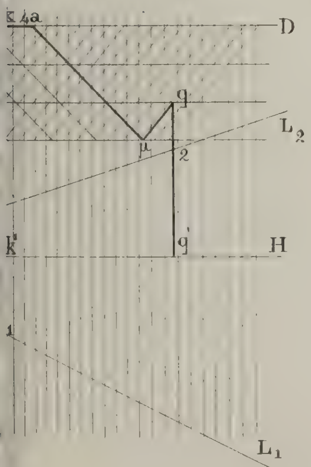
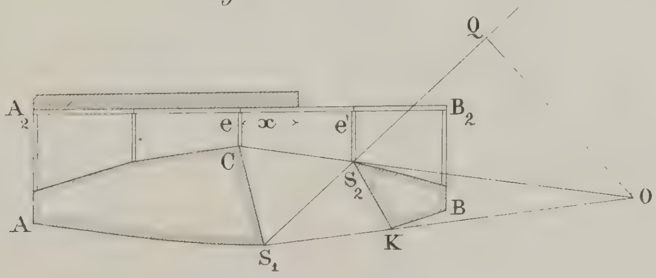


Fig. 150.



Lit. Danesi

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Il calcare di Leitha, il Sarmatiano e gli Strati a Congerie nei monti di Livorno, di Castellina marittima, di Miemo e di Monte Catini.

Considerazioni geologiche e paleontologiche del prof. G. CAPELLINI

lette nella seduta del 3 marzo 1878.

Verso la fine del 1874 e nella prima metà del 1875, rendendo conto di nuove ricerche stratigrafiche e paleontologiche nei monti livornesi e specialmente nei dintorni di Rosignano, di Castelnuovo della Misericordia e del Gabbro, assicurai che ivi esistevano il *Sarmatiano* e il *Calcare di Leitha* e feci cenno della continuazione dei veri *Strati a Congerie* nella Valle del Salvolano e nelle vicinanze di Livorno in rapporto coi gessi della Puzzolente e di Limone.

Dopo la prima scoperta degli strati a Congerie nella Valle del Marmolaio nel 1860 (¹) e anche dopo la pubblicazione degli studî *sulla formazione gessosa con alabastro* di Castellina marittima, i molti e interessanti lavori pubblicati in Italia e all'estero intorno ai terreni terziarî recenti e sopratutto intorno al Sarmatiano e agli strati a Congerie, e in parte lo studio diretto che di queste formazioni ho potuto fare in Valacchia, Grecia, Ungheria, mi hanno posto in grado di istituire opportuni confronti e di rendermi conto dei loro rapporti geologici e paleontologici.

Essendo necessario assai tempo per la completa illustrazione dei copiosi materiali che ho già raccolto e non volendo rischiare di perdere, anche in parte, il frutto di lunghe fatiche e dispendiose ricerche, ho pensato di prender data innanzi a questa R. Accademia dei Lincei, presentando un abbozzo di carta geologica di una parte della provincia di Pisa e dintorni di Livorno nella scala di 1 a 75000; annunziando in pari tempo le principali scoperte che ivi ho fatte in questi ultimi anni e le più importanti conclusioni che da esse parmi si possano dedurre. In questa circostanza piacemi altresì di ricordare che i miei amici signori Bartolini, Nardi e Lobin mi coadiuvarono anche in queste più recenti esplorazioni.

CALCARE DI LEITHA.

Il nucleo principale dei monti di Livorno, di Castellina marittima e di Monte Vaso, di Riparbella, di Miemo, di Montecatini è costituito da gabbri, serpentine diallagiche, diabasi, che si presentano attraverso roccie calcaree, schistose e

(¹) Capellini, *Notizie geologiche e paleontologiche sui gessi di Castellina marittima.* Nuovo Cimento. Vol. XII. Pisa, 1860.

arenacee giudicate non più antiche del cretaceo superiore, forse in parte riferibili al terziario inferiore, e che nell'insieme corrispondono al *Flysch*.

In questo complesso di roccie, alle quali si associano oficalci, diaspri manganesiferi, ftaniti ed altri prodotti di metamorfismo, si incontrano minerali svariati, taluni dei quali costituiscono giacimenti di notevole importanza; fra essi primeggiano i minerali di rame i quali, come a tutti è noto, anche attualmente sono scavati a Monte Catini e al Terriccio e un tempo furono oggetto di ricerche più o meno infruttuose al Romito, a Monte Vaso, Castellina, Riparbella, Miemo. Oltre il rame sono da ricordare i minerali di ferro, di piombo, di manganese, di cromo, e per quei che si interessano di studî mineralogici citerò particolarmente la steatite, l'asbesto e la baritina dei monti di Livorno, la prehnite bellissima che ivi accompagna le ematiti, le piriti e il ferro calcedonioso; le numerose zeoliti che si incontrano nelle roccie diabasiche di Monte Catini, e la baritina che ha contribuito alla fossilizzazione delle ossa di cetacei nelle Valli della Sterza e della Fine.

Le masse montuose che resultano dalle roccie sopra menzionate, un tempo costituirono un gruppo di isole, come ho altra volta dimostrato; attualmente sono collegate fra loro da depositi terziarî in grandissima parte riferibili al pliocene e solo per piccole zone spettanti al miocene superiore e medio.

Le mie ricerche in quelle montagne, fino dal 1856, avendo avuto di mira specialmente quanto riguarda le formazioni mioceniche e mio-plioceniche, oggi mi limiterò a ricordare più specialmente le cose osservate e studiate nella grande vallata della Fine e del Salvolano fra i monti di Livorno e quelli della Castellina e di Monte Vaso, e nella Valle della Sterza di Laiatico fra i monti della Castellina e quelli di Miemo. Prendendo le mosse dai dintorni di Castellina marittima, ove con precedenti lavori già sopra accennati ho dimostrato la esistenza del calcare di Leitha rappresentato dai calcari di aspetto cavernoso e quasi dolomitico di Santo al Poggio e dalle panchine del Conventaccio delle Badie, ho cercato di rintracciare la continuazione di questa formazione prima nel versante orientale dei monti livornesi e poscia altrove.

Da lungo tempo avevo assimilati, cronologicamente, i calcari di Rosignano e delle Parrane con il calcare di San Giovanni e Santo al Poggio presso Castellina; si trattava però di meglio analizzarli e di precisarne i rapporti scambievoli. Questo studio incominciato nel 1860 nelle antiche cave di calcare di Rosignano sotto il palazzo Mastiani, l'ho continuato in seguito, visitando ripetutamente i tagli della nuova strada dall'Acquabuona a Rosignano e le cave dette del Bellini a poca distanza dalla stazione. In queste esplorazioni ho potuto rendermi conto delle svariate forme litologiche del calcare di Rosignano, dal tipo di calcare grossolano che costituisce gli strati superiori, fino alla varietà a elementi così minuti da poterlo quasi considerare come un calcare marnoso o tufaceo. Con queste roccie decisamente calcaree si intercalano strati sabbiosi e ciottolosi i cui elementi provengono in grandissima parte da diabase ordinaria e più ancora da diabase porfirica, quale s'incontra nei vicini monti di Riparbella e Miemo. Lo strato più profondo delle cave del Bellini è costituito da calcare della varietà la più compatta e la più fina, è di colore biancastro con grandi amigdale turchiniccie, ha più di tre metri di potenza e corrisponde agli strati utilizzati nelle cave Mastiani; contiene numerosi fossili, in parte allo stato di modelli, in parte col guscio ben conservato.

Dallo strato più profondo di calcare compatto fino al calcare superiore frammentario disgregato e con molti avanzi di *Porites*, si può calcolare una potenza di circa 15 metri e tutta la serie inclina di circa 17° a sud-est.

I principali fossili che vi ho raccolto sono i seguenti (¹):

Conus sp.
Cerithium sp.
Rissoa, parecchie sp.
Marginella sp.
Trochus sp.
Bulla sp.
Tellina serrata, Ren.
Lutraria oblonga, Chem.
» *sanna*, Bast.
Venus Haidingeri, Hörn.
Tapes vetula, Bast.
Donax lucida, Eichw.
Arca diluvii, Lam.
» *Breislaki*, Bast.
Pecten aduncus, Bast.
P. sp.
Ostrea digitalina, Eichw.
Psammechinus monilis, Desm.
Porites sp.

Fra Rosignano e Castelnuovo della Misericordia il calcare di Leitha si incontra al podere detto i Colli, poco prima di arrivare a Poggiarino alto.

Le forme litologiche che il calcare di Leitha assume nelle cave presso Castelnuovo sono meritevoli di particolare attenzione.

Alla base vi ha un conglomerato costituito da ciottoli prevalentemente di calcare, di diabase, di serpentina, e in mezzo ad esso si trovano tronchi di legni silicizzati; fanno seguito, in serie ascendente, strati di calcare marnoso giallastro con molti avanzi vegetali, specialmente frammenti di tronchi, e molte conchiglie bivalvi. Questa roccia passa superiormente ad un calcare lumachella giallastro, il quale ricorda le panchine di s. Dalmazio e del Conventaccio delle Badie. Questo calcare abbonda di coralli e parzialmente assume tinta rossastra, diventa durissimo e costituisce noccioli i quali potrebbero essere suscettibili di pulimento come un vero marmo lumachella; taluni di questi noccioli ricordano perfino certe varietà di oficalce rossastra. Gli strati superiori, finalmente, sono più teneri e direi ancora sabbiosi; contengono gran quantità di molluschi ed altri fossili, i quali in complesso corrispondono a quelli di Paltratico e Scaforno che or ora esamineremo, però a Paltratico il *Pecten aduncus* è raro, mentre nelle cave di Castelnuovo è abbondante.

La strada che da Rosignano va a Castelnuovo taglia gli strati del calcare di Leitha inclinati verso levante; in questa direzione, cioè a destra della strada andando verso Castelnuovo, precisamente nel podere di s. Pierino, vi hanno sabbie marnose le quali riposano sul calcare di Leitha e sono ricchissime di fossili, fra i quali la *Turritella turris*, la *Corbula gibba*, la *Rotella subsuturalis*, rappresentano la metà quantitativa degli esemplari che vi si raccolgono. Di queste sabbie marnose dirò nuovamente dopo che avrò accennato altri luoghi ove il calcare di Leitha è ben sviluppato e caratterizzato.

Poco prima di arrivare a Castelnuovo, la strada che va a Livorno e a Paltratico lascia il calcare miocenico e attraversa calcare alberese, schisti galestrini e gabbro.

(¹) Il r. Museo geologico di Bologna possiede anche la piccola raccolta di fossili del calcare di Rosignano fatta dal dott. Manzoni (V. Manzoni, *Aggiunta di notizie e di considerazioni alla Relazione di un viaggio geologico in Italia del dott. T. Fuchs*. Bollettino del r. Comitato geologico. Anno 1874, p. 233.

A Scaforno presso Paltratico vi hanno molasse marnose che passano a conglomerati calcareo-serpentinosi e contengono una ricca fauna avente molti rapporti con quella delle marne sabbiose di s. Pierino. Alla base vi hanno bellissimi coralli (*Porites, Astraea, Heliastraea, Cladangia*) e fra i molluschi si trovano *Pecten aduncus, Ostrea digitalina;* superiormente sono molto sviluppate ostriche di grandi dimensioni, fra le quali si nota l'*Ostrea gingensis*, e intercalati con questi strati vi hanno marne con *Cerithium pictum, C. doliolum* e altri fossili che accennano a deposito veramente salmastro e caratterizzano il piano Sarmatiano. A Paltratico non vi ha il vero calcare di Leitha, ma continuano i conglomerati e le molasse caratterizzate da fossili che accennano ad un passaggio del calcare di Leitha al Sarmatiano. Avanzando in direzione del Gabbro, a metà strada fra il Gabbro e Paltratico in un luogo detto La Pineta i fossili diventano abbondanti e alla base si notano le marne sabbiose di Scaforno, presso a poco con i medesimi fossili, mentre superiormente la roccia e la fauna si modificano alquanto; la roccia infatti si fa più marnosa e i molluschi fossili che vi si incontrano conservano il loro guscio, ma sono riempiti da marna cementata da ossido di ferro e talvolta anche da sostanza calcedoniosa (1).

Nella seguente lista sono registrati i principali fossili che ho raccolto in diverse escursioni a Scaforno e Paltratico, e riferirò quelli della Pineta di Paltratico dopo avere accennato altri giacimenti che hanno con essa la più stretta analogia.

Scaforno e Paltratico.

Fusus Valenciennesi, Grat.
Nassa miocenica, Mich.
N. semistriata, Br.
N. Rosthorni, Partsch.
Natica helicina, Br.
Chenopus pes-pelecani, Ph.
Turritella turris, Bast.
Corbula gibba, Olivi.
C. Basteroti, Hörn.
Venus plicata, Gm.
V. multilamella, Lam.
V. Islandicoides, Lam.
V. Dujardini, Hörn.
Tapes gregaria, Partsch.
Dosinia exoleta, L.
Lucina borealis, L.
L. incrassata, Dub.
L. transversa, Bronn.
Cardium turonicum, Mayer.
C. paucicostatum, Sow.
Arca turonica, Duj.
A. Breislaki, Bast.
A. Diluvii, Lam.
Nucula nucleus, L.
Leda pella, L.
Modiola Brocchii, Mayer.
Ostrea digitalina, Eichw.
O. lamellosa, Br.
O. cochlear, Poli.
O. sp.
Pecten aduncus, Eichw.
P. substriatus, d'Orb.
Psammechinus monilis, Desm.
Schizaster Scillae, De-Moul.
Serpula sp.
Cellepora sp.
Membranipora angulosa, Reuss.
Lepralia ansata, Svan.

(1) Nelle molasse del podere nuovo di faccia a casa Nardi vi sono bellissimi filoni di calcedonio bianco; anche a Cordecimo si trovano concrezioni calcedoniose e sabbia con conchiglie a nucleo agatizzato.

Coralli raccolti a Castelnuovo e a Scaforno

Heliastraea Defrancei, M. E.
H. sp.
Solenastraea manipulata, Reuss.
S. distans, Reuss.
Astraea crenulata, Gold.
A. Fröhlichiana, Reuss.
Cladangia conferta, Reuss.
Porites ramosa, Cat.
P. incrustans, Defr.

Non volendo, per ora, intrattenermi ad esaminare quanto si può riferire al Sarmatiano e desiderando invece di notare ciò che più decisamente spetta al calcare di Leitha, dirò che verso settentrione questa roccia si incontra di nuovo a Colognole ove si presenta con caratteri litologici un poco diversi da quelli che ho già fatto notare per le precedenti località.

La massa profonda della roccia è costituita da un calcare granulare, abbastanza compatto, durissimo, di colore bigio tendente al giallognolo; superiormente diventa sabbiosa e passa ad una specie di molassa molto ferruginosa, nella quale si trovano importanti nidi di fossili col guscio spatizzato, facili ad aversi ove la roccia fu attaccata dagli agenti atmosferici. In taluni punti la roccia si può dire un impasto di sabbia e gusci di *Venus Haidingeri,* e nel luogo detto il Castello ho raccolto i seguenti fossili.

Pleurotoma sp.
Ancillaria glandiformis, Lam.
Rotella subsuturalis, d'Orb.
Lutraria oblonga, Chem.
Venus multilamella, Lam.
Venus Haidingeri, Hörn.
Cytherea Pedemontana, Agass.
Cardita crassicosta, Lam.
Lucina columbella, Lam.
Arca diluvii, Lam.

Il calcare di Leitha di Colognole si trova a circa 180 metri sul livello del mare; costituisce una massa slegata da quelle precedentemente esaminate e nel tempo stesso senza rapporti con il calcare delle vicine Parrane, che da lungo tempo ho pure riferito al calcare di Leitha, dichiarandolo cronologicamente identico al calcare di Santo al Poggio e di Rosignano [1].

Il calcare delle Parrane costituisce una importante massa bene stratificata, limitata dal botro dell'Inferno e dal botro del Molinaccio, inclinata circa 35° a nord-est.

Nelle cave Pupi, la potenza dello strato coltivabile, che tanto assomiglia al calcare di Rosignano, è di circa tre metri e cinquanta centimetri; questo strato riposa sopra roccia più grossolana che vien detta renaccio ed è ricoperto dal così detto *spugnone;* lo spugnone non è altro che una potente massa di resti di *Porites ramosa* ammonticchiati confusamente gli uni sopra gli altri e che costituiscono un banco della grossezza di circa 10 metri.

Al luogo detto Lecceta, presso il condotto dell'acqua che va al Cisternone di Livorno, questo banco di *Porites* è ricoperto dalle marne inferiori ai gessi, le quali appaiono sotto Colle Alto, come avrò occasione di ricordare fra poco.

[1] Capellini, *La formazione gessosa di Castellina marittima e i suoi fossili.* Memorie dell'Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Serie III, Tomo IV. Bologna, 1874.

Nelle vicinanze di Parrane nuove, lo stesso calcare costituisce anche altra massa non molto grande e con strati molto raddrizzati.

Nel versante occidentale dei Monti livornesi, nella valle del Chioma e precisamente al podere Gorgo, ho riscontrato un lembo riferibile a questa formazione. Ho sospettato che il masso di calcare che costituiva il Monte Tignoso presso l'Ardenza e che fu interamente distrutto per i lavori del porto, potesse appartenere al calcare di Leitha; questo dubbio sarà risolto appena avrò potuto ritrovare esemplari della roccia della quale esisteva ancora una parte allorchè feci le prime escursioni nei dintorni di Livorno con il dott. Castelli e con Sir C. Lyell nel 1857-58.

Ho già accennato dove e come si trovi il calcare di Leitha nei Monti della Castellina e soltanto aggiungerò che, mentre sulla riva destra della Fine nel fianco settentrionale dei Monti livornesi il calcare di Leitha è tanto sviluppato ed offre tante varietà, sulla sponda opposta è limitato alla Valle del Marmolaio; nel fianco meridionale e occidentale dei Monti di Monte Vaso e di Santa Luce non ve ne ha traccia.

Fino ad oggi non ho trovato traccie di calcare di Leitha, nè formazioni corrispondenti, nella Valle della Sterza di Laiatico; soltanto in Val di Era, sotto Monte Catini, ho incontrato alcune masse di calcare e qualche lembo di molassa e di conglomerato che reputo potersi riferire, essi pure, al calcare di Leitha. In questa opinione mi hanno confermato taluni fossili, *Pecten aduncus, Ostrea donacina,* raccolti a Tori il 29 settembre 1876 in compagnia del cav. Lawley, alla distanza di circa 200 metri dalla villetta del sig. avv. Mori. Sotto i conglomerati e il calcare di Leitha ho trovato un calcare fetido fossilifero analogo a quello di Monte Bamboli e che probabilmente non è altro che una formazione cronologicamente corrispondente ad una parte del calcare di Leitha, ossia riferibile al 2° piano mediterraneo dei geologi austriaci. La stessa formazione si presenta con interessante sviluppo verso Orciatico, nel luogo detto le Querce.

SARMATIANO.

Passando ora a dire del Sarmatiano, avvertirò anzi tutto che i limiti fra questo piano e il precedente, detto del calcare di Leitha, non sono sempre ben distinti nè sarebbe possibile di tracciarli completamente in una carta in piccola scala. D'altra parte bisogna ricordarsi che le due formazioni si succedono senza interruzione, che il carattere salmastro indicato anche dal nome dato a questo piano sovente fa difetto, che i fossili del calcare di Leitha superiore sono in massima parte i medesimi del Sarmatiano inferiore, che per conseguenza tutto tende ad accrescere le difficoltà per le divisioni sistematiche. Anche in questa circostanza mi occorre ripetere ciò che ho affermato tante altre volte e cioè: che le divisioni sistematiche andranno sempre più perdendo della loro importanza, quanto meglio e più completamente saranno studiate e analizzate le diverse formazioni in quelle regioni ove la serie stratigrafica è meno incompleta.

Per conseguenza, tornando a percorrere rapidamente le località già esaminate per indicare la formazione del calcare di Leitha, converrà ricercare quanto si potrebbe riferire al piano sarmatiano che nell'abbozzo di carta geologica è stato indicato colla stessa tinta della formazione precedente.

Secondo il mio modo di vedere, nella regione presa in considerazione il Sarmatiano si presenta con diverso aspetto e diversa importanza, secondo le varie località, e costituisce il nesso fra il piano del vero calcare di Leitha e gli strati a Congerie, dei quali ci occuperemo da ultimo.

Specialmente dopo gli interessanti studî del dott. T. Fuchs *Sulle formazioni terziarie recenti della Grecia*, si potrebbe sospettare che una parte degli strati di Santo al Poggio e del Buchicchio presso Castellina, e forse la porzione superiore degli strati di Rosignano possano riferirsi al Sarmatiano; considerandoli come un *facies* marino littorale di questa formazione, analogamente a quanto il dott. Fuchs ha indicato nei dintorni di Trakones (1).

Gli strati a *Ostrea cochlear* di Santo al Poggio e che presso il Buchicchio si trovano subito alla base dei gessi, il calcare tufaceo superiore talvolta cavernoso, che nello stesso luogo è legato intimamente con essi strati, come anche la porzione superiore del calcare del Poggio del Pipistrello e cave di Rosignano convengo che si possano far passare nel Sarmatiano, quando si ritenga che allo stesso piano si debbano riferire gli strati analoghi di Trakones, pure con *Ostrea cochlear,* e perfino il sottostante calcare con *Porites* e *Astraea.*

Queste vedute, mentre converrebbero in parte con quelle del Fuchs, il quale nella più recente sua pubblicazione sul Bacino di Vienna, ha riferito al Sarmatiano il calcare a *Porites* di Rosignano, riportandolo allo stesso livello delle argille di Hernals, non implicherebbero che ora si dovesse riferire al Sarmatiano tutto quanto prima si sincronizzava col calcare di Leitha, anche in considerazione delle forme litologiche, dei fossili e della stratigrafia.

Aperta così la via alla ricognizione del Sarmatiano nei Monti livornesi, io sono disposto a comprendere in esso la porzione superiore degli strati miocenici dei dintorni di Castelnuovo, per es. le marne a *Turritella, Corbula, Rotella* ecc. di s. Pierino, le molasse superiori più o meno marnose di Scaforno e Paltratico con *Tapès gregaria;* necessariamente poi le *marne a Cerizii, Cerithium pictum* e altri fossili salmastri di Scaforno, una parte delle marne con fauna marina della Pineta di Paltratico, e le marne con impronte di bivalvi, *Lucina, Ervilia, Pecten* ecc. alla base della grande formazione dei tripoli del Gabbro, di Paltratico, Castelnuovo ecc.

Questi due ultimi gruppi li considero come quelli che, insieme agli *strati a rissoe* di Rosignano e del Buchicchio, meglio degli altri rappresentano il Sarmatiano inferiore, ed entrambi si trovano bene rappresentati anche nel versante occidentale, sempre dei Monti livornesi, sotto Popogna vecchia, a circa 125 metri sul mare, a Cafaggio e al Gorgo in una posizione che corrisponde fra il Gabbro e la Pineta (2).

A suo tempo non mancherò di mettere anche maggiormente in rilievo i rapporti della serie stratigrafica di Popogna e Cafaggio con quella del Gabbro, della Pineta e di Paltratico (3); e frattanto darò la nota dei fossili più frequenti in questi giacimenti.

(1) Fuchs, *Studien ueber die jüngeren Tertiärbildungen Griechenlands.* Denk. der k. k. Akad. d. Wissensch. B. XXXVII. Wien, 1877.

(2) Nella più recente classificazione di Mayer, forse si potrebbero in gran parte riferire al Tortoniano.

(3) I conglomerati ofiolitici a minuti elementi di Cordecimo, nei quali si incontrano conchiglie agatizzate, stanno subito alla base dei gessi e forse sono da ritenersi essi pure come sarmatiani.

PINETA DI PALTRATICO.

Nassa semistriata, Br.	*Venus* sp.
» sp.	*Tapes gregaria,* Partsch.
Natica sp.	*Lucina dentata,* Bast.
Cerithium pictum, var.	» sp.
Chenopus pes-pelecani, L.	*Arca diluvii,* Lk.
Turritella turris, Bast.	» *Turonica?* Duj.
Dentalium inaequale, Bron.	*Arca cardiformis?* Bast.
Corbula gibba, Olivi.	*Pecten* sp.
Venus Multilamella, Lk.	*Ostrea* sp.

Si incontrano scarsissimi avanzi di vertebrati (pesci specialmente), ma ciò dipende dall'essere stati raccolti con ogni diligenza per conto del sig. Lawley, e forse saranno stati in parte confusi con quelli di piani più recenti e dai raccoglitori indicati come provenienti da Orciano.

POPOGNA, CAFAGGIO E GORGO.

Nassa semistriata, Lk.	*Venus plicata,* Gm.
N. prismatica, Br.	*Tapes gregaria,* Partsch.
Natica millepunctata, L.	*Lucina miocenica.*
Turritella turris, Desm.	*L. dentata,* Bast.
Dentalium inaequale, Br.	*Arca diluvii,* Lam.
Tellina sp.	*A. turonica,* Duj.
Corbula carinata, Duj.	*A. Breislakii,* Bast.
C. gibba, Olivi.	*Modiola* sp.
Solecurtus coarctatus? Gml.	*Ostrea* sp.
Lutraria oblonga, Chem.	

Verso S. Luce nulla vi ha da poter riferire con certezza al Sarmatiano; ma presso Pastina, i conglomerati ofiolitici alla base dei gessi e parte di quelli del botro della Lespa sarebbero da ritenersi sarmatiani, in seguito alle nuove vedute sopra esposte.

Nella Valle della Sterza di Laiatico, sono disposto a ritenere in questo piano le ligniti di Strido e di Monte Vaso, con le marne a *Melanopsis Bartolinii* Cap., *Melanopsis buccinoidea* var., *Congeria Deshayesi* Cap., *Littorinella obtusa* Sand., *Pisidium priscum* Eichw., *Neritina Grateloupiana* Fer., ed altri fossili (¹), e credo vi si debbano comprendere anche le molasse con filliti e i conglomerati con legni silicizzati, che altra volta dimostrai corrispondenti ai conglomerati superiori di Santo al Poggio e che ricoprono le marne a *Melanopsis Bartolinii,* termine inferiore della formazione d'acqua dolce in quella vallata.

Nella Valle di Cecina e in Val d'Era non ho ancora raccolto dati sufficienti per poter esprimere un giudizio sulla esistenza o meno del Sarmatiano; converrà

(¹) Presso la fornace di Monte Vaso queste marne si trovano a più di 300 metri sul livello del mare.

studiare attentamente gli strati alla base della formazione gessosa presso la villetta dell'avv. Mori prima di dare un giudizio definitivo.

Or ora parlando degli strati a Congerie farò conoscere in base a quali considerazioni credo di dover insistere a ritenere nel Sarmatiano il deposito lacustre della Valle della Sterza di Laiatico, e frattanto aggiungerò brevi cenni intorno a un gruppo di strati posti fra il Sarmatiano, indiscutibilmente miocenico, e gli strati a Congerie che si vorrebbero considerare come base del pliocene.

Il gruppo del quale intendo parlare, fu da me altra volta indicato e illustrato come parte della serie sarmatiana del Gabbro, ove raggiunge una potenza complessiva di circa 15 metri quando vi si comprendano anche gli strati inferiori con impronte di bivalvi già sopra ricordate. I tripoli o schisti a diatomee ne costituiscono la parte superiore e fino dal 1874 feci conoscere la esatta loro corrispondenza cronologica con i tripoli di Licata, Grotte e altre località in Sicilia, Mondaino nelle Romagne e Oran in Algeria (1).

Questi schisti a diatomee, o tripoli schistosi, hanno già fornito argomento di studî e considerazioni importantissime al distintissimo naturalista conte C. Castracane, il quale vi ha riconosciuto ben 29 specie di diatomee, e rendendo conto delle condizioni nelle quali si devono essere costituiti, è arrivato alle stesse conclusioni alle quali mi avevano condotto le osservazioni stratigrafiche e i numerosi fossili animali e vegetali che vi ho riscontrati.

Infatti, dallo studio delle diatomee si ricava che i tripoli schistosi del Gabbro, e per conseguenza quelli di Paltratico, Scaforno e Castelnuovo che ne sono la continuazione, si depositarono non molto lontani dalla riva, in condizione da risentire l'influenza delle acque dolci che vi arrivavano dal continente; ad analoga conclusione conduce il miscuglio di pesci d'acqua dolce e di pesci marini, che spesso si verifica anche in uno stesso esemplare di roccia. Anche la straordinaria quantità di piante terrestri fossili in schisti sui quali si vedono impronte di cardii, di piccole ervilie (?) dà a conoscere che vi erano corsi d'acqua, i quali recavano al mare le numerose foglie che troviamo benissimo conservate fra quegli schisti.

Nel lavoro che sto preparando figureranno la maggior parte dei fossili degli schisti a diatomee del Gabbro, dei quali sono riescito a procurarmi molte centinaia di esemplari e frattanto darò qui la nota delle specie principali che già vi ho riscontrato, preceduta dalla lista delle diatomee che il signor conte Castracane riconobbe nei saggi che gli aveva trasmesso perchè li esaminasse e confrontasse con quelli di Mondaino nelle Romagne e Licata in Sicilia (2). In questi schisti ho pure osservato impronte di piume e alcuni insetti; ma, per questi specialmente, vi è ancora molto da scoprire ed io professo la maggior gratitudine al signor Tito Nardi il quale si è dato già ogni premura per procurarmi numerosi e ben conservati esemplari dei fossili dell'importante giacimento di cui è proprietario.

(1) Capellini, *L'uomo pliocenico in Toscana.* Atti della R. Accad. dei Lincei, Serie II, T. III. Roma, 1876. — Capellini, *Strati a Congeria, formazione oeninghiana e piano del calcare di Leitha nei Monti livornesi.* Rendiconto dell'Accademia delle scienze di Bologna. Sed. 19 nov. 1874.

(2) In mezzo ai tripoli schistosi si incontrano delle specie di concrezioni, o piccole septarie, le quali si possono identificare con quelle illustrate da *Carruthers*, e da taluni giudicate avanzi vegetali, e perfino uova di testuggini. Di esse dirò specificatamente altrove.

Diatomee dei tripoli schistosi dei Monti livornesi (¹).

Epithemia marina, Donkin.
Amfora lyrata, Creg.
Cocconeis Scutellum, Ehrb.
C. Adriatica, Kz.
Coscinodiscus fimbriatus, Ehrbg.
C. lineatus, Ehrbg.
C. punctatus, Ehrbg.
Actinocyclus crassus, Sm.
A. moniliformis, Ralphs.
Campylodiscus, (species).
Surirella salina, Sm.
Nitzschia Entomon, Ralphs.
N. spectabilis, Ehrbg.
Navicula didyma, Ehrbg.
Stauroneis aspera, Kz.
Pleurosigma formosum, Sm.
Synedra robusta, Ralphs.
S. salina, Sm.
Climacosphenia moniligera.
Bacillaria cursoria, Donkin.
Achnarcthes longipes, Kz.
Rhabdonema Adriaticum, Kz.
Grammatophora macilenta, Sm.
G. marina, Kz.
Biddulphia tridentata, Ehrbg.
B. Inomeys, Breb.
Mastogloja apiculata, Sm.
Rhizosolenia setigera, Brigt.
Chetoceros Winghamii, Brigt.

Filliti degli schisti a diatomee del Gabbro.

Pteris oeningensis, Ung.
Libocedrus salicornoides, Ung. sp.
Taxodium dubium, Sternb.
Glyptostrobus europaeus, Brongn. sp.
Sequoia Langsdorfii, Brongn. sp.
Pinus taedaeformis, Ung. sp.
P. Saturni? P. rigios. Ung.
Ephedrites sotzkianus, Ung.
Smilax obtusangula, H.
Populus latior, A. Br. var. rot.
Alnus nostratum, Ung.
Carpinus grandis, Ung.
Quercus etymodrys, var. Mass.
Fagus castanaeefolia, Sism.
Planera Ungeri, Ett.
Ficus lanceolata, H.
Platanus aceroides, Gp.
Laurus sp.
Oreodaphne Heeri, Sism.
Cinnanomum spectabile, H.
C. polymorphum, A. Br. sp.
C. Rossmässleri, H.
C. lanceolatum, Ung.
Dryandra acutiloba, Stbg.
Dryandroides laevigata, H.
Myrsine?
Liriodendron Procaccinii, Ung.
Acer trilobatum, Stbg. sp.
Rhamnus Decheni, Web.
Iuglaus acuminata, A. Br.
Pterocarya denticulata, Web.
Engelhardtia Brongniarti (²).

(¹) Castracane conte ab. F., *Analisi microscopica di un deposito di diatomee dei Monti livornesi.* Atti dell'Accademia pontificia dei nuovi Lincei. Anno XXX. Roma, 1877.

(²) Questa lista sarà quasi triplicata quando avrò compiuto lo studio del copioso materiale che già posseggo; più o meno le stesse specie si trovano anche a Paltratico, Scaforno e sotto Castelnuovo. Non bisogna confondere la flora dei tripoli con quella delle marne gessose superiori le quali, anche nei Monti livornesi, sono ricche di filliti, insetti e *Lebias*.

Ittioliti degli schisti a diatomee del Gabbro.

Siphonostoma Castellii, Capellini.
Gobius Lobini, Cap.
Rhombus Nardii, Cap.
R. Sauvagei, Cap.
R. sp. ind.
Trigla sp.
Acanthonemus etruscus, Cap.
Lepidopus anguis, Sauvage.
L. sp. ind.
Hemithyrsites armatus, Sauvg.
Leuciscus Oeningensis, Agassiz.
L. Licatae, Sauvg.
Aspius Columnae, Sauvg.
Anapterus elongatus, Sauvg.
An. Albyi, Sauvg.
Anapterus sphekodes, Sauvg.
An. sp.
Osmerus propterygius, Sauvg.
Clupea Ecnomi, Sauvg.
Cl. zanclea, Sauvg.
Cl. opisthopteryx, Sauvg.
Cl. trinacridis, Sauvg.
Cl. Meneghinii, Cap.
Cl. Sauvagei, Cap.
Cl. Lawleyi, Cap.
Cl. microsoma, Sauvg.
Cl. sp.
Alosa elongata, Agassiz.
A. sp.

Insetti già riscontrati negli schisti a diatomee del Gabbro.

Tipula lineata, Heer.
Formica globularis? H.
F. sp.
Bibio sp.
Gryllacris sp.
Libellula sp.

Fra i tripoli schistosi del Gabbro e quelli di Licata, corre questa differenza: che i secondi resultano di diatomee le quali accennano a deposito in acque profonde, mentre al Gabbro si tratta di deposito operatosi non molto discosto dalla riva; ciò rende conto altresì della abbondanza delle piante terrestri nella nostra località, mentre sono rare nei tripoli di Grotte e Licata. Buon numero delle specie di pesci di Oran e Licata si trovano anche al Gabbro, come resulta dagli esemplari che ho già studiati e catalogati; per conseguenza ciò che è stato detto per la cronologia dei tripoli di Sicilia, si può ripetere per questi della Toscana, trovando appoggio anche nella flora terrestre, la quale, come ebbi ad avvertire altra volta, è ben distinta da quella più recente delle marne *a cypris* della porzione superiore dei gessi di Castellina marittima e in immediata connessione con gli strati a Congerie.

Il prof. Stöhr in un suo recente lavoro sui tripoli di Grotte in Sicilia, ha sostenuto egli pure con buoni argomenti, che i tripoli si abbiano da considerare come sarmatiani e ne ha dimostrato l'intima connessione, per la base, con il Tortoniano superiore o secondo piano mediterraneo dei geologi tedeschi e superiormente con la formazione gessoso-solfifera, che in taluni casi egli pure ritiene riferibile in parte al Sarmatiano, ammettendo che la detta formazione in alcuni punti abbia cominciato prima che in altri (¹). Conseguentemente l'intera serie del Gabbro, schisti a diatomee

(¹) Stöhr, *Ueber die Radiolarienfauna aus den sogen. Tripoli-schichten von Grotte in Sicilien.* Naturforscher Versammlung in München, sept. 1877. — Capellini, *Sui terreni terziari di una parte del versante sett. dell' Apennino.* Bologna, 1876.

in alto e marne bituminose con impronte di bivalvi in basso, sarebbero da ritenersi nel Sarmatiano (Messiniano inferiore di Mayer) mentre agli strati a Congerie al più sarebbero da riferire le marne gessose e i gessi posti fra i tripoli e le vere marne a Congerie, e piccoli cardii.

Questa formazione, tanto bene sviluppata a Paltratico e al Gabbro, scompare a poco a poco verso nord-ovest, come avrò occasione di dimostrare in seguito. Sulla sinistra della Valle della Fine non vi ha traccia di tripoli schistosi; ma potrebbe darsi che le marne marine con cristalli di gesso isolati, nella loro porzione più profonda rappresentassero gli ultimi strati superiori del Sarmatiano.

Se taluni avanzi di pesci ed altri vertebrati fossili indicati come provenienti da S. Luce realmente furono ivi raccolti, in considerazione dei rapporti fra essi e taluni dei fossili di Nussdorf ed Hernals e di quelli del dienstiano di Anversa, si potrebbe dar valore a simile supposizione.

STRATI A CONGERIE.

Per completare l'esame cronologico dei terreni terziarî recenti nella provincia di Pisa, mi resta da accennare lo sviluppo degli strati a Congerie e lo farò con la maggiore brevità.

Questa formazione incomincia nel versante occidentale dei Monti livornesi nelle vicinanze stesse della città e ne fanno parte i gessi della Puzzolente, del podere dell'Uliveto e di Limone.

In altra circostanza ho riferito che gli strati marnosi superiori ai gessi contengono *Melanopsis Bonellii* Sism., *Melania Letochae* Fuchs, aff. alla *M. curvicosta* auct, neritine, litterinelle, avanzi di *Chara* (¹).

Seguendo la strada che conduce alle fonti, si trovano i gessi di Suese nella tenuta Mimbelli al luogo detto Bocca di gesso, ove questa roccia è attraversata dalla strada provinciale, poscia si incontrano quelli di Cordecimo. Altri affioramenti di questa formazione si hanno al botro della Fonte a Filicaia e a Pietreto; in quest'ultima località i gessi si presentano ben cristallizzati e ricordano gli strati superiori con noccioli alabastrini di Castellina marittima.

Gli strati a Congerie, continuando senza interruzione nel versante orientale dei Monti livornesi, contengono masse gessose distinte presso il ponte del Condotto, di faccia alle cave del calcare delle Parrane e precisamente fra il Condotto e Colle Alto; ma sopratutto meritano di essere esaminati e studiati presso il Crocino lungo le rive della Morra.

La sezione degli strati a Congerie lungo la Morra offre a mio avviso una importanza eccezionale, tanto per il geologo quanto per il paleontologo, e perciò credo di non dover tardare a farla conoscere e qui la riferisco compendiatamente.

Risalendo il corso della Morra, a piccola distanza dall'osteria del Crocino cessano le marne marine plioceniche le quali occupano la maggior parte delle Valli del

(¹) Capellini, *Calcare a Amphistegina, Strati a Congerie e Calcare di Leitha nei Monti livornesi.* Rendiconto dell'Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna. 8 aprile 1875.

Salvolano e della Fine, e nella porzione loro inferiore, sebbene scarseggino i fossili, vi si trova in copia un *Pecten*, che ritengo sia var. del *Pecten denudatus* Reuss; esso corrisponde esattamente al *Pecten Comitatus* Fontannes, del Bacino del Rodano.

Le marne marine ricoprono immediatamente marne gessose con fauna salmastra, e il contatto fra le due roccie e i rapporti stratigrafici sono pure interessanti.

La marna marina è in strati inclinati di circa 15°; gli strati della serie marnósa-gessosa sono un poco più raddrizzati 17°-20°, e per conseguenza vi ha una vera *trasgressione*, della quale per brevità non renderò conto in queste prime notizie.

La serie marnosa-gessosa, ossia la formazione degli strati a Congerie, presenta la seguente successione dall'alto in basso.

1.° Marna con Cardii e Congerie o Dreissene, spesso rimaneggiata con la marna marina sovraincombente . . . . metri 3, 00

2.° Gesso grummoloso e fibroso in straterelli commisti con molta marna » 2, 70

3.° Marna fossilifera . . . . » 1, 80

4.° Gesso carnicino, spugnoso e fibroso con concentrazioni alabastrine verso la base, stratificato superiormente e con vene fibrose che attraversano gli strati . . . . » 2, 70

5.° Marna attraversata da filoncini e vene di gesso fibroso ma sempre fossilifera . . . . » 3, 50

6.° Massa principale di gesso alabastrino analogo a quello dei dintorni di Volterra e Monte Catini; l'amigdala tagliata dal fiume misura . . » 3, 50

7.° Gesso grigio con sottili straterelli alabastrini fra i quali vi hanno pure strati fibrosi candidi. Alla base vi sono noccioli decisamente alabastrini e chiara apparisce l'origine dei noccioli di alabastro candido dei gessi della Castellina . . . . » 1, 20

8.° Marna rossastra un poco scagliosa, la quale ricorda le marne dei Poggioli rossi di Bologna, è attraversata da gesso sanguigno ed è ricchissima di fossili, cardii e congerie . . . . » 1, 50

9.° Prima apparizione del gesso rappresentato da lastre irregolari sottili, cinque a dieci millimetri, le quali servono a meglio distinguere la stratificazione della marna alla quale sono associate e che ha una potenza di » 1, 57

10.° Marna biancastra con limonite, sottilmente stratificata . . » 3, 00

Fra i fossili raccolti nelle marne sopra i gessi, intercalate coi gessi e inferiori ai gessi, ho già riscontrato le seguenti specie di molluschi caratteristici coi gusci perfettamente conservati.

Congeria simplex, Barbot
C. aff. alla *C. auricularis*, Fuchs.
Cardium Odessae, Barbot
C. nova-rossicum, Barbot
Cardium littorale? Eichw.
C. bollense? Mayer.
C. solitarium? Krauss.
C. sp.

Questa serie di strati marnosi gessosi riposa *con leggera trasgressione* sopra una marna grossolana ricchissima di pirite, in parte decomposta, in parte intatta e ben cristallizzata.

La marna con pirite ha un metro di grossezza e termina superiormente una serie di strati arenacei analoghi agli strati superiori della serie del Gabbro e di una potenza complessiva di circa metri 10, 00.

Dal Crocino andando verso Colognole, lungo la strada si trova la continuazione dei gessi della Morra e alla loro base vi hanno marne sabbiose grigie e marne giallastre ferruginose piene zeppe di *Pisidium priscum* Eichw, *Melanopsis* e altri fossili.

Al podere detto Pane e Vino, presso il Casino podere Cubbe e a Lodolaia si possono raccogliere i modelli dei piccoli cardii degli strati a Congerie convertiti in limonite come alla Farsica; al Casino podere Cubbe, i fossili si trovano col guscio perfettamente conservato e si possono avere facilmente le seguenti specie.

Melanopsis Bonellii, Sism.
Cardium bollense, Mayer.
C. solitarium, Krauss.
C. nova rossicum, Barbot
C. praetenue, Mayer
Cardium Spratti, Fuchs.
C. sp.
Congeria simplex, Barbot
Littorinella sp.

Non mi fermerò a parlare della continuazione degli strati a Congerie sotto Castelnuovo e presso l'Acquabuona, ove si hanno masse gessose di poca importanza, nè starò a ripetere che il principale sviluppo di questa formazione si ha nelle valli della Pescera e del Marmolaio come ho già fatto conoscere da lungo tempo.

Sulla sinistra della Fine, credo si debba riferire agli strati a Congerie la maggior parte delle marne con cristalli di gesso isolati e con fossili marini; in tali circostanze riesce impossibile la delimitazione fra i rappresentanti degli strati a Congerie ed il vero pliocene.

Nella Valle della Sterza spettano indubitatamente a questa formazione i gessi di Monte Auto e le marne che li accompagnano; sulla riva sinistra non vi hanno gessi, però superiormente ai conglomerati e alle marne con *Melanopsis Bartolinii* vi hanno altre marne che contengono fossili molto interessanti e pei quali parmi vieppiù giustificato il riferimento delle ligniti di Strido al piano Sarmatiano o, per bene intenderci, alla base della formazione gessosa.

Queste marne, infatti, si trovano presso il ponte della Petraia a destra del torrente e sulla sinistra della Sterzuola, sembrano inferiori, almeno in parte, ai gessi di Monte Auto e sono caratterizzate da grandi esemplari di una *Melanopsis impressa* eguale a quella del Bacino di Vienna. Unitamente alla *Melanopsis impressa* ho raccolto altri fossili i quali per lo meno accennano ad un piano di transizione dal Sarmatiano agli strati a Congerie; del resto si sa che la *Melanopsis impressa* sebbene appartenga tanto al Sarmatiano quanto agli strati a Congerie, quando si trova in questo secondo orizzonte cronologico è sempre accompagnata dalla *Melanopsis Martiniana* o da altra specie di quel tipo che fra noi potrebbe essere la *Melanopsis Bonellii.* Per conseguenza, se si può già dubitare se non convenga considerare come Sarmatiano le marne a *Melanopsis impressa,* resta poi accertato che a quel piano debbano appartenere le marne piene zeppe di *Melanopsis Bartolinii* e così pure i conglomerati sovraincombenti, analoghi a quelli di Santo al Poggio.

I fossili di acqua salmastra delle marne superiori della Valle della Sterza, sono i seguenti.

Melanopsis impressa, Krauss.
Melania applanata, Fuchs. (sarmatiana).
Neritina micans, Gaud. e Fisch.
Cardium plicatum, Eichw. (framm. sarmatiano).
Cardium obsoletum, Eichw. (framm. sarmatiana).
C. edentulum? framm.
Frutti di Chara.

Con questi fossili vi ha una notevole quantità di frammenti di una conchiglia bivalve, la quale mentre per la cerniera e per altri caratteri bisognerebbe riferirla al genere *Unio,* d'altra parte presenta sette coste che irraggiano dall'apice e svaniscono verso la metà delle valve, le quali hanno margine liscio e sono internamente madreperlacee. Le coste sono acute e squammose come quelle di taluni cardii del Sarmatiano, e degli strati a Congerie, e si potrebbe ritenere che questa conchiglia formi un passaggio dai *cardii* alle *unionidi* come già vi hanno altri tipi intermedî che stanno fra il genere *Unio* conchiglia d'acqua dolce, e alcuni generi di conchiglie marine. Per ora propongo il nome di *Unio cardioides,* riservandomi a confrontare questa conchiglia con l'*Unio Castaliaeformis* Mgh. e decidere poscia se convenga distinguere due specie, ovvero se i gusci da me scoperti nella Valle della Sterza abbiano che fare con le impronte e i modelli raccolti a Monte Bamboli coi quali fu fondata la specie del prof. Meneghini.

Vi ha una *leggera trasgressione* fra gli strati a Congerie dei quali fanno parte i gessi di Monte Auto e le marne marine di Totalla con importanti avanzi di cetacei e filoncini e druse di baritina (¹).

Nella Val d'Era gli strati a Congerie sono bene sviluppati sulla riva sinistra, e ne fanno parte i gessi alabastrini di Tori, dei quali l'avv. Mori possiede cave con talune varietà di *alabastro carnicino* assai pregevole.

Sotto Monte Catini, ma più specialmente sulla riva destra della Cecina, cominciando dalle Saline o Moie di s. Leopoldo, la formazione gessosa ossia gli strati a Congerie si trovano lungo la strada Salaiola che fiancheggia la strada ferrata Cecina-Saline. Ad eccezione delle vicinanze di Ponte Ginori ove appaiono i conglomerati inferiori ai gessi, le marne gessose si continuano fino oltre il ponte di Gello.

Continuando per la Valle di Cecina la formazione gessosa riappare soltanto presso il Terriccio, d'onde a poco a poco si sviluppa verso la Farsica, nelle valli della Pescera e del Marmolaio.

Quasi dovunque, sulle marne gessose riposano marne plioceniche antiche con resti di cetacei e pesci, ma relativamente povere di avanzi di molluschi (²).

Riassumendo ora quanto ho rapidamente accennato intorno ai *terreni miocenici* e *mio-pliocenici* di una parte della provincia di Pisa e dintorni di Livorno, parmi che si possa con tutta sicurezza concludere:

(¹) La baritina da me scoperta nella Valle della Sterza, fu illustrata dal prof. D'Acchiardi. D'Acchiardi, *Minerali Toscani* (*Ematite, Baritina, Farmaco-siderite, Preenite, Epidoto, Sperchise*). Atti della Società toscana di scienze naturali. Vol. III fasc. 1. Pisa, 1877.

(²) Mi interessa di ricordare che nella porzione superiore degli strati a Congerie si trovano presso la Farsica concrezioni silicee che rappresentano le selci molari dello stesso piano in altre regioni.

1.° Nei Monti livornesi, in quelli della Castellina e presso Monte Catini di Val di Cecina esiste la formazione del calcare di Leitha, quindi il secondo piano Mediterraneo dei geologi austriaci (ossia l'Elveziano e Tortoniano di Mayer); questo piano è rappresentato da svariate forme litologiche le quali sono anche caratterizzate per i diversi fossili che contengono a seconda delle condizioni locali, sotto l'influenza delle quali si costituirono. Con accurati confronti è facile di ritrovare nella Valle della Fine e specialmente nei Monti livornesi un compendio di quanto vi ha nel Bacino di Vienna, specialmente per ciò che riguarda il calcare di Leitha ed il Sarmatiano.

2.° Il calcare di Leitha passa al Sarmatiano, e forse a questo secondo orizzonte sarà conveniente di riferire parte delle roccie attribuite prima a quella formazione. Il Sarmatiano tipico è rappresentato dalle *marne a cerizii* di Scaforno, e ritengo che vi appartengano, come rappresentante anche meno salmastro, le marne a *Melanopsis Bartolinii* della Valle della Sterza. Le marne a *Melanopsis impressa* e cardii sarmatiani in frammenti, della stessa valle, forse costituiscono un passaggio del Sarmatiano agli strati a Congerie. Gli schisti a diatomee del Gabbro e di Castelnuovo che già da tempo riteneva come sarmatiani, dopo i nuovi studî di Stöhr sui tripoli di Grotte in Sicilia, e per i resti organici che già vi ho riscontrati, sono confermati come tali; in complesso corrispondono al piano superiore del Messiniano inferiore di Mayer, secondo le più recenti pubblicazioni.

3.° Importante, sovra tutti gli altri gruppi, è la formazione gessosa ossia l'insieme degli strati che pigliano nome da uno dei fossili caratteristici e sono indicati col titolo di *Strati a Congerie*.

Questa formazione, per il suo sviluppo, per i fossili numerosi e spesso ben conservati che racchiude, in nessuna regione, finora a me nota in Italia, può essere meglio studiata che nella provincia di Pisa.

Con le prime scoperte del 1860, presso Castellina marittima, accertai l'esistenza degli strati a Congerie in Italia e ne accennai in seguito i rapporti con la corrispondente formazione nel mezzogiorno della Russia.

Con le più recenti scoperte nei Monti livornesi, specialmente al Casino podere Cubbe, e nella Valle della Morra, si possono chiarire anche le analogie fra queste località e gli strati a Congerie della Grecia e quelli di Bollène nella Valle del Rodano.

4.° I fossili degli strati a Congerie si trovano col guscio ben conservato, ovvero allo stato di modelli convertiti in limonite, od anche silicizzati, secondo l'influenza delle circostanze locali.

5.° Alla Morra ho potuto risolvere i dubbî intorno ai rapporti delle masse gessose con le marne a Congerie e piccoli cardii; infatti ivi i fossili si trovano indistintamente sopra e sotto i *gessi superiori* ed anche nelle marne in essi intercalate; si può quindi riconoscere che, mentre i gessi della Morra si depositavano in acqua salmastra, quelli della Castellina si costituivano in bacino lacustre.

Non vorrei troppo azzardare, ma ho motivo di credere che i gessi della Puzzolente presso Livorno si siano depositati, almeno in gran parte, in acqua più decisamente salata, mentre la loro porzione superiore contiene fossili salmastri.

Nel lavoro che sto preparando, oltre un completo cenno su tutti i fossili incontrati nelle diverse località e nei differenti piani, renderò conto delle accidentalità

stratigrafiche, accompagnando il mio scritto con opportune sezioni grafiche e con figure dei fossili vegetali e animali più caratteristici ed interessanti.

NOTA

Mi riservo a dimostrare come le diverse maniere di presentarsi del calcare di Leitha nel Bacino di Vienna, che il dott. T. Fuchs nel recente lavoro sopra ricordato ha controsegnate con diverse lettere dal *b* all'*f* (ossia, la formazione littorale del secondo piano Mediterraneo dei geologi austriaci) trova esatto riscontro in ciò che ho accennato pei Monti livornesi.

Se per l'acquedotto livornese si facesse una illustrazione geologica analoga a quella stupenda fatta dal Karrer per l'acquedotto di Vienna, sarebbero sorprendenti i rapporti che si noterebbero fra la geologia dell'acquedotto di Vienna e quella dell'acquedotto di Livorno, e azzarderò di dire che questa sembrerebbe quasi un compendio di quella.

Sopra alcuni notevoli geminati polisintetici di spinello orientale.

Memoria del Socio corrispondente GIOVANNI STRUEVER

letta nella seduta del 3 marzo 1878.

Nella collezione Spada che costituisce la parte più importante del Museo mineralogico della R. Università di Roma, trovai, qualche anno fa, un gruppo polisintetico di spinello, il quale, a motivo della sua strana simmetria, attirò la mia attenzione. Passando poi in rassegna tutti i cristalli di spinello della nostra raccolta, i quali sommano a più migliaia, rinvenni un numero relativamente cospicuo di geminati polisintetici, diversissimi per la disposizione dei singoli individui regolarmente fra di loro riuniti. È notissima la legge secondo la quale sono raggruppati in gemelli i cristalli di spinello, ed è nota altresì l'esistenza nel nostro minerale, di geminati polisintetici, ma non mi consta che altri abbia fatto uno studio particolareggiato di tali singolari aggruppamenti. Pure essi meritano l'attenzione del cristallografo, il quale vi scuopre non solamente casi di geminazione analoghi a quelli che si riscontrano in altri minerali monometrici, ma ancora parecchi gruppi affatto nuovi, sconosciuti cioè nelle altre sostanze del primo sistema, che hanno una decisa tendenza a formare geminati polisintetici. Troppo lunga sarebbe la enumerazione di tutti quanti i gruppi regolari di spinello esistenti nel nostro Museo, onde mi limito, nelle seguenti pagine, a descriverne alcuni pochi che mi sembrano più meritevoli di essere menzionati. Ma non è questo il solo scopo del mio lavoro. Volli ancora istituire delle misure esatte nell'intento di vedere entro quali limiti gli angoli diedri dei cristalli semplici e geminati di spinello vanno di accordo coi valori richiesti dalla teoria. In questi tempi in cui fanno di nuovo capolino gli attacchi contro le meravigliose leggi la cui scoperta sarà imperituro monumento dell'ingegno di Hauy, tali ricerche non mi sembrano interamente inutili, benchè le numerose osservazioni analoghe, pubblicate dal Kokscharow, dal Dauber e da tanti altri, avrebbero ormai dovuto bastare a convincere anche i più increduli che se le leggi cristallografiche sono approssimative come tutte, si può dire, le nostre leggi fisiche e chimiche, non la cedono però, per grado di approssimazione, a nessuna di quelle che possono essere paragonate ad esse. Ed in questo avviso spero di avere compagni almeno tutti i cristallografi che hanno una lunga pratica.

Si sa che essendo asse di geminazione [111] ovvero qualunque altra delle linee di simmetria trigonale dell'ottaedro, i simboli delle faccie del secondo individuo ottaedrico, riferiti agli assi del primo, diventano quelli dell'icositetraedro (511), ad eccezione delle due faccie normali all'asse di geminazione che rimangono ottaedriche; ed analogamente, le faccie rombododecaedriche del secondo individuo, riferite agli assi del primo, divengono faccie dell'icositetraedro (411), salvo quelle parallele all'asse di geminazione, le quali rimangono rombododecaedriche. Talchè, supponendo che ad un primo individuo si uniscano contemporaneamente quattro altri identici, coi loro assi di geminazione paralleli alle quattro linee di simmetria trigonale, si avrebbe un complesso di faccie che, sotto l'aspetto geometrico, corrisponderebbe alle combinazioni (111) (511), ovvero (110) (411), ovvero (111) (110) (411) (511), secondochè ciascun individuo svela le sole faccie di (111) ovvero di (110) ovvero la combinazione (111) (110). Ci limitiamo a queste due forme semplici poichè i gemelli studiati non ne presentano altre (¹).

Fra i cristalli semplici di spinello che erano a mia disposizione, scelsi uno in cui non si osservano traccie di subìto rotolamento; tutte le faccie riflettevano nettamente una sola immagine dei fili del cannocchiale, ad eccezione di una la quale dava due immagini, una assai più distinta dell'altra. Per questa faccia furono indicate le sole osservazioni che si riferiscono all'immagine più distinta; scegliendo l'altra immagine che dista dalla prima di due minuti primi, si avrebbe un cambiamento di soli 10″ nelle medie qui sotto riferite. Tutti i valori indicati dei 24 angoli diedri misurati sono medie di 9 ripetizioni.

(¹) Ricordiamo che essendo, nel sistema monometrico, $[m\,n\,p]$ il simbolo dell'asse di geminazione, $h\,k\,l$ il simbolo di una faccia del secondo individuo in posizione parallela al primo, si ottiene il simbolo $h'\,k'\,l'$ di questa medesima faccia, riferito agli assi del primo individuo, dopo aver fatto girare il secondo per 180° attorno ad $[m\,n\,p]$, mediante la formula

$$h' : k' : l' :: 2m\,(mh+nk+pl)-h\,(m^2+n^2+p^2) : 2n\,(mh+nk+pl)-k\,(m^2+n^2+p^2) : 2p\,(mh+nk+pl)-l\,(m^2+n^2+p^2).$$

(Vedi per es. Q. Sella, *Boro adamantino*).

Egli è, del resto, evidente che essendo asse di geminazione [111] si può, per riferire una faccia del secondo individuo agli assi del primo, adoperare direttamente la formula che, nel sistema romboedrico, serve a determinare il simbolo di una forma inversa dal simbolo della sua diretta, ossia la formula $h' : k' : l' :: 2\,(h+k+l)-3h : 2\,(h+k+l)-3k : 2\,(h+k+l)-3l$ ove h, k, l, h', k', l' hanno lo stesso significato di prima.

Dalla medesima formula (o dalla analogia dei due sistemi monometrico e romboedrico in generale) segue ancora che: 1° per ogni icositetraedro $(h\,l\,l)$ si ha un triacisottaedro $(2h+l,\ 2h+l,\ 4l-h)$ in cui gli angoli diedri, concorrenti nelle estremità degli assi di simmetria trigonale, sono identici a quelli corrispondenti del suo icositetraedro, e *viceversa*; 2° che ogni due esacisottaedri $(h\,k\,l)$ e $\{2\,(h+k+l)-3h,\ 2\,(h+k+l)-3k,\ 2\,(h+k+l)-3l\}$ hanno i loro angoli diedri, concorrenti nelle estremità degli assi di simmetria trigonale, identici benchè diversamente orientati. Nella prima legge entrano il cubo, l'ottaedro e il rombododecaedro, considerandoli, il cubo come forma limite degli icositetraedri, gli altri due come forme limiti dei triacisottaedri, nella seconda legge entrano i tetracisesaedri. Ove sia $h+k+l=3k$, le due forme coincidono.

$111:1\bar{1}1$	$= 70°$	$31'$	$15''$	$1\bar{1}1:\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	$= 109°$	$28'$	$5''$
$\bar{1}\bar{1}1:\bar{1}1\bar{1}$	$= 70°$	$32'$	$35''$	$\bar{1}1\bar{1}:111$	$= 109°$	$28'$	$15''$
$1\bar{1}\bar{1}:\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	$= 70°$	$31'$	$20''$	$\bar{1}\bar{1}\bar{1}:\bar{1}11$	$= 109°$	$26'$	$55''$
$\bar{1}11:111$	$= 70°$	$31'$	$25''$	$111:1\bar{1}\bar{1}$	$= 109°$	$29'$	$45''$
$111:11\bar{1}$	$= 70°$	$30'$	$30''$	$11\bar{1}:\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	$= 109°$	$30'$	$45''$
$\bar{1}\bar{1}\bar{1}:\bar{1}\bar{1}1$	$= 70°$	$32'$	$0''$	$\bar{1}\bar{1}1:111$	$= 109°$	$26'$	$10''$
$1\bar{1}1:1\bar{1}\bar{1}$	$= 70°$	$32'$	$50''$	$1\bar{1}\bar{1}:\bar{1}1\bar{1}$	$= 109°$	$27'$	$30''$
$11\bar{1}:\bar{1}11$	$= 70°$	$32'$	$0''$	$\bar{1}11:1\bar{1}1$	$= 109°$	$27'$	$45''$
$11\bar{1}:\bar{1}1\bar{1}$	$= 70°$	$29'$	$5''$	$\bar{1}1\bar{1}:\bar{1}\bar{1}1$	$= 109°$	$24'$	$15''$
$\bar{1}\bar{1}1:1\bar{1}1$	$= 70°$	$33'$	$40''$	$1\bar{1}1:11\bar{1}$	$= 109°$	$32'$	$50''$
$1\bar{1}\bar{1}:11\bar{1}$	$= 70°$	$30'$	$45''$	$11\bar{1}:\bar{1}11$	$= 109°$	$28'$	$55''$
$\bar{1}11:\bar{1}\bar{1}1$	$= 70°$	$31'$	$50''$	$\bar{1}\bar{1}1:1\bar{1}\bar{1}$	$= 109°$	$28'$	$5''$
media	$= 70°$	$31'$	$36''$	media	$= 109°$	$28'$	$16''$
calc.	$= 70°$	$31'$	$44''$	calc.	$= 109°$	$28'$	$16''$

Le somme degli angoli delle sei zone sono rispettivamente:

$[10\bar{1}] = 360°\ 0'\ 10''$ $[01\bar{1}] = 359°\ 59'\ 25''$ $[\bar{1}10] = 359°\ 59'\ 25''$

$[110] = 360°\ 0'\ 5''$ $[011] = 359°\ 59'\ 50''$ $[101] = 359°\ 59'\ 35''$.

Nessuna delle sei zone è assolutamente perfetta, come si verifica al goniometro e come lo dimostrano i valori ottenuti per i singoli angoli, ma le deviazioni degli angoli che ne derivano, si compensano quasi interamente per ciascuna zona. Non insisto certamente sulle ultime cifre dei secondi, ma le medie suindicate dimostrano ad evidenza che, entro i limiti della osservazione, il cristallo in discorso è in pieno accordo colla teoria del sistema monometrico.

Qualunque anomalia ottica od altra si venga a scuoprire nello spinello, avremo sempre, geometricamente parlando, da considerarlo come monometrico.

Dopo i risultati ottenuti sul primo cristallo semplice misurato, mi parve inutile di continuare siffatte osservazioni.

Passando ora ai geminati dovrei incominciare da quelli composti di due soli individui, ma essendo tali gruppi notissimi, mi limito a dire che essi sono perfettamente identici a quelli che si conoscono nella magnetite ecc., e ne presentano tutte le varietà, non esclusi i casi in cui il geminato rassomiglia alla combinazione di una piramide trigonale colla base del sistema romboedrico. Al n. 10 della tavola fu raffigurato un geminato di questa serie che merita forse qualche attenzione per il disuguale sviluppo delle faccie di (111) e (110) di cui presenta la combinazione. Il gruppo è analogo a quello segnalato dal Hessenberg nella hauynite, e non richiede ulteriore spiegazione.

I geminati polisintetici la cui descrizione è scopo principale di questo lavoro, possono dividersi in tre gruppi, secondochè: 1° hanno l' asse di geminazione comune, ovvero, 2° presentano assi di geminazione non paralleli fra di loro ma paralleli ad un medesimo piano, ovvero, 3° hanno gli assi di geminazione nè tutti paralleli fra di loro nè tutti paralleli ad un medesimo piano.

1. I gemelli spettanti al primo gruppo, essendo di già stati indicati da altri, non richiedono di essere maggiormente illustrati. Noto soltanto che molti cristalli

apparentemente semplici e molti degli individui che fanno parte di gruppi più complicati contengono incluse sottili lamelle in posizione di geminati secondo la legge accennata. In alcuni dei disegni che accompagnano questo scritto, tale fenomeno è indicato con linee punto-tratteggiate, come ai n. 6 e 9; nelle figure 3 e 7 (a sinistra) vedonsi gruppi di tre individui uniti nel modo esposto, nella fig. 8, a sinistra e superiormente, un gruppo di quattro individui ad asse di geminazione comune.

2. Assai maggiore interesse presentano i geminati polisintetici della seconda serie, composti di individui, i quali hanno gli assi di geminazione compresi in un medesimo piano. Taluni di questi aggruppamenti furono raffigurati ai n. 1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 12, 16.

Il caso più semplice, e già noto nello spinello, è dato dalla riunione di tre soli individui che hanno un piano rombododecaedrico comune e i loro assi di geminazione paralleli a questo. Ma basta gettare uno sguardo sulle figure 1, 11, 12, 16 e 6 (astrazione fatta dalle sottili lamelle interposte) per farsi un'idea della grande variabilità di aspetto che questi gruppi, essenzialmente identici, presentano all'osservatore. Nella maggior parte dei casi che ho potuto studiare, i tre individui sono riuniti come fu disegnato ai n. 1 e 6 (sempre astrazione fatta dalla interposizione di sottili lamelle). Il gruppo della fig. 1 rappresenta un primo individuo (I), disegnato nella posizione che abitualmente si dà all'ottaedro semplice, cui va unito un secondo (II) con asse $[1\bar{1}\bar{1}]$, ed a questo se ne aggiunge un terzo (III) con asse di geminazione normale ad $1\bar{1}5$, riferito al primo individuo. Tutti e tre sono alquanto irregolarmente sviluppati e hanno comuni le faccie 110 e $\bar{1}\bar{1}0$ del rombododecaedro, alle quali sono paralleli i due assi di geminazione. Il terzo individuo è schiacciato nel senso $[1\bar{1}5]$, ma allargato a destra in modo che le sue tre faccie, le quali, riferite agli assi del primo individuo, avrebbero per simboli $\overline{11}.11.\bar{1}$, $5.13.7$ e $\overline{13}.\bar{5}.7$, incontrano la faccia $\bar{1}1\bar{1}$ del primo individuo in spigoli rientranti indicati da linee tratteggiate. Tutto il complesso, quale fu disegnato, presenta, rispetto agli assi del primo individuo, le faccie dell'ottaedro (salvo $11\bar{1}$ e $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ che nel disegno non compaiono), le faccie 511, $1\bar{1}5$, $\bar{1}51$ e $\bar{1}1\bar{5}$ dell'icositetraedro (511), due faccie, $11.\overline{11}.1$ e la sua parallela, del triacisottaedro (11.11.1), e quattro faccie, $13.5.\bar{7}$, $5.13.7$ e le loro parallele, dell'esacisottaedro (13. 7. 5). L'angolo $\bar{1}11:\overline{11}.11.\bar{1}$ fu trovato di 38° 52′, mentre il calcolo dà per esso 38° 56′ 33″ (1).

Forse più frequentemente ancora dei gruppi di cui raffigurai uno al n. 1, s'incontrano quelli in cui i tre individui sono disposti come fu disegnato al n. 6 (astrazione fatta dalle sottili lamelle). Al primo individuo maggiormente sviluppato va unito un secondo più piccolo con asse $[\bar{1}\bar{1}1]$ ed a questo un terzo con asse $[1\bar{5}\bar{1}]$. I tre individui hanno comuni le faccie 101 e $\bar{1}0\bar{1}$ del rombododecaedro. Le faccie b_1 e (b_1) (2)

(1) I geminati del sistema monometrico dimostrano, nel modo forse più semplice e più rappresentativo, il fatto che, immaginato tutto il complesso del numero infinitamente grande di faccie possibili nel 1° sistema, si può trovare un numero illimitato di volte un complesso di 6, 8, 12, 24, o 48 faccie, le quali formano fra di loro gli angoli del cubo, dell'ottaedro, del rombododecaedro, e di qualsiasi icositetraedro, triacisottaedro, tetracisesaedro o esacisottaedro.

(2) Le lettere racchiuse in parentesi indicano le faccie simmetriche, rispetto al piano rombododecaedrico comune, a quelle distinte colle stesse lettere non racchiuse in parentesi.

dell'individuo III incontrano le faccie 111 risp[te] $\bar{1}11$ di I sotto angoli di 22°11′30″, l'angolo b_2 ($1\bar{5}\bar{1}$): $11\bar{1}$ è di 70°31′44″, mentre gli altri due angoli rientranti delle faccie comprese nella zona [101] sono di 38°56′33″, come anche gli angoli $1\bar{1}1:a_1$, $a_1:b_1$, $(a_1):(b_1)$ e $(a_1):\bar{1}\bar{1}\bar{1}$.

Una disposizione dei tre individui, che a prima vista sembra identica alla precedente, ma pure ne è diversa, è raffigurata al n. 16. Col primo individuo maggiormente sviluppato (I) sono uniti due altri più piccoli, uno (II) con asse [$\bar{1}\bar{1}1$], l'altro (III) con asse [$\bar{1}11$]. Le faccie rombododecaedriche comuni sono ancora 101 e $\bar{1}0\bar{1}$, ma gli angoli diedri sono diversamente disposti. Di fatti, abbiamo, per gli angoli rientranti, $11\bar{1}:\underline{\underline{\bar{1}\bar{1}1}}$ e $1\bar{1}\bar{1}:\underline{\bar{1}11} = 38°56'33''$, $\underline{1\bar{1}\bar{1}}:\underline{\underline{1\bar{1}\bar{1}}} = 70°31'44''$, per gli angoli sporgenti, $1\bar{1}1:\underline{\bar{1}1\bar{1}}$, $111:\underline{\underline{\bar{1}\bar{1}\bar{1}}}$ e i due corrispondenti nella parte posteriore $= 38°56'33''$, $\underline{\bar{1}1\bar{1}}:\underline{\underline{\bar{1}\bar{1}\bar{1}}}$ e l'angolo simmetrico rispetto a 101 $= 22°11'30''$.

Di aspetto tutto affatto diverso è il gruppo disegnato al n. 11. Anche qui i due assi di geminazione [$1\bar{1}1$] e [$11\bar{1}$] sono paralleli al medesimo piano rombododecaedrico 011, ma il complesso presenta la forma generale di un tetraedro a spigoli in parte rientranti, per essere l'individuo principale sviluppato tetraedricamente $\varkappa(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ (111) e gli altri due fortemente raccorciati nel senso del rispettivo asse di geminazione.

Il gruppo più singolare, fra quelli composti di soli tre individui, si vede raffigurato al n. 12. L'individuo I, maggiormente sviluppato, presenta nella sua parte superiore forma tetraedrica, nella parte inferiore è molto schiacciato nel senso normale alla faccia più estesa $1\bar{1}\bar{1}$. Nell'angolo rientrante tra la faccia $\bar{1}1\bar{1}$ della sua parte superiore e la faccia $\bar{1}11$ della sua parte inferiore, sono collocati due individui a sviluppo tetraedrico di cui uno (II) con asse di geminazione normale a $\bar{1}1\bar{1}$, l'altro (III) con asse [$\bar{1}11$]. Il gruppo è simmetrico rispetto ad un piano parallelo a 110 (o $\bar{1}\bar{1}0$) comune ai tre individui. I valori degli angoli che seguono, dimostrano chiaramente questa singolare disposizione. Fu trovato (¹)

$111:\bar{1}\bar{1}1$	$= 109°20'25''$	calc. 109°28′16″,	$111:(o_3)$	$= 141°\ 5'$	calc. 141° 3′27″
$o_2:(o_2)$	$= 109°20'40''$		$111:o_2$	$= 38°54'25''$	calc. 38°56′33″
$o_3:(o_3)$	$= 109°19'25''$		$11\bar{1}:o_3$	$= 38°48'55''$	
$11\bar{1}:\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	$= 109°35'30''$		$\bar{1}\bar{1}1:(o_2)$	$= 39°\ 2'45''$	
$111:1\bar{1}\bar{1}$	$= 109°30'$		$\bar{1}1\bar{1}:(o_3)$	$= 38°58'20''$	
$11\bar{1}:1\bar{1}\bar{1}$	$= 70°49'50''$ (ap.)	calc. 70°31′44″	$o_2:o_3$	$= 22°12'\ 5''$	calc. 22°11′30″
$111:11\bar{1}$	$= 70°31'10''$		$(o_2):(o_3)$	$= 22°13'35''$	
$\bar{1}\bar{1}1:\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	$= 70°32'15''$				

Piuttosto frequenti sono ancora i gruppi composti di quattro individui ad assi di geminazione tutti paralleli ad un medesimo piano rombododecaedrico. La disposizione più regolare di tali gemelli polisintetici è rappresentata dalla figura 5, la quale ricorda un gemello analogo descritto dal Sella nel *Boro adamantino.*

Il gruppo in discorso consta di quattro individui ottaedrici, al primo (I) dei quali sono uniti due altri (II e IV) con asse normale ad $1\bar{1}\bar{1}$ risp[te] $\bar{1}1\bar{1}$; a II se ne aggiunge un ultimo (III) con asse [$\bar{1}1\bar{5}$] riferito ad I. I due individui estremi sono assai raccorciati nel senso del loro rispettivo asse di geminazione. Tutti e quattro

(¹) I valori degli angoli trovati sui gemelli sono sempre le medie di tre ripetizioni ben concordanti.

hanno comuni le faccie 110 e $\bar{1}10$ del rombododecaedro alle quali sono paralleli i tre assi di geminazione. Furono misurati i seguenti angoli:

$d_3(\bar{1}1\bar{1})$:	$d_2(\bar{1}15)$	$=109°24'55''$	$d_2(\bar{1}15)$:	$a_3(\bar{1}11)$	$=38°52'35''$
$a_3(\bar{1}11)$:	$a_2(1\bar{1}1)$	$=109°33'\ 5''$	$a_2(1\bar{1}1)$:	$b_3(1\bar{1}5)$	$=38°49'45''$
$b_3(1\bar{1}5)$:	$b_2(1\bar{1}\bar{1})$	$=109°22'50''$	$b_2(1\bar{1}\bar{1})$:	$c_3(11.\bar{1}\bar{1}.1)$	$=38°57'20''$
$c_3(11.\bar{1}\bar{1}.1)$:	$c_2(\bar{1}1\bar{5})$	$=109°25'40''$	$b_1(511)$:	$c_1(13.5.\bar{7})$	$=38°56'55''$
$c_2(\bar{1}1\bar{5})$:	$(c_4)(\bar{1}\bar{3}.\bar{5}.7)$	$=109°23'$	$(c_1)(\bar{5}.\bar{1}\bar{3}.\bar{7})$:	$(b_1)(\bar{1}\bar{5}1)$	$=38°54'20''$
$b_3(1\bar{1}5)$:	$b_4(15\bar{1})$	$=109°32'40''$	$a_1(111)$:	$b_1(511)$	$=38°57'15''$
$a_3(\bar{1}11)$:	$a_4(11\bar{1})$	$=109°29'40''$	$(b_1)(\bar{1}\bar{5}1)$:	$(a_1)(\bar{1}\bar{1}1)$	$=38°51'55''$
$b_4(15\bar{1})$:	$b_2(1\bar{1}\bar{1})$	$=109°28'15''$	$a_4(11\bar{1})$:	$b_4(15\bar{1})$	$=38°58'\ 5''$
$c_5(\bar{1}\bar{1}.11.\bar{1})$:	$d_3(\bar{1}1\bar{1})$	$=31°34'40''$	$(b_1)(\bar{1}\bar{5}1)$:	$b_3(1\bar{1}5)$	$=70°22'55''$
$c_2(\bar{1}1\bar{5})$:	$c_5(\bar{1}\bar{1}.11.\bar{1})$	$=70°29'10''$	$b_4(15\bar{1})$:	$c_2(\bar{1}1\bar{5})$	$=70°35'20''$
$c_1(13.5.\bar{7})$:	$c_2(\bar{1}1\bar{5})$	$=70°26'30''$	$a_3(\bar{1}11)$:	$a_1(111)$	$=70°33'35''$
$(c_4)(\bar{1}\bar{3}.\bar{5}.7)$:	$b_3(1\bar{1}5)$	$=70°40'\ 5''$	$b_1(511)$:	$b_2(1\bar{1}\bar{1})$	$=70°28'25''$
$b_3(1\bar{1}5)$:	$b_1(511)$	$=70°34'40''$	$b_2(1\bar{1}\bar{1})$:	$(b_1)(\bar{1}\bar{5}1)$	$=70°34'45''$
$c_2(\bar{1}1\bar{5})$:	$(c_1)(\bar{5}.\bar{1}\bar{3}.\bar{7})$	$=70°34'50''$	$(a_1)(\bar{1}\bar{1}1)$:	$a_3(\bar{1}11)$	$=70°33'50''$

Le medie degli angoli omologhi sono

	109°27′31″ (8)	38°54′46″ (8)	70°32′11″ (11)	31°34′40″ (1)
calc.	109°28′16″	38°56′33″	70°31′44″	31°35′11″
diff.	—45″	—1′47″	+27″	—31″

Ai numeri 3 e 7 della tavola furono disegnati due gruppi che si compongono di quattro individui, di cui tre ad asse di geminazione comune. Nel geminato polisintetico della fig. 7 i tre primi individui (I, II, III) hanno l'asse di geminazione comune $[\bar{1}\bar{1}1]$, talchè III e I sono in posizione parallela, mentre IV è unito ad I e III con asse normale ad $1\bar{1}1$. Tutti gli assi sono paralleli ai piani rombododecaedrici 011 e $0\bar{1}\bar{1}$, comuni ai quattro individui.

Essenzialmente identico col gruppo precedente, ma diverso per sviluppo, è il gemello polisintetico raffigurato al n. 3. Dei quattro individui che lo compongono, tre (I, II, III) sono ad asse di geminazione comune $[1\bar{1}5]$, talchè I e III sono in posizione parallela, il quarto individuo (IV) disegnato nella posizione normale dell'ottaedro, è unito a III e ad I con asse $[1\bar{1}\bar{1}]$. Tutti gli assi di geminazione sono paralleli ai piani 110 e $\bar{1}10$ comuni ai quattro individui. I e II sono di sviluppo ottaedrico piuttosto regolare, con qualche faccia di rombododecaedro, II, a sinistra, raccorciato nel senso dell'asse di geminazione $[1\bar{1}5]$, III è tetraedricamente sviluppato, e IV ottaedrico nella parte superiore, tetraedrico nella parte inferiore. L'individuo II incontra la faccia $\bar{1}1\bar{1}$ di IV in spigoli rientranti indicati da linee tratteggiate. È evidente che il gruppo fig. 3 può considerarsi anche come un gruppo fig. 1, cui sia aggiunto un individuo semplice con asse $[\bar{1}1\bar{5}]$. Seguono gli angoli misurati sovra l'aggruppamento.

$1\bar{1}1 : 1\bar{1}5 =$	38°53′25″	calc. 38°56′33″	$111 : 5.13.7 =$	22 10′ 5″	calc. 22°11′30″
$5.13.7 : 15\bar{1} =$	38°51′ 5″		$\bar{1}\bar{1}1 : \bar{1}\bar{3}.\bar{5}.7 =$	22°12′45″	
$1\bar{1}\bar{1} : \bar{1}1\bar{5} =$	70°23′50″	calc. 70°31′44″	$\bar{1}1\bar{5} : \bar{1}11 =$	109°29′55″	calc. 109°28′16″
$15\bar{1} : \bar{1}1\bar{5} =$	70°27′45″		$511 : \bar{1}\bar{5}1 =$	109,31′20″	
$\bar{1}11 : 1\bar{1}1 =$	109°29′25″		$111 : \bar{1}\bar{1}1 =$	109°36′	
$1\bar{1}5 : 1\bar{1}\bar{1} =$	109°32′ 5″		$\bar{1}1\bar{5} : \bar{1}\bar{5}1 =$	109°27′50″.	

Ai due gruppi or ora descritti fa seguito quello disegnato al n. 8. Esso è formato da quattro individui ad asse di geminazione comune [$11\bar{1}$], talchè I e III rispte II e IV si trovano in posizione parallela, e da un quinto individuo, il quale si unisce con asse [111] al primo e terzo. Il geminato semplice, costituito da I e V, è assai più sviluppato degli altri individui, i quali sono da esso parzialmente avviluppati. Vi si osserva qualche faccia rombododecaedrica, fra le altre $1\bar{1}0$, alla quale sono paralleli gli assi di geminazione del gruppo.

L'aggruppamento raffigurato al n. 2 della tavola si compone di sei individui a sviluppo tetraedrico i cui assi di geminazione sono compresi nel piano 110 comune a tutti gli individui. Rispetto a questo medesimo piano vi ha simmetria laterale perfetta. I quattro individui I, II, III, IV sono uniti l'uno all'altro come i quattro individui del gruppo fig. 5, V e VI sono in posizione parallela a II rispte III. Da ciò segue che nonostante l'analogia che l'aggruppamento presenta con quelli di diamante e di oro nativo, descritti dal Waltershausen e dal Rose, ne differisce essenzialmente. Gli angoli o_1o_2, o_2o_3, o_3o_4, o_5o_6, e quelli simmetricamente posti dalla parte posteriore, sono uguali al doppio angolo del tetraedro, mentre gli angoli o_1o_6, o_4o_5 e quelli analogamente posti al di là del piano di simmetria 110, corrispondono all'angolo o_2o_3 del gruppo rappresentato al n. 12. Alle estremità dello spigolo [110] comune a tutti gli individui si formano così due piramidi rientranti a sei lati rispettivamente paralleli alle faccie maggiormente estese della parte opposta del gruppo, il quale si può considerare anche come la riunione di due gruppi fig. 12 (II, I, VI) e (III, IV, V) collocati l'uno sovra l'altro colla faccia $1\bar{1}\bar{1}$. Questa disposizione risulta evidente dalle misure che seguono qui sotto.

$o_1 o_2$	= 38°57′50″	$o_1 (o_1)$	= 109°22′50″
$o_2 o_3$	= 38°57′15″	$o_2 (o_2)$	= 109°28′15″
$o_3 o_4$	= 38°59′55″	$o_3 (o_3)$	= 109°22′40″
$o_5 o_6$	= 38°51′30″	$o_4 (o_4)$	= 109°21′45″
$(o_1)(o_2)$	= 38°54′55″	$o_5 (o_5)$	= 109°26′40″
$(o_2)(o_3)$	= 38°47′45″	$o_6 (o_6)$	= 109°19′15″
$(o_3)(o_4)$	= 38°49′45″	$o_1 o'_1$	= 70°37′30″
$(o_5)(o_6)$	= 39° 9′45″	$o_3 o_6$	= 70°35′30″
$o_4 o_5$	= 22°12′55″	$(o_3)(o_6)$	= 70°42′35″
$o_6 o_1$	= 22°14′20″	$o_2 o_5$	= 70°39′25″
$(o_4)(o_5)$	= 22°11′45″	$(o_2)(o_5)$	= 70°24′55″
$(o_6)(o_1)$	= 22°11′15″		

Le medie dei quattro angoli diversi sono

	38°56′ 5″ (8)	22°12′34″ (4)	109°23′34″ (6)	70°35′59″ (5)
calc.	38°56′33″	22°11′30″	109°28′16″	70°31′44″
diff.	— 28″	+ 1′ 4″	— 4′42″	+ 4′15″.

3. Passiamo ora ai gemelli polisintetici in cui gli assi di geminazione non sono più compresi in un medesimo piano.

Meritano anzitutto menzione i gruppi che a prima vista sembrano identici a quelli sopradescritti, composti di tre soli individui, ma ne differiscono per l'accennata interposizione di sottili lamelle. Al n. 6 fu raffigurato uno di questi gruppi già

incidentalmente menzionato. Nell' individuo I, col quale vanno uniti due altri (II e III) nel modo sopra esposto, sono intercalate due lamelle sottili; l'una si osserva sulle faccie $1\bar{1}1$, $\bar{1}\bar{1}1$, $\bar{1}11$ e ha per asse di geminazione lo spigolo [111], l'altra si scorge sulle faccie 111 e $\bar{1}11$, e ha per asse di geminazione la normale a $\bar{1}\bar{1}1$ talchè si può considerare come la continuazione dell' individuo II. Il quadro che segue, riassume le osservazioni goniometriche istituite su questo gruppo.

$1\bar{1}\bar{1}$: $\bar{1}\bar{1}1$	=	109°24′30″	$\bar{1}\bar{1}1$: $\bar{1}11$	=	70°40′30″
111 : $\bar{1}\bar{1}1$	=	109°29′15″	$\bar{1}11$: $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	=	70°31′10″
$1\bar{1}\bar{1}$: $\bar{1}1\bar{1}$	=	109°35′25″	$\bar{1}1\bar{1}$: $\bar{1}11$	=	70°30′50″
$\bar{1}11$: $1\bar{1}1$	=	109°24′20″	$1\bar{1}1$: $1\bar{1}\bar{1}$	=	70°30′25″
$\bar{1}1\bar{1}$: 111	=	109°31′45″	$\bar{1}\bar{1}\bar{1}$: $\bar{1}1\bar{1}$	=	70°29′15″
$1\bar{1}1$: $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	=	109°27′30″	111 : $1\bar{1}1$	=	70°31′25″
111 : $1\bar{1}\bar{1}$	=	109°20′55″	$1\bar{1}\bar{1}$: $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	=	70°32′30″
$\bar{1}\bar{1}\bar{1}$: $\bar{1}11$	=	109°32′45″	$\bar{1}11$: 111	=	70°35′40″
$\bar{1}1\bar{1}$: $\bar{1}\bar{1}1$	=	109°29′25″	$\bar{1}\bar{1}1$: $1\bar{1}1$	=	70°32′
a_1 : (a_1)	=	109°34′30″	a_1 : a_2	=	70°33′20″
b_1 : (b_1)	=	109°25′40″	(a_1) : a_2	=	70°34′35″
a_1 . b_2	=	109°30′45″	a_2 : $1\bar{1}\bar{1}$	=	38°44′50″
(a_1) : 111	=	141° 2′15″	a_1 : b_1	=	38°57′15″
a_1 : $\bar{1}1\bar{1}$	=	141° 4′10″	(a_1) : $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	=	38°59′
b_1 : 111	=	22°10′15″	(a_1) : (b_1)	=	38°59′35″
(b_1) : $\bar{1}1\bar{1}$	=	22° 5′20″	a_1 : $1\bar{1}1$	=	38°55′20″

Le medie degli angoli sono:

	109°28′54″ (12)	141°3′12″ (2)	22° 7′48″ (2)	70°32′53″ (11)	38°55′12″ (5)
calc.	109°28′16″	141°3′27″	22°11′30″	70°31′44″	38°56′33″
diff.	+ 38″	— 15″	— 3′42″	+ 1′ 9″	— 1′21″

Uno dei gruppi polisintetici più singolari che io abbia incontrato nello spinello, è raffigurato al n. 4 della tavola. Lo si potrebbe considerare come un ottaedro (II) che portasse su tre faccie non parallele fra di loro degli individui uniti ad esso con assi di geminazione normali alle stesse tre faccie, ma la disposizione reale dei quattro individui è assai diversa da quella semplicissima che in tal guisa risulterebbe. Il gruppo quale si presenta in natura e quale fu disegnato, consta di un ottaedro (I) alquanto irregolarmente sviluppato per la grande estensione che assume una delle sue faccie ($\bar{1}1\bar{1}$), e di tre individui a sviluppo tetraedrico, i quali sono, per così dire, incastrati nel primo in modo che uno di essi, quello di posizione intermedia (II), è unito ad I con asse [$\bar{1}\bar{1}1$], e gli altri due (III e IV) si collocano sovra le due faccie $\underline{1\bar{1}\bar{1}}$ e $\underline{111}$ dell' individuo II. Le faccie (III) e (IV) s' incontrano in spigolo rientrante (tratteggiato) nella parte posteriore del gruppo, e formano angoli sporgenti colla faccia $\bar{1}1\bar{1}$ del primo individuo.

Questa disposizione è dimostrata dagli angoli che seguono:

(III) : (IV)	=	31°31′10″	calc. 31°35′11″	II : IV	=	38°52′10″	calc. 38°56′33″
(III) : $\bar{1}1\bar{1}$	=	22° 7′10″	calc. 22°11′30″	II : III	=	38°56′35″	
(IV) : $\bar{1}1\bar{1}$	=	22°11′25″		III : (III)	=	109°29′15″	calc. 109°28′16″
III : 111	=	22°16′50″		IV : (IV)	=	109°22′35″	
IV : $1\bar{1}\bar{1}$	=	22°17′35″					

La fig. 14 rappresenta un altro gruppo costituito dalla riunione di quattro individui; I, III e IV sono nella medesima posizione di I, II e III della fig. 6, II è unito ad I con asse $[1\bar{1}1]$, talchè I, III e IV hanno i loro assi di geminazione paralleli ad 101, faccia rombododecaedrica comune ad essi, e II, I, III paralleli a 011, faccia comune ad essi.

Più complicato ancora è l'aggruppamento raffigurato al n. 17 della tavola. Ad un gruppo I, II, III, identico a quello disegnato al n. 16, va unito un geminato di due individui, uno dei quali (IV) è in posizione parallela a II, in guisa che I, II, III, IV hanno i loro assi di geminazione paralleli ad 101, I, IV, V paralleli ad $1\bar{1}0$.

La fig. 9 è l'immagine di un gemello polisintetico a parziale penetrazione. Ad I si unisce II con asse $[\bar{1}\bar{1}1]$ e III con asse $[1\bar{1}1]$; II continua sotto forma di sottile lamella attraverso I, come lo indicano le linee punto-tratteggiate sulle faccie $1\bar{1}1$ e 111; un quarto individuo attraversa I sotto forma di sottile lamella ad asse $[\bar{1}11]$ ed è indicato da linee punto-tratteggiate sulle faccie posteriori $\bar{1}\bar{1}1$ e $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$.

Al n. 15 fu disegnato un gruppo composto di sette individui, i quali però si trovano, almeno in parte, due a due in posizione parallela. Il grosso ottaedro (I) porta sulla sua faccia $1\bar{1}\bar{1}$ un secondo individuo (II) ad asse di geminazione $[1\bar{1}\bar{1}]$, ed è unito ad una grossa lamella (III) ad asse $[1\bar{1}1]$. A questa si unisce IV in posizione parallela ad I. Dalla faccia 111 di IV sporge un quinto individuo (V) ad asse $[\bar{1}\bar{1}1]$, ed al gruppo così costituito si unisce un geminato (VI e VII) in posizione identica di IV e V della fig. 17, in guisa che VI è in posizione parallela a V. I sette individui sono adunque in cinque posizioni diverse; gli assi di geminazione, riferiti al primo individuo, sono $[1\bar{1}\bar{1}]$, $[1\bar{1}1]$, $[\bar{1}\bar{1}1]$ e $[115]$; II, I, III, IV hanno gli assi di geminazione paralleli ad 110, I, IV, V, VI, VII, paralleli ad $1\bar{1}0$.

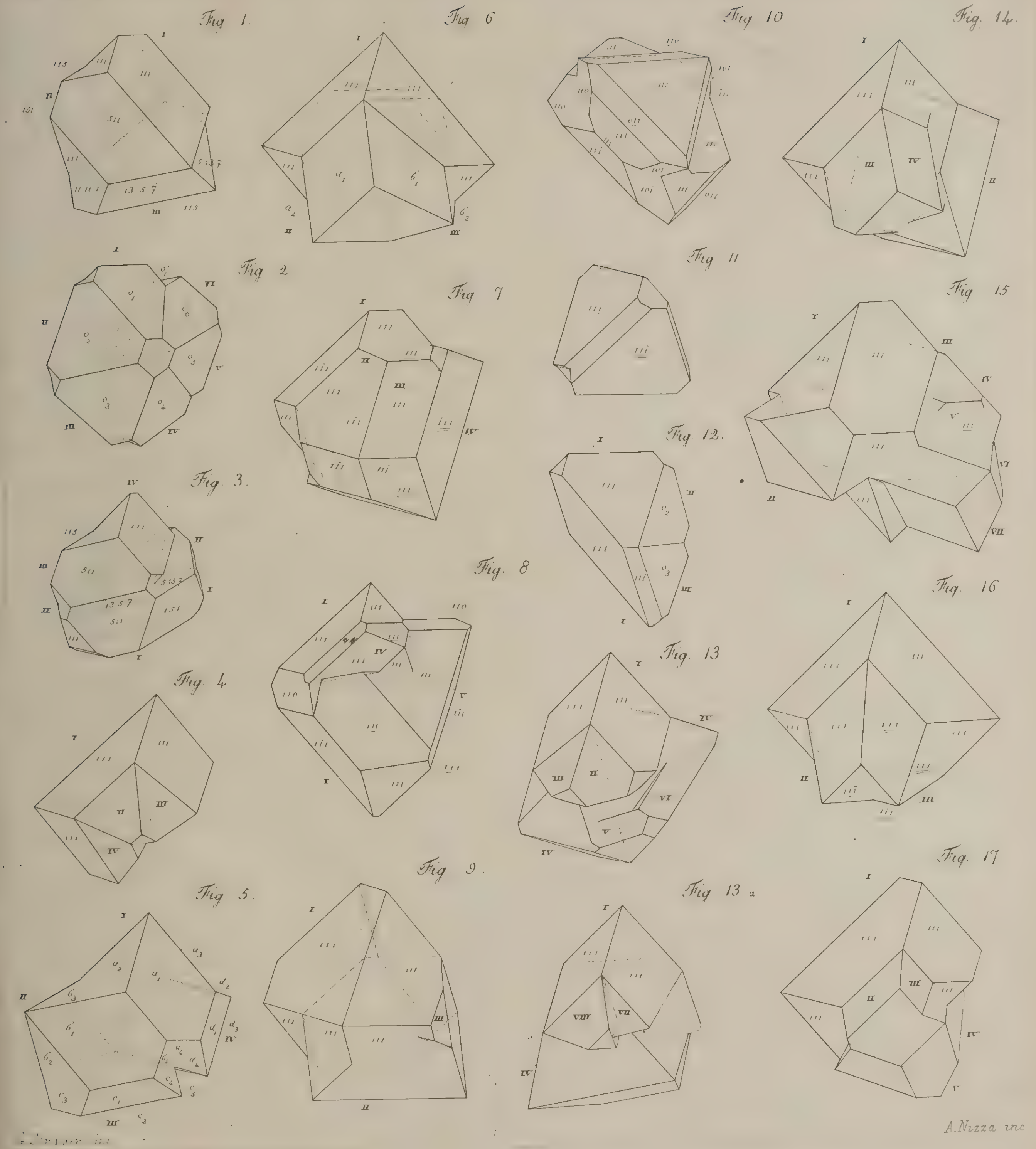
Il gruppo più complicato fra quanti ebbi agio di studiare, è raffigurato ai n. 13 e 13a in due posizioni diverse; la fig. 13a è girata per 90° attorno a $[001]$ in modo che $1\bar{1}1$ di fig. 13a viene ad occupare il posto di 111 della fig. 13. L'intero gemello polisintetico è costituito da otto individui. Al primo individuo ottaedrico (I) va unito un secondo ottaedrico (IV) con asse $[1\bar{1}1]$; ad I poi si aggiungono ancora tre individui tetraedrici, II con asse $[\bar{1}11]$, VII con asse $[111]$, e VIII con asse $[\bar{1}11]$, talchè II e VIII sono in posizione parallela; all'individuo II se ne aggiunge un altro tetraedrico (III) con asse $[15\bar{1}]$, a IV si uniscono V e VI precisamente come II e III si uniscono ad I. I due gruppi I, II, III e IV, V, VI sono identici al gruppo I, II, III della fig. 6, il gruppo I, VII, VIII è come I, II, III della fig. 16.

Riassumendo ora tutte le misure fatte sui geminati, troviamo le seguenti medie per gli angoli omologhi:

	109°27′30″ (39 sp.)	70°33′ 8″ (32)	38°55′ 5″ (30)
calc.	109°28′16″	70°31′44″	38°56′33″
diff.	— 46″	+ 1′24″	— 1′28″
	22°11′57″ (14)	141° 3′48″ (3)	31°34′40″ (1)
calc.	22°11′30″	141° 3′27″	31°35′11″
diff.	+ 27″	+ 21″	— 31″

Dal paragone istituito tra le medie trovate e i valori teorici segue, che i gemelli sottoposti alla osservazione goniometrica deviano dalla teoria assai più

sensibilmente del cristallo semplice più sopra descritto. Tale fenomeno può derivare da parecchie cause. Anzitutto non si possono misurare nei geminati tutti gli angoli omologhi di un medesimo individuo, ma pare che questo inconveniente avrebbe dovuto essere compensato dal numero assai maggiore di angoli omologhi misurati sui cristalli gemelli, a confronto di quelli misurati sul cristallo semplice. In secondo luogo potremmo attribuire la meno perfetta concordanza fra teoria ed esperienza nei geminati di spinello, a rotolamento subìto dai cristalli, i quali provengono, come si sa, da terreni di trasporto. Senza volere escludere questa causa perturbatrice, devo però notare: 1° che essa avrebbe dovuto influire tanto sui cristalli semplici quanto sui gemelli; 2° che, salvo pochissime eccezioni, le faccie dei geminati riflettevano immagini nettissime, come faccie perfettamente piane, locchè non andrebbe troppo d'accordo coll'ipotesi di un cambiamento di angoli prodotto dal rotolamento subìto; 3° che nei gruppi simmetrici, come ad es. fig. 2, gli angoli omologhi $o_1 o_2$ ecc., avrebbero dovuto cambiare tutti nel medesimo senso sotto l'influenza del rotolamento, mentre li troviamo tanto superiori quanto inferiori ai valori richiesti dalla teoria. Ritengo perciò che la causa principale delle irregolarità maggiori dei gemelli sia da cercarsi nel fenomeno stesso della geminazione. Di fatti, non mancano altri esempî che dimostrano essere la geminazione stessa una causa perturbatrice nei cristalli. Basta ricordare i geminati di ortose ad asse [001] di Baveno, dell'Elba, ecc., nei quali le faccie 001 e $\bar{1}01$ sembrano trovarsi in un medesimo piano, talchè, senza l'aspetto fisico diverso delle due pinacoidi, senza l'aiuto della sfaldatura parallela a 001, o della linea di separazione segnata sovente da sovrapposizione regolare di albite, tali gemelli si potrebbero prendere per cristalli semplici del sistema trimetrico. Tutti conoscono poi il fatto dei geminati di fluorite, in cui il fenomeno della poliedria pare essenzialmente dovuto alla geminazione. E tali esempî di leggieri si potrebbero trovare sovra molte altre sostanze. Avrò occasione di tornare sulla questione in un lavoro sull'epidoto e sul pirosseno italiano, i cui cristalli escludono affatto l'influenza del rotolamento.



G. Strüver — Geminati di spinello.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

Sulla variazione secolare della declinazione magnetica di Roma.

Nota di F. KELLER

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del 7 aprile 1878.

Nella seduta del 3 giugno 1877 presentai a questa Accademia il risultato delle misure della componente orizzontale del magnetismo terrestre eseguite nella stazione magnetica di s. Pietro in Vincoli. Proseguendo questi studî ho fatto altre 16 misure di questa forza e i valori ottenuti poco si scostano da quelli trovati antecedentemente. Mi riserbo di pubblicare e di discutere questi nuovi valori in un' altra occasione, limitandomi in vece oggi a presentare il risultato delle misure della declinazione magnetica eseguite nella medesima stazione di s. Pietro in Vincoli.

Per conoscere la declinazione magnetica occorrono due operazioni del tutto differenti, cioè si deve prima trovare il meridiano astronomico e poi il meridiano magnetico, l' angolo compreso fra queste due direzioni è appunto la declinazione magnetica. Il primo di questi due meridiani ha una posizione invariabile e questo dev' essere determinato mediante osservazioni astronomiche, il secondo invece è alquanto variabile col tempo, e lo scopo degli osservatorii magnetici è appunto quello di assegnare per ogni giorno l' angolo, che formano i due meridiani.

Ho tracciato due volte il meridiano astronomico osservando la Polare nella sua massima elongazione dal meridiano tanto all' est quanto all' ovest. Questa operazione fu eseguita mediante un eccellente teodolite di Starke appartenente al nostro gabinetto di fisica, il di cui circolo orizzontale fornito di due microscopi dà gli angoli coll' esattezza di due secondi. La prima di queste due determinazioni è stata effettuata nel mese di settembre 1877 e ripetuta per varie sere avendo sempre cura di osservare nella sera susseguente col cannocchiale rovesciato, onde eliminare il piccolo errore che ha origine nella posizione non perfettamente perpendicolare fra l' asse ottico del cannocchiale e l' asse orizzontale del teodolite. La seconda determinazione è stata fatta in un modo del tutto analogo, nei primi giorni del passato mese di marzo. In ambedue i casi fu misurato l' angolo compreso fra la direzione del trovato meridiano ed una mira fissa segnata sul muro del fabbricato della scuola degli Ingegneri.

Le due determinazioni che ho fatto differiscono per 16 secondi e mi sembra che questa differenza sia abbastanza piccola, principalmente quando si rifletta, che la distanza della mira dal centro della stazione è di soli 54 metri, il che richiede che lo strumento sia centrato con esattezza assai grande.

Il meridiano magnetico è stato determinato col medesimo teodolite di Lamont, che ha servito per le ricerche sulla componente orizzontale magnetica e del quale

feci cenno nell' ultima pubblicazione. Il suo ago magnetico consiste di due piccole sbarre parallele della lunghezza di 12 centimetri ciascheduna, invariabilmente congiunte fra loro mediante una staffa di ottone, che porta lo specchietto. Questa staffa è fornita di due uncini per poter sospendere l'ago in due diverse posizioni, cioè in maniera che quella delle due sbarre, che si trova nella prima posizione al di sopra, viene poi nella seconda al di sotto. Egli è necessario di osservare l'ago in queste due posizioni per accertare se l'asse magnetico del sistema stia perfettamente perpendicolare sul piano dello specchio. Il cannocchiale porta nel suo foco un reticolo illuminato dal di sopra attraverso un prisma a riflessione totale, e si riconosce la posizione perpendicolare fra l' asse ottico del cannocchiale e lo specchio mediante la perfetta coincidenza del reticolo colla sua immagine.

Il filo di sospensione è di seta, della lunghezza di $1^m,90$, e che esso sia della massima tenuità possibile apparisce dal fatto, che si ruppe già due volte nel tempo di 22 mesi per il semplice peso dell'ago, senza aver ricevuto verun urto. Queste circostanze rendono il suo coefficiente di torsione assai piccolo, e da molte misure che ho fatto in diverse epoche risulta, che torcendo l' estremo superiore del filo per due intere periferie l'ago magnetico si sposta in media di 1′ 56″, lo che corrisponde a un coefficiente di torsione espresso da $\frac{1}{22344}$.

La picciolezza di questo valore rende quasi inutile la correzione per la torsione; infatti volendo anche ammettere, che la posizione d' equilibrio del filo difetti per un angolo retto dal meridiano magnetico, il relativo errore ammonterebbe a soli 15″.

Si vede adunque, che la correzione per la torsione riesce nel nostro teodolite assai piccola, mentre i fili di metallo possono facilmente indurre a grandi errori.

Riportando qui i risultati delle misure ottenute, rammento ancora di non aver escluso veruna delle osservazioni fatte, conservando anche quelle che sembrano allontanarsi dall' andamento generale della declinazione.

Declinazione magnetica osservata nella stazione magnetica a s. Pietro in Vincoli.

14 Maggio 1876	ore 4 pom.	12° 2′,80 Ovest
4 Giugno	ore 4 pom.	12 0′,75
27 id.	ore 4 pom.	11° 56′,32
3 Agosto	ore 6 m. 15 ant.	11° 55′,52
4 Ottobre	ore 9 ant.	11° 55′,98
5 id.	ore 2 m. 20 pom.	12° 2′,27
29 Aprile 1877	ore 4 m. 30 pom.	11° 58′,13
5 Maggio	ore 4 pom.	11° 52′,21
6 id.	ore 5 pom.	11° 54′,75
20 id.	ore 5 pom.	11° 54′,41
21 id.	ore 5 m. 45 pom.	11° 52′,12
21 id.	ore 4 pom.	11° 59′,90
3 Giugno	ore 6 m. 15 ant.	11° 49′,85
4 id.	ore 6 m. 15 ant.	11° 49′,68
7 id.	ore 6 m. 15 ant.	11° 50′,81

8	Giugno	ore 6 m. 15 ant.	11° 53′,45 Ovest
8	id.	ore 6 m. 30 pom.	11° 54′,12
9	id.	ore 6 ant.	11° 49′,62
19	id.	ore 6 ant.	11° 50′,30
26	id.	ore 6 m. 30 ant.	11° 49′,41
11	Luglio	ore 7 ant.	11° 51′,12
30	id.	ore 5 m. 30 pom.	11° 54′,85
14	Agosto	ore 9 m. 30 ant.	11° 50′,73
24	id.	ore 10 ant.	11° 53′,71
30	id.	ore 3 m. 15 pom.	11° 54′,00
4	Settembre	ore 5 pom.	11° 52′,82
12	id.	ore 2 pom.	11° 55′,40
22	id.	ore 3 m. 15 pom.	11° 52′,03
6	Ottobre	ore 5 m. 30 pom.	11° 51′,71
24	id.	ore 10 m. 40 ant.	11° 52′,05
2	Novembre	ore 7 m. 45 ant.	11° 49′,50
28	Dicembre	ore 8 ant.	11° 49′,06
13	Gennaio 1878	ore 10 m. 15 ant.	11° 51′,25
19	Febbraio	ore 6 m. 40 ant.	11° 47′,89
4	Marzo	ore 5 pom.	11° 49′,25

L'andamento di questi valori accenna in un modo evidente ad un decrescimento della declinazione, così la massima declinazione di 12° 2′,80 fu osservata il 14 maggio 76 e la minima di 11° 47′,89 il 19 febbraio 78; anche il periodo diurno è riconoscibile ma con minore evidenza.

Sarebbe stato desiderevole che le osservazioni fossero fatte ad epoche stabilite con più regolarità, ma essendo ciò impossibile nel caso presente, dovetti contentarmi di farle quando le altre mie occupazioni me lo permettevano. Per desumere con esattezza la media declinazione ad una data epoca non avvi altro mezzo che quello di fare delle osservazioni ripetute per un certo numero di giorni (per esempio per una settimana) ad ore fisse ed equidistanti fra loro. Queste osservazioni posson farsi col declinometro differenziale, ma una di esse dovendo essere assoluta, richiede in ogni modo l' uso del teodolite.

Nel solo caso, ove il periodo diurno della declinazione fosse conosciuto con esattezza sufficiente, si potrebbe fare a meno degli intervalli uguali di tempo, ma ciò suppone già per sè uno studio abbastanza lungo e minuto. Mentre adunque ciascuno dei valori riportati dà la declinazione esatta per l'epoca in cui fu osservata, non abbiamo mezzo per concludere regolarmente dal loro insieme la declinazione media in una data epoca. In vista di questa difficoltà non mi è rimasto per ora altro modo di procedere che quello di prendere semplicemente la media di tutte le osservazioni la quale risulta essere:

11° 53′,4

e l' epoca a cui si riferisce sarebbe

1877,3.

Uno sguardo sulla tavola delle declinazioni fa vedere, che le misure furono a preferenza fatte nelle prime ore della mattina, in cui ha luogo a un di presso il minimo della declinazione, mentre mancano quasi affatto le ore del massimo, il quale si verifica poco dopo il mezzodì. Questa circostanza avrà per effetto che la media trovata sia di qualche poco inferiore alla vera declinazione, ma non avendo fatto ancora degli studî sul periodo diurno, non ci sono per ora i mezzi per determinare questa quantità, la quale dovrebbe essere del resto abbastanza piccola.

Un' ultima osservazione rimane ancora da fare sulla declinazione trovata, cioè importerebbe molto di sapere se realmente nella camera magnetica non esista veruna causa perturbatrice. L' oggetto di ferro più vicino all' istrumento si trova alla distanza di 34 metri, ed ho già ricordato nella mia prima pubblicazione che la sua influenza sembra essere insensibile nella componente orizzontale. Non ho fatto ricerche simili sulla declinazione; i teodoliti, ambedue pesantissimi e di grande volume non si prestano bene a studî comparativi.

Venendo ora all' argomento finale di questa Nota, cioè alla variazione secolare della declinazione in Roma, prendo per punti di partenza le seguenti due misure corrispondenti ad epoche anteriori. La prima viene riportata dal Lamont (¹) e si riferisce all' anno 1850; si aveva allora secondo questo autore la declinazione

$$40^\circ\ 31';$$

mancando l'indicazione del giorno, ammetto che essa si riferisca alla metà dell' anno cioè a 1850,5.

La seconda è quella fatta da Secchi nel novembre 1859 nell' osservatorio del Collegio romano, e questa risulta

$$13^\circ\ 43',5;$$

non essendo precisato il giorno del mese di novembre suppongo per la medesima l' epoca 1859,8.

Per le osservazioni a s. Pietro in Vincoli si ha invece la declinazione

$$11^\circ\ 53',4$$

per l' epoca 1877,3.

Uno sguardo sopra questi valori fa rilevare una forte diminuzione della declinazione magnetica, come si verifica in tutta l' Europa.

Contando il tempo t dal principio dell' anno 1875, l' andamento della declinazione può essere rappresentato dalla formula

$$\delta = 12^\circ\ 9',41 - 6',860\, t - 0',0441\, t^2, \tag{1}$$

dalla quale risulta che il decremento annuo aumenta col tempo.

Kohlrausch dà per Gottinga la formula seguente (²)

$$\delta = 14^\circ\ 51',7 - 8',843\, t - 0',05349\, t^2 \tag{2}$$

ove si deve il tempo computare a partire da 1867,52.

(¹) Carl, Repertorium der Physik. Vol. 5, pag. 51.
(²) Astronomische Nachrichten. Vol. 72, pag. 319.

Per rendere le due formule più paragonabili riferiamo quella di Roma anch' essa all' epoca 1867,52 e così otteniamo

(3) $$\delta = 12^\circ\ 58',38 - 6',1989\, t - 0',0441\, t^2.$$

Come si vede sono le formule (2) e (3) assai simili fra loro; ambedue danno una diminuzione della declinazione e in ciascuna aumento di decremento annuo col tempo; gli andamenti della declinazione a Roma e Gottinga presentano quindi una grande concordanza; la sola differenza sta nei valori numerici di questi decrementi, che sono minore a Roma e maggiore a Gottinga. Un fatto analogo si verifica per la componente magnetica orizzontale, questa cresce a Roma e a Gottinga, ma l' aumento annuo di Roma è minore di quello di Gottinga. Su questo fatto ho già richiamato l'attenzione nell' ultima pubblicazione.

Finalmente noto ancora che, osservando il prof. Respighi negli anni 1855 e 58 la declinazione magnetica a Bologna, trovò [1] un decremento annuo di 7'; questa quantità è intermedia a quelle trovate per Roma e Gottinga e si accorda bene colla posizione geografica di Bologna, la quale è anch' essa intermedia fra Roma e Gottinga.

[1] *Sulla declinazione magnetica assoluta di Bologna*. Memorie dell'Accademia di Bologna. Vol. 10.

Osservazioni astronomiche e fisiche sull'asse di rotazione e sulla topografia del pianeta Marte: fatte nella Reale Specola di Brera in Milano coll'equatoriale di Merz durante l'opposizione del 1877.

Memoria del Socio G. V. SCHIAPARELLI

letta nella seduta del 5 maggio 1878.

INTRODUZIONE

1. Quando nel settembre 1877, presentandosi Marte in una delle sue più favorevoli opposizioni, io diressi l'attenzione su questo pianeta, non era da principio mio intendimento consacrare ad esso una serie continuata e regolare di osservazioni. Io desiderava soltanto esperimentare, se il nostro Refrattore di Merz, il quale aveva dato così buon saggio di sè sopra le stelle doppie, possedesse anche le qualità ottiche opportune ad aiutare lo studio della superficie dei pianeti. Desiderava pure verificare per propria esperienza quanto nei libri d'Astronomia descrittiva si suole narrare sulla superficie di Marte, sulle sue macchie, e sulla sua atmosfera. Devo confessare, che comparando l'aspetto del pianeta colle carte che ne furono pubblicate negli ultimi tempi, i primi saggi non riuscirono molto incoraggianti. Io ebbi la sfortuna di fare le prime osservazioni su quelle parti delle superficie di Marte che da tutti finora son state considerate come le più difficili e le più dubbiose: cioè sulle regioni designate nelle carte annesse a questa Memoria col nome di *Mare Eritreo* (vedi Tav. III e IV), e sopra quelle altre, che subito dopo del Mare Eritreo si presentano all'osservatore per effetto della rotazione diurna del pianeta. Da principio non seppi orientarmi affatto: e soltanto più tardi con qualche difficoltà pervenni a riconoscere sul pianeta alcuna delle forme notate su quelle carte. Quando però cominciai ad esaminare i bellissimi disegni eseguiti dal prof. Kaiser e dal sig. Lockyer durante l'opposizione del 1862 ed in configurazioni del pianeta quasi affatto identiche a quelle che ebbero luogo nel 1877, vidi con piacere, che i miei disegni in molti particolari essenziali erano rassomiglianti ai loro. Potei convincermi, che malgrado alcune discordanze, io vedeva il pianeta press'a poco com'essi l'avevano veduto; che le differenze apparenti provenivano in somma dal diverso modo d'interpretare le cose osservate; e sopratutto, che sulla topografia del pianeta Marte molto ancora restava da fare, e molto ancora si poteva fare, anche coi mezzi limitati di cui io disponeva. Il 12 settembre 1877, malgrado che l'opposizione fosse già seguita il giorno 5 dello stesso mese, deliberai di proseguire le osservazioni in modo da trarne fuori tutto il partito che fosse possibile col dato istrumento e nelle date circostanze. Le condizioni atmosferiche

furono tanto favorevoli al mio divisamento, da permettermi di descrivere quasi completamente e con discreta abbondanza di particolari, l'emisfero australe del pianeta, e d'incominciare anche ad abbozzarne con qualche approssimazione quella parte dell'emisfero boreale che giace fra l'equatore e il 40° parallelo nord. L'amplificazione impiegata fu quasi esclusivamente quella del nostro oculare IV positivo, che è di 322 volte. Soltanto in gennaio, febbraio e marzo 1878, essendo il diametro apparente del pianeta ridotto a pochi secondi, ho dovuto impiegare un'amplificazione più forte, che fu quella di 468 corrispondente al nostro oculare V negativo.

2. Il mio intento fondamentale fu di procedere alla descrizione del pianeta non per mezzo di dischi o di ritratti di Marte fatti a misura d'occhio, ma dietro principî e con metodi geometrici. A tal fine da prima determinai di nuovo il fondamento di tutta l'areografia, cioè la direzione dell'asse di rotazione, e il luogo della calotta polare australe. In secondo luogo, appoggiandomi a questa come base definii micrometricamente sulla superficie di Marte un certo numero di punti fondamentali, in modo da poterne dedurre le coordinate di latitudine e di longitudine areografica. Da ultimo, coll'aiuto di questi punti potei compiere senza troppa incertezza la descrizione topografica per mezzo di disegni delle regioni fra i medesimi punti interposte, precisamente come il geografo compie la descrizione di un paese della Terra interpolando a stima i particolari fra i punti geometricamente determinati.

3. Nella presente Memoria ho esposto quanto nell'intervallo compreso fra il settembre 1877 e il marzo 1878 ho potuto fare per eseguire il proposto piano. A ciascuna delle tre operazioni già sopra enumerate è destinato uno dei tre primi capitoli. Un quarto capitolo riassume le osservazioni di natura fisica, che mi fu dato di fare e contiene inoltre fatti o discussioni relative alla costituzione della superficie del pianeta e della sua atmosfera. Le carte del pianeta, che accompagnano questo scritto, sebbene ancora molto imperfette, sono di gran lunga le più ricche di particolari, che siano state pubblicate: il qual vantaggio in prima linea è dovuto all'eccellente definizione del nostro cannocchiale di Merz. Questo nobile istrumento, malgrado le sue modeste dimensioni [1], ha rivelato una gran quantità di minuti oggetti, che nelle opposizioni precedenti erano sfuggiti ai giganteschi telescopi di cui giustamente si vantano le estere nazioni. Non vi è dubbio che molto di più si sarebbe ancora ottenuto, se io avessi potuto usare un cannocchiale simile a quelli che formano oggi ornamento ed orgoglio delle specole di Vienna, di Gateshead e di Washington. Mi contento dunque per ora di presentare quello che mi è stato concesso di ottenere, supplendo fin che ho potuto colla maggior diligenza alla minor potenza ottica dell'istrumento.

(1) Distanza focale $3^m,25$: apertura millimetri 218.

Capitolo I.

Nuova determinazione della direzione dell'asse rotatorio di Marte.

4. La descrizione geometrica della superficie di Marte richiedeva che fosse conosciuta con esattezza la direzione di quel diametro del disco, secondo il quale si projetta ad ogni istante l'asse polare del pianeta. Tale scopo si può raggiungere con molta precisione e con molta facilità osservando i movimenti della macchia nevosa che giace a poca distanza dal polo visibile (che nel 1877 fu il polo australe). Se noi immaginiamo condotta in ogni istante una retta dal centro del pianeta ad un punto determinato e costante di quella macchia, tal retta durante la rivoluzione diurna di Marte descriverà un cono, e sarà facile dedurre, dall'osservazione di un certo numero di generatrici del medesimo, la direzione apparente dell'asse del cono, che è pure l'asse del pianeta.

5. Con questo intendimento in diciotto giorni compresi fra il 12 settembre e il 13 ottobre [1] feci 66 misure dell'angolo di posizione, che rispetto al centro del disco apparente di Marte teneva quel punto della calotta nevosa che poteva ad ogni volta considerarsi come il centro della sua intensità luminosa. Il metodo adoperato fu il seguente. Essendo AB (fig. 1) una porzione del perimetro del disco, N la macchia di neve, si girava il micrometro in modo, che tagliando col filo di posizione HK un minimo segmento contiguo alla neve, questa ne occupasse il mezzo, e riuscissero uguali a stima d'occhio le parti NH, NK. Allora si riteneva, che HK fosse esattamente perpendicolare al raggio ON, e dalla posizione letta di HK si concludeva quella di ON. Questo procedimento fu impiegato fino alla fine di settembre [2], cioè finchè il corno australe della fase si trovò abbastanza lontano dalla neve, per non correre pericolo di comprenderne una parte nell'intervallo HK. Nelle osservazioni dell'ottobre si credette più prudente usare della semplice tangenza del filo HK a quel punto del lembo, che a stima d'occhio credevasi giacere sul raggio del disco passante pel centro della neve (fig. 2). Questo modo si poteva praticare finchè il corno australe della fase non invadeva la parte del lembo occupata dalla neve, o ad essa molto vicina: il che fu vero fino al 14 ottobre. In questo giorno il corno australe della fase raggiunse la posizione 154°, e il centro della neve, nella

[1] Tutte le osservazioni riferite in questa Memoria essendo comprese fra il settembre 1877 e il marzo 1878, credo inutile di aggiungere ogni volta alla data del giorno e del mese l'indicazione dell'anno, che riesce per sè abbastanza chiara.

[2] Si devono eccettuare le cinque prime osservazioni, fatte il 12 e il 13 settembre, le quali furono ottenute disponendo il micrometro in modo che il filo di posizione bissecasse simultaneamente la macchia nevosa, e il disco di Marte. Questo metodo fu tosto abbandonato per i pericoli che offre di gravi errori sistematici, specialmente quando la fase è sensibile, e gli orli del pianeta non sono da per tutto egualmente luminosi.

sua digressione orientale, arrivò a 157°: la neve poi occupava certamente almeno 6° del lembo, onde la sua estremità orientale avrebbe potuto benissimo venire a contatto colla cuspide della fase oscura, quando la neve si fosse trovata esattamente sull'orlo del lembo visibile. Ma ciò non era, e il contatto non ebbe certamente luogo nè quel giorno, nè in alcuni altri che lo seguirono. Lo stato delle cose fu allora come dimostra la fig. 3ª. Nondimeno credetti opportuno di concludere le osservazioni sulla posizione della macchia nevosa col giorno 13 ottobre, per evitare il pericolo di corrompere, con osservazioni affette da errori sistematici, il risultamento delle altre.

6. La macchia nevosa essendo eccentrica rispetto al polo, nelle diverse configurazioni non presentava uguale aderenza al lembo del disco. Durante il periodo delle osservazioni essa fu sempre *tutta* visibile, a cagione della forte inclinazione dell'asse del pianeta sul piano del circolo terminatore del disco, inclinazione che si mantenne sempre fra 22° e 25°. Ma in certe fasi della rotazione, quando la neve passava *dietro* del polo di Marte, si avvicinava tanto al lembo col suo contorno, da parervi attaccata: nelle fasi opposte, nei passaggi cioè della neve pel meridiano centrale del disco essa se ne staccava sensibilmente, e appariva tutta projettata sulla superficie dell'emisfero anteriore del pianeta. Nelle prime posizioni la inclinazione delle parti centrali della superficie nevosa rispetto alla visuale fu di circa 17°: nelle ultime, di 29°. A parità di circostanze la neve appariva dunque più larga e più visibile nel secondo caso, che nel primo. Queste variazioni però non esercitavano alcun influsso sulle misure di cui qui si rende ragione; e non portavano alcuna diversità nel metodo di osservazione adoperato. Maggior timore doveano inspirare le variazioni del contorno della massa dei ghiacci, che andava impiccolendosi a vista d'occhio; la sua forma non sempre circolare, ma negli ultimi tempi molto variabile; e da ultimo la possibilità, che quelle masse potessero lentamente essere trasportate in balìa di correnti marine, come sulla Terra si è riconosciuto avvenire sopra masse di ghiacci non minori di quella. Da tali cause d'errore è impossibile liberare il calcolo, anzi dal calcolo devono ricavarsi gl'indizî della loro esistenza, e la stima del loro possibile influsso.

7. I risultati delle misure sono consegnati nella prima e nella terza colonna del quadro numerico intercalato al § 16, delle quali il significato è bastantemente dichiarato dalle rispettive intestazioni. Il calcolo di cui ho fatto uso per dedurre da questa misura le quantità che importa conoscere ha per iscopo di determinare direttamente non l'intero valore di tali quantità, ma solo la piccola correzione che si deve portare a valori delle medesime già approssimativamente conosciuti: e si appoggia ai principî che ora brevemente esporremo.

8. Sulla sfera celeste apparente (fig. 4) sia P il polo boreale dell'equatore terrestre, P′ quello dell'equatore di Marte, M la posizione geocentrica del pianeta, il tutto per l'istante di una data osservazione. Il luogo di M è conosciuto per le Effemeridi astronomiche: il luogo di P′ (che è quello che si tratta di correggere coll'aiuto delle nuove osservazioni) supponiamo prossimamente conosciuto per osservazioni anteriori. Nel triangolo così formato sarà dato l'angolo P che è la differenza delle ascensioni rette di M e di P′: saran dati i lati PM, PP′, che sono le distanze polari di M e di P′. Sarà facile concludere: 1° il lato P′M che misura l'angolo formato al centro di Marte dalla visuale diretta da Marte alla Terra e dalla parte australe

dell'asse di rotazione del pianeta; angolo che diciamo δ; 2° l'angolo in M compreso fra il piano del circolo di declinazione di Marte, e il piano $P'M$ condotto per l'asse rotatorio di Marte e pel centro della Terra. Questo angolo manifestamente è misurato da quello che sulla sfera celeste fanno al centro di Marte il circolo di declinazione e l'altro circolo massimo, secondo il quale al nostro sguardo si projetta l'asse rotatorio del pianeta. In altri termini è l'angolo di posizione della parte boreale di quest'asse; aggiungendovi 180° si otterrà la posizione della parte australe dell'asse medesimo, posizione che chiameremo p. 3° Da ultimo si potrà ottenere l'angolo in P' che col piano fisso PP' fa quel meridiano areografico, che nel momento dell'osservazione passa al centro del disco apparente: meridiano che chiameremo quindi *centrale* e di cui $P'M'$ sarà la traccia sulla sfera celeste. Ed è manifesto, che se si conosce con bastante esattezza il periodo della rotazione e uno degli istanti, in cui l'origine delle longitudini areografiche è passata pel circolo fisso PP', facilmente si saprà qual'è, per il momento dell'osservazione, il luogo del primo meridiano di Marte, e quindi anche la longitudine areocentrica del punto, che in quel momento figurava come centro del disco.

9. Per queste determinazioni, necessarie ai calcoli seguenti, ho preso come base dell'approssimazione la direzione dell'asse di Marte determinata da Oudemans sopra osservazioni delle macchie polari australe e boreale fatte da Bessel negli anni 1830, 1835 e 1837 [1]. Oudemans ha assegnato per una data, che non trovo indicata, ma che non può esser molto lontana da 1834,0 le seguenti coordinate del punto della sfera celeste, a cui corrisponde la parte boreale di quest'asse

$$\alpha = 317^{\circ}\ 34' \quad \delta = +50^{\circ}.\ 5'.$$

Le variazioni annuali dovute alla precessione terrestre essendo rispettivamente $+0', 485$ e $+0', 247$, sarà facile trasportare queste coordinate ad un'epoca qualsiasi, ma sarà forza negligere il moto precessionale dell'asse di Marte, il quale non è ancora conosciuto. Adottando pel 1877 i valori

$$\alpha = 317^{\circ}\ 55' \quad \delta = +50^{\circ}.\ 16'$$

e prendendo le coordinate di Marte nel *Nautical Almanac*, calcolai per alcune date i valori di δ e di p, i quali trovai essere affatto identici a quelli, che il sig. Marth ha pubblicato nel volume XXXVII delle *Notizie mensili* della Società Astronomica di Londra, pag. 301 e seguenti [2]. Ciò mi dispensò dal calcolare il resto, e tutti gli altri valori di δ e di p corrispondenti agli istanti delle 66 osservazioni trassi dall'effemeride del sig. Marth, la quale evidentemente è fondata sopra elementi identici a quelli da me assunti, sebbene l'autore non abbia dato in proposito alcuna indicazione.

10. Nello stesso luogo il sig. Marth ha pure dato di due in due giorni la longitudine areografica del punto centrale del disco di Marte per l'istante del mezzogiorno medio di Greenwich. Comparando questa effemeride colle mie osservazioni mi

(1) Vedi il Giornale intitolato *Astronomische Nachrichten*, n. 838.

(2) *Ephemeris for Physical Observations of Mars*. Monthly Notices of the R. Astronomical Society, Vol. XXXVII, p. 301. April 1877.

avvidi, che il sig. Marth ha scelto (come pure io ho fatto) per origine delle longitudini areocentriche il punto designato da Maedler sulla sua carta colla lettera *a*: il quale si trova molto presso all'equatore del pianeta, ed è sulle nostre carte designato col nome di *Vertice d'Aryn.* — Inoltre ho constatato, che deviando dall'uso degli areografi anteriori, Marth ha fatto crescere i numeri delle longitudini in modo, che nel passaggio al meridiano centrale si succedano nell'ordine dei tempi luoghi di longitudine sempre crescente: questo modo che è certamente più naturale e più comodo dell'altro, fu pure da me adottato, e si può definire dicendo, che sul disco di Marte le longitudini vanno crescendo dal lembo precedente al lembo seguente. — Da ultimo riconobbi, che pel calcolo delle longitudini areografiche del punto centrale del disco di Marte il sig. Marth ha adottato per durata di una rotazione completa rispetto alle stelle 88642, 7 secondi di tempo medio solare terrestre. Questa durata non può essere in errore che di una piccola frazione di secondo, come risulta dalle ricerche di Kaiser e di Proctor sui vecchi disegni di Marte fatti da Hooke e da Huygens. Essa è più che bastevolmente accurata per comparare fra loro le mie misure, che non abbracciano due mesi interi (¹). Su quanto concerne l'epoca adottata dal sig. Marth per le longitudini areocentriche (cioè la posizione del primo meridiano di Marte nello spazio in un istante determinato) non ho potuto scoprire quali siano le basi del suo calcolo. Dirò soltanto, che le longitudini areografiche del centro del disco interpolate dalla sua effemeride si sono accordate sempre egregiamente colle mie osservazioni dal principio sin alla fine delle medesime. E del resto è facile comprendere, come un errore costante di queste longitudini nulla possa influire sulla presente investigazione, l'origine delle medesime sul globo di Marte potendosi scegliere affatto ad arbitrio. Tutte queste considerazioni mi hanno determinato ad adottare l'effemeride di Marth anche pel calcolo delle longitudini areografiche del centro del disco, certo di avere con ciò per esse un'eccellente approssimazione. Per tal fine il tempo siderale di Milano di ciascuna osservazione fu da prima convertito in medio, poi corretto per l'equazione della luce, e da ultimo ridotto a quello di Greenwich adottando $36^m,8$ per differenza dei meridiani. Col tempo così calcolato si entrò nell'effemeride accennata, e le longitudini del centro del disco corrispondenti a ciascuna delle osservazioni si trovano registrate nella seconda colonna del quadro che sta nel § 16. Tali longitudini saran sempre designate con ω.

11. Il circolo della fig. 5 rappresenti il disco di Marte, come appariva rovesciato nel cannocchiale astronomico durante queste nostre osservazioni: O ne sia il centro, P il luogo in cui si vedrebbe il polo australe, se fosse contrassegnato in qualche modo. Il diametro AB sarà quello su cui si projetta l'asse rotatorio del pianeta, e di cui preme anzitutto determinare l'esatta direzione, o l'angolo $NOB = p$ ch'esso fa col circolo di declinazione NS. Sia mr la piccola ellisse secondo cui si projetta il parallelo descritto nella rotazione diurna di Marte dal centro della macchia nevosa, m il luogo ch'essa occupa durante l'osservazione, mO, mP i circoli massimi che la congiungono col polo P di rotazione, e col polo anteriore O del circolo SBQNAR. Nel triangolo

(¹) Dal 12 settembre al 4 novembre. Nei mesi seguenti sino al marzo 1878 le osservazioni furono esclusivamente consacrate al completamento dei particolari topografici.

sferico mPO il lato PO misura l'inclinazione della parte australe dell'asse rotatorio sulla linea visuale, ciò che sopra abbiam chiamato δ: esso è il complemento della latitudine areografica australe del punto O che occupa il centro dell'emisfero visibile. Il lato Pm è la distanza (supposta costante) del centro della calotta nevosa dal polo P, e lo chiamiamo λ. L'angolo mPO è la differenza delle longitudini areografiche del punto O (longitudine che chiamiamo ω), e della calotta nevosa (longitudine che chiamiamo θ): sia t questa differenza contata positivamente da PO come origine verso sinistra, in senso contrario alle longitudini. Finalmente l'angolo $mOP = \Pi$ è la differenza fra l'angolo di posizione della calotta nevosa mON e l'angolo di posizione PON del polo P. Questa differenza si suppone positiva, quando m è a sinistra del circolo massimo PO. L'angolo in m diciamo x. Dati λ, δ, t si ricavano Π e x dalle note analogie

$$\tang \tfrac{1}{2}(\Pi + x) = \frac{\cos \frac{1}{2}(\delta - \lambda)}{\cos \frac{1}{2}(\delta + \lambda)} \cotg \tfrac{1}{2} t, \qquad \tang \tfrac{1}{2}(\Pi - x) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta - \lambda)}{\sin \frac{1}{2}(\delta + \lambda)} \cotg \tfrac{1}{2} t,$$

ed ove sia pur conosciuto l'angolo di posizione p dell'asse OP, aggiungendovi Π si otterrà la posizione P della macchia nevosa, il cui paragone colla posizione osservata somministrerà il modo di correggere gli elementi presi per base del computo. Per l'esecuzione di questo calcolo gli elementi p e δ furono ricavati dall'effemeride di Marth. Per λ un esame approssimativo delle osservazioni avea mostrato che non poteva esser molto diverso da 7°: e s'impiegò questo valore. Dallo stesso esame avendo tratto 30° come valore approssimato della longitudine areocentrica θ della macchia polare, l'angolo t si ebbe sottraendo 30° dalla longitudine ω del centro del disco:

$$t = \omega - \theta = \omega - 30^\circ.$$

Le differenze fra gli angoli P osservati e quelli calcolati nel modo ora spiegato si trovano nella quarta colonna del quadro numerico del § 16, intestata dP: e si devono intendere nel senso osservazione-calcolo.

12. La determinazione completa della giacitura dell'asse rotatorio di Marte nello spazio richiede che si ottengano l'ascension retta e la declinazione del punto P′ della sfera celeste (fig. 4). Evidentemente però a tale ricerca si può surrogare quella di due altre coordinate qualunque del punto P′. Nel caso presente si ottiene la massima comodità col ricercare per un dato istante e per una data posizione M del pianeta l'angolo PMP′ (cioè l'angolo di posizione p dell'asse veduto dalla Terra) e la distanza angolare MP′ (cioè l'angolo δ che fa l'asse del pianeta colla visuale dell'osservatore). Queste due quantità hanno il vantaggio di risultare più direttamente dalle osservazioni, e la loro determinazione dipende da un calcolo più semplice. Due delle incognite del problema saranno dunque le correzioni dp e $d\delta$ da apportarsi alle quantità p e δ in un momento determinato. Dico in un momento determinato, perchè queste correzioni variano col tempo, cioè col variare la positura dell'osservatore rispetto all'asse di Marte. È da riflettere tuttavia che durante i 32 giorni abbracciati da queste osservazioni tal positura ha pochissimo cambiato. Il moto geocentrico del pianeta non arrivò a 4° durante tale intervallo, e gli angoli p e δ non variarono più di 2°. Queste quantità son dell'ordine stesso delle correzioni dp e $d\delta$ che si voglion determinare; onde è manifesto che durante quel tempo potremo ritenere dp e $d\delta$

come costanti, senza pericolo di commettere errori più importanti di quelli che derivano dal trascurare i quadrati delle quantità stesse dp e $d\delta$.

13. Le due altre quantità, di cui occorre considerare la correzione, sono le coordinate θ e λ della macchia nevosa. Designando dunque con dP la differenza (presa nel senso osservazione-calcolo) degli angoli di posizione osservati e calcolati della macchia suddetta, abbiamo dapprima, a causa di $P = p + \Pi$ (§ 11),

$$dP = dp + d\Pi:$$

e poichè Π è funzione della quantità δ, λ, θ, sarà

$$dP = dp + \left(\frac{d\Pi}{d\delta}\right) d\delta + \left(\frac{d\Pi}{d\lambda}\right) d\lambda + \left(\frac{d\Pi}{d\theta}\right) d\theta$$

il tipo generale delle equazioni di condizione da cui si hanno a ricavare le correzioni. Non resta dunque che trovare i coefficienti $\frac{d\Pi}{d\delta}, \frac{d\Pi}{d\lambda}, \frac{d\Pi}{d\theta}$. Su ciò è da notare, che a cagione di $t = \omega - \theta$, si ha $d\theta = d\omega - dt$. Ma se noi intendiamo le longitudini θ e ω riferite alla medesima origine arbitraria, è manifesto che ω si potrà considerare come esente da correzione, onde rimarrà $d\theta = -dt$, e $\frac{d\Pi}{d\theta} = -\frac{d\Pi}{dt}$. Quindi il problema è ridotto al computo di $\frac{d\Pi}{d\delta}, \frac{d\Pi}{d\lambda}, \frac{d\Pi}{dt}$: e poichè Π, δ, λ, t sono elementi di un identico triangolo sferico mPO (fig. 5), il calcolo dei detti coefficienti si dedurrà immediatamente dalle analogie differenziali dei triangoli sferici. Possiamo dunque scrivere subito l'espressione completa di dP: chiamando ρ l'arco Om che misura la distanza variabile della neve dal centro dell'emisfero visibile, si ha

$$dP = dp - \sin\Pi \cot\rho \,.\, d\delta + \frac{\sin x}{\sin\rho} \,.\, d\lambda + \frac{\cos x}{\sin\rho} \sin\lambda \,.\, d\theta \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

In questa formula il coefficiente di $d\delta$ consta dei due fattori $\cot\rho$ e $\sin\Pi$. Di questi il primo oscilla entro stretti limiti intorno alla quantità $\cot\delta$, la quale nel caso presente è sempre minore di $\frac{1}{2}$: l'altro poi, non arrivando mai Π a 7 gradi, è sempre una piccola frazione. Ne segue ciò che si poteva prevedere dalla natura del problema: cioè che la correzione di δ entra in queste equazioni di condizione con peso troppo inferiore a quello delle altre correzioni dp, $d\lambda$ e $\sin\lambda d\theta$, perchè si possa arrischiare di cavarne una determinazione con sole osservazioni di angoli di posizione: la quale attesi gli errori inevitabili delle quantità dP non potrebbe riuscire che illusoria, ed anche assurda. Vi è inoltre la circostanza facile a verificare, che i coefficienti di $d\delta$ e di $d\lambda$ crescono con leggi quasi affatto identiche e conservano fra loro un rapporto quasi costante per tutti i valori di t (¹). Queste due incognite dunque nelle equazioni

(¹) Infatti si ha $\quad \dfrac{\sin\Pi \cot\rho}{\dfrac{\sin x}{\sin\rho}} = \dfrac{\sin\Pi \cos\rho}{\sin x} = \dfrac{\sin\lambda \cos\rho}{\sin\delta}.$

Posto $\delta = 66°$, $\lambda = 6°$, per $t = 0$ si avrà $\rho = 60°$, e per $t = 180°$, $\rho = 72°$: onde tale rapporto varierà fra i limiti

$$\frac{\sin 6°}{\sin 66°} \cos 60° = 0{,}0572 \quad \text{e} \quad \frac{\sin 6°}{\sin 66°} \cos 72° = 0{,}0354.$$

Si vede quanto difficile sia la separazione delle incognite $d\delta$ e $d\lambda$, e quanto piccolo peso $d\delta$ abbia in confronto di dp, di $d\lambda$ e di $\sin\lambda \,.\, d\theta$.

sono poco meno che solidarie l'una dell'altra, ed una determinazione assurda di $d\delta$ potrebbe cagionare un errore minore, ma pur tuttavia sensibile sopra $d\lambda$.

14. D'altra parte ove si ammetta che il valore di δ, adottato provvisoriamente nei calcoli preparatorî dietro Oudemans, sia già esatto entro uno o due gradi (com'è probabile), l'importo del termine in $d\delta$ non può cambiare il 2° membro dell'equazione (a) che di alcuni centesimi di grado, a cagione del piccolo coefficiente. Or le quantità dP, come or ora vedremo, sono soggette all'error probabile di poco meno che un grado, $d\lambda$ e $\sin\lambda . d\theta$ a circa un decimo di grado. Manifestamente dunque si potrà sopprimere il termine $-\sin\Pi\cot\rho . d\delta$ nelle equazioni di condizione senza correr rischio di modificare sensibilmente il risultato della ricerca (¹). Per queste considerazioni l'equazione (a) resta ridotta a

$$dP = dp + A d\lambda + B d\theta$$

dove si ha $\qquad A = \frac{\sin x}{\sin\rho} \qquad B = \frac{\cos x \sin\lambda}{\sin\rho}$.

Il quadro numerico del § 16 dà per ciascuna delle 66 osservazioni i valori di A e di 10 B. Dico di 10 B e non di B, perchè per ottenere maggior proporzione nei numeri, nelle equazioni si è posta per incognita $d\Theta = \frac{1}{10} d\theta$ invece di $d\theta$, e quindi si dovettero moltiplicare per 10 i coefficienti di $d\theta$.

15. Le 66 equazioni ottenute sostituendo nella formula tipica i valori di A e di 10 B furono trattate col metodo dei minimi quadrati; dando a tutte le osservazioni il peso 1, le equazioni normali risultanti furono

$$\begin{aligned} +113°,35 &= +66,000 . d\rho - 5,064 . d\lambda + 18,090\, d\Theta \\ -42,17 &= -5,064 . d\rho + 39,815 . d\lambda - 3,975\, d\Theta \\ +30,55 &= +18,090 . d\rho - 3,975 . d\lambda + 56,016\, d\Theta \end{aligned}$$

dalle quali si ricava

$$\begin{aligned} d\rho &= +1°,6667 \quad \text{col peso} \quad 59,796: \\ d\lambda &= -0°,8525 \quad \text{col peso} \quad 39,295: \\ d\Theta &= -0°,0534 \quad \text{col peso} \quad 50,880. \end{aligned}$$

16. Questi valori, surrogati nelle equazioni di condizione, lasciano gli errori residui contenuti nell'ultima colonna, segnata ε, del quadro già più volte citato, che è il seguente. In esso tutte le osservazioni e i correlativi numeri stanno ordinati non già secondo la data, ma secondo i valori corrispondenti della longitudine areografica ω del centro del disco.

(¹) Si potrebbe conservare il termine in $d\delta$ esprimendo le altre incognite in funzione della medesima: ottenuto (come faremo) il $d\delta$ per altra via, si potrebbe così dare ai valori di dp, di $d\lambda$ e di $d\theta$ maggior rigore. Ma ciò potrebbe forse parere pura affettazione di esattezza, specialmente a chi consideri i procedimenti assai più semplici del nostro, con cui Oudemans (*Astr. Nachr.* n. 838), Kaiser (*Leydener Beobb.* Vol. III, p. 84) e Hall (*Astr. Nachr.* n. 2174) credettero (e non a torto) di bastare alla soluzione di questo problema. I loro calcoli suppongono che si abbia $\Pi = \lambda \sin t$, ciò che è vero soltanto a un dipresso, ed equivale a supporre $\delta = 90°$.

Quadro

contenente le osservazioni di posizione della macchia nevosa ed i risultati dei calcoli corrispondenti a ciascuna.

Data e tempo siderale 1877.			ω	P osservato	dP	A	10 B	ε
Ottobre	4	$20^h\ 8^m$	12°47	164°70	+3°58	—0.372	—1.343	+1°52
	2	19. 0	16.09	165.39	+3.72	—0.297	—1.369	+1.73
	1	19. 0	26.10	164.81	+1.85	—0.080	—1.417	+0.04
	2	19.55	29.45	167.11	+3.65	—0.009	—1.420	+1.90
	1	20.15	44.33	166.69	+1.19	+0.304	—1.362	—0.29
	2	21.52	57.90	169.07	+1.78	+0.406	—1.223	+0.39
Settembre	30	21.10	67.70	168.90	+0.56	+0.736	—1.072	—0.54
	30	21.41	75.24	169.37	+0.27	+0.844	—0.934	—0.73
	26	19.28	82.83	170.69	+1.20	+0.933	—0.779	+0.29
	25	19.15	89.61	169.97	+0.11	+0.997	—0.632	—0.74
	26	20. 0	90.62	171.11	+1.08	+1.006	—0.609	+0.24
	24	18.55	94.68	170.17	+0.10	+1.033	—0.518	—0.71
	30	23.10	96.88	170.73	—0.90	+1.049	—0.466	—1.70
	25	20. 6	102.02	170.74	+0.24	+1.073	—0.348	—0.53
	25	20.43	111.02	171.51	+1.20	+1.095	—0.137	+0.46
	24	20.38	119.73	171.37	+0.73	+1.090	+0.064	±0.00
	22	19.55	129.07	170.70	+0.45	+1.057	+0.266	—0.30
	24	21.29	132.14	172.14	+1.75	+1.038	+0.362	+0.99
	20	18.54	133.97	169.52	—0.32	+1.028	+0.377	—1.09
	22	20.43	140.74	171.52	+1.73	+0.983	+0.517	+0.93
	20	19.28	142.24	169.67	+0.22	+0.969	+0.546	—0.59
	18	19.28	162.00	168.79	+1.01	+0.759	+0.892	+0.04
	20	20.50	162.18	170.17	+2.17	+0.757	+0.895	+1.20
	25	0.16	162.82	168.04	—0.48	+0.753	+0.911	—1.46
	20	21.30	171.91	169.17	+2.10	+0.625	+1.028	+1.02
	18	21.13	187.54	166.86	+1.77	+0.383	+1.184	+0.49
	16	20.24	195.30	164.74	+0.86	+0.253	+1.232	—0.52
	18	21.50	196.53	166.91	+2.91	+0.233	+1.239	+1.51
	20	23.23	199.39	166.02	+2.14	+0.183	+1.249	+0.70
	14	19.25	200.59	161.25	—1.60	+0.156	+1.252	—3.07
	16	20.55	202.84	164.67	+1.73	+0.124	+1.259	+0.24
	14	19.35	203.02	162.85	+0.25	+0.109	+1.260	—1.25
	20	23.45	204.74	165.24	+2.03	+0.091	+1.263	+0.51
	14	20.10	211.54	162.15	+0.63	—0.021	+1.266	—0.99
	16	21.40	213.79	162.80	+1.22	—0.062	+1.265	—0.43
	16	22. 2	219.14	162.07	+1.19	—0.158	+1.253	—0.54
	14	20.49	221.03	161.40	—1.02	—0.180	+1.248	—0.73
	20	0.55	221.76	165.70	+4.64	—0.204	+1.246	+2.87
	14	21.25	229.79	162.05	+2.80	—0.336	+1.196	+0.91
	20	1.40	232.71	162.94	+3.22	—0.388	+1.183	+1.29
	16	21.55	237.08	160.62	+2.24	—0.457	+1.143	+0.24
	16	23.15	237.13	161.90	+3.20	—0.458	+1.143	+1.20
	20	2.25	243.64	161.77	+3.29	—0.560	+1.080	+0.80
	14	22.38	247.54	160.15	+2.92	—0.616	+1.034	+0.78
	13	22. 0	247.61	158.55	+1.47	—0.617	+1.032	—0.67
	16	0. 0	247.84	162.87	+5.33	—0.620	+1.030	+3.19

Settembre	14	23^h10^m	$255^0 33$	$158^0 25$	$+1^0 77$	-0.722	$+0.927$	-0.46
	12	22.20	262. 32	156. 38	+0. 82	−0.811	+0.820	−1. 49
	13	23.15	265. 86	157. 22	+1. 69	−0.851	+0.763	−0. 66
	12	22.52	270. 11	156. 03	+1. 09	−0.898	+0.688	−1. 31
Ottobre	13	19.29	271. 87	158. 47	+1. 74	−0.923	+0.669	−0. 68
	12	19.27	281. 56	157. 50	+1. 26	−1.007	+0.479	−1. 24
Settembre	12	23.54	285. 19	156. 13	+1. 99	−1.022	+0.392	−0. 53
Ottobre	10	19. 0	295. 58	156. 65	+0. 87	−1.084	+0.176	−1. 71
	12	20.33	297. 60	158. 35	+1. 86	−1.092	+0.130	−0. 73
	10	19.14	298. 98	157. 38	+1. 55	−1.094	+0.098	−1. 04
	11	20. 4	300. 72	158. 85	+3. 13	−1.099	+0.058	+0. 53
	12	21.29	311. 21	159. 38	+3. 60	−1.102	−0.187	+0. 98
	11	20.50	311. 90	159. 70	+3. 90	−1.100	−0.204	+1. 28
	13	22.25	314. 64	158. 95	+3. 15	−1.095	−0.268	+0. 54
	11	21. 3	315. 06	158. 47	+2. 60	−1.092	−0.278	−0. 01
	10	20.25	316. 23	158. 90	+2. 90	−1.088	−0.306	+0. 29
	10	20.58	324. 25	158. 55	+2. 22	−1.050	−0.494	−0. 37
	13	23.30	330. 43	157. 33	+0. 74	−1.008	−0.636	−1. 82
	10	22.20	344. 18	160. 45	+2. 64	−0.841	−0.930	+0. 21
Ottobre	4	18.50	353. 51	160. 37	+1. 58	−0.718	−1.093	−0. 76

17. L' error probabile di uno dei valori osservati di P risulta di $\pm 0°,768$: quelli di dp, $d\lambda$ $d\Theta$ sono rispettivamente $\pm$ 0°,0994, $\pm$ 0°,1226, $\pm$ 0°,1077. Combinando le correzioni $d\theta = 10\, d\Theta$ e $d\lambda$ coi valori supposti qui sopra per θ e per λ si ottengono i valori corretti delle coordinate della macchia nevosa,

$$\theta_0 = 30° + 10\, d\Theta = 29°,466 \pm 1°,077:$$
$$\lambda_0 = \;7 + \quad d\lambda = \;6°,147 \pm 0,\; 1226:$$

dove la longitudine si suppone numerata dalla medesima origine, che i valori ω del quadro precedente; di essa più tardi si determinerà la posizione rispetto alle macchie fisse del pianeta. Inoltre, poichè l'effemeride del sig. Marth dà per il 27 settembre a 0^h di Greenwich $p = 163°,23$, avremo per questa data, la quale assai prossimamente corrisponde al medio di tutte le osservazioni, il valore corretto della posizione della metà australe dell'asse di Marte veduta dalla Terra,

$$p_0 = 163°,23 + dp = 164°,90 \pm 0°,0994.$$

Per questo istante il luogo geocentrico di Marte dato dal *Nautical Almanac* essendo

$$\alpha = 22^h.\,49^m.\,31^s \quad \delta = -12°.\,41'.\,3'',$$

il valore di p_0 sopradetto determinerà per questo punto un circolo massimo della sfera celeste, sopra il quale deve trovarsi il punto P' della fig. 4, cioè la traccia della parte boreale dell'asse del pianeta, supposta indefinitamente prolungata.

18. Il grado di esattezza indicato per p_0 dal suo errore probabile $\pm$ 0°, 0994 non sarà forse raggiunto in realtà, e ciò a cagione degli errori individuali costanti inevitabili in un processo così delicato, come quello che ha servito alla determinazione delle posizioni P. Soltanto la combinazione di analoghi risultati ottenuti in diverse opposizioni di Marte potrà eliminare l'effetto di tali errori individuali. Al contrario i valori di $d\theta$ e di $d\lambda$ risultando esclusivamente da differenze degli angoli

di posizione, sembra che, data l'assoluta stabilità del centro della massa nevosa, non vi dovrebbe esser ragione di diffidare degli errori probabili qui sopra assegnati per le sue coordinate. Adottando il diametro polare di Marte assegnato da Kaiser ($9'', 387$ alla distanza 1) e supponendo $8'' 80$ per la parallasse orizzontale equatoriale del Sole, un grado di circolo massimo sul globo di Marte equivarrà a $0°, 533$ dell'equatore terrestre, o a circa 32 miglia italiane, o a chilometri 59. L'error probabile del luogo ottenuto per la macchia nevosa sarebbe dunque

nel senso del meridiano $59 \times 0, 1226 = 7, 13$ chilometri:

nel senso del parallelo $59 \times 1, 077 \times \sin\lambda = 6, 80$ chilometri.

Questa stima d'esattezza è tuttavia probabilmente esagerata, perchè la calotta nevosa di Marte durante le osservazioni ha cambiato notevolmente di grandezza e di forma, come più innanzi sarà dichiarato; questo indica inevitabilmente piccoli spostamenti del punto che l'osservatore ha dovuto considerare come centro dell'area splendente. Nè è lontana dalla probabilità la supposizione di qualche movimento di tutta la massa. Esaminando infatti la serie degli errori residui ε, si trovano certe persistenze di segno, che difficilmente possono provenire da una causa diversa da quelle or ora indicate.

19. Come vedemmo, gli angoli di posizione della macchia polare non possono dare, in una opposizione sola del pianeta, la compiuta determinazione del suo asse. Nella speranza di poter giungere ad un soddisfacente risultato, per ottenere anche il valore di $d\delta$, ebbi ricorso ad un altro genere di osservazioni diverso da quello finora considerato. Sia P (fig. 6) il polo australe del pianeta, PN la projezione del meridiano centrale, MQT il parallelo percorso durante la rotazione da una macchia non molto lontana dall'equatore. È manifesto, che se, stando la macchia nel punto M qualunque del suo corso diurno, s'immagina abbassata da essa sul piano diametrale NS la perpendicolare MI, le variazioni di luogo del punto I nelle diverse positure di M a parità di circostanze saranno tanto maggiori, quanto sarà più piccola l'inclinazione δ dell'asse sulla linea visuale. Scegliendo opportunamente la macchia da osservare si potrà ottenere, che il valore di δ influisca con quasi tutta la sua grandezza sulla variazione della distanza OI; ed inversamente fare che le misure di OI, eseguite in posizioni molto diverse del punto M, somministrino una determinazione abbastanza vantaggiosa di δ.

20. Essendo τ l'angolo sferico MPQ, σ la distanza polare $PM = PQ$ della macchia, ρ il raggio del disco, e chiamando, come al solito, δ l'arco PO: avremo

$$\frac{OI}{\rho} = \cos\sigma \sin\delta - \cos\tau \,.\, \sin\sigma \cos\delta$$

ovvero, posto $\cos\sigma \sin\delta = x$, $\sin\sigma \cos\delta = y$,

$$\frac{OI}{\rho} = x - y \cos\tau. \qquad (b)$$

Ogni misura di OI darà dunque un'equazione fra x ed y. Avuti i quali, σ e δ si otterranno dalle

$$\sin(\delta + \sigma) = x + y, \qquad \sin(\delta - \sigma) = x - y.$$

Onde tradurre in effetto quest'idea, scelsi come oggetto d'osservazione quella cospicua macchia oscura di Marte che fu già designata da Maedler e da Kaiser colla lettera d,

che è nominata *Mare di Lockyer* sulla carta di Proctor, e sulla nostra *Lago del Sole.* Essa è quasi esattamente rotonda; per la sua nerezza si può facilmente osservare anche presso gli orli del disco; ed è molto adatta al nostro scopo per la sua non grande distanza dall'equatore del pianeta. Il suo diametro apparente essendo di circa 2″ nel tempo delle osservazioni, si poteva intersecarla molto bene coi fili. L'osservazione si faceva nel seguente modo (fig. 7). Disposto il filo trasversale del micrometro press' a poco parallelamente al diametro KR passante pel centro della macchia nevosa, si misuravano cogli altri fili ad esso perpendicolari le due distanze KU, RU della corda MH dai punti K, R: la semidifferenza delle quali dava immediatamente la distanza UO di detta corda dal centro del disco.

21. Sia ora P il luogo del polo australe, NS il meridiano centrale nell'istante dell'osservazione: abbassando da M la perpendicolare MI, il problema è di dedurre OI dalla distanza misurata OU. Detto Π l'angolo ROP (che è somministrato direttamente dalle osservazioni combinate colla direzione ora ben conosciuta di PN) sarà $OV = OU \sec\Pi$, $IV = MI \tang\Pi$, quindi

$$\frac{OI}{\rho} = \frac{OU}{\rho}\sec\Pi - \frac{MI}{\rho}\tang\Pi\,,$$

o, a cagione di $MI = \rho\sin\tau\sin\sigma$,

$$\frac{OI}{\rho} = \frac{OU}{\rho}\sec\Pi - \sin\tau\sin\sigma\tang\Pi\,.$$

Posto ora $OU = \mu$, abbiamo dall'equazione (b) qui sopra

$$x - y\cos\tau = \frac{\mu}{\rho}\sec\Pi - \sin\tau\sin\sigma\tang\Pi$$

ossia $$\cos\sigma\sin\delta - \sin\sigma\cos\delta\cos\tau + \sin\sigma\tang\Pi\sin\tau = \frac{\mu}{\rho}\sec\Pi\,. \qquad (b')$$

Ogni osservazione di OU o di μ darà un'equazione simile a questa fra le incognite σ e δ. Onde ridurle a miglior forma, poniamo

$$\delta + \sigma = 2\alpha\,, \qquad \delta - \sigma = 2\beta:$$

avremo

$$2\cos\sigma\sin\delta = \sin 2\alpha + \sin 2\beta\,, \quad 2\sin\sigma\cos\delta = \sin 2\alpha - \sin 2\beta\,, \quad \sin\sigma = \sin(\alpha-\beta)\,,$$

e la (b') diventerà

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \cos\tau\,(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + 2\sin(\alpha-\beta)\tang\Pi\sin\tau = \frac{2\mu}{\rho}\sec\Pi$$

o moltiplicando per $\cos\Pi$, e facendo qualche riduzione,

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\tau\cos\Pi\,.\,\sin 2\alpha + \cos^2\tfrac{1}{2}\tau\cos\Pi\sin 2\beta + \sin(\alpha-\beta)\sin\Pi\sin\tau = \frac{\mu}{\rho}\,.$$

Differenziando ora per ottenere le variazioni di μ in funzione di quelle di α e di β, si ha

$$\begin{aligned} d\mu = \rho d\alpha &\left\{ 2\cos 2\alpha\sin^2\tfrac{1}{2}\tau\cos\Pi + \cos(\alpha-\beta)\sin\tau\sin\Pi \right\} \\ + \rho d\beta &\left\{ 2\cos 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\tau\cos\Pi - \cos(\alpha-\beta)\sin\tau\sin\Pi \right\} \end{aligned} \qquad (c)$$

Partendo da valori approssimati di α e di β (ossia di σ e di δ) si ricaveranno per determinare le correzioni di queste quantità tante equazioni di condizione, quante sono le misure eseguite della quantità μ.

22. A cagione del cattivo tempo e di altri impedimenti non si poterono fare che sei misure della quantità μ. I risultati delle medesime, e gli elementi corrispondenti di riduzione stanno nella tavoletta seguente. Le quattro prime colonne non han bisogno di spiegazione. Nella quinta gli angoli τ sono stati calcolati sottraendo dalla longitudine areografica del centro (cioè da ω) la longitudine del centro del Lago del Sole, che fu supposta di 90°, 18 rispetto alla origine stessa, da cui si sono contati gli ω. La colonna P dà la posizione indicata dal micrometro pel filo KR durante l'operazione. La colonna p dà la posizione dell'asse di Marte, cioè della linea NPS, apportandovi la correzione già da noi precedentemente determinata, + 1°, 67. La differenza P — p dà gli angoli Π della penultima colonna. Nell'ultima finalmente stanno gli angoli δ quali risultano dall'effemeride di Marth.

Data e tempo siderale 1877	μ	ρ	ω	τ	P	p	Π	δ
sett. 22. 20^h,52^m	+2″,822	11″,565	142°,93	+52°,75	171°,52	164°,45	+7°,07	66°,79
sett. 24. 19, 5	+0, 384	11, 400	97, 11	+ 6, 93	170, 17	164, 67	+5, 50	66, 67
sett. 25. 19, 26	+0, 734	11, 312	92, 29	+ 2, 11	169, 97	164, 77	+5, 20	66, 60
sett. 26. 20, 3	+0, 168	11, 224	91, 35	+ 1, 17	170, 69	164, 85	+5, 84	66, 53
sett. 30. 22, 48	+0, 099	10, 843	91, 52	+ 1, 34	169, 37	165, 11	+4, 26	66, 26
ott. 1. 19, 52	+2, 489	10, 756	38, 74	—61, 44	164, 81	165, 16	—0, 35	66, 18

23. Partendo dagli angoli δ anzi riferiti e ponendo provvisoriamente $\sigma = 65°$, il calcolo delle equazioni analoghe a (c) di cui stimo inutile riferire qui tutti i particolari, diede finalmente

$$
\begin{aligned}
-0'',184 &= +\ \ 7{,}700\, d\delta - 10{,}238\, d\sigma \\
-0,\ 095 &= +11{,}273\, d\delta - 11{,}273\, d\sigma \\
+0,\ 418 &= +11{,}312\, d\delta - 11{,}312\, d\sigma \\
-0,\ 132 &= +11{,}224\, d\delta - 11{,}224\, d\sigma \\
-0,\ 134 &= +10{,}843\, d\delta - 10{,}843\, d\sigma \\
+0,\ 159 &= +\ \ 6{,}100\, d\delta - \ \ 9{,}771\, d\sigma
\end{aligned}
$$

I valori di $d\delta$ e di $d\sigma$ che risultano da queste equazioni, risolute col metodo dei minimi quadrati, sono, ridotti in gradi e decimali di grado,

$$
\begin{aligned}
d\delta &= -0°, 364 \pm 2°, 67 \\
d\sigma &= -0°, 365 \pm 2°, 46:
\end{aligned}
$$

molto inferiori, come si vede, ai loro valori probabili, e non hanno che pochissimo peso. I forti errori ± 2°, 67 e ± 2°, 46 sono dovuti al numero affatto insufficiente delle misure, delle quali quattro corrispondono alla posizione centrale della macchia e due sole furono fatte presso i lembi, cioè la prima e l'ultima. Si vede però, che accrescendo sufficientemente il numero delle misure, la determinazione di $d\delta$, e

quindi la completa determinazione dell'asse di Marte può anche ottenersi con questo metodo. L'error probabile di un μ misurato risulta qui $\pm 0'' 177$, ciò che fa $\pm 0^\circ, 94$ di circolo massimo, quando si assuma per raggio del disco di Marte il medio dei valori di ρ corrispondenti alle fatte osservazioni, vale a dire $10'', 177$. Tale è quindi l'errore che si può aspettare nelle misure micrometriche di questo genere; e si vede come col ripeterle su di una medesima macchia più volte sia possibile ottenere la sua posizione entro una frazione di grado di circolo massimo del pianeta.

24. Non avendo dunque potuto, per cause da me indipendenti, ottenere una correzione di δ per esattezza comparabile alla correzione che si è avuto per p, converrà attendere la prossima opposizione del 1879. Intanto ho calcolato le mie misure e determinazioni areografiche coi valori di δ dati dal sig. Marth nella sua effemeride, e che dipendono dalla posizione dell'asse stabilita dal sig. Oudemans. L'effetto di un errore mediocre di δ sulle posizioni dei punti che si voglion determinare sulla superficie del pianeta è affatto insensibile per le longitudini areografiche, come l'esposizione del metodo usato dimostrerà. Invece esso pesa tutto intero sulle latitudini areografiche; ma l'errore prodotto è per tutti i punti determinati una quantità costante, di cui nel 1879 si potrà facilmente definire il valore.

Capitolo II.

Determinazione del luogo areografico dei punti fondamentali e costruzione della carta.

Sezione I.

Osservazioni e loro riduzione.

25. Le carte finora pubblicate della superficie di Marte sono fondate quasi esclusivamente sopra disegni fatti a vista d'occhio. Che con questo modo si possa raggiungere un certo grado d'approssimazione, lo ha provato Kaiser nella sua eccellente Memoria su Marte inserita nel Tomo III delle *Osservazioni di Leyda*, pag. 52 e segg. Non posso tuttavia sottoscrivere all'opinione di quell'illustre astronomo, che siano impossibili misure micrometriche sulle macchie di Marte (pag. 54 dell'opera citata). L'investigazione fatta poc'anzi sul valore di δ e sulla latitudine del Lago del Sole ha mostrato, che anche in condizioni non tutte favorevoli si può giungere, con una osservazione isolata, a determinare la distanza di una macchia dal centro con l'error probabile di circa un grado di circolo massimo del pianeta, almeno finchè questo ha un diametro apparente non minore di 20″ (§ 23). Ed anche quando l'inesattezza fosse maggiore, si può sempre diminuirla quasi a piacere, facendo sulla stessa macchia molte osservazioni. Le prove ch' io ho fatto mi danno speranza, che fra non molti anni si conosceranno le posizioni areocentriche di molti punti di Marte con errore minore di un grado. Ma per giungere a questo scopo conviene non lasciarsi spaventare dall' apparente inesattezza dei risultati ottenuti, ed è necessario sopratutto calcolare le misure con intiero rigore, affinchè non rimangano nei risultati altri errori, che quelli inevitabili delle osservazioni. Non è lecito per esempio, nel formare la carta, supporre che la calotta nevosa occupi col suo centro esattamente il luogo del polo.

26. Volendo fondare la topografia di Marte su basi esatte, conviene seguire lo stesso principio, che si usa per la topografia terrestre. Un certo numero di punti distinti e facili a riconoscere, distribuiti colla maggior possibile uniformità su tutta la superficie del pianeta, si prende come rete fondamentale, e si cerca di ottenerne la posizione colla massima esattezza. Fra questi poi s'interpolano le linee del tracciamento ed i minuti particolari a semplice estimazione d'occhio. La composizione, la misura, il calcolo di una tal rete, e la formazione di un catalogo di latitudini e di longitudini areografiche è il secondo problema che si presenta nella descrizione geometrica di Marte.

27. La determinazione del luogo areografico di un punto della superficie si ottiene in modo semplicissimo notando il tempo, in cui quel punto traversa in L (fig. 8) il meridiano centrale, e misurando in quell'istante col micrometro la distanza $LO=\mu$ che lo separa dal centro del disco. Essendo infatti per quel momento ω la longitudine areografica del centro del disco, sarà ancora ω la longitudine cercata del punto considerato, ogni volta che si adoperi per zero delle longitudini la stessa

origine arbitraria, che ha servito a computare gli ω. Chiamando poi (come sempre si è fatto) δ la distanza polare del centro del disco (cioè l'arco che si projetta in PO) e σ la distanza del punto dato dal polo australe, avremo manifestamente arco $LO = \delta - \sigma$; e fatto il raggio del disco $= \rho$,

$$\frac{\mu}{\rho} = \sin(\delta - \sigma) \qquad (d)$$

con che si otterrà σ conoscendo δ. Il segno di μ supponiamo positivo quando L sta al di sopra del centro O, e negativo nel caso contrario. Qui è manifesto, che se δ è affetto da un errore costante ε, i σ così calcolati conterranno l'errore costante $-\varepsilon$, e le latitudini areografiche saranno pure affette dal medesimo errore.

28. L'istante del passaggio in L, e la misura di $LO = \mu$ non si possono ottenere direttamente coll'osservazione, nulla indicando sul disco del pianeta la direzione del diametro SPN. Se si potesse stabilire i fili di posizione nell'esatto parallelismo col diametro RK che passa pel centro R della macchia nevosa, sarebbe facile, osservando il passaggio in M del punto da determinarsi, e misurando la distanza MO, concluderne il passaggio per L e la distanza LO. Ma in pratica non è possibile assicurarsi del parallelismo suddetto senza perdere molto tempo: perchè la direzione OR varia ad ogni momento colla rotazione della macchia R intorno all'asse del pianeta. Io mi sono contentato quindi di stabilire questo parallelismo in modo approssimato, riservandomi di corregger col calcolo il piccolo errore che deriva dalla non completa esattezza del medesimo. Poniamo che RZ indichi la direzione prossimamente parallela a RK. Il passaggio del punto da determinare si stimava avvenuto, quando collocato questo punto e la macchia nevosa in mezzo ai fili di posizione, la linea fra loro condotta sembrava esattamente parallela a questi fili. Il punto a determinare stava allora manifestamente in I. Così dunque il passaggio realmente era osservato quando il punto stava in I sulla linea RZ; e la distanza dal centro era contemporaneamente IX compresa fra I e OX perpendicolare abbassata da O sopra RZ. Gli angoli ROS, ORZ essendo molto piccoli, la misura della distanza LO non domanderà alcuna correzione percettibile dipendente dalla sostituzione di IX a LO: ma il passaggio dovrà esser corretto per la sostituzione del punto I osservato al punto L, che realmente si doveva osservare.

29. Indichiamo come sopra con p l'angolo di posizione del meridiano centrale NS: con Π l'angolo ROS, eccesso della posizione della macchia nevosa su quella del polo australe: con π l'angolo di posizione della linea RZ, il quale si legge sul circolo del micrometro. Noi avremo

$$\text{posizione di RK} = p + \Pi:$$
$$\text{angolo ORX} = \pi - (p + \Pi):$$

il qual angolo, che è l'errore di collocazione del micrometro, chiameremo ε. Esso si potrà facilmente ottenere, perchè π è dato dal micrometro, p si ha dall' effemeride (corretta di $+ 1°, 67$) di Marth, e Π si può agevolmente calcolare nel modo indicato al § 12 impiegando per la macchia nevosa le coordinate λ e θ corrette col calcolo del capitolo precedente. Ciò posto è chiaro, che si ha con sufficiente esattezza

$$ML = \mu \sin \Pi,$$
$$MI = RM \sin \varepsilon = (RO - MO) \sin \varepsilon = (\rho \sin \delta - \mu) \sin \varepsilon.$$

potendosi fare senza grave errore $RO = \rho \sin\delta$. Ne ricaviamo

$$IL = ML - MI = \mu \sin\Pi - \rho \sin\delta \sin\varepsilon + \mu \sin\varepsilon$$

od ancora senza error sensibile

$$IL = \mu \sin(\Pi + \varepsilon) - \rho \sin\delta \sin\varepsilon:$$

e poichè per definizione $\varepsilon = \pi - p - \Pi$, $\Pi + \varepsilon = \pi - p$, nasce

$$IL = \mu \sin(\pi - p) - \rho \sin\delta \sin\varepsilon.$$

Dividendo per $\rho \sin\sigma$, che è il raggio apparente del parallelo descritto dal punto che si vuol determinare, e moltiplicando per 57°, 296 si otterrà finalmente in gradi la correzione della longitudine, cioè la quantità da sottrarsi [1] dalla longitudine di L (che è ω) per avere la longitudine cercata del punto I ossia θ:

$$\theta = \omega - \frac{57^\circ,296}{\sin\sigma} \left\{ \frac{\mu}{\rho} \sin(\pi - p) - \sin\delta \sin\varepsilon \right\}. \qquad (e)$$

30. I punti fondamentali da me scelti per l'applicazione di questo procedimento sono in numero di 62 e si possono riscontrare facilmente sulla carta principale unita a questa Memoria, dove stanno segnati ciascuno col proprio numero corrispondente a quello del catalogo che ne daremo più sotto. Non tutti sono definiti con egual precisione, e non tutti sono egualmente opportuni per esatte misure: nella strettezza del tempo e nella quasi totale novità degli oggetti che era costretto a misurare prima ancora di conoscerne bene la relazione cogli oggetti conosciuti e figurati sulle carte anteriori, io ho dovuto procedere in questa scelta molto sommariamente, e prendere ogni volta ciò che di meglio determinato si presentava al meridiano centrale in momenti di buona atmosfera senza cercare se punti più adatti potessero pigliarsi qualche mezz'ora prima o qualche mezz'ora dopo. La descrizione che qui sotto sarà data di ciascuno di essi indicherà senza ambiguità il significato delle osservazioni fatte. Per ciascuno è stato osservato almeno una volta il valore di ω e di μ: e per molti di essi parecchie volte in giorni differenti. Tutte queste osservazioni stanno disposte per ordine nelle prime colonne del quadro qui appresso. Seguono nelle altre i valori delle quantità $\frac{\mu}{\rho}$, Π, p, π, ε, della correzione totale, e dei valori di σ e di θ dedotti per ciascuna osservazione dalle formule (d) (e). Da ultimo sta sotto il titolo ΔT la quantità

$$-\frac{57^\circ,296}{\sin\sigma} \left\{ \frac{\mu}{\rho} \sin(\pi - p) - \sin\delta \sin\varepsilon \right\}$$

ridotta in tempo, cioè l'intervallo siderale, di cui il passaggio di ogni punto in L ha preceduto quello dello stesso punto in I; e finalmente sotto la rubrica T il tempo siderale di Milano del passaggio effettivo dei punti osservati al meridiano centrale NS, corretto dell'aberrazione. I dati di quest'ultima colonna serviranno più tardi a calcolare con maggior esattezza la durata della rotazione di Marte. L'error probabile di ciascuno dei tempi T non essendo (come sotto si vedrà) maggiore di $7^m,3$, in capo a pochi decennî si potrà da una ripetizione di osservazioni simili a queste ottenere la rotazione di Marte con un grado di precisione molto notabile, senza aver più bisogno di ricorrere alle dubbiose delineazioni di Hooke e di Huygens.

(1) Si noti che le longitudini crescono, sul disco di Marte, da M verso L, secondo le fatte convenzioni.

Calcolo delle posizioni areogr

N. d'ordine dei punti	Nome dei punti	Data e tempo siderale 1877	ω	$\frac{\mu}{\rho}$	Distanza σ dal polo australe	II	
1	Vertice d'Aryn	Ott. 4. 19h.25m	2°,02	—0,333	85°,44	—3°,28	1
2	Secondo corno del Golfo Sabeo . . .	Ott. 4. 19. 41	5, 91	—0,444	92, 37	—2, 87	1
3	Terra di Deucalione, istmo	Ott. 2. 18. 58	15, 60	—0,444	92, 52	—1, 77	1
	id.	Ott. 4. 20. 18	14, 90	. . . . .	. . . .	—1, 82	1
4	Terra di Deucalione, ombra	Ott. 2. 18. 58	15, 60	. . . . .	. . . .	—1, 77	1
	id.	Ott. 4. 20. 18	14, 90	—0,333	85, 44	—1, 82	1
5	Golfo delle Perle, bocca dell'Indo . .	Ott. 1. 19. 8	28, 04	—0,444	92, 60	—0, 24	1
	id.	Ott. 2. 19. 21	21, 19	—0,500	96, 12	—1, 00	1
	id.	Ott. 4. 20. 29	17, 57	—0,500	95, 97	—1, 53	1
6	Bocca dell'Idaspe	Ott. 2. 19. 40	25, 81	—0,333	85, 59	—0, 50	1
7	Capo degli Aromi	Ott. 1. 20. 0	40, 69	—0,250	80, 68	+1, 27	1
	id.	Ott. 2. 20. 14	34, 07	—0,286	82, 72	+0, 50	1
8	Capo delle Ore in Argyre	Ott. 1. 20. 0	40, 69	+0,250	51, 72	+1, 27	1
	id.	Ott. 2. 20. 32	38, 45	+0,286	49, 52	+1, 03	1
9	Capo delle Grazie in Argyre	Ott. 1. 21. 0	55, 28	+0,500	36, 20	+3, 03	1
	id.	Ott. 2. 21. 30	52, 55	+0,500	36, 12	+2, 69	1
10	Golfo dell'Aurora, bocca del Gange . .	Ott. 1. 21. 5	56, 49	—0,333	85, 67	+3, 12	1
	id.	Ott. 2. 21. 35	53, 77	—0,400	89, 70	+2, 87	1
11	Punta dell'Aurea Cherso	Ott. 1. 21. 18	59, 66	—0,047	68, 73	+3, 50	1
	id.	Ott. 2. 22. 14	63, 24	+0,094	60, 74	+3, 84	1
12	Primo punto di Thaumasia	Sett. 30. 21. 15	68, 92	+0,000	66, 28	+4, 40	1
	id.	Ott. 1. 21. 33	63, 30	+0,060	66, 20	+3, 87	1
	id.	Ott. 2. 22. 28	66, 64	+0,000	66, 16	+4, 19	1
13	Confluente del Chrysorroas col Nilo .	Nov. 4. 21. 30	73, 83	—0,714	108, 88	+4, 97	1
14	Lago del Sole, centro	Sett. 25. 19. 11	88, 64	+0,065	62, 90	+5, 86	1
	id.	Sett. 26. 19. 59	90, 37	+0,015	65, 70	+5, 94	1
	id.	Sett. 30. 22. 48	91, 52	+0,009	65, 75	+6, 04	1
15	Lago della Fenice, centro	Sett. 24. 19. 33	103, 92	—0,088	71, 72	+6, 44	1
	id.	Sett. 25. 20. 22	105, 91	—0,049	69, 44	+6, 50	1
16	Bocca del Fasi	Sett. 24. 20. 0	110, 49	+0,400	43, 11	+6, 66	1
	id.	Sett. 25. 20. 33	108, 59	+0,333	47, 14	+6, 63	1

nti fondamentali.

p+Π	π	ε	Correzione	Longitudine corretta θ	Equazione della luce	ΔT	T, passaggio dei punti al meridiano centrale (Siderale Milano)
161°,96	160°,30	—1°,66	—3°,09	358°,93	—4m	—13m	Ott. 4. 19h. 8m
162, 37	160, 30	—2, 07	—3, 44	2, 47	—4	—14	Ott. 4. 19. 23
163, 42	165, 54	+2, 12	+2, 00	17, 60	—4	+ 8	Ott. 2. 19. 2
163, 42	164, 80	+1, 38	+1, 01	15, 91	—4	+ 4	Ott. 4. 20. 18
163, 42	165, 54	+2, 12	+1, 96	17, 56	—4	+ 8	Ott. 2. 19. 2
163, 42	164, 80	+1, 38	+1, 06	15, 96	—4	+ 4	Ott. 4. 20. 18
164, 92	164, 54	—0, 38	—0, 60	27, 44	—4	— 2	Ott. 1. 19. 2
164, 19	165, 24	+1, 05	+0, 93	21, 82	—4	+ 4	Ott. 2. 19. 21
163, 71	164, 80	+1, 09	+0, 73	18, 30	—4	+ 3	Ott. 4. 20. 28
164, 69	165, 24	+0, 55	+0, 50	26, 31	—4	+ 2	Ott. 2. 19. 38
166, 43	164, 54	—1, 89	—1, 81	38, 88	—4	— 7	Ott. 1. 19. 49
165, 69	167, 04	+1, 35	+1, 72	35, 79	—4	+ 7	Ott. 2. 20. 17
166, 43	164, 54	—1, 89	—1, 97	38, 72	—4	— 8	Ott. 1. 19. 48
166, 22	167, 04	+0, 82	+0, 25	38, 70	—4	+ 1	Ott. 2. 20. 29
168, 19	166, 84	—1, 35	—3, 44	51, 84	—4	—14	Ott. 1. 20. 42
167, 88	167, 04	—0, 84	—2, 81	49, 74	—4	—12	Ott. 2. 21. 14
168, 28	166, 84	—1, 44	—0, 74	55, 75	—4	— 3	Ott. 1. 20. 58
168, 06	167, 04	—1, 02	—0, 18	53, 59	—4	— 1	Ott. 2. 21. 30
168, 66	166, 84	—1, 82	—1, 75	57, 91	—4	— 7	Ott. 1. 21. 7
169, 03	169, 14	+0, 11	—0, 30	62, 94	—4	— 1	Ott. 2. 22. 9
169, 51	168, 90	—0, 61	—0, 60	68, 32	—4	— 2	Sett. 30. 21. 9
169, 03	166, 84	—2, 19	—2, 16	61, 14	—4	— 9	Ott. 1. 21. 20
169, 38	169, 14	—0, 24	—0, 24	66, 40	—4	— 1	Ott. 2. 22. 23
166, 97	170, 17	+3, 20	+9, 26	83, 09	—5	+38	Nov. 4. 22. 3
170, 63	170, 74	+0, 11	—0, 32	88, 32	—3	— 1	Sett. 25. 19. 7
170, 79	170, 14	—0, 65	—0, 74	89, 63	—3	— 3	Sett. 26. 19. 53
171, 15	169, 20	—1, 95	—1, 97	89, 55	—4	— 8	Sett. 30. 22. 36
171, 11	170, 27	—0, 84	—0, 31	103, 61	—3	— 1	Sett. 24. 19. 29
171, 27	172. 14	+0, 87	+1, 25	107, 16	—3	+ 5	Sett. 25. 20. 24
171, 33	170, 27	—1, 06	—4, 74	105, 75	—3	—19	Sett. 24. 19. 38
171, 40	172, 14	+0, 74	—2, 61	105, 98	—3	—10	Sett. 25. 20. 20

Calcolo delle posizioni areogr

N. d'ordine dei punti	Nome dei punti	Data e tempo siderale 1877		ω	$\frac{\mu}{\rho}$	Distanza σ dal polo australe	Π	
17	Colonne d'Ercole, bocca esterna . . .	Sett. 24.	20h.54m	123°,62	+0,400	43°,11	+6°,66	164
	id.	Sett. 25.	21. 25	121, 63	+0,333	47, 14	+6, 68	164
18	Centro d'Icaria	Sett. 25.	21. 25	121, 23	+0,250	52, 14	+6, 68	164
19	1° punto del Mare delle Sirene . . .	Sett. 22.	20. 0	130, 28	+0,130	59, 36	+6, 55	164
	id.	Sett. 24.	21. 30	132, 38	+0,151	57, 99	+6, 48	16
20	1° punto di Thyle I.a	Ott. 27.	20. 35	143, 84	+0,630	24, 92	+6, 09	16
21	Colonne d'Ercole, bocca interna . . .	Sett. 22.	20. 25	136, 37	. . . . .	. . . .	+6, 37	164
	id.	Sett. 24.	22. 5	140, 89	. . . . .	. . . .	+6, 17	164
22	Centro di Thyle I.a	Ott. 27.	21. 39	159, 38	+0,630	24, 92	+5, 10	16
23	Base australe d'Atlantide I.a . . .	Sett. 20.	20. 35	158, 53	+0,250	52, 46	+5, 16	164
24	1° punto del Mare Cimmerio	Sett. 18.	19. 35	163, 70	+0,250	52, 56	+4, 70	16
	id.	Sett. 20.	21. 5	165, 83	+0,250	52, 46	+4, 60	16
25	Golfo dei Titani	Sett. 20.	21. 20	169, 48	—0,085	71, 83	+4, 18	164
26	Ult.o punto del Mar delle Sirene . .	Sett. 18.	20. 20	174, 65	+0,084	62, 40	+3, 73	16
	id.	Sett. 20.	21. 45	175, 56	+0,000	66, 93	+3, 68	16
27	Stretto d'Ulisse, mezzo	Ott. 21.	19. 43	193, 01	+0,750	15, 92	+1, 90	16
28	Punto sulla riva australe dell'Oceano	Sett. 16.	19. 50	187, 04	—0,500	97, 12	+2, 52	16
29	Fiume dei Lestrigoni, bocca sull'Oceano	Ott. 21.	20. 16	201, 28	—0,500	94, 50	+0, 94	16
30	Golfo dei Lestrigoni, intimo seno . .	Sett. 14.	19. 28	201, 32	—0,124	74, 33	+0, 97	16
	id.	Sett. 16.	21. 0	204, 06	—0,042	69, 50	+0, 70	16
	id.	Sett. 20.	23. 15	197, 45	—0,085	71, 83	+1, 38	16
31	Scamandro, bocca sul Mar Cronio . .	Ott. 20.	19. 39	206, 13	+0,500	34, 59	+0, 40	16
	id.	Sett. 16.	20. 43	199, 92	. . . . .	. . . .	+1, 12	16
32	Scamandro, punto di mezzo	Sett. 16.	20. 43	199, 92	. . . . .	. . . .	+1, 12	16
	id.	Ott. 20.	19. 39	206, 13	+0,400	41, 02	+0, 40	16
33	Fiume dei Ciclopi, bocca sull'Oceano	Ott. 20.	19. 46	207, 83	—0,600	101, 46	+0, 22	1
	id.	Ott. 21.	20. 36	206, 14	—0,714	110, 08	+0, 40	1
34	Base australe d'Esperia	Sett. 14.	20. 10	211, 54	. . . . .	. . . .	—0, 11	1
35	Capo boreale di Thyle II.	Ott. 20.	20. 36	219, 98	+0,600	27, 72	—1, 13	1

ati fondamentali.

p+II	π	ε	Correzione	Longitudine corretta θ	Equazione della luce	ΔT	T, passaggio dei punti al meridiano centrale (Siderale Milano)	
171°,33	171°,37	+0°,04	— 3°,86	119°,76	—3m	—16m	Sett. 24.	20h.35m
171, 45	171, 14	—0, 31	— 3, 51	117, 72	—3	—14	Sett. 25.	21. 8
171, 45	171, 14	—0, 31	— 2, 38	118, 85	—3	—10	Sett. 25.	21. 12
171, 00	170, 57	—0, 43	— 1, 23	129, 05	—3	— 5	Sett. 22.	19. 52
171, 15	171, 37	+0, 22	— 0, 82	131, 56	—3	— 3	Sett. 24.	21. 24
169, 53	167, 20	—2, 33	—10, 79	133, 05	—4	—44	Sett. 27.	19. 47
170, 82	170, 57	—0, 25	— 2, 23	134, 14	—3	— 9	Sett. 22.	20. 13
170, 84	171, 77	+0, 93	— 1, 13	139, 76	—3	— 5	Sett. 24.	21. 57
168, 54	167, 20	—1, 34	— 8, 59	150, 79	—5	—35	Ott. 27.	20. 59
169, 37	171, 47	+2, 10	+ 0, 20	158, 73	—3	+ 1	Sett. 20.	20. 33
168, 67	169, 31	+0, 64	— 0, 93	162, 77	—3	— 4	Sett. 18.	19. 28
168, 81	171, 47	+2, 66	+ 0, 86	166, 69	—3	+ 4	Sett. 20.	21. 6
168, 39	171, 47	+3, 08	+ 3, 69	173, 17	—3	+15	Sett. 20.	21. 32
167, 70	167, 70	+0, 00	— 0, 18	174, 47	—3	— 1	Sett. 18.	20. 16
167, 89	168, 97	+1, 08	+ 0, 88	176, 44	—3	+ 4	Sett. 20.	21. 46
166, 20	163, 40	—2, 80	— 7, 00	186, 01	—4	—29	Ott. 21.	19. 10
166, 22	165, 37	—0, 85	+ 0, 04	187, 08	—3	± 0	Sett. 16.	19. 47
165, 24	163, 40	—1, 84	— 2, 16	199, 12	—4	— 9	Ott. 21.	20. 3
164, 34	162, 95	—1, 39	— 1, 39	199, 93	—3	— 6	Sett. 14.	19. 19
164, 40	164, 93	+0, 53	+ 0, 62	204, 68	—3	+ 3	Sett. 16.	21. 0
165, 59	165, 57	—0, 02	+ 0, 09	197, 54	—3	± 0	Sett. 20.	23. 12
164, 82	162, 00	—2, 82	— 2, 30	203, 83	—4	— 9	Ott. 20.	19. 26
164, 82	164, 93	+0, 11	— 0, 85	199, 07	—3	— 3	Sett. 16.	20. 37
164, 82	164, 93	+0, 11	— 0, 59	199, 33	—3	— 2	Sett. 16.	20. 38
164, 82	162, 00	—2, 82	— 2, 47	203, 66	—4	—10	Ott. 20.	19. 25
164, 64	162, 00	—2, 64	— 4, 16	203, 67	—4	—17	Ott. 20.	19. 25
164, 70	163, 40	—1, 30	— 1, 85	204, 29	—4	— 8	Ott. 21.	20. 24
163, 26	161, 45	—1, 81	— 1, 51	210, 03	—3	— 6	Sett. 14.	20. 1
163, 29	162, 00	—1, 29	+ 0, 56	220, 54	—4	+ 2	Ott. 20.	20. 34

Calcolo delle posizioni areogra

N. d'ordine dei punti	Nome dei punti	Data e tempo siderale 1877	ω	$\frac{\mu}{\rho}$	Distanza σ dal polo australe	II	
36	Centro di Thyle II.	Ott. 21. 21h.33m	220°,00	+0,700	20,°07	—1°,13	164
37	Golfo dei Ciclopi	Sett. 14. 20. 55	222, 49	—0,166	76, 78	—1, 30	163
	id.	Sett. 15. 21. 55	227, 25	. . . . .	. . . .	—1, 87	163
	id.	Sett. 16. 22. 35	227, 40	. . . . .	. . . .	—1, 87	163
	id.	Sett. 20. 24. 35	217, 63	—0,198	78, 36	—0, 88	164
38	Primo punto del Mar Tirreno	Sett. 14. 21. 4	224, 68	+0,305	49, 48	—1, 66	163
	id.	Sett. 16. 22. 23	224, 24	+0,299	49, 75	—1, 54	163
	id.	Sett. 20. 25. 0	222, 98	+0,167	57, 33	—1, 44	164
39	Centro d' Esperia	Sett. 14. 21. 30	231, 01	±0,000	67, 21	—2, 26	163
40	Bocca australe dello Xanto	Sett. 14. 21. 33	231, 74	+0,500	37, 21	—2, 38	163
	id.	Sett. 15. 22. 14	231, 87	. . . . .	. . . .	—2, 41	163
	id.	Sett. 20. 25. 20	227, 84	+0,444	40, 53	—1, 97	164
41	Ultimo punto del Mare Cimmerio . .	Sett. 14. 21. 50	235, 87	—0,167	76, 78	—2, 84	163
	id.	Sett. 20. 25. 48	234, 65	—0,286	83, 53	—2, 73	164
42	Base settentrionale d' Esperia	Sett. 13. 22. 25	253, 69	. . . . .	. . . .	—4, 55	163
	id.	Sett. 14. 22. 35	246, 81	—0,167	76, 78	—3, 86	163
43	Piccola Sirte	Sett. 12. 22. 20	262, 32	—0,353	87, 95	—5, 16	163
	id.	Sett. 13. 22. 38	256, 80	—0,250	81, 73	—4, 77	163
	id.	Sett. 14. 23. 14	256, 30	—0,333	86, 68	—4, 76	163
	id.	Sett. 15. 23. 55	256, 44	—0,200	78, 70	—4, 67	163
44	Capo Circeo in Ausonia	Sett. 13. 23. 8	264, 15	—0,082	71, 98	—5, 29	163
	id.	Ott. 14. 20. 0	269, 21	—0,206	76, 67	—5, 65	164
45	Punto della costa d'Ausonia	Sett. 12. 22. 40	267, 19	±0,000	67, 30	—5, 50	163
46	Lago Tritone	Ott. 12. 19. 0	275, 00	. . . . .	. . . .	—5, 97	165
	id.	Ott. 13. 19. 12	267, 74	—0,750	113, 82	—5, 56	165
	id.	Ott. 14. 20. 4	270, 18	—0,667	106, 94	—5, 72	164
47	Primo punto dell' Ellade	Sett. 12. 22. 40	267, 19	. . . . .	. . . .	—5, 50	163
	id.	Sett. 13. 23. 11	264, 88	+0,469	39, 26	—5, 33	163
	id.	Ott. 14. 19. 48	266, 29	+0,400	41, 56	—5, 40	164
48	Lago Meride	Ott. 13. 20. 7	281, 11	. . . . .	. . . .	—6, 22	165
49	Biforcazione d'Ausonia	Ott. 14. 20. 55	282, 58	—0,206	76, 67	—6, 36	164
50	Congiunzione del Nepente col Nilo . .	Ott. 14. 21. 36	292, 54	—0,800	118, 26	—6, 66	164

ti fondamentali.

$p+\Pi$	π	ε	Correzione	Longitudine corretta θ	Equazione della luce	ΔT	T, passaggio dei punti al meridiano centrale (Siderale Milano)
163°,17	163°,40	+0°,23	+2°,46	222°,46	—4ᵐ	+10ᵐ	Ott. 21. 21ʰ.39ᵐ
162. 07	161, 85	—0, 22	—0, 49	222, 00	—3	— 2	Sett. 14. 20. 50
161, 66	161, 66	±0, 00	—0, 35	226, 90	—3	— 1	Sett. 15. 21. 51
161, 83	161, 57	—0, 26	—0, 65	226, 75	—3	— 2	Sett. 16. 22. 30
163, 33	165, 57	+2, 24	+2, 37	220, 00	—3	+10	Sett. 20. 24. 42
161, 71	161, 85	+0, 14	+0, 65	225, 33	—3	+ 2	Sett. 14. 21. 3
162, 16	161, 57	—0, 59	—0, 01	224, 23	—3	± 0	Sett. 16. 22. 20
162, 77	166, 37	+3, 60	+3, 48	226, 46	—3	+15	Sett. 20. 25. 12
161, 11	160, 95	—0, 16	—0, 16	230, 85	—3	— 1	Sett. 14. 21. 26
160, 99	160, 95	—0, 04	+1, 69	233, 43	—3	+ 7	Sett. 14. 21. 37
161, 12	161, 12	±0, 00	+1, 76	233, 63	—3	+ 7	Sett. 15. 22. 18
162, 24	166, 37	+4, 13	+4, 22	232, 06	—3	+17	Sett. 20. 25. 34
160, 53	160, 95	+0, 42	+0, 15	236, 02	—3	+ 1	Sett. 14. 21. 48
161, 48	166, 37	+4, 89	+4, 92	239, 57	—3	+20	Sett. 20. 26. 5
158, 67	157, 92	—0, 75	—1, 87	251, 82	—3	— 8	Sett. 13. 22. 14
159, 36	159, 95	+0, 59	—0, 21	246, 60	—3	— 1	Sett. 14. 22. 31
157, 90	156, 13	—1, 77	—3, 68	258, 64	—3	—15	Sett. 12. 22. 2
158, 45	157, 92	—0, 53	—2, 09	254, 71	—3	— 8	Sett. 13. 22. 27
158, 61	158, 85	+0, 24	—1, 17	255, 13	—3	— 5	Sett. 14. 23. 6
158, 86	158, 86	±0, 00	—1, 43	255, 01	—3	— 6	Sett. 15. 23. 46
157, 93	157, 92	—0, 01	—0, 80	263, 35	—3	— 3	Sett. 13. 23. 2
159, 32	158, 62	—0, 70	—1, 61	267, 70	—4	— 6	Ott. 14. 19. 50
157, 56	156, 03	—1, 53	—1, 47	265, 72	—3	— 6	Sett. 12. 22. 31
159, 12	157, 45	—1, 67	—7, 20	267, 80	—4	—30	Ott. 12. 18. 26
159, 47	160, 60	+1, 13	—2, 18	265, 56	—4	— 9	Ott. 13. 18. 59
159, 25	158, 62	—0, 63	—5, 29	264, 89	—4	—22	Ott. 14. 19. 38
156, 56	156, 03	—0, 53	+4, 03	271, 22	—3	+16	Sett. 12. 22. 53
157, 89	157, 92	+0, 03	+3, 64	268, 52	—3	+15	Sett. 13. 23. 23
159, 57	158, 62	—0, 95	+2, 99	269, 28	—4	+12	Ott. 14. 19. 56
158, 81	157, 80	—1, 01	—5, 09	276, 02	—4	—21	Ott. 13. 19. 42
158, 61	158, 62	+0, 01	—1, 33	281, 25	—4	— 5	Ott. 14. 20. 46
158, 31	157, 62	—0, 69	—7, 36	285, 18	—4	—30	Ott. 14. 21. 2

Calcolo delle posizioni areogra

N. d'ordine dei punti	Nome dei punti	Data e tempo siderale 1877	ω	$\frac{\mu}{\rho}$	Distanza σ dal polo australe	Π	
51	Gran Sirte e bocca del Nilo	Sett. 12. 24^h.25^m	292°,73	—0,614	105°,23	—6°,64	163
	id.	Ott. 10. 19. 3	296, 31	—0,667	107, 30	—6, 66	165
	id.	Ott. 11. 19. 50	297, 32	. . . . .	. . . . .	—6, 67	165
	id.	Ott. 12. 20. 15	293, 22	—0,667	107, 12	—6, 69	165
	id.	Ott. 13. 21. 4	294, 96	—0,750	113, 82	—6, 67	165
	id.	Ott. 14. 21. 50	295, 94	—0,600	102, 00	—6, 72	164
52	Punto più australe dell' Ellade	Ott. 10.	. . . . .	+0,550	32, 08	. . . . .	165
	id.	Ott. 12.	. . . . .	+0,550	31, 94	. . . . .	165
53	Centro dell' Ellade	Sett. 12. 24. 5	287, 86	+0,389	+44, 40	—6, 43	163
	id.	Ott. 12. 20. 2	290, 07	+0,325	+46, 33	—6, 55	165
	id.	Ott. 13. 20. 44	290, 10	+0,357	+44, 29	—6, 55	165
	id.	Ott. 14. 21. 39	293, 27	+0,300	+39, 76	—6, 75	164
54	Punto più boreale dell' Ellade	Ott. 10.	. . . . .	+0,101	59, 68	. . . . .	165
	id.	Ott. 12.	. . . . .	+0,100	59, 57	. . . . .	165
55	Ultimo punto del Mar Tirreno	Ott. 12. 20. 44	300, 27	—0,429	90, 67	—6, 69	165
	id.	Ott. 13. 21. 17	298, 12	. . . . .	. . . .	—6, 67	165
56	Ultimo punto dell' Ellade	Ott. 10. 20. 5	311, 37	+0,333	46, 01	—6, 63	165
	id.	Ott. 11. 20. 57	313, 60	+0,333	45, 92	—6, 59	165
	id.	Ott. 12. 21. 24	310, 00	+0,333	45, 83	—6, 65	165
	id.	Ott. 14. 22. 50	310, 52	. . . . .	. . . .	—6, 70	164
57	Corno d'Ammone	Ott. 10. 20. 42	320, 37	—0,250	79, 95	—6, 42	165
	id.	Ott. 11. 21. 20	319, 19	—0,286	81, 99	—6, 44	165
	id.	Ott. 12. 21. 54	317, 29	—0,250	79, 77	—6, 50	165
	id.	Ott. 14. 23. 24	318, 78	—0,206	76, 67	—6, 50	164
58	Scilla e Cariddi	Ott. 13. 23. 15	326, 79	—0,052	68, 20	—6, 28	165
	id.	Ott. 14. 23. 42	323, 15	—0,105	71, 18	—6, 34	16
59	Ellesponto, punto medio	Ott. 10. 20. 50	322, 31	+0,400	41, 91	—6, 34	16
	id.	Ott. 12. 22. 10	321, 17	. . . . .	. . . .	—6, 38	16
	id.	Ott. 13. 22. 53	321, 44	+0,400	41, 65	—6, 38	16
60	Primo punto della Noachide	Ott. 13. 23. 15	326, 79	+0,400	41, 65	—6, 28	16
	id.	Ott. 14. 24. 31	335, 07	+0,400	41, 56	—5, 72	16
61	Bocca del Phison nel Golfo Sabeo . .	Ott. 10. 22. 10	341, 75	—0,333	84, 95	—5, 15	16
	id.	Ott. 14. 25. 0	342, 12	. . . . .	. . . .	—5, 21	16
62	Primo Corno del Golfo Sabeo	Ott. 4. 19. 15	359, 59	—0,444	92, 37	—3, 56	16

nti fondamentali.

p+Π	π	ε	Correzione	Longitudine corretta θ	Equazione della luce	ΔT	T, passaggio dei punti al meridiano centrale (Siderale Milano)	
156°,42	156°,13	—0°,29	—5°,02	287°,71	—3^m	—20^m	Sett. 12.	24^h. 2^m
158, 52	157, 30	—1, 22	—6, 31	290, 00	—4	—26	Ott. 10.	18. 33
158, 42	158, 30	—0, 12	—5, 82	291, 50	—4	—24	Ott. 11.	19. 22
158, 40	157, 55	—0, 85	—5, 95	287, 27	—4	—24	Ott. 12.	19. 47
158, 36	157, 80	—0, 56	—5, 47	289, 49	—4	—22	Ott. 13.	20. 38
158, 25	157, 62	—0, 63	—5, 62	290, 32	—4	—23	Ott. 14.	21. 23
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	....	
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	....	
156, 63	156, 13	—0, 50	+2, 81	290, 67	—3	+12	Sett. 12.	24. 14
158, 54	157, 55	—0, 99	+2, 49	292, 56	—4	+10	Ott. 12.	20. 8
158, 48	157, 80	—0, 68	+2, 72	292, 82	—4	+11	Ott. 13.	20. 51
158, 22	157, 62	—0, 60	+2, 88	296, 15	—4	+12	Ott. 14.	21. 47
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	....	
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	....	
158, 40	156, 95	—1, 45	—4, 75	295, 52	—4	—20	Ott. 12.	20. 20
158, 36	157, 80	—0, 56	—3, 59	294, 53	—4	—15	Ott. 13.	20. 58
158, 55	157, 00	—1, 55	+1, 93	313, 30	—4	+ 8	Ott. 10.	20. 9
158, 50	159, 80	+1, 30	+3, 96	317, 56	—4	+16	Ott. 11.	21. 9
158, 44	156, 95	—1, 49	+1, 99	311, 99	—4	+ 8	Ott. 12.	21. 28
158, 27	157, 62	—0, 65	+2, 63	313, 15	—4	+11	Ott. 14.	22. 57
158, 76	157, 00	—1, 76	—3, 60	316, 77	—4	—15	Ott. 10.	20. 23
158, 65	160, 40	+1, 75	+0, 35	319, 54	—4	+ 1	Ott. 11.	21. 17
158, 59	159, 25	+0, 66	—0, 89	316, 40	—4	— 4	Ott. 12.	21. 46
158, 47	157, 62	—0, 75	—2, 50	316, 28	—4	—10	Ott. 14.	23. 10
158, 75	158, 10	—0, 65	—1, 19	325, 60	—4	— 5	Ott. 13.	23. 6
158, 63	157, 62	—1, 01	—1, 55	321, 60	—4	— 6	Ott. 14.	23. 32
158, 84	157, 00	—1, 84	+2, 54	324, 85	—4	+10	Ott. 10.	20. 56
158, 71	159, 25	+0, 54	+4, 21	325, 38	—4	+17	Ott. 12.	22. 23
158, 65	158, 10	—0, 55	+3, 46	324, 90	—4	+14	Ott. 13.	23. 3
158, 75	158, 10	—0, 65	+3, 33	330, 12	—4	+14	Ott. 13.	23. 25
159, 25	157, 62	—1, 63	+2, 32	337, 39	—4	+10	Ott. 14.	24. 37
160, 03	159, 60	—0, 43	—2, 23	339, 52	—4	— 9	Ott. 10.	21. 57
159, 76	156, 12	—3, 64	—6, 08	336, 04	—4	—25	Ott. 14.	24. 31
161, 68	160, 30	—1, 38	—3, 39	356, 20	—4	—14	Ott. 4.	18. 57

31. Riguardo alla tavola annessa sono da notare due cose. La prima concerne la colonna $\frac{\mu}{\rho}$ nella quale assai spesso i numeri sono frazioni semplici, come $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ o simili. In tutte queste occasioni il μ (cioè la distanza del punto dal centro) non fu misurato micrometricamente, ma stimato a vista in parti del raggio o del diametro del disco. Ciò ho dovuto fare tutte le volte che l'aria non era abbastanza tranquilla per la misura delle distanze. Altre volte avrei potuto far misure, ma il tempo enorme richiesto da queste mi avrebbe reso impossibile altre osservazioni che in quel momento eran per me più importanti. Cercai adunque di aiutarmi con stime eseguite accuratamente. L'altra osservazione concerne le denominazioni dei punti fondamentali contenute nella colonna 2ª del quadro. Su queste si daranno più sotto tutte le desiderabili informazioni: qui però è necessario notare generalmente, che i nomi così spesso occorrenti di *primo* e di *ultimo* punto di una data regione indicano quel punto di essa che primo od ultimo di tutti durante la rotazione del pianeta si è presentato su quel diametro del disco, che passava in quel momento per il centro della macchia nevosa. Generalmente quando si tratta di un punto saliente del contorno, tali punti possono anche dirsi i primi o gli ultimi, che passano al meridiano centrale: o per lo meno così dicendo non si commette alcun errore di rilievo. In alcuni casi però, quando il contorno della regione non offre in quel luogo che una curvatura di grande raggio, vi potrà esser una piccola differenza secondo che si considera il diametro che passa per la neve, o il meridiano centrale. In tal caso il primo e l'ultimo punto (come anche il più alto e il più basso) indicano luoghi del contorno, in cui questo è tangente (o perpendicolare) al circolo massimo che da essi va al centro della neve australe. Con ciò si spiega, perchè sulla nostra carta in questa specie di punti il contorno qualche volta non è tangente al parallelo o al meridiano di Marte, siccome dovrebb' essere.

32. Dalla tavola stessa fu dedotto il quadro definitivo delle posizioni areografiche fondamentali che viene qui appresso. Facendo per ciascun punto le medie delle distanze polari σ dal polo australe, e sottraendone 90° si ottenne per ciascuno la latitudine areografica che per ora si considera come definitiva. Il segno — indica latitudine boreale, il segno + latitudine australe. La stessa operazione fatta sulle longitudini θ di ciascun punto avrebbe dato le longitudini areografiche riferite alla stessa origine fittizia, da cui furono numerati gli ω nell'effemeride del sig. Marth. Ora si trova che ritenendo tale origine, la longitudine del punto n. 1 (in cui vogliamo assumere il primo meridiano dietro l'esempio di Maedler) viene 358°, 93 invece di 360°, 00 come dovrebbe essere. Ciò significa, che per ridurre le nostre longitudini all'origine di Maedler è necessario accrescerle tutte di + 1°, 07. Tali longitudini così corrette formano la colonna 3ª del quadro delle posizioni areografiche. L'ultima colonna dello stesso quadro dà il numero delle osservazioni a cui si appoggia la posizione di ciascun punto. Quando il numero è unico, esso vale tanto per la latitudine, quanto per la longitudine: quando vi sono due numeri il primo serve per la longitudine e il secondo per la latitudine. Questi dati possono fornir un' idea del grado di approssimazione di ciascun luogo, quando si conosca l' error probabile di una osservazione. Dal confronto di quelle posizioni che furono determinate

almeno 3 volte, mi è risultato, che l'error probabile di una osservazione isolata è di ± 1°, 94 in latitudine, e di ± 1°, 81 in longitudine, ciò che corrisponde ad un errore di ± 7^{min},4 di tempo nel passaggio al meridiano centrale (§ 30).

33. Ecco ora definitivamente il

Quadro delle posizioni areografiche dei punti fondamentali.

Numero	Denominazione	Longitud.	Latitud.	N. delle determinazioni
1	Vertice d'Aryn	0°,00	+ 4°,56	1
2	Secondo corno del Golfo Sabeo	3, 54	— 2, 37	1
3	Istmo della Terra di Deucalione	17, 82	— 2, 52	2, 1
4	Ombra dell'istmo stesso..	17, 83	+ 4, 56	2, 1
5	Golfo delle Perle, bocca dell'Indo	23, 59	— 4, 90	3
6	Bocca dell' Idaspe	27, 38	+ 4, 41	1
7	Capo degli Aromi	38, 40	+ 8, 30	2
8	Capo delle Ore in Argyre	39, 78	+39, 38	2
9	Capo delle Grazie in Argyre.	51, 86	+53, 84	2
10	Golfo dell'Aurora, bocca del Gange. . . .	55, 74	+ 2, 32	2
11	Punta dell'Aurea Cherso.	61, 49	+25, 26	2
12	1° punto di Thaumasia	66, 36	+23, 79	3
13	Confluente del Chrysorroas col Nilo. . . .	84, 16	—18, 88	1
14	Lago del Sole, centro	90, 24	+25, 22	3
15	Lago della Fenice, centro	106, 45	+19, 42	2
16	Bocca del Fasi.	106, 93	+44, 88	2
17	Colonne d'Ercole, bocca esterna	119, 81	+44, 88	2
18	Centro d'Icaria.	119, 92	+37, 86	1
19	1° punto del Mare delle Sirene	131, 37	+31, 32	2
20	1° punto di Thyle I^a.	134, 12	+65, 08	1
21	Colonne d'Ercole, bocca interna	138, 02	. . . .	2, 0
22	Centro di Thyle I^a.	151, 86	+65, 08	1
23	Base australe d'Atlantide I^a	159, 80	+37, 54	1
24	1° punto del Mare Cimmerio	165, 80	+37, 49	2
25	Golfo dei Titani	174, 24	+18, 17	1
26	Ultimo punto del Mare delle Sirene . . .	176, 52	+25, 34	2
27	Stretto d'Ulisse, mezzo	187, 08	+74, 08	1
28	Punto della riva australe dell'Oceano. . .	188, 15	— 7, 12	1
29	Fiume dei Lestrigoni, bocca sull'Oceano .	200, 19	— 4, 50	1
30	Golfo dei Lestrigoni, intimo seno	201, 79	+18, 01	3
31	Scamandro, bocca sul Mare Cronio . . .	202, 52	+55, 41	2, 1
32	Scamandro, punto di mezzo	202, 57	+48, 98	2, 1
33	Fiume dei Ciclopi, bocca sull'Oceano. . .	205, 05	—15, 77	2
34	Base australe d'Esperia	211, 10	. . . .	1, 0
35	Capo boreale di Thyle II	221, 61	+62, 28	1
36	Centro di Thyle II.	223, 53	+69, 93	1
37	Golfo dei Ciclopi.	224, 98	+12, 43	4, 2
38	1° punto del Mar Tirreno.	226, 41	+37, 81	3
39	Centro d'Esperia.	231, 62	+22, 79	1
40	Bocca australe dello Xanto	234, 11	+51, 13	3, 2
41	Ultimo punto del Mare Cimmerio	238, 87	+ 9, 85	2
42	Esperia, base settentrionale	250, 28	+13, 22	2, 1
43	Piccola Sirte	256, 94	+ 6, 24	4
44	Capo Circeo in Ausonia	266, 59	+15, 68	2
45	Punto della costa d'Ausonia.	266, 79	+22, 70	1

Numero	Denominazione	Longitud.	Latitud.	N. delle determinazioni
46	Lago Tritone	267°,15	—20°,38	3
47	Primo punto dell'Ellade.	270, 74	+49, 49	3
48	Lago Meride	277, 09	. . . .	1, 0
49	Biforcazione d'Ausonia.	282, 32	+13, 33	1
50	Congiunzione del Nepente col Nilo. . . .	286, 25	—28, 26	1
51	Gran Sirte e bocca del Nilo	290, 45	—17, 09	6, 5
52	Punto più australe dell'Ellade	. . . .	+57, 99	0, 2
53	Centro dell'Ellade	294, 12	+46, 30	4
54	Punto più boreale dell'Ellade.	. . . .	+30, 38	0, 2
55	Ultimo punto del Mar Tirreno	296, 09	— 0, 67	2, 1
56	Ultimo punto dell'Ellade	315, 07	+44, 08	4
57	Corno d'Ammone.	318, 32	+10, 40	4
58	Scilla e Cariddi.	324, 17	+20, 31	2
59	Ellesponto, punto di mezzo	326, 11	+48, 22	3, 2
60	1° punto della Noachide.	334, 82	+48, 40	2
61	Bocca del Phison nel Golfo Sabeo	338, 85	+ 5, 05	2, 1
62	Primo Corno del Golfo Sabeo.	357, 27	— 2, 37	1

34. Soggiungeremo ora alcune note relative a ciascuna delle posizioni contenute nel quadro precedente.

1. *Vertice d'Aryn.* Questo punto è determinato con molta precisione dall'estremità della lingua di terra, che divide i due seni formati dal Golfo Sabeo nella sua parte occidentale (1). Tale lingua termina in punta acuta, e la sua forma nel 1877 era precisamente quella che Dawes avea rilevato nel 1864: onde la sua costanza sembra fuor di dubbio. Questo si crede da tutti che sia il luogo designato da Maedler colla lettera *a* (2): sebbene egli attribuisca all'estremità del Golfo Sabeo una forma affatto diversa, probabilmente per l'insufficienza del potere ottico da lui impiegato. Come Maedler, vi ho posto lo zero delle longitudini areografiche; e secondo quest'idea gli ho applicato il nome di *Vertice* o *Cupola d'Aryn*, punto immaginario del Mare Indiano, che presso i geografi e gli astronomi arabi talora veniva assunto come origine delle longitudini terrestri (3). Non mi è riuscito di ottenere che una sola determinazione di questo punto celebre nell'areografia; onde la posizione può esser notabilmente incerta e le longitudini da esso numerate possono contenere tutte un errore costante di qualche importanza. Al quale difetto (del resto più apparente che reale) si potrà riparare più tardi con altre osservazioni.

2. *Secondo corno del Golfo Sabeo.* È formato dalla estremità interna di un golfo terminato in punta acuta, ed è benissimo definito. Il canale che vi mette foce non è tanto facile a vedere, che da esso possa nascere alcuna notabile incertezza. Questo punto è stato nettamente riconosciuto da Kaiser e da Dawes nei loro disegni. Dei due rami del Golfo Sabeo questo è l'ultimo a presentarsi davanti all'osservatore per effetto della rotazione di Marte, ed è anche l'ultimo nell'ordine delle longitudini: quindi il nome di *secondo* che ho pure usato altre volte in consimili occasioni.

3. *Istmo della Terra di Deucalione.* Punto determinato molto bene in longitudine, l'asse della penisola cui appartiene essendo in quel luogo quasi esattamente diretto nel senso dal meridiano. Sulla

(1) Notiamo una volta per tutte, che parlando delle regioni di Marte l'*oriente* e l'*occidente* s'intendono presi rispetto ad un osservatore che si trovi sulla superficie del pianeta. Così diremo che un punto si trova ad oriente di un altro, quando passa al centro del disco prima di quello: rispetto all'osservatore terrestre si trova ad occidente di quello. In tutti i nostri disegni l'oriente è a sinistra, l'occidente a destra, il settentrione in basso, il mezzodì in alto, secondo la posizione che gli oggetti hanno nel cannocchiale astronomico.

(2) Vedi la sua carta del 1830. *Astronomische Nachrichten* n. 191.

(3) Vedi fra altri Santarem, in molti luoghi del suo *Essai sur l'histoire de la cosmographie et de la cartographie de moyen âge*, specialmente Vol. III p. 309 e seguenti.

carta esso si trova alquanto fuori dell'asse della penisola, per la necessità di tener conto della posizione dei punti circostanti, colla quale esso non concorda in conseguenza di errori di osservazione.

4. *Terra di Deucalione, confine dell'ombra.* Con questo si deve intendere il punto di mezzo della linea che separa la terra ombreggiata di Deucalione dalla parte inferiore più chiara. Sulla carta la posizione non occupa esattamente il mezzo, a causa delle incongruenze inevitabili nelle osservazioni di tanti punti vicini, dei quali tutti bisogna tener conto. Il confine fra il chiaro e l'oscuro fu da me veduto come linea affatto precisa, ma non è sempre facile a riconoscere. Onde l'osservazione di questo punto sarà sempre alquanto scabrosa, dato pure che nel detto confine non abbiano luogo variazioni.

5. *Golfo delle Perle, Bocca dell'Indo.* Punto bene definito in longitudine dall'ampia foce del canale detto Indo: ma non altrettanto bene in latitudine. Questo è uno dei quattordici punti di Maedler, dal medesimo segnato colla lettera (c). Le mie osservazioni si accordano poco bene in longitudine.

6. *Bocca dell'Idaspe.* Indentatura molto visibile, foce stretta e bene determinata in ambe le coordinate. La posizione del catalogo presenta qualche discordanza coi punti vicini.

7. *Capo degli Aromi.* Promontorio assai bene definito, e specialmente in longitudine per esser precisamente sul mezzo dell'istmo, per cui la penisola oscura di Pirra si attacca al continente di Chryse. Forse la posizione dal catalogo assegnata è un po' troppo boreale. Nel tracciare la carta mi sono attenuto a questa e alle posizioni precedenti il più che si poteva senza far troppa violenza alla vera configurazione quale risulta dai disegni fatti ad occhio.

8. *Capo delle Ore.* Punto prominente e di sicura identificazione nella parte nord-ovest della grande isola d'Argyre.

9. *Capo delle Grazie.* Estremità occidentale e ben determinabile dell' isola d' Argyre, ed ultimo punto della medesima (cioè quello che ultimo si presenta nel passaggio al meridiano centrale ed ha la massima longitudine).

10. *Golfo dell'Aurora, bocca del Gange.* A cagione della larghezza del canale chiamato Gange e del suo allargarsi verso la foce questo punto non si può definire che con precisione mediocre, tuttavia sufficiente in pratica. Sembra identico al punto (k) della carta di Kaiser, annessa al Tomo III delle *Osservazioni di Leyda.*

11. *Punta dell'Aurea Cherso.* Ben determinata, ma non riconoscibile che nelle più eccellenti condizioni di atmosfera a cagione della difficoltà di vedere il canale che separa l'Aurea Cherso da Thaumasia.

12. *Primo punto di Thaumasia.* Ben definibile in longitudine, ma solo tutte le volte che si vede distintamente la separazione dell'Aurea Cherso. Circa il nome di *primo punto* occorre qui l'osservazione fatta al § 31. La latitudine è molto indeterminata, come l'aspetto della carta dimostra.

13. *Confluente del Chrysorroas col Nilo.* Il Chrysorroas essendo stato da me veduto in questa parte una volta sola il 4 novembre, e l'osservazione essendo stata fatta in circostanze non molto felici, non posso dire qual grado di fede si meriti la posizione data nel catalogo. I disegni fatti indicherebbero per questo punto una posizione alquanto più orientale.

14. *Lago del Sole.* Il centro del lago circolare così denominato è forse in tutta la superficie di Marte il punto meglio definibile e meglio osservabile in ambe le coordinate. Le mie osservazioni si accordano bene tanto fra loro, quanto coi risultati di Maedler e di Kaiser, i quali designano questo punto colla lettera (d). Sarebbe quindi forse stato opportuno assumerlo come origine delle longitudini dietro l'esempio di Kaiser: ma il suo aspetto attuale presenta qualche differenza con quello che Dawes, Lockyer, e Kaiser figurarono nel 1862 e nel 1864, e vi è qualche indizio probabile di variazioni avvenute, siccome a suo luogo sarà detto. Per questo ho preferito il vertice d'Aryn, il quale è meno comodo, ma sembra più stabile di forma.

15. *Lago della Fenice.* Punto importante nella topografia di questa regione per le multiple comunicazioni, che il lago della Fenice ha coi mari e coi canali circostanti. Si può determinare con molta esattezza malgrado che la sua tinta poco oscura presenti qualche difficoltà all'osservazione.

16. *Bocca del Fasi.* Questa bocca si va allargando verso il sud in forma di tromba, così che soltanto la longitudine si può determinare con precisione. La posizione assegnata dal catalogo è probabilmente troppo australe.

17. *Colonne d'Ercole, bocca esterna.* Il canale detto *Colonne d'Ercole* fu sempre facile a vedere in

qualunque occasione e la sua foce nel mare Australe è ben definita. Quindi la posizione si può determinare con facilità.

18. *Centro d'Icaria.* Geometricamente parlando questo punto parrebbe molto indeterminato, ma i limiti dell'incertezza riescono assai stretti in pratica, la regione d'Icaria essendo non molto grande, di forma pentagona quasi regolare, e determinata con precisione da tutte le parti.

19. *Primo punto del Mare delle Sirene, bocca dell'Arasse.* Questo è il punto (p) di Maedler e di Kaiser, e forma il principio della lunga serie di mari interni che si succedono sul pianeta per quasi 180° di longitudine. Esso è facile ad osservare anche nelle condizioni mediocri d'atmosfera, formando ivi il Mare delle Sirene un golfo assai profondo ed acuto, ch'è l'imboccatura del sottile e tortuoso canale detto Arasse. Quest'ultimo non si distingue che nell'aria buona.

20. *Primo punto di Thyle I.ª* Essendo quest'isola di forma grossolanamente rotonda, il suo primo punto sarà meglio definito in longitudine che in latitudine: tengasi qui conto dell'osservazione generale del § 31. Tutte le determinazioni relative alle isole di Thyle Iª e Thyle IIª furono molto difficili.

21. *Colonne d'Ercole, bocca interna.* Punto facile a vedere e a determinare. L'aver ommesso la misura della latitudine fu una dimenticanza.

22. *Centro di Thyle I.ª* Praticamente questo punto non lascia molta incertezza, quando si riesca a veder bene l'isola, che è quasi rotonda, e si projetta sul piano visuale come una ellisse oblunga. Sulla projezione di Mercator la posizione del punto 22 è molto eccentrica rispetto all'isola, ma ciò proviene dalla deformità che la detta projezione introduce, e che è molto sensibile nelle regioni prossime al polo.

23. *Base australe d'Atlantide I.ª* S'intende il punto di mezzo di questa base, preso lungo la linea ideale che congiunge le rive australi del Mare Cimmerio e del Mare delle Sirene. Punto di facile osservazione.

24. *Primo punto del Mare Cimmerio, bocca settentrionale del Simoe.* Assai ben definito e non difficile ad osservare. Il canale Simoe che vi sbocca non è però facile a distinguere.

25. *Golfo dei Titani.* È l'angolo settentrionale del Mare delle Sirene, molto distinto per la bocca del fiume o canale dei Titani che vi si trova. Punto facilmente osservabile anche in aria mediocre. Maedler lo ha abbastanza bene indicato sulla sua carta, dov' è distinto colla lettera (r).

26. *Ultimo punto del Mare delle Sirene.* Questo è il fondo d' un golfo formante un angolo quasi retto, e dovrebbe esser determinabile con esattezza. Tuttavia, se l' esistenza del golfo non è dubbia, il punto preciso del suo fondo non si è mai potuto vedere da me distintamente. In tutta la regione compresa fra questo golfo e quello dei Lestrigoni, la quale abbraccia anche l' istmo settentrionale della penisola Atlantide Iª, ho sempre trovato una certa confusione di tinte, e contorni poco precisi. Nuove osservazioni in aria ottima e con forti ingrandimenti sono richieste. Questo nostro punto 26 si trova sulla carta di Kaiser, dov' è indicato colla lettera (t).

27. *Stretto d'Ulisse, punto di mezzo.* Qui l' indeterminazione apparente è molto diminuita dalla forma press' a poco circolare delle due isole di Thyle. Forse la posizione assegnata nel catalogo dietro un' unica osservazione è troppo prossima al polo australe del pianeta. La difficoltà di misurar questo punto è pari a quella di vedere nettamente lo Stretto d' Ulisse, ciò che due sole volte mi è avvenuto.

28. *Punto della riva australe dell'Oceano.* Determinazioni di pochissima esattezza fatta sopra un punto non ben definito. Il limite dell' Oceano appena si poteva discernere con grande sforzo d' occhio.

29. *Fiume dei Lestrigoni, bocca sull'Oceano.* Osservazione assai poco sicura, fatta unicamente per non lasciar tutto all' arbitrio dell' occhio il tracciamento di questa regione.

30. *Golfo dei Lestrigoni, intimo seno.* Determinabile con qualche precisione, malgrado l' incertezza di forma e di tinte che ho trovato sempre sugli istmi boreali delle due Atlantidi.

31. *Bocca dello Scamandro nel Mare Cronio.* Punto preciso e facile a vedere anche in aria mediocre.

32. *Punto di mezzo dello Scamandro.* La forma quasi rettilinea di questo canalé dà una certa sicurezza anche alla presente determinazione.

33. *Fiume dei Ciclopi, bocca sull'Oceano.* Appena traveduto e determinato alla meglio che si poteva. Più tardi divenne assai visibile, ma le misure eran divenute impossibili per la troppa piccolezza del disco apparente del pianeta.

34. *Base australe d' Esperia.* S' intende il mezzo dell' istmo, considerato sulla linea ideale che

unisce le rive australi del Mar Cimmerio e del Mar Tirreno. Malgrado la differenza di 20° nelle longitudini, questo è certamente il punto (m) di Maedler. Determinabile abbastanza bene in ambe le coordinate.

35. *Capo boreale di Thyle II.* Difficile a vedere: ma veduto, facile a determinare malgrado le forme rotondeggianti dell' isola. Questo capo forma, insieme colla sporgenza australe di Eridania, lo stretto di Tifi, che si può considerare come termine del Mare Cronio. Maedler ha in questo luogo il suo punto (q).

36. *Centro di Thyle II.* Valgono qui le osservazioni fatte al n. 22 sul centro di Thyle I.

37. *Golfo dei Ciclopi.* Uno dei punti più salienti di tutta questa regione, per la facile visibilità del fiume dei Ciclopi, che ivi mette foce nel Mare Cimmerio. La determinazione è precisa, e si può fare anche in aria mediocre.

38. *Primo punto del Mar Tirreno.* È il fondo ben pronunziato di un bel golfo, facile a vedere e a misurare. Qui, come in altri casi, l' incertezza cui si accenna nel § 31 non ha che un trascurabile effetto.

39. *Centro d'Esperia.* Punto mal definito, a cagione della forma irregolare e tortuosa di questa penisola. Sembra poi che l' unica determinazione fattane non si accordi molto colle posizioni dei punti circonvicini, e in causa di questa contraddizione il punto 39 della carta, invece che al centro d' Esperia, è venuto a collocarsi sulla costa orientale di essa.

40. *Bocca australe dello Xanto.* Punto preciso, facilmente visibile, e che sembra determinato anche accuratamente.

41. *Ultimo punto del Mare Cimmerio.* Valgono qui le osservazioni fatte pel n. 40. Il fiume Etiopico che qui ha foce non è sempre facile a distinguere; ma il punto stesso è sempre ben visibile, per poco che l'aria sia buona. Ed anche lo troviamo nelle carte di Maedler e di Kaiser, dov' è segnato colla lettera (n).

42. *Base settentrionale di Esperia* (punto di mezzo). In longitudine questo è uno dei luoghi meglio determinati, ed anche l' osservazione ne è facilissima. Ciò malgrado le due osservazioni che ne ho ottenuto si accordano piuttosto male fra loro e il luogo che ne risulta non concorda bene con quelli dei punti 41 e 43 fra i quali dovrebbe occupare in longitudine una posizione esattamente intermedia.

43. *Piccola Sirte.* Punto meglio determinato nell' aria mediocre, che nella buona: a cagione dell' ampia foce del fiume Lete, che vi forma un seno allargantesi a foggia di tromba, e nel quale è difficile additare il segno, che indica il vertice dell' ampio golfo formato dalle coste d' Esperia e di Libia. Quindi le differenze notabili fra le quattro osservazioni di latitudine. Questo è il punto (o) delle carte di Maedler e di Kaiser.

44. *Capo Circeo in Ausonia.* Promontorio notabilissimo, che occupa rispetto all'Ausonia di Marte precisamente la stessa posizione che il Capo Circeo dell'Ausonia terrestre. È situato proprio di fronte alla piccola Sirte e l' uno e l' altro segnano un angolo nelle rive parallele dell' ampio canale detto Mar Tirreno. Le due posizioni furono ottenute a 31 giorni d' intervallo, e si accordano bastantemente fra loro.

45. *Punto sulla costa Adriatica d'Ausonia.* Non bene definito: sembra inoltre che l' unica osservazione fattane non sia riuscita troppo felice, essendo impossibile far passare le coste d' Ausonia per la posizione del catalogo, senza far troppa violenza ai disegni ed alle posizioni dei punti fondamentali circonvicini.

46. *Lago Tritone.* Benissimo definibile in ambe le coordinate a cagione della poca ampiezza Questo è indubitatamente il punto segnato (g) sulla carta di Maedler, e si può osservare abbastanza facilmente.

47. *Primo punto dell' Ellade e bocca dell' Euripo nel Mare Adriatico.* Delle tre misure di questo punto due furono fatte in aria mediocre il 12 e il 13 settembre, e si trovano citate col nome d'*Istmo dell' Ellade,* parendomi allora, che questa regione fosse connessa con Ausonia. Soltanto più tardi venni a scoprire l' esistenza dell' Euripo in questo luogo. L' accordo delle 3 misure dunque non prova che il punto sia stato bene osservato. Esso deve coincidere press' a poco con (h) della carta di Maedler.

48. *Lago Meride.* Questo piccolissimo bacino costituisce un punto della massima precisione nel

suo centro, attesa la sua forma di un quadrato arrotondato: ma non si può vedere che nelle condizioni più perfette d' atmosfera.

49. *Biforcazione d'Ausonia.* Il vertice orientale del triangolo oscuro compreso fra i due rami in cui termina a nord-ovest la gran regione d'Ausonia si va affilando in modo, da offrire un punto nerissimo ed ottimamente definito.

50. *Congiunzione del Nepente col Nilo.* La punta d'Osiride che si trova in tal confluenza è ben distinguibile soltanto nell'aria buona. In longitudine è del resto benissimo osservata, ma per la latitudine bisogna aspettare un'altra opposizione di Marte, in cui si presenti alla vista meno obliquamente.

51. *Gran Sirte e bocca del Nilo.* È il vertice boreale di un gran golfo conosciuto fin dai tempi di Hooke e di Huygens. Benissimo definito in longitudine, ma non altrettanto bene in latitudine a cagione del progressivo allargarsi che qui fa la foce del Nilo. Secondo che la visione è più o meno distinta questo vertice appare più o meno innoltrato verso settentrione. Questo punto è designato colla lettera (f) nelle carte di Maedler e di Kaiser.

52. *Punto più australe dell' Ellade.* Per la forma rotondeggiante della vasta regione detta Ellade questo punto non è ben definibile in longitudine. L' espressione *australe* qui si deve riferire alla macchia nevosa presa come polo, secondo quanto fu avvertito al § 31.

53. *Centro dell'Ellade.* Ottimamente determinabile a cagione della forma quasi circolare dell' Ellade. Si noti che il *centro* è stato stimato rispetto alla projezione obliqua secondo cui l' Ellade si presentava all' osservatore. Quindi si spiega come questo punto non è esattamente intermedio fra 52 e 54, come dovrebbe essere: vi sono inoltre gli inevitabili errori di osservazione. Esso è certamente identico al punto (z) della carta di Maedler.

54. *Punto più boreale dell' Ellade.* Vedi l' osservazione relativa al n. 52.

55. *Ultimo punto del Mar Tirreno.* È costituito dal luogo, dove l' Enotria, cioè il ramo settentrionale della biforcata Ausonia, viene a morire quasi in contatto colla costa d'Aeria. Ben definibile in ambe le coordinate. Le osservazioni son del 12 e del 13 ottobre, ma il punto si è potuto riconoscere anche in novembre ed in dicembre, così che se qui han luogo variazioni, sono certamente lentissime. Veggasi del resto la descrizione d'Ausonia nella parte III di questa Memoria.

56. *Ultimo punto dell' Ellade.* Ben definito in longitudine, ma meno in latitudine, come del resto le misure stesse fanno vedere, assai più concordi nella prima, che nella seconda coordinata. Rammento l' osservazione del § 31.

57. *Corno d'Ammone.* Uno dei promontorî più belli del pianeta, importante anche per la sua posizione fra il Golfo Sabeo e la Gran Sirte. Esso non forma una punta molto acuta, ma è tuttavia sempre ben discernibile pel contrasto fra lo splendore del continente d'Aeria e l'oscurità del mare attiguo. Nei suoi studî sopra Marte il celebre geologo Phillips ha adottato questo punto per origine delle longitudini areografiche (1). Maedler e Kaiser lo designano sulle loro carte colla lettera (e).

58. *Scilla e Cariddi.* Le estremità ombreggiate dell'Ausonia e della Terra di Deucalione formano, rivolgendosi l' una contro l' altra, una specie di passaggio o stretto, di cui questo sarebbe il punto di mezzo. A cagione della sfumatura in cui terminano le due terre e della conseguente indeterminazione dei loro contorni non può questa posizione riguardarsi nè come ben definita, nè come utile ad osservarsi ulteriormente, malgrado l' accordo delle misure che io ne ho fatte.

59. *Ellesponto, punto di mezzo.* Sebbene le 3 misure di questo punto si accordino in apparenza assai bene, tuttavia la posizione che ne deriva non merita alcuna fiducia. Infatti nei giorni 10, 12, 13 ottobre e per molto tempo prima e dopo la Noachide fu coperta di nebbia fortemente illuminata dal Sole: ciò che qui ho chiamato Ellesponto era il canale fra l' Ellade e quella massa di nebbia. Più tardi in dicembre la Noachide si scoperse ed apparve qual è realmente, cioè una lingua oscura di colore poco più chiaro che il mare circostante. Il pianeta allora era troppo lontano per tentare misure così difficili. Il nostro punto 59 deve dunque press' a poco giacer in mezzo al canale formato dalla terra brillante dell' Ellade e dalla terra oscura della Noachide, non tenendo conto dell'altra terra oscura che contorna l' Ellade dal lato di occidente.

(1) *Proceedings of the Royal Society.* Vol. XII (1863) p. 431.

60. *Primo punto della Noachide.* Queste misure furono prese su di una massa di nebbia illuminata che copriva allora la Noachide, imitandone probabilmente abbastanza male il vero contorno. Perciò la posizione non merita molto maggior fiducia che la precedente del punto n. 59.

61. *Bocca del Phison.* Ben definito, ma non facile ad osservare nel 1877.

62. *Primo corno del Golfo Sabeo.* Ottimamente determinato in ambe le coordinate. Veggasi quanto si è detto al n. 2 rispetto all' altro corno del Golfo Sabeo.

Sezione II.

Comparazione delle posizioni precedenti con quelle ottenute da Maedler e da Kaiser.

35. Nel volume VIII delle *Astronomische Nachrichten*, p. 448 il sig. Maedler ha pubblicato un catalogo di 14 posizioni areografiche da lui determinate durante l'opposizione del 1830, la quale avvenne in circostanze molto simili a quella del 1877, così in riguardo alla distanza del pianeta dalla Terra, come rispetto all' inclinazione del suo equatore sulla linea visuale. L' istrumento impiegato aveva meno di 4 pollici francesi d'apertura, e le posizioni furono dedotte da disegni fatti a semplice vista. La Memoria di Maedler è accompagnata da una carta, dove è indicata la relazione dei punti sopradetti colla figura delle macchie circostanti. L' esame di questa carta mi ha dato il modo di identificare senza alcuna dubbiezza 12 dei 14 punti con altrettanti del mio catalogo. Dei due rimanenti uno è troppo indeterminato sulla carta di Maedler, per poter cavarne una identificazione sicura: l'altro riguarda una macchia da me non misurata. Il risultato della comparazione è dato nella tavoletta seguente, ove con M sono indicate le posizioni di Maedler, le nostre con S.

Comparazione dei nostri risultati con quelli di Maedler.

N° di S.	Nome di S.	Lettera di M.	Longit. di M.	Longit. di S.	Differ. M—S semplice	Differ. M—S ridotta	Lat. M.	Lat. S.	Diff. M—S
1	Vertice d'Aryn	(*a*)	0°,0	0°,00	± 0°,00	+ 1°,20	+ 7°,0	+ 4°,56	+2°,44
5	Golfo delle Perle	(*c*)	13, 0	23, 59	—10, 59	— 9, 39	— 8, 0	— 4, 90	—3, 10
14	Lago del Sole	(*d*)	91, 0	90, 24	+ 0, 76	+ 1, 96	+26, 5	+25, 22	+1, 28
19	Primo punto del Mare delle Sirene	(*p*)	123, 5	131, 37	— 7, 87	— 6, 67	+40, 0	+31, 32	+8, 68
25	Golfo dei Titani	(*r*)	183, 0	174, 24	+ 8, 76	+ 9, 96	+23, 0	+18, 17	+4, 83
34	Base superiore d'Esperia . . .	(*m*)	234, 0	211, 10	+22, 90	+24, 10	+32, 0	+40, 00	—8, 00
35	Punto più boreale di Thyle II .	(*q*)	239. 0	221, 61	+17. 39	+18, 59	+62, 0	+62, 28	—0, 28
41	Primo punto del Mare Cimmerio	(*n*)	236, 6	238, 87	— 2, 27	— 1, 07	+ 5, 0	+ 9, 85	—4, 85
43	Piccola Sirte	(*o*)	263, 0	256, 94	+ 6, 06	+ 7, 26	+ 3, 7	+ 6, 24	—2, 54
47	Primo punto dell'Ellade . . .	(*h*)	262, 0	270, 74	— 8, 74	— 7, 54	+43, 0	+49, 49	—6, 49
51	Gran Sirte	(*f*)	284, 0	290, 45	— 6, 45	— 5, 25	—11, 0	—17, 09	+6, 09
57	Corno d'Ammone	(*e*)	326, 7	318, 32	+ 8, 38	+ 9, 58	+19, 4	+10, 40	+9, 00

36. Rispetto alla tavola qui annessa delle differenze sono da osservare queste cose. Maedler ha adottato per origine delle longitudini un punto, che, come già fu detto, si può considerare come identico al vertice d'Aryn: ma ha fatto crescere le longitudini da occidente verso oriente in senso contrario al nostro. Dette μ. σ le identiche longitudini del medesimo punto secondo le notazioni di Maedler e mia, si ha fra esse la relazione $\mu + \sigma = 360°$: e con questa formula ho ridotto le longitudini di Maedler ad esser comparabili colle mie. Le differenze M — S delle longitudini della 6ª colonna contengono ancora l'errore costante occorso nel determinare il principio di numerazione: per eliminarlo si è fatto la media delle differenze M — S (escluse due, di cui parlerò or ora) e questa media — 1°, 20 sottratta da tutte le differenze M — S ha dato le differenze *ridotte* della 7ª colonna, che debbonsi riguardare come espressione della vera discordanza fra Maedler e me.

37. In generale queste discordanze, come pur quelle della latitudine, non sorpassano molto quel limite, che si può aspettare da siffatte osservazioni e mostrano, che in 47 anni la superficie del pianeta ha conservati inalterati i suoi tratti principali. Vi sono però nelle longitudini due discordanze che superano l'aspettazione. L'uno concerne il termine occidentale del Mare Cronio, contiguo al nostro punto 35, che è il capo più boreale di Thyle IIª: e che mi sembra identico al punto (*q*) di Maedler. La discordanza apparente delle longitudini è di 18°, 59: ma siccome la latitudine è di 62 gradi secondo ambidue gli osservatori, la vera differenza in arco di circolo massimo arriva a soli 8°, 89, quantità che ancora si può ammettere come procedente dagli errori dell'osservazione. L'altra differenza riguarda l'istmo australe della gran penisola Esperia (n. 35 del mio catalogo = (*m*) di Maedler) che secondo l'autore tedesco sarebbe di 24°, 10 più avanzato in longitudine di quanto porta la mia determinazione. Non saprei quale spiegazione plausibile dare di questo fatto: ma non credo che esso basti a provare una mutazione avvenuta nell'intervallo. Forse una parte della differenza è dovuta al modo diverso di considerare l'istmo in questione. Se per esempio sulla mia carta si prenda per istmo il punto di massimo stringimento della penisola, la longitudine diventa di 228° circa, e la discordanza si riduce a 6 gradi.

38. Più soddisfacente ancora è il risultato della comparazione dei nostri numeri con quelli ottenuti (sempre dietro disegni fatti a vista) nel 1862 a Leyda dal prof. Kaiser, e pubblicati negli *Annali dell'Osservatorio di Leyda* Tomo III, pag. 54. Il catalogo di Kaiser comprende 11 punti, dei quali con tutta sicurezza si poterono identificare 8 coi nostri. Kaiser ha collocato l'origine delle sue longitudini nel centro del Lago del Sole, che secondo lui dista dal vertice d'Aryn 88°, 8 verso occidente: egli numera come Maedler le longitudini in senso contrario al nostro. Dette $\varkappa$ σ le longitudini del medesimo punto espresse nel modo di Kaiser e nel nostro, si ha la relazione $\varkappa + \sigma = 88°,8$, ovvero $\varkappa + \sigma = 448°,8$. Trasformate in tal modo le sue longitudini e ridottele al nostro modo di numerazione, si ebbe per la comparazione dei risultati la tavoletta seguente: dove le lettere di Kaiser nella terza colonna sono identiche a quelle che Maedler ha usato per gli identici punti.

Comparazione dei nostri risultati con quelli di Kaiser.

N° di S.	Nome di S.	Letter. di K.	Long. di K.	Long. di S.	Differ. K—S appar.	Differ. K—S ridotta	Lat. di K.	Lat. di S.	Differ. K—S
1	Vertice d'Aryn	(*a*)	0°,0	0°,00	±0,00	—2°,25	+ 5°,8	+ 4°,56	+1°,24
10	Bocca del Gange.	(*k*)	65, 0	55, 74	+9, 26	+7, 01	+ 7, 3	+ 2, 32	—4, 98
14	Lago del Sole	(*d*)	88, 8	90, 24	—1, 44	—3, 69	+26, 4	+25, 22	+1, 18
19	Primo punto del Mar delle Sirene	(*p*)	132, 7	131, 37	+1, 33	—0, 88	+34, 3	+31, 32	+2, 98
26	Ultimo punto del Mar delle Sirene	(*t*)	172, 8	176, 52	—3, 72	—5, 97	+22, 0	+25, 34	—3, 34
41	Ultimo punto del Mare Cimmerio	(*n*)	245, 0	238, 87	+6, 13	+3, 88	+10, 0	+ 9, 85	+0, 15
51	Gran Sirte, bocca del Nilo . . .	(*f*)	294, 0	290, 45	+3, 55	+1, 30	—26, 3	—17, 09	—9, 21
57	Corno d'Ammone	(*e*)	321, 0	318, 32	+2, 88	+0, 63	+16, 9	+10, 40	+6, 50

39. Nella colonna sesta le differenze di longitudini K — S contengono ancora la parte costante o comune +2°, 25 la quale fu sottratta da tutte, dando così origine alla colonna settima delle differenze *ridotte*, che esprimono le vere discordanze fra Kaiser e me. Tanto queste come quelle delle latitudini sono molto minori ancora, che nel paragone con Maedler, e probabilmente l'accordo avrebbe guadagnato ancora, quando Kaiser avesse tenuto conto della non coincidenza della calotta polare col polo del pianeta. La differenza più importante è nella latitudine della Gran Sirte, latitudine che è difficile definire con precisione a causa della forma appuntata di questo golfo nella parte boreale, dove vi mette foce il Nilo (vedi sopra la descrizione dei punti fondamentali, § 34, n. 51).

Sezione III.

Costruzione della carta areografica.

40. Delineati sulla projezione i punti fondamentali secondo le coordinate del quadro § 33, il tracciamento delle linee e delle ombre che formano la carta propriamente detta fu compiuto usando dei disegni fatti a vista coll'occhio all'oculare. Questi furono di due specie: cioè dischi completi in numero di 31 e schizzi parziali di qualche particolar regione del disco in numero di circa 100. È avvenuto molte volte, che un istante di aria ottima permettesse di scoprire qualche nuova minutissima particolarità non indicata nel disegno generale: oppure dimostrasse qualche correzione da farsi a disegni anteriori. In tali casi non si perdettero i preziosi istanti a ripetere l'intero disco, ma si limitò lo schizzo a quelle parti, che nel dato momento importava di considerare. Molte volte uno schizzo fatto non essendo sembrato soddisfacente, ne fu fatto un altro od anche più altri di seguito fino a che la rassomiglianza fosse completa. In tutte queste pitture si cercò più l'accuratezza dei minuti particolari, che l'esatta proporzione delle grandi masse. Tale proporzione è dal catalogo dei punti fondamentali assicurata in modo assai più certo, che non

dalla stima dell'occhio, agevolmente turbato dal continuo cambiamento che la rotazione del pianeta induce nell'aspetto del disco visibile.

41. Nella seguente lista è indicata per ciascuno dei disegni completi la data, la longitudine ω del centro del disco corrispondente all'istante medio in cui il disegno fu fatto, la qualità dell'aria, e il diametro apparente del disco, secondo l'effemeride tante volte citata di Marth.

Numero d' ordine	Data 1877		ω	Qualità dell'aria	Diametro apparente di Marte
I	Agosto	23	100°	pessima	24″,3
II	»	28	75	id.	24, 6
III	Sett.	3	20	id.	24, 8
IV	»	10	280	buona	24, 5
V	»	10	294	id.	24, 5
IV	»	11	265	id.	24, 4
VII	»	12	249	id.	24, 3
VIII	»	13	254	id.	24, 2
IX	»	14	205	id.	24, 1
X	»	15	227	id.	24, 0
XI	Sett.	15	256	buona	24, 0
XII	»	16	230	id.	23, 9
XIII	»	18	181	mediocre	23, 6
XIV	»	20	152	buona	23, 3
XV	»	22	133	ottima	23, 0
XVI	»	24	107	id.	22, 7
XVII	»	26	84	id.	22, 3
XVIII	»	30	67	mediocre	22, 0
XIX	Ott.	1	98	cattiva	21, 4
XX	»	2	19	ottima	21, 2
XXI	Ott.	4	356	ottima	20, 8
XXII	»	10	307	buona	19, 7
XXIII	»	12	304	ottima	19, 2
XXIV	»	13	328	buona	19, 0
XXV	»	14	298	ottima	18, 8
XXVI	»	27	166	id.	16, 4
XXVII	»	28	138	mediocre	16, 2
XXVIII	Nov.	4	82	buona	15, 0
XXIX	Dic.	25	245	id.	9, 1
XXX	»	28	237	id.	8, 9
XXXI	»	30	210	ottima	8, 7

42. Secondo la colonna dei diametri il miglior tempo per l'esplorazione del pianeta avrebbe dovuto essere nei mesi di agosto e di settembre. Invece le vedute del mese di ottobre furono in generale le migliori, quando già il diametro più non prendeva che 16″ a 20″: e le esplorazioni più delicate appartengono tutte esclusivamente a questo mese, durante il quale in alcune serate veramente rare e stupende fu possibile profittare di tutto il potere definiente del nostro Refrattore di Merz. Nè affatto inutili furono le osservazioni fatte nei mesi seguenti sino al marzo 1878,

siccome la descrizione delle regioni di Marte nella parte III di questa Memoria farà vedere. Io posso dunque colla mia esperienza confermare quanto già fu asserito da altri astronomi: per le ricerche areografiche la qualità dell'aria essere un elemento di gran lunga più importante, che il diametro apparente del disco. Ne segue il corollario, che si può sperare di far buoni lavori sulla topografia di Marte anche in quelle opposizioni, che non cadono nei punti del massimo avvicinamento possibile fra Marte e la Terra.

43. Dopo questa enumerazione del materiale areografico da noi raccolto per l'interpolazione delle minute particolarità fra le posizioni fondamentali nessuno si aspetterà una pubblicazione integrale dei disegni originali. Non dei dischi completi: i quali non sempre furono presi nei momenti migliori, e spesso mancano di quei particolari più minuti e più difficili che furono oggetto di soli schizzi parziali nei momenti sempre brevissimi di ottime immagini. Neppure di questi schizzi: i quali non sono per lo più che frammenti mancanti d'ogni orientazione, e troppo numerosi, e talvolta intelligibili nella loro vera significazione soltanto a chi li ha fatti. Lo scopo loro era di fissare rapidamente la memoria su quanto s'era veduto negli intervalli in cui il cannocchiale sembrava operar meglio del consueto, intervalli preziosi, e che sarebbe stato follia consacrarne ad altro, che a minute e diligenti ispezioni degli oggetti più difficili a constatare e ad interpretare. Ciò che noi invece offriamo è quel risultato, che ci parve più certo o almeno più probabile dell'esame comparativo di tutti i disegni fatti così generali come parziali, esame aiutato dalle rapide note che continuamente si andavano scrivendo. Per lo più il conseguimento di questo risultato non ha offerto dubbî, i varî disegni della medesima regione confermandosi reciprocamente, o servendo taluno a correggerne altri fatti in meno buone condizioni di visione. Qualche volta ho trovato contraddizioni e dubbiezze: ed in questi casi le ho esposte fedelmente in quella sezione della parte III che riguarda la descrizione della regione o dell'oggetto su cui versa l'incertezza. Spero che in questa maniera avrò ad un tempo conciliato il dovere di rigorosa verità con l'obbligo di non presentare al lettore una massa indigesta e inordinata di rozzi materiali.

44. Per mostrar tuttavia il modo tenuto nelle delineazioni riproduco nella Tavola II copia esatta di quattro fra i dischi completi, cioè dei numeri XX, XVII, XIII e XXV, corrispondenti ad istanti, in cui la longitudine areografica del centro del disco era di gradi 19, 84, 181, 298. Fra tutti quattro essi comprendono press'a poco tutta la superficie del pianeta visibile nell'opposizione del 1877. Si vedrà che in essi mancano molti particolari notati sulla carta, particolari che non erano visibili quando quei disegni furono fatti. Il disegno XVII poi è colla carta in aperta contraddizione presentando un'appendice luminosa a sinistra della regione Thaumasia, dove la carta ha soltanto un'isoletta di colore oscuro, detta Terra di Proteo. Tale appendice luminosa era una massa di nubi illuminate, che in quel momento copriva la Terra di Proteo. Simile contraddizione in scala anche maggiore si vede nel disegno XX in riguardo della grande isola d'Argyre, che sta in alto: e la spiegazione è qui ancora la stessa, siccome si dirà a suo luogo.

45. Io devo ora aggiungere qualche parola sul modo tenuto nell'adattare le figure dei disegni alla rete dei punti fondamentali. Questi furono collocati sulla

carta (Tav. III) precisamente nelle posizioni indicate dal loro catalogo. L'operazione conseguente dell' interpolazione dei minuti particolari fra quei punti è riuscita nel più dei casi senza difficoltà. Ma tuttavia è accaduto qualche volta (specialmente nei luoghi dove si hanno più punti fondamentali molto vicini fra loro) che non fu possibile combinare le posizioni di alcuni punti meno bene determinati col tracciamento dei disegni, senza far troppa violenza a questi. Allora si è cercato di adattare il tracciamento ai numeri fondamentali non esattamente, ma entro i limiti dell' errore a cui si può supporre, che i punti refrattarî sian soggetti. I principali fra questi casi riguardano i punti 7, 16, 22, 27, 36, 39, 45, 59 e 60, sui quali già le riflessioni occorrenti sono state esposte nel § 34. Lavori ulteriori nelle prossime opposizioni di Marte, accrescendo l' esattezza del catalogo, potranno far sparire, almeno in parte, queste leggere contraddizioni.

46. La nostra carta principale sta nella Tavola III annessa a questa Memoria, ed è in projezione di Mercator. Perchè fosse manifesta dovunque la connessione delle varie regioni fra loro, una parte delle regioni di destra è ripetuta a sinistra del foglio. La parte boreale è stata troncata al 40° parallelo, al di là del quale non si potè far osservazioni sicure. Affinchè poi si abbia una idea esatta della disposizione delle regioni prossime al polo australe, si è aggiunta nella Tav. IV una projezione stereografica polare dell' emifero sud. Tanto questa projezione, come l'altra non danno che i contorni, sono cioè carte nel vero senso della parola, e non riproducono la varietà delle tinte e dei colori che nel pianeta realmente si osservano. Onde corrispondere almeno in parte al desiderio di colmare questa lacuna, nella Tav. V ho aggiunto quattro vedute del pianeta in projezione ortografica, le quali mostrano (ancora molto imperfettamente a dir il vero) quale si dovrebbe essere l' aspetto di Marte se non esistesse la sua atmosfera e se l' atmosfera della Terra fosse assolutamente tranquilla. Queste quattro projezioni suppongono rispettivamente che la longitudine del meridiano centrale sia di 0°, 90°, 180° e 270°, e che la latitudine del centro del disco sia di 25° australi. Corrispondono dunque tali vedute *teoriche* quasi esattamente alle configurazioni, in cui furono tracciate le quattro vedute *effettive* della Tav. II. Il paragone mostra più che qualsivoglia discorso, quanto poco si possa afferrare dei particolari del pianeta in una pittura generale, eseguita in fretta nello spazio di pochi minuti, e quanto preferibile sia l' esame paziente dei piccoli particolari fatto nei pochi momenti, che si possono ottenere, di visione veramente buona.

Circa le denominazioni usate nelle nostre carte avrò occasione di dar fra poco i necessarî schiarimenti.

Capitolo III.

Descrizione dell' emisfero australe del pianeta e di una parte dell'emisfero boreale, secondo le osservazioni fatte a Milano nel 1877 comparate con quelle di Astronomi anteriori.

Sezione I.

Generalità.

47. La parola *descrizione* premessa come titolo a questa parte non deve prendersi nel senso che si adopera parlando della superficie terrestre. Areografia completa nel vero significato della parola non esiste e non esisterà ancora per lungo tempo. Sotto quel nome io ho inteso di raccogliere e di classificare per regioni le osservazioni che ho potuto fare ricorrendo l'opposizione del 1877: di indicare il grado di certezza delle medesime, di discutere, quando occorrono, le loro incoerenze. Inoltre mi propongo di comparare i risultati ottenuti con quanto di più certo si ha per tradizione di Astronomi anteriori, constatando i punti dove reciprocamente si confermano, e indagando, dov' è possibile, le cause delle differenze numerose e spesso gravissime, che in questa comparazione s' incontrano. Premetterò alcune parole sopra le supposizioni da me adottate nell' interpretare le osservazioni fatte e sopra la nomenclatura della carta.

48. L' interpretazione dei fenomeni osservati su Marte è cosa ancora in gran parte ipotetica; essa può differire secondo i diversi osservatori, anche quando i risultati delle loro osservazioni constatano le medesime apparenze. Alcuno potrebbe anzi desiderare che si esponesse semplicemente quando si è veduto, senza far uso di interpretazione alcuna. Questo è assai difficile, per la complicazione che introduce nell' enunciato stesso delle osservazioni. Com' ebbi principiato a scrivere in presenza del cannocchiale il ricordo delle cose vedute, tosto mi avvidi della necessità di dar un nome qualunque a ciascuno degli spazî diversamente colorati, delle linee e dei punti che si osservano sul pianeta. L' insieme delle configurazioni vedute presentava tale stretta analogia con una carta delle regioni terrestri, da non lasciar dubbio alcuno sulla classe di nomi che dovevasi preferire. Qual brevità e chiarezza non induce nello scrivere l' uso delle parole *isola, istmo, stretto, canale, penisola, promontorio* ecc.? Ciascuna delle quali include per sè una descrizione e un insieme di notizie non altrimenti esprimibile che con lunghe perifrasi, da ripetersi ogni volta che si vuol parlare del corrispondente oggetto. La nostra carta dunque, come alcune altre già pubblicate, include un sistema intero di denominazioni geografiche. Le quali possono, da chi nulla voglia pregiudicare sulla natura delle macchie del pianeta, considerarsi come un semplice artifizio per aiutare la memoria e render più breve il discorso. Noi parliamo in simile modo dei *mari* della Luna, che sappiamo benissimo

non esistere come masse liquide. Intendendo la cosa in questo modo è chiaro, che i nomi da me adottati nulla nuoceranno alla fedele e rigorosa espressione dei fatti. Circa le nozioni positive che si possono ottenere sulla natura delle macchie di Marte si discorrerà nella parte IV di questo scritto, esclusivamente destinata alla trattazione di simili questioni.

49. Questo sia detto per la parte generale della nomenclatura, nella quale del resto altro non faccio, che seguire l'uso già da altri praticato senza inconvenienti. Assai men facile è giustificare la novità dei nomi di geografia poetica e di archeologia mitica impiegati a distinguere l' una dall'altra le formazioni della stessa specie. A questa fui obbligato dalla necessità. Gli astronomi, che fino ad oggi si occuparono di costruire e di perfezionare le carte areografiche seguirono nella nomenclatura sistemi diversi. Primo fu Maedler nel 1830 a distinguere alcuni punti più salienti della superficie di Marte con lettere dell'alfabeto: nel che fu seguìto ed imitato da Kaiser. Proctor invece, nella carta da lui costrutta sulle osservazioni dell'astronomo Dawes, rivestì Marte di un completo sistema di denominazioni geografiche simili a quelle da me adottate, e i nomi ricavò dai più celebri astronomi, che si occuparono del pianeta. Si trova dunque su questa carta il *Mare di Kaiser,* l'*Isola di Jacob,* lo *Stretto di Dawes,* l'*Oceano di De la Rue* ecc. Nelle mie osservazioni io credeva da principio di usare i nomi di Proctor. Ma ben presto nacque la necessità di abolirne alcuni, di sostituirvene altri e di crearne un gran numero di nuovi. Quella nomenclatura era affatto insufficiente per la quantità di nuovi oggetti che era indispensabile nominare in qualche modo, e per le modificazioni profonde che doveva subire. I quattro gran continenti di Proctor sono sminuzzati ora in una moltitudine d'isole, ed è a credere che questo lavoro di sminuzzamento progredirà ancora. Alcuni di quei mari sono eliminati dalla nostra carta, o ridotti a proporzioni insignificanti (*Mare di Main* e *Mare di Dawes*): nuovi e veri mari furono introdotti (*Mare delle Sirene, Mare Cronio*). Vi è un Oceano intiero (*Oceano di Dawes*) per cui sulla nostra carta non si trova posto. Grandi isole sono sprofondate al fondo del mare (*Isole di Phillips e di Jacob*) o ad ogni modo non sono più isole. Dunque per evitare equivoci ed abbagli ho dovuto provvisoriamente creare una nomenclatura speciale per mio proprio uso; e nello stabilirla non ho potuto indurmi a seguire il sistema di nomi personali adottato dal Proctor. Questa mia nomenclatura, fatta mentre stava lavorando al cannocchiale, e quindi probabilmente soggetta a molte imperfezioni, si conserva nella presente Memoria soltanto per poter descrivere in qualche modo quello che si è veduto. *Non intendo sollecitare per essa l'approvazione degli Astronomi, nè l'onore di passare nell' uso generale*; anzi dichiaro, esser pronto ad adottare più tardi quella, che da sufficienti autorità sarà riconosciuta come definitiva. Fin allora mi si conceda di chiamare con questi eufonici nomi, il cui suono desta nell'animo tante belle rimembranze, un insieme di cose, di cui male la memoria potrebbe ritenere la connessione e la relazione sia per mezzo di numeri o di lettere dell'alfabeto, sia torcendo ad inesatti significati i nomi esistenti sulle carte anteriori.

50. Lo studio comparativo dei rilevamenti ottenuti della superficie di Marte anteriormente al 1873 è stato già fatto con tutta la cura possibile dal dott. F. Terby di Lovanio, nella sua eruditissima *Areografia* pubblicata dall'Accademia Reale del

Belgio [1]: il ripeterlo qui sarebbe stato opera press' a poco inutile. Anche trattando delle mie proprie osservazioni ho creduto di dover passare rapidamente su quei punti, che dalle discussioni del Terby si possono considerare come per sempre messi in chiaro. Invece ho impiegato tutta la possibile diligenza nell' esame delle cose, che al sig. Terby parvero ancora oggetto di dubbio, e di quelle altre, che ora per la prima volta si possono con qualche frutto proporre. Di molti particolari dei disegni anteriori, che prima erano stati poche volte od imperfettamente veduti, qui credo aver recato confermazione: ed anche qualche volta credo di aver dato di certe osservazioni un' interpretazione esatta, che forse prima non era possibile. Molte cose mi è avvenuto di correggere e di rettificare presso gli osservatori anteriori; e attendo che il presente lavoro, di cui nessuno meglio di me conosce i difetti, a sua volta debba esser oggetto di rettificazioni e di critiche, tale essendo la legge del progresso scientifico.

51. Le principali serie di disegni da me impiegati nella comparazione e nell'esame delle varie questioni sono (oltre a quelli, che vanno annessi alla già citata *Areografia* di Terby) le seguenti:

Per l'opposizione del 1830: Maedler, *Astronomische Nachrichten*. Vol. VIII, p.447.

Per le opposizioni del 1832 e del 1837: Maedler, *Beiträge zur physischen Kenntniss der himmlischen Körper*. Weimar, 1841.

Per l'opposizione del 1858: Secchi, *Memorie dell'Osservatorio del Collegio romano*. Vol. I, n. 3.

Per l'opposizione del 1862: Secchi, *Memorie dell' Osservatorio del Collegio romano*. Vol. II, n. 10. Lockyer, Rosse, Lassell nel tomo XXXII delle *Memorie della Società astronomica di Londra*. Kaiser nel tomo III degli *Annali dell' Osservatorio di Leyda*. Phillips, *Proceedings of the Royal Society*, 1863. Feb. 12.

Per l' opposizione del 1864: Kaiser nel tomo III degli *Annali dell'Osservatorio di Leyda*: Dawes, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, tom. XXV, p. 225. Franzenau, *Sitzungsberichte der k. k. Akademie der Wissenschaften zu Wien*. LI. Bd. 2ᵉ Abtheilung, p. 509.

Per l'opposizione del 1873: Knobel, *Monthly Notices of the R. Astronomical Society*. Vol. XXXIII, p. 476.

Altre minori serie di disegni fatte da Schmidt, Green, Harkness ecc. saranno citate di mano in mano che occorrerà prenderle in considerazione. Inoltre continuamente si farà riferenza alle carte del pianeta pubblicate da Maedler, da Kaiser, e da Proctor. La prima è fondata sulle osservazioni fatte nel 1830 e trovasi annessa al tomo VIII delle *Astronomische Nachrichten*. Nella seconda Kaiser ha coordinato le sue osservazioni del 1862 e del 1864; essa è pubblicata nel tomo III degli *Annali dell' Osservatorio di Leyda*. La terza è stata composta da Proctor sopra disegni di Dawes fatti in diverse epoche, particolarmente nel 1864: io ho avuto fra le mani l' edizione che va annessa all' opera di Proctor intitolata: *The Orbs around us*. Londra 1872. Di tutte queste carte si darà più esatto cenno in seguito.

(1) *Aréographie ou étude comparative des observations faites sur l'aspect physique de la planète Mars depuis* Fontana (1636) *jusqu' à nos jours* (1873) par M. F. Terby. Mém. des Savants étrangers de l'Académie Royale de Belgique. Tome XXXIX.

Sezione II.

Il grande diaframma e il Corno d' Ammone.

52. Al nascere della Geografia matematica presso i Greci l'antico Dicearco pose per base della descrizione della Terra conosciuta il suo celebre *diaframma,* cioè una linea fondamentale, che correva dalle Colonne d'Ercole alle estremità orientali dell' Asia allora conosciuta, stringendosi alle rive settentrionali del Mediterraneo, al Monte Tauro, ed alle sue continuazioni verso Oriente. Una simile guida per procedere ordinatamente nella descrizione di Marte ci offre la linea sinuosa, che dal fondo della Gran Sirte va pel Corno d'Ammone a costeggiare le rive settentrionali del Mare Eritreo, e di là girando intorno alla Terra delle Meraviglie (*Thaumasia*) per le Colonne d' Ercole segue la lunga serie dei mari interni dell'emisfero australe, cioè il Mare delle Sirene, il Mare Cimmerio, il Mar Tirreno, per metter di nuovo capo alla Gran Sirte. Questa linea divide la superficie del pianeta in due parti alquanto disuguali, ed è anche obliqua al suo equatore, stendendosi dal 45° parallelo di latitudine australe al 20° di latitudine boreale. Il suo corso è alquanto irregolare, ma non meno bene servirà al presente scopo. Il grande diaframma si presenta colla massima evidenza anche al primo sguardo superficiale che si dia al pianeta, come le quattro projezioni ortografiche della Tavola V a sufficienza dimostrano; dove in generale si vedrà che al disotto di esso diaframma la superficie del pianeta è assai più luminosa e meno rosseggiante che al di sopra di esso. L' importanza di questa linea nello studio della superficie di Marte fu già riconosciuta dal geologo Phillips nel 1862 (1). Noi la seguiremo nel senso delle longitudini incominciando dal punto chiamato *Corno d'Ammone* (long. 318°,3 lat. australe 10°,4).

53. Sebbene non formato da una punta molto acuta, il Corno d'Ammone occupa nella topografia di Marte una posizione importante e prominentissima in certe vedute del pianeta (Tav. II, disegno XXV). Il mare che lambe questa parte delle terre equatoriali di Marte è assai scuro dalla parte occidentale: ad oriente la linea delle coste è ben netta, ma a piccola distanza incominciano sul fondo oscuro chiazze più chiare formanti prolungamento della regione detta Ausonia. La terra contigua al Corno d'Ammone ed alla riva occidentale della Gran Sirte è detta Aeria (nome antico dell' Egitto) ed è il *più grande spazio luminoso continuo* che finora io abbia potuto trovare sul pianeta Marte. Durante tutto il tempo delle mie osservazioni (settembre 1877 - marzo 1878) questa regione fu sempre molto splendente, e non è stato possibile notare in esso alcuna ombra o macchia qualsiasi. Forse in parte lo

(1) *Proceed. of the R.' Soc.* Vol. XII, p. 434. « A great part of the northern area appeared bright, and often reddish, as it were land, while a great part of the southern area was of the grey hue which is considered to indicate water, but relieved by various tracts of a tint more or less approaching to that of the brighter spaces of the northern hemisphere. The *principal boundary of light and shade*, for the most part very well defined, ran obliquely across the equator of Mars, so as to reach latitudes from 20° to 30° north and south of that line ».

splendore di questa terra è effetto di contrasto per la grande oscurità del mare lungo i suoi confini. La linea delle coste così verso la Gran Sirte, come verso il Golfo Sabeo è priva di dentellature di qualche momento, sebbene negli istanti d'aria buona si abbia l'impressione di un gran numero di minutissime sinuosità non distinguibili l'una dall'altra.

54. Le mie osservazioni del Corno d'Ammone comprendono molti giorni dal 10 di settembre al 9 di marzo, nel quale intervallo l'ho disegnato ben 12 o 15 volte. In tutte queste occasioni io l'ho sempre veduto in forma di un angolo ottuso come si trova figurato per es. nel disegno XXV della Tavola II. Così pure l'hanno disegnato molti altri osservatori, Maedler, Secchi, Rosse, Lassell, Phillips, Dawes ecc. Nei disegni di alcuni Astronomi invece il Corno d'Ammone ha una figura più aguzza e più protesa verso il polo australe: veggansi presso Kaiser i disegni del 31 ottobre 1862, 10 dicembre 1862, 19 novembre 1864 e 28 dicembre 1864. Una simile forma è data da Lockyer nei suoi disegni del 1862, 23 settembre, 25 settembre, 3 ottobre. Caratteristica al tutto nei disegni di Kaiser è una specie di lingua o filamento luminoso, che dal Corno d'Ammone si protende molto innanzi verso il sud in quasi tutti i suoi disegni così del 1862, come del 1864 e che Kaiser trasportò anche sulla carta di Marte da lui costruita nella regione ch'egli indica colla lettera *e*. Non trovo di questa particolarità che rari indizî presso altri osservatori. Lockyer ne ha un debole accenno sotto la data del 3 ottobre 1862: Rosse sotto il 22 luglio del medesimo anno indica tale filamento con molta chiarezza, meno chiaramente sotto il 6 ottobre: il suo disegno del 6 novembre poi ha *due* filamenti luminosi che divergono dal Corno d'Ammone, l'uno quasi perpendicolarmente all'altro. Lassell in settembre 1862 ha visto come noi; il 4 e il 5 novembre ha figurato la costa d'Aeria con parecchie indentazioni a sinistra del Corno d'Ammone.

55. Di queste apparenze io mi rendo ragione nel modo seguente. Supponendo (ciò di cui si han tanti esempî) che le macchie variabili di Marte siano nubi, sotto l'illuminazione del Sole esse dovranno presentarsi come molto luminose. Se dunque in una data regione a vicenda si osservò una tinta cupa e un colore luminoso, deve ritenersi che nel primo caso si vedesse la superficie del pianeta, nel secondo invece uno strato di nuvole o di nebbia. Dato questo principio (1), la cui applicazione si è mostrata possibile e coerente in tutti i casi, dovremo giudicare che le projezioni del Corno d'Ammone e la sua forma acuminata non sono che apparenze transitorie, e che la vera forma di questo promontorio è quella, sotto la quale invariabilmente si presentò nel 1877. Quest'anno fu notevole per la purezza dell'atmosfera del pianeta, ciò che non si può dire di altri e specialmente nel 1862, in cui il Mare Eritreo sembra fosse quasi costantemente coperto da strati di nuvole. Noi vedremo più tardi, esser questa fra le regioni di Marte una di quelle dove più frequenti sono le perturbazioni atmosferiche, e queste perturbazioni troveremo connesse colla presenza delle terre ombreggiate ed oscure, di cui il Corno d'Ammone è circondato quasi da ogni parte.

(1) Enunziato già nel 1862 da Lockyer (*Mem. of the R. Astr. Society*. Vol. XXXII, p. 183).

Sezione III.

Golfo Sabeo: Phison, Hiddekel e Gehon.

56. A partir dal Corno d'Ammone si stende verso occidente il Golfo Sabeo per quasi cinquanta gradi di longitudine fra l'Aeria e l'Arabia da una parte, e la gran penisola di Deucalione dall'altra. Se, come noi crediamo, questa penisola è una terra sommersa, il nome di *golfo* si conviene solo imperfettamente a questa formazione, e più esattamente si dovrebbe considerarla come un profondo solco nella parte boreale del Mare Eritreo. Il colore del Golfo Sabeo non è uniforme, ma dal lato boreale, dove è più oscuro che qualunque altra parte del pianeta, va digradando e sfumandosi poco a poco sino al limite boreale poco preciso della Terra di Deucalione. Per questa ragione il Golfo Sabeo, esaminato con potere ottico troppo debole, si presenta a prima vista come una semplice linea nera sinuosa; il doppio corno che ne forma l'estremità occidentale appare allora indistinto, come un gruppo d' ombre scure mal definite. Il suo lato boreale, che colla tinta cupa forma un contrasto fortissimo colla brillante zona continentale contigua è molto accidentato, e considerato in buone condizioni atmosferiche con ingrandimento sufficiente (non meno di 300) mostra varî seni e promontorî, fra i quali però sono ben distinguibili soltanto quelli, che occupano la metà occidentale a partir dal 340° meridiano. Sotto questa longitudine un piccolo golfo (*Baja di Schmidt* secondo Terby) raccoglie il canale Phison, che viene dall'emisfero boreale, e divide l'Aeria dall'Arabia. Il Phison sotto il 40° parallelo boreale si connette col Nilo, come indica la carta. Dopo la bocca del Phison il Golfo Sabeo è molto ristretto dal protendersi che fa la costa d'Arabia verso il sud con una protuberanza quasi semicircolare, fin quasi a contatto colla Terra di Deucalione. Questo passo è così angusto, che quando l'aria è cattiva l' ondulazione delle immagini e la diffusione possono farlo sembrare come intieramente chiuso per momenti. Nell'aria calma il filetto interposto è però sempre molto nero. Più oltre il golfo si allarga, e nello stesso tempo gira per un angolo retto, formando colla sua estremità due acuti seni, da noi denominati corno I e corno II del Golfo Sabeo. Nel corno I credo abbia foce l'Hiddekel, ramo del Nilo quasi uguale e parallelo al Phison: nel corno II ha foce il Gehon, che viene anche esso dal Nilo come diramazione dell' Indo.

57. Tutte queste particolarità non ho potuto scoprire che parte per parte. Il 1° ottobre vidi per la prima volta il Golfo Sabeo in aria non buona, così che non mi riuscì neppure di sdoppiare i due corni. Il 2 ottobre, essendo al centro il meridiano 19° [1] non solo mi riuscì di sdoppiare i corni e di riconoscere distintamente il vertice d'Aryn, ma vidi ancora la foce del Gehon, il quale mi parve

[1] D' or innanzi, invece d' indicare l'ora e il minuto di ciascuna osservazione, si darà il valore di ω, cioè la longitudine areografica del meridiano, che in quell' istante passava pel centro del disco. Tale dato permetterà di giudicar subito della posizione che allora tenevano rispetto al centro o rispetto al lembo gli oggetti osservati. Per brevità questo valore di ω sarà scritto subito dopo la data e fra parentesi: così 4 ottobre (356°) indicherà il giorno 4 ottobre, nel momento in cui passava al centro del disco il meridiano 356° della nostra carta.

allargarsi un poco entro terra, come se procedesse da un lago interno. Le nuvole, che allora occupavano quasi tutta questa parte delle terre equatoriali, non mi permisero di vedere del Gehon altro che un brevissimo tratto. Il 4 ottobre rividi il Gehon e scoprii la bocca del Phison, la quale allora mi parve come « un ramo molto pallido e dubbioso procedente entro terra dal Golfo Sabeo ». Il 10 ottobre il Phison era visibile nell'interno del continente fin verso il 15° parallelo boreale, ma con molta difficoltà. Trovasi anche indicato nei disegni del 12, 13 e 14 ottobre, senza alcuna pretensione ad esattezza. Io credeva chiusi per molto tempo gli atti relativi ai canali di questa regione, quando verso la fine di febbraio e il principio di marzo essendosi diradati i vapori che coprivano questa parte della zona equatoriale, potei seguire il corso del Nilo fra la Gran Sirte e l'Oceano, e tracciare una parte dei canali che lo fanno comunicare col Mare Eritreo. Veramente il diametro del pianeta essendo in quell'epoca ridotto a meno di 6″, soltanto col profittare di ottimi momenti, e coll'impiegare la massima amplificazione negativa (468) del nostro refrattore si potè riuscire a constatar qualche cosa di certo. Il 26 febbraio (25°) scoprii che l'Indo si diramava nel Gehon; quest'ultimo tanto era appariscente, che lo giudicai più visibile dell'Indo. Il 28 febbraio fu confermata quell'osservazione, e scoperto l'Hiddekel, senza però poter precisare la sua relazione col Gehon. Il 3, il 4 e il 5 marzo rividi l'Hiddekel, che mi parve diretto dal nord al sud, ma sempre fui dubbioso nell'assegnare la sua foce australe. Essendo infatti il pianeta così piccolo, riusciva impossibile di distinguere i due corni del Golfo Sabeo l'uno dall'altro, e assegnare a ciascun canale la giusta foce. Tuttavia il modo di separarsi dell'Hiddekel e del Gehon presso il fondo del Golfo Sabeo mi fece credere come più probabile, che l'Hiddekel sboccasse nel primo corno: e questa *opinione*, che ha bisogno di conferma, servì di base al tracciamento della carta. Nella quale però, come segno d'incertezza, tutti questi canali sono disegnati a punti nelle parti ancora imperfettamente conosciute. Quanto al Phison, ho potuto vederne abbastanza bene l'intiero corso nei giorni 3, 4 e 5 marzo, e credo che il suo tracciamento indichi con bastante approssimazione il luogo dov'esso si separa dal Nilo.

58. Il Golfo Sabeo è qualificato col nome di *stretto* nella carta di Proctor (*Herschel II Straits*); ivi la penisola di Deucalione, accogliendo a traverso del suo istmo un prolungamento del golfo anzidetto, è ridotta ad un'isola. In tale sistema, i due corni del Golfo Sabeo non formano più che una doppia baja nel continente sottoposto (*Dawes' forked Bay*). Ciò è in contraddizione aperta con quanto io ho osservato e con quanto molti altri hanno osservato prima di me. Autorità egualmente rispettabili stanno per l'una e per l'altra versione, e la difficoltà è una di quelle, di cui Terby ha proposto agli Astronomi la risoluzione [1]. Noi pure ce ne occuperemo discorrendo della Terra di Deucalione e delle altre simili che sono sparse pel Mare Eritreo. Intanto è certo che la penisola di Deucalione è qualche cosa di ben diverso dal sottoposto continente: non solo a cagione della sua tinta molto più oscura, ma ancora perchè queste diverse tinte si toccano sull'istmo in un modo crudo e netto, formante un limite ben definito, siccome ebbi occasione di notare il 2 e il

[1] *Aréographie* p. 63 e 77.

4 ottobre: tanto ben definito, che potei tentare di determinare in esso la posizione di un punto, che è il n. 4 del nostro catalogo. Questo limite forma una linea leggermente convessa verso l'alto e va dal Golfo Sabeo al Golfo delle Perle, tagliando netto per traverso l'istmo interposto. Per ora considereremo tale linea come formante la spiaggia del Mare Eritreo in questa parte. L'istmo luminoso così troncato forma una prominenza ottusa quasi rettangolare, che è stata benissimo veduta e figurata da Kaiser l'11 novembre 1864. Noto per incidenza, che questo Astronomo ha veduto il Phison, e lo ha indicato al lembo destro del suo disegno del 22 novembre 1864. È l'unica osservazione che abbia potuto rinvenire di questo canale. Nè dell'Hiddekel, nè del Gehon ho potuto trovare indizio presso alcuno degli osservatori anteriori.

Sezione IV.

Golfo delle Perle: Indo ed Idaspe: Chryse.

59. Dopo la troncatura dell'istmo e la sottoposta Regione degli Incensi *(Thymiamata)* segue il vasto e profondo Golfo delle Perle, il quale è di color cupo forse quanto il Golfo Sabeo, e quando questo è passato a sinistra in una regione meno visibile del disco, sembra formare il punto più prominente del Mare Eritreo verso il basso. Quando l'aria è cattiva, da chi non è ben orientato si può facilmente scambiare il Golfo delle Perle colla Gran Sirte [1]. Il Golfo delle Perle è una specie di vasto triangolo di cui un lato forma il limite occidentale della Terra di Deucalione, l'altro va dritto al promontorio degli Aromi *(Aromata)*. Dal vertice inferiore parte il largo canale detto Indo, prima nella direzione di nord-est, poi dopo la diramazione del Gehon, nella direzione di nord-ovest, fino al Nilo, col quale si connette formandone un braccio molto considerabile. La costa, che dalla bocca dell'Indo si stende al Capo degli Aromi è generalmente rettilinea, ma verso la metà è rotta da una profonda indentatura anch'essa molto nera, che forma la bocca dell'Idaspe. Questo canale non ho potuto seguire entro terra che 5 o 6 gradi al più: al suo termine appariva subitamente troncato senza che fosse possibile congetturarne alcun prolungamento attraverso al continente luminosissimo di Chryse, neppure quando l'Indo e il Gange si mostravano visibilissimi in tutta la loro estensione fra l'Eritreo ed il Nilo.

60. La descrizione del Golfo delle Perle sulla nostra carta è dedotta da due sole sere d'osservazione, 2 e 4 ottobre, nelle quali però le circostanze atmosferiche erano stupende e permettevano di profittare di tutta la forza dello strumento. Una confermazione generale del tutto ebbi la sera del 7 novembre, in aria ottima, quando il diametro apparente del disco era ridotto a 15″. Ma in nessuna di queste occasioni mi era stato possibile seguire l'Indo al di là del 10° parallelo nord, per la causa già accennata, delle masse di nubi, che occupavano allora Aeria, Arabia, Eden e Chryse. Il corso dell'Indo non si scoperse prima del 24 febbraio, e potei esaminarlo fino al 1° marzo consecutivo, essendo il diametro del pianeta di soli 5″, 7. La migliore osservazione fu del 26 febbraio, quando scoprii la diramazione dell'Indo e del Gehon.

[1] Questo mi avvenne il 4 di settembre: vedi su ciò Terby, *Aréographie* p. 78.

Tutta questa parte della carta ciò malgrado non è che uno schizzo grossolano, il quale soltanto da accurate osservazioni nelle prossime opposizioni potrà ricevere il necessario grado di esattezza.

61. Il Golfo delle Perle è stato veduto da molti osservatori ([1]) e si trova anche sulla carta di Proctor, dov'è designato col nome di Baja di Beer *(Beer's Bay)*, sotto una forma simile alla nostra, ma senza indizio del canale che noi chiamiamo Indo. A pochi invece è stato dato di constatare la foce dell'Idaspe. Capitale mi sembra per questa parte il disegno di Kaiser, 11 novembre 1864, dove dopo l'istmo troncato della Terra di Deucalione, si trovano il Golfo delle Perle, la foce dell'Idaspe e il Capo degli Aromi in una forma che collima col nostro disegno in modo sorprendente. Ma neppure Kaiser ha potuto seguitare il corso dell'Idaspe entro terra. Dawes invece, i cui disegni sono quasi esattamente contemporanei a quello di Kaiser (10, 12, 14 novembre 1864) disegna attraverso il continente equatoriale un largo canale diritto nella direzione del meridiano, il quale si versa nel Mare Eritreo con larghissima foce, sopprimendo intieramente il Capo degli Aromi, e dando a tutta questa costa una forma inconciliabile colle osservazioni di altri areografi. Nè il 9, nè l'11 novembre dello stesso anno Kaiser non ha visto nulla di tuttociò. Contraddizione fra sommi osservatori, che io non oso spiegare: mi limito a ripetere che io ho visto esattamente come Kaiser. Questi dubbî naturalmente pesano anche sulla carta di Proctor, che è fatta esclusivamente sulle osservazioni di Dawes. Il suo *Stretto di Dawes* per me non esiste.

62. Il sig. Terby ha pubblicato nella sua *Aréographie* un disegno fatto nel 1871 dal sig. Lehardelay (vedi il n. 32 dei disegni annessi a quell'opera), nel quale un lungo e tortuoso canale sembra dirigersi dal Golfo delle Perle verso il nord. La posizione della foce australe renderebbe probabile l'idea, che Lehardelay abbia veduto tutto l'Idaspe. Ma nel suo disegno non vi è traccia nè dell'Indo, nè del Gange. In nessun caso poi il suo tracciamento presenta punti di contatto con quello di Dawes. È necessario sospendere ancora il nostro giudizio.

63. Le due ovali scure che Kaiser colloca sulla sua carta nelle longitudini 70° e 54° (18°, 8 e 34°, 8 secondo il nostro modo di contare) sono evidentemente le bocche dell'Indo e dell'Idaspe, da lui interpretate in modo affatto suo proprio.

64. La regione di Chryse, che è una delle più luminose del pianeta, forma un poligono irregolare compreso fra il Mare Eritreo, il Nilo, l'Indo ed il Gange. La sua estremità più australe è costituita dal promontorio degli Aromi, angolo ottuso formato dalla convergenza di due coste quasi rettilinee: è questo un punto prominentissimo, visibile anche nelle mediocri circostanze atmosferiche. Lungo tutta questa riva il Mare Eritreo è oscuro molto, ma più presso la riva, che nelle maggiori distanze. Dal Capo degli Aromi la linea della costa corre direttamente alla bocca del Gange senza alcun accidente degno di nota, formando il lato orientale del gran Golfo dell'Aurora. Notabilissimo invece è, che sul meridiano stesso del Capo degli Aromi come asse si stende l'istmo di un'altra penisola di colore oscuro, la quale nel parallelismo delle direzioni e delle forme imita perfettamente la Terra di Deucalione,

([1]) Terby, *Aréographie* p. 72-77.

rimanendo però alquanto inferiore in grandezza e alquanto più scura nella tinta. Nella carta è segnata col nome di terra di Pirra. A chi la considera superficialmente essa appare come un'isola a contorni sfumati di color poco più chiaro che il rimanente del Mare Eritreo: ma in ottime circostanze (ottobre 2 e 4) io ho distinto con piena certezza l'istmo, per cui si attacca al continente di Chryse. Il colore della penisola si va facendo talmente cupo verso la radice, e lungo tutta la costa anche nelle vicinanze del Capo degli Aromi il Mare Eritreo è talmente nero, che riesce difficile vedere l'istmo: esso esiste però indubitatamente e sta come a cavalcioni su quel promontorio metà per parte.

65. Il Capo degli Aromi è soppresso nei disegni di Dawes, e manca quindi anche nella carta di Proctor: ma diversi osservatori l'han rappresentato più o meno distintamente, anche quando non han veduto la penisola di Pirra. Esso è benissimo indicato nei dischi disegnati da Maedler nel 1830 il 14 settembre, il 13 e 14 ottobre. Presso Secchi esso costituisce una prominenza rotondeggiante. Veggansi inoltre i dischi di Lockyer (17 e 23 settembre 1862), il disegno di Knobel segnato n. 31 nell'*Areografia* di Terby, ma sopratutto quelli di Kaiser (9, 11 novembre e 18 dicembre 1864), i quali più di tutti rassomigliano ai nostri. Nel disegno del 18 dicembre 1864 Kaiser ha indicato nel modo più evidente anche la radice della penisola di Pirra, della quale tratteremo particolarmente più innanzi.

Sezione V.

Gange e Golfo dell'Aurora. Ophir, Aurea Cherso.

66. Succede al Capo degli Aromi l'altro dei due grandi golfi, che il Mare Eritreo spinge verso il nord, cioè il Golfo dell'Aurora. Esso è visibile in condizioni anche inferiori d'atmosfera a cagione della sua ampiezza e della sua tinta oscura; e si trova delineato da molti osservatori, che è inutile riferire qui per minuto. Nel suo fondo sbocca con foce imbutiforme il Gange, uno dei canali più larghi e più visibili che esistano sulla superficie di Marte, il quale si è presentato con molta evidenza in tutte le occasioni d'aria buona e cattiva, la prima volta il 28 agosto, l'ultima il 25 febbraio. La congiunzione del Gange col Nilo forma un vasto estuario triangolare, di cui vidi le prime tracce il 4 novembre, e che alla fine di febbraio era interamente libero da ostacoli e molto visibile malgrado il diametro assai ridotto del pianeta. La direzione generale del Gange è rettilinea da sud-est a nord-ovest: la sua larghezza è certamente di parecchi gradi di circolo massimo, ma non oserei definirla, le sponde essendomi sembrate sempre piuttosto sfumate. Forse il canale non è di larghezza uniforme, e forse anche contiene diramazioni e divisioni non discernibili col potere ottico impiegato.

67. Malgrado la sua facile visibilità, non ho potuto trovare di questo canale un tracciamento soddisfacente nelle osservazioni anteriori, che presso Secchi: il quale nei quattro primi disegni del 1858 lo presenta esattamente come fu da noi veduto, e lo chiama *Canale di Franklin*. Secchi fa terminare inferiormente il Gange in uno spazio oscuro, che è certamente l'estuario triangolare da me osservato: presso Secchi però la

forma è alquanto diversa. Tutta questa regione era nell'opposizione del 1877 troppo prossima al lembo inferiore per esser delineata con molta esattezza: e quindi potrebbe anche darsi che il tracciamento di Secchi, in quelle poche cose, in cui discorda dal mio, fosse più conforme al vero. Il sig. Terby crede che il canale qui citato di Secchi sia identico allo Stretto di Dawes della carta di Proctor. Abbiamo già indicato i nostri dubbî sulla esistenza di tale stretto nella forma indicata da Dawes. La direzione e la positura sono affatto diverse pel canale di Secchi e per quello di Dawes: il primo è, come il nostro Gange, molto obliquo rispetto al meridiano, mentre il secondo lo segue quasi esattamente. Nel disegno di Secchi la foce si trova nell'angolo nord-ovest del Mare Eritreo, e subito dopo viene la costa di Thaumasia, che si eleva dritta verso il polo australe. Dawes al contrario mette la foce del suo canale in contatto immediato con quello che Proctor chiama Baja di Beer. Le tre indentazioni che la costa del Mare Eritreo offre nel disegno di Secchi sono: 1° il fondo del Golfo Sabeo; 2° il Golfo delle Perle; 3° il Golfo dell'Aurora. E non vi è posto alcuno pel Canale di Dawes.

68. Kaiser ha traveduto il Gange la sera del 18 dicembre 1864. Egli lo ha figurato sotto forma di nube oscura indistinta, che dal Golfo dell'Aurora (molto ben indicato in questo disegno e anche nella carta di Kaiser) pende in giù verso il basso del disco. La coincidenza della posizione e della direzione non lascia nulla a desiderare. Anche nel disco disegnato da Kaiser il 24 ottobre 1862 il Gange sembra indicato con una certa probabilità.

69. Sotto la latitudine boreale di 20° circa, dal Nilo che percorre tutte le terre equatoriali finora descritte in direzione poco diversa dal parallelo, si distacca dopo il Gange un altro canale molto visibile in determinate circostanze, detto sulla carta Chrysorrhoas, che si dirige quasi esattamente al sud. Ivi incontra un altro canale, ad esso perpendicolare, segnato col nome di Agatodemone; il loro punto di concorso dà luogo ad una espansione sotto forma di ombra sfumata, che nel 1877 sembra esser stata meno distinta di altre volte. L'Agatodemone, dopo un giro molto singolare sbocca nella parte più occidentale del Mare Eritreo, dove termina il Golfo dell'Aurora. Le rive di questo Golfo, l'Agatodemone, il Gange, il Nilo, e il Chrysorrhoas chiudono come isola un poligono mistilineo molto irregolare, che durante le osservazioni mi sembrò alquanto meno luminoso di Chryse, e a cui ho dato il nome di Ophir. La parte australe forma un'acuta e sottile penisola, detta Aurea Cherso: la quale forse è tagliata alla base da un ramo dell'Agatodemone, ma la cosa è molto dubbia.

70. Lungo le coste d'Ophir il Mare Eritreo comincia a perdere alquanto della nerezza, che aveva serbato nel Golfo Sabeo, in quello delle Perle, e nella parte più interna di quello dell'Aurora. Fra la bocca del Gange e la base dell'Aurea Cherso la riva forma una piccola prominenza, la quale circonda un piccolissimo lago interno rotondo, detto sulla carta Fonte di Gioventù. Questo delicatissimo oggetto fu da me veduto nella memorabile sera del 2 ottobre 1877, in cui ebbi i momenti di visione telescopica più perfetta, che ancora mi sia avvenuto di godere. Mi è sembrato per qualche momento che avesse un emissario nel Mare Eritreo verso mezzodì, ma questo non è sicuro, l'aria essendo già corrotta, quando tentai di accertare questo punto. Io non saprei indicare altrimenti le dimensioni di questo lago, se non col dire ch'esso m'apparve

come un punto nerissimo. Certamente, fatta ragione delle sue proporzioni cogli oggetti circostanti, il suo diametro non poteva eccedere 3 gradi, che importavano allora 0″5 del micrometro. Ciò fa ancora quasi 100 miglia italiane nelle dimensioni lineari effettive.

71. Nella sera medesima potei disegnare l'Aurea Cherso. Il filetto scuro, che la limita ad occidente, è abbastanza difficile a vedere: lo aveva già riconosciuto distintamente il 30 settembre e il 1° ottobre in alcuni buoni momenti: lo riconfermai fuori d'ogni dubbio il 2 ottobre, e il 4 novembre potei distinguerlo ancora per l'ultima volta. Il 2 ottobre scopersi, nel medesimo tempo che il Fonte di Gioventù, anche quello del Nettare, che forma una specie di rigonfiamento dell'Agatodemone poco lontano dalla punta dell'Aurea Cherso. Questo rigonfiamento ha al centro un punto intieramente nero, press'a poco rotondo, che in apparenza e misura giudicai perfettamente uguale al Fonte di Gioventù. Quanto alla foce dell'Agatodemone presso la punta dell'Aurea Cherso, mi è sembrata sempre poco evidente. Invece il 2 ottobre per qualche momento sospettai un'altra foce dell'Agatodemone presso la radice dell'Aurea Cherso; foce la cui esistenza ridurrebbe l'Aurea Cherso ad un'isola. Ma l'aria poco dopo si corruppe, e non fu più possibile un giudizio sicuro.

72. La maggior parte di questi particolari è nuova agli osservatori di Marte, e li registro sperando che col tempo se ne otterrà confermazione. Il Chrysorrhoas però è stato veduto distintamente da Kaiser, come si può verificare sulla sua carta e sul suo disegno del 18 dicembre 1864. Soltanto egli non lo fa arrivare sino alla congiunzione coll'Agatodemone, ma lo interrompe alquanto più in basso. Per parte mia devo avvertire, che del Chrysorrhoas nelle osservazioni dell'ottobre non potei congetturare che la parte più australe formante la giunzione coll'Agatodemone, ed anche in modo piuttosto dubbioso, come si può vedere nella Tav. II, disco XVII. Ma con mia grande sorpresa il 4 novembre vidi tutto intiero il Chrysorrhoas com'è delineato sulla carta, molto largo e molto scuro, sebbene sfumato: esso era allora assai più visibile che l'Agatodemone, e poco meno che il Gange. Di nuovo un mese dopo, ricercata la stessa regione il 10 di dicembre, vidi egregiamente il Gange, ma nulla del Chrysorrhoas, il quale anche sempre rimase invisibile in altre posteriori ricerche da me fatte. Questa variabilità credo che sia soltanto apparente e che sia dovuta a movimenti di nuvole sulle terre di Ophir e di Tharsis.

73. Per quanto concerne l'Agatodemone, non mi è riuscito di trovare nelle osservazioni anteriori alcun indizio di quella parte del suo corso che costeggia l'Aurea Cherso lungo il 65° meridiano. Invece il tronco occidentale, che segue il parallelo della radice dell'Aurea Cherso al concorso col Chrysorrhoas, e l'espansione già notata presso questo concorso sono stati veduti da molti osservatori. Talvolta l'Agatodemone è stato figurato come una larga e visibile striscia oscura, abbastanza grande per meritargli, dove concorre col Chrysorrhoas, il titolo di mare (*Dawes Sea* sulla carta di Proctor). Nel 1877 non vidi nulla in quei luoghi che meritasse simile titolo; l'Agatodemone fu sempre molto meno visibile del Gange ed anche del Chrysorrhoas, quando quest'ultimo si lasciò vedere. Allo studio di questa diversità e di altre, che s'incontrano nella stessa regione consacreremo un articolo apposito.

Sezione VI.

Thaumasia, Lago del Sole.

74. Dall'intimo recesso del Golfo dell'Aurora il limite delle terre equatoriali di Marte seguendo il grande diaframma corre prima verso il sud, poi verso l'ovest formando un grandioso e visibilissimo arco, il quale include nella sua concavità la vasta Regione delle Meraviglie (*Thaumasia Foelix*). Il mare contiguo, che è molto scuro nel Golfo dell'Aurora, va rischiarandosi alquanto a misura che si avanza lungo il detto arco; rimane tuttavia sempre un forte contrasto colla vicina spiaggia. Nella parte concava di quell'arco, quasi al centro di Thaumasia sta una forte macchia nera di circa 10 gradi (poco meno di 350 miglia) di diametro, quasi esattamente rotonda, detta il Lago del Sole nella nostra carta e *Lockyer's Sea* in quella di Proctor. Il lato settentrionale e l'occidentale di Thaumasia sono limitati dal già detto Agatodemone, e dal Fasi, procedenti in direzioni opposte dall'oblungo Lago della Fenice, men grande e meno scuro di quello del Sole. In tal guisa la regione Thaumasia costituisce un grande spazio ovale circondato per ogni parte da mari e da canali, nell'interno del quale sta in posizione alquanto eccentrica il Lago del Sole. Tutto quest'insieme produce l'apparenza, notissima agli osservatori, d'un occhio umano, del quale l'Agatodemone e il Fasi sembra costituire il ciglio inferiore, il Lago del Sole forma l'iride e la pupilla, e il grande ed oscuro arco sopradescritto forma un ampio e folto sopracciglio. Il corso verticale dell'Agatodemone fra Thaumasia e l'Aurea Cherso è troppo poco visibile per turbare queste generali apparenze.

75. Il Lago del Sole è stato più volte da me attentamente esaminato in buone condizioni d'atmosfera. Il 30 settembre, essendo il diametro apparente di Marte 21",79 il diametro di esso fu da me stimato esser press'a poco 2" per mezzo della comparazione colla grossezza dei fili. Ciò darebbe per diametro di questo lago in gradi 10°,5. Esso è grossolanamente circolare, e forse anche un poco allungato dal sud al nord: ma questo allungamento non mi è sembrato evidente. Il suo orlo non è del tutto regolare, e probabilmente contiene molte piccolissime dentature, che a me è stato lecito soltanto di congetturare. La tinta poi certamente non è uniforme: l'oscurità è massima e forte al centro, con decremento irregolare verso gli orli non per gradi continui, ma a quanto pare per salti qui più forti, là meno sentiti. Malgrado tutto ciò esso rimane sempre uno degli oggetti più belli della superficie di Marte. Un canale od emissario sottile e meno oscuro se ne parte nella direzione di nord-ovest, col nome di Eosforo, e va all'Oceano attraversando il Lago della Fenice. Un altro emissario, o per lo meno un'altra striscia, pochissimo oscura, molto larga, e malissimo terminata pare si diriga al sud, declinando un poco verso l'est: la massima oscurità è alla radice in basso dov'esce dal Lago del Sole. All'altra estremità pare raggiunga i limiti australi di Thaumasia, ma di questa congiunzione non tutte le osservazioni mi hanno ugualmente soddisfatto. Non ha alcuna denominazione sulla carta, non potendosi considerare come un oggetto determinato, ma solo come una lieve variazione nella tinta generale abbastanza splendida di quella regione. Fuori di questi due emissarî, dal Lago del Sole non ne escono altri, o almeno nel 1877 non ne vidi

uscire altri in altre direzioni. Tutti questi particolari circa il Lago del Sole e la Regione delle Meraviglie furono da me esplorati ripetutamente in molte sere diverse, cioè il 20, 22, 24, 25, 26 settembre, 27 e 28 ottobre, 4 novembre: osservazioni confermative si ebbero il 9 dicembre, fino alla qual data nessun cambiamento mi è avvenuto di constatare. Il 21 febbraio mi riuscì di scorgere ancora l'Agatodemone: in questo e nei giorni procedenti eran visibilissimi l'Eosforo ed il Lago del Sole, i quali furono veduti ancora il 21 marzo, il diametro apparente del pianeta essendo ridotto a 5″,16.

76. Riguardo al contorno marittimo di Thaumasia la mia carta presenta enormi discordanze con quella di Proctor, il quale, seguendo i tracciati di Dawes, non fa di Thaumasia un ovale, ma la estende indefinitamente verso sud-ovest col nome di Terra di Kepler (*Kepler's Land*). Molto meglio invece si accorda il nostro disegno con quelli fatti da Kaiser e da Lockyer nel 1862 e da Kaiser nel 1864. Il grosso arco o sopracciglio di Kaiser si trova perfettamente riprodotto nella tinta scura dei mari che circondano presso di noi Thaumasia e l'Aurea Cherso. Ma vi son pure differenze molto notabili. Il Lago del Sole non occupa presso Kaiser e Lockyer nell'ovale di Thaumasia quella posizione eccentrica, che io gli assegno. L'orlo luminoso che circonda quel lago è presso Kaiser quasi altrettanto largo, che presso di me: ma presso Lockyer è strettissimo, molto più stretto che il diametro del lago: così che questo sembra proporzionalmente molto più grande. V'ha di più. Nel 1862 e nel 1864 Kaiser e Lockyer e Dawes figurano il Lago del Sole allungato orizzontalmente, cioè nel senso del parallelo: Dawes e Lockyer gli assegnano una forma alquanto irregolare, Kaiser ne fa una perfetta ellisse col rapporto dei diametri 2 : 3. Io ho esaminato diligentemente questo punto, e ripeto, che se avessi dovuto assegnare un allungamento, l'avrei assegnato nel senso del meridiano, anzichè del parallelo.

77. Gravi discordanze regnano parimente sugli emissarî del Lago del Sole. Quello da me segnato quasi nella direzione del polo australe non si trova accennato da nessun osservatore, salvo forse da Kaiser, il quale lo indica con qualche probabilità nel suo disco del 10 dicembre 1864. Sotto il 23 novembre 1862 ei dà pure un lievissimo indizio dell'altro mio emissario, detto Eosforo, che va al Lago della Fenice. L'Eosforo sembra anche vagamente indicato da Lockyer sotto il 18 ottobre 1862. Ma mentre questi emissarî sono da loro appena oscuramente accennati, Kaiser e Lockyer e Dawes sono concordi nell'assegnare al Lago del Sole un grande e cospicuo sfogo ad oriente diretto verso il Mare Eritreo. Lockyer ne trae anzi motivo per chiamare il Lago del Sole col nome di *Baltico*, del quale lo sfogo in discorso sarebbe il Kattegat. Esso è indicato, sebbene meno chiaramente, anche nei disegni di Rosse (16 settembre e 29 ottobre 1862). Lassell sembra averlo notato il 13 settembre dello stesso anno, ma non lo segna nè il 21, nè il 23, nè il 25 ottobre. Maedler lo indica con tutta evidenza nel suo 20° disegno del 1830, omettendolo poi nel 6° e nel 19°: sulla carta di questo Astronomo si trova pure decisamente indicato. Ora io devo dire che nel 1877 ho ricercato questa parte della regione Thaumasia con tutta la possibile diligenza, specialmente nelle sere in cui studiava l'Aurea Cherso, e scopriva il Fonte del Nettare precisamente nel luogo dove avrebbe dovuto stare la foce dell'emissario anzidetto. Non ho mai potuto scorgere di questo la minima traccia, sebbene la soluzione di

questa difficoltà fosse uno degli scopi del mio osservare. Nell'intervallo dal 20 settembre al 9 dicembre 1877 la regione Thaumasia si mostrò sempre in quella parte ugualmente splendida che nelle parti contermini: ed anche le ricerche fatte nel febbraio e nel marzo consecutivo (meno decisive per la piccolezza del diametro apparente del pianeta) non diedero alcun motivo di sospettare una mutazione qualsiasi. Io non oso esprimere alcuna supposizione atta a spiegare queste discordanze. Se si volesse attribuirle a diversa distribuzione di nubi, converrebbe supporre in queste un grado straordinario di persistenza in determinate e molto ristrette località. O forse si tratta d'immense inondazioni, che ostacoli locali possono deviare ora in una parte, ora in un'altra ?

Sezione VII.

Lago della Fenice. Eosforo, e Fasi.

78. Dal Lago del Sole il breve e sottile, ma tuttavia abbastanza visibile emissario Eosforo conduce per un tratto di circa 15° di distanza nella direzione di nord-ovest al Lago della Fenice, che esso emissario attraversa, continuando nella stessa direzione verso regioni che più tardi si descriveranno. Il Lago della Fenice ha un diametro massimo circa uguale a quello del Lago del Sole, ma la sua forma è assai allungata nel senso da nord-est a sud-ovest: in estensione non arriva forse alla metà dell'altro: ed inoltre il suo colore è assai meno cupo anche nelle parti centrali. Ciò lo rende molto meno visibile, ed anzi la presenza del Lago del Sole concorre a distrarre da esso l'attenzione dell'osservatore. Nondimeno il 20 settembre, quando vidi per la prima volta il Lago del Sole, scopersi pure subito quello della Fenice, e sempre lo ritrovai anche in mediocri circostanze di visione fino al 4 novembre. Più tardi le dimensioni apparenti eran troppo ridotte e la vicinanza del Lago del Sole troppo grande,

79. Il Lago della Fenice forma una specie di quadrivio: mentre in traverso è tagliato dall'Eosforo, partono dalle estremità della sua lunghezza l'Agatodemone verso oriente al Mare Eritreo, il Fasi verso mezzodì al Mare Australe. Il Fasi vidi per la prima volta il 20 settembre (152°) quando era già lontano dal meridiano centrale: i due tronchi dell'Eosforo scoprii il 22 settembre (133°): l'Agatodemone dal Lago della Fenice alla radice dell'Aurea Cherso, il 24 settembre (104°). Tutti questi oggetti non cessarono di esser visibili anche nell'aria mediocre finchè il pianeta fu abbastanza vicino: l'ultima volta li delineai il 4 novembre. Ma la parte inferiore dell'Eosforo verso l'Oceano crebbe più tardi tanto in larghezza ed in visibilità, che potei ancora vederla più volte nel 1878, e da ultimo ancora il 21 marzo.

80. Di questi canali l'Agatodemone divide Thaumasia dalle regioni di Tharsis e di Ophir, riceve dal nord il Chrysorrhoas, e piega subitamente al sud per formare l'Aurea Cherso. Forse ha due foci, una alla radice, l'altra alla punta di questa penisola od isola che voglia essere (cf. § 69 e 71). Alla divisione col Chrysorrhoas sta l'espansione di cui si è già detto, che potrebbe considerarsi come un piccolo lago anch'essa, molto inferiore in grandezza ed in visibilità al Lago della Fenice. Il Fasi è

più breve dell'Agatodemone: nel 1877 era molto più facile ad esplorare di questo. Esso va quasi dritto al sud e termina nel Mare Australe con amplissima foce in forma di tromba dopo di aver spinto un ramo laterale (l'Arasse) nel Mare delle Sirene, come si dirà più tardi. Il golfo formato dalla foce del Fasi è detto Aonio.

81. L'Agatodemone e il Fasi furono senza dubbio veduti da Maedler nel 1830, e insieme formano quell'arco oscuro molto visibile, che sulla carta del citato Astronomo circonda il Lago del Sole dalla parte del nord. Ostacoli di natura probabilmente meteorica gl'impedirono di riconoscere il restante perimetro di Thaumasia e il grande sopracciglio. Qualche indizio del Golfo Aonio trovo però nel suo disco n. 20. Anche l'allargamento del Fasi verso la foce sembra indicato sulla carta, la quale non è interamente d'accordo coi dischi, e forse in questa parte si appoggia a disegni non pubblicati. La continuità che Maedler pone fra l'Agatodemone ed il Fasi lascia pure congetturare ch'egli abbia visto qualche cosa del Lago della Fenice, senza riconoscerne la maggior larghezza in confronto di quei due canali.

82. Durante l'opposizione del 1862 l'Agatodemone ed il Fasi furono pure visibili: Kaiser li ha ambidue, ma sembra aver del Fasi veduto meglio il ramo occidentale, cioè l'Arasse, la comunicazione del Fasi propriamente detto col Mare Australe essendo imperfettamente da lui indicata (1862, ott. 24 e nov. 23). Lockyer ha veduto distintamente l'Agatodemone entro terra, più dubbiosamente la foce del medesimo dove per me sta l'istmo dell'Aurea Cherso. Non ha traccia nè del Lago della Fenice, nè del Fasi. Lassell rappresenta il Fasi, il Lago della Fenice e l'Agatodemone al modo di Maedler, come una cintura continua: ma chiude l'Agatodemone dalla parte dell'Aurea Cherso (1862, ottobre 21, 23, 25) togliendogli ogni comunicazione col Mare Eritreo.

83. Nell'opposizione del 1864 Kaiser ha riveduto l'Agatodemone: nel suo disegno del 10 dicembre accenna leggermente ad una comunicazione diretta di questo col Mare delle Sirene, ciò che prova aver egli anche questa volta traveduto il Lago della Fenice, e l'Arasse, ma non il Fasi propriamente detto, appunto come gli era avvenuto nel 1862. I disegni fatti in questa opposizione da Dawes sembrano in contraddizione con tutti gli altri. Egli fa dell'espansione dell'Agatodemone al luogo, dove noi abbiamo visto il suo incontro col Chrysorrhoas, un lago press'a poco uguale a quello del Sole, con uno sbocco molto visibile nel Mare Eritreo, che Proctor ha trasportato sulla sua carta, e chiamato Mare di Dawes (*Dawes' Sea*). Ma i disegni contemporanei di Kaiser non permettono di credere, che la macchia così formata fosse emula del Lago del Sole in visibilità ed in forza (cf. qui sopra § 73). La sfumatura che Dawes pone a questa macchia dalla parte di ponente nei suoi disegni sembra indicare presso il loro autore qualche incertezza sulla forma e sulla estensione di quest'oggetto, a cui nel 1877 certamente non si poteva pensare di dar il nome di *Mare*.

84. Niuno dei precedenti osservatori sembra aver veduto il Lago della Fenice come qualche cosa di distinto. Kaiser sulla sua carta mette anzi in questo luogo una specie d'istmo, che separa intieramente l'Agatodemone dal Fasi, o piuttosto dall'Arasse, congiungendo così Thaumasia ad Ophir. Il Lago della Fenice poi certamente non si può confondere col così detto Mare di Dawes della carta di Proctor, la quale occupa rispetto al Lago del Sole una posizione affatto differente.

Sezione VIII.

Isola d'Argyre: Terra di Noé.

85. L'elegante arco ellittico che include Thaumasia comincia al Golfo dell'Aurora e termina al Golfo Aonio, che è una semplice espansione della bocca del Fasi. Questo golfo appartiene al Mar Polare Australe, e non più all' Eritreo. Infatti di fronte a Thaumasia dalla parte di sud-est brilla di viva luce l' Isola d'Argyre, una delle poche isole di Marte, che da ogni lato sian circondate da vasti mari e non da stretti angusti. Il largo canale che la separa da Thaumasia è detto Bosforo gemmato: i cui termini, dal lato d'Argyre, sono i due promontorî molto ben distinti detti Capo delle Ore e Capo delle Grazie. Quando Argyre mi si presentò per la prima volta al lembo sinistro del disco il 24 settembre (95°) la sua luce era talmente viva, che determinò la sua denominazione di Argyre, cioè argentea. Dopo d'allora la rividi molte volte, ed ultimamente ancora il 26 febbraio 1878 con tutta certezza, e sempre molto brillante nel lembo occidentale che guarda Thaumasia. Il lembo orientale invece non mi si presentò mai distintamente, e quasi sempre fu coperto da un denso velo di vapori comuni a quella parte d'Argyre ed alla vicina terra detta di Noé o Noachide.

86. Credo mio stretto dovere di riferire qui per minuto tutte le osservazioni che possono servire a determinare la relazione (per me non ancora ben chiara) fra l'Isola d'Argyre e questa Terra Noachide. Come ho detto, il 24 settembre vidi comparire al lembo destro le prime tracce assai luminose del lato occidentale d'Argyre. Nei giorni seguenti in grazia del ritardo diurno che la rotazione di Marte ha rispetto a quella della Terra, Argyre si venne svelando poco a poco: il 30 settembre (68°) era tutta in vista, ma non riuscii a discernerne il lato orientale, come è segnato sulla carta: mi parve anzi, che l'isola si prolungasse verso est sino ai confini del lembo visibile, restringendosi però alquanto in larghezza. Il 1° ottobre vidi la stessa cosa: ma avendo cominciato le osservazioni più presto, potei scoprire il limite orientale dalla lunga macchia luminosa, che mi parve stare verso il 350° meridiano e sul 45° parallelo. Il 2 ottobre ebbi del tutto una vista assai migliore; sebbene la parte orientale si mostrasse poco ben terminata, cominciai a credere all'esistenza di una immensa ed unica isola, chiudente quasi tutto il Mare Eritreo dalla parte del sud. Lo schizzo XX della Tav. II mostra assai bene quello che allora si vedeva. Il 2 ottobre niente era cambiato. Il 4 ottobre trovo scritto, che la grande isola in alto appariva più larga, ma più pallida e meno ben terminata, soprattutto a sinistra, dove mi parve esservi gran confusione di tinte. Dal 10 al 14 ottobre prestai all'estremità orientale della supposta isola tutta l'attenzione di cui era capace: trovai sempre l'istessa sfumatura e l'istessa indeterminazione di tinte e di contorni, che invano cercava riprodur bene nei disegni. Finalmente il 4 novembre essendosi ripresentata la vera Argyre col suo termine occidentale al lembo sinistro, rividi questo termine così ben netto e luminoso, come un mese prima. Fu allora, che passando al centro il meridiano 82°, potei distinguere e delineare con qualche probabilità il vero confine orientale dell'isola come sta sulla carta, e convincermi che la sua lunghezza non arrivava alla metà di quanto fin allora aveva creduto. Che cosa era avvenuto dell'altra metà? Il 7 novembre scrissi «Argyre

pare divisa in due press' a poco nel mezzo: è un po' pallida, ma tuttavia ben definita da ogni parte ». Ma il 10 e l' 11 dicembre tutto era di nuovo come prima, e non si vedeva che una sola e lunga nube.

87. Finalmente il 14 dicembre l' estremità sinistra di quella nube essendosi diradata, in quel giorno e nei due che lo seguirono apparve ciò che sulla carta è segnato col nome di Noachide, cioè una lunga penisola di color fosco, di contorni mal decisi, simile in tutto alle penisole di Deucalione e di Pirra, ma alquanto più grande di queste. Tali osservazioni furono confermate da altre fatte nel febbraio 1878. Il 24 febbraio Argyre comparve all'orlo superiore del disco come una macchia brillante press' a poco ellittica (in conseguenza dell' obliquità della projezione) e che si sarebbe potuta facilmente scambiare con una calotta di neve. La sua estensione non sorpassava 20° di circolo massimo. Il 25 febbraio vidi la parte di Noachide attigua ad Argyre, molto men chiara di questa. Finalmente il 26 febbraio potei disegnare l' una e l'altra di queste terre in quello che adesso io ritengo essere il loro vero aspetto, e che è riprodotto nelle carte annesse a questa Memoria. Essendo il diametro apparente del pianeta in questa circostanza ridotto a 5″,8 non si possono aspettare nè misure, nè rilevamenti esatti, tanto più che ambedue le regioni già si presentavano alla vista sotto una notevole obliquità. Per questa parte dunque il tracciamento della carta non può essere che una grossolana approssimazione. Così pure è ancora molto incerta la natura del limite che separa Argyre dalla Noachide; nè sono in grado di dire se questo limite sia ben preciso, oppure se dallo splendore d'Argyre si passi alla oscurità della Noachide per gradazioni. Anche sarebbe possibile fra l' una e l' altra l' esistenza di un canale più scuro. Sopra tutte queste cose non resta che invocare maggior luce da ulteriori osservazioni.

88. L' Isola d'Argyre sembra confusamente indicata in un disco di Lockyer, 23 settembre 1862: in alcuni altri disegni dello stesso Astronomo è rappresentata colla Noachide sotto una comune coperta di nubi, formante una lunga striscia bianca che sembra chiudere al sud il Mare Eritreo, nella forma da me veduta in ottobre ed in novembre, e che sembra esser l' aspetto normale. La stessa apparenza infatti si trova presso Secchi (1862, 25 ottobre), Lassell (1862, 25 ottobre), Kaiser (1864, 18 dicembre) e specialmente presso Maedler nei suoi dischi del 1830, n. 6, 7, 19 e 21. Secchi nei disegni del 1858 ha lo stesso tracciamento: egli identifica quella grande massa di nubi luminose con una parte della calotta polare australe, attribuendo a questa una grandissima estensione.

89. Le sola osservazione che a mio sapere offra distintamente l' Isola d'Argyre separata dalla Noachide e nel suo vero aspetto non velato da nubi, è quella di Dawes del 21 gennaio 1865, dove è descritta come una macchia isolata chiara di grandezza press' a poco uguale al Lago del Sole, coll' annotazione *glistening white,* cioè bianco brillante. La posizione è esattamente quella che si conviene alla nostra Argyre: la grandezza è un po' minore: la forma è rotondeggiante. Malgrado alcune piccole differenze, appena vi può esser dubbio sull' identità. Dawes nel volume XXV delle notizie mensili della Società astronomica di Londra, p. 226 scrive di aver osservato quella macchia luminosa il 20, 21, 22 gennaio 1865, e che rassomigliava perfettamente ad una gran massa di neve, essendo altrettanto bianca che la calotta polare. Alla

pag. 228 indica d'aver veduto già una macchia molto bianca nel medesimo luogo il 13 marzo 1852. Per conto mio debbo notare, che sebbene Argyre mi sia sempre parsa molto brillante, non mai ho osato paragonarla alla calotta polare. Il 30 settembre ho notato: « Il suo splendore è veramente fuori dell'ordinario, forse anche superiore a quello di Memnonia (vedi più sotto § 122 la descrizione di questa regione), sebbene molto inferiore a quello della neve polare ». Osservazioni analoghe a questa di Dawes, da me fatte sopra altre regioni, saranno citate in progresso, quando sarà discorso dei fenomeni meteorologici del pianeta. Sulla carta di Proctor Argyre è denominata isola nevosa (*Dawes' snow island*). Se talvolta vi è neve, questa non è certamente perpetua.

Sezione IX.

Mare Eritreo, Terra di Deucalione.

90. Chiamo Mare Eritreo quella grande estensione quasi quadrilaterale della superficie di Marte, che giace fra i meridiani 60° e 310°, allargandosi dall'Equatore fino al 60° parallelo australe, di colore sommamente vario, sebbene generalmente molto più scuro che quello della zona dei continenti equatoriali. Il suo fondo generale, oscurissimo lungo tutta la costa boreale che segue il grande diaframma lungo l'Equatore, va digradando poco a poco la sua tinta verso il sud: su questo fondo si dipingono con colore più chiaro diverse strisce e macchie, portanti relazioni notevoli così fra loro, come coi continenti vicini. A quanto pare, la loro configurazione è altrettanto stabile che quella di essi continenti. Considerate con mezzi ottici insufficienti, o in aria tormentata, queste macchie o sono invisibili affatto, o appaiono come indistinti fantasmi: per distinguerne la forma è necessario combinare un ingrandimento notevole con uno stato molto tranquillo d'atmosfera.

91. Di tutte queste regioni di mezza tinta la più notabile e la più cospicua è la Terra di Deucalione [1], sebbene forse in ampiezza superata dalla Noachide, che già abbiam descritto. Essa separa dal resto del Mar Eritreo quella parte, che più sopra fu descritta col nome di Golfo Sabeo (§§ 56-58). Ha la forma di penisola piegata ad angolo retto: l'istmo che l'attacca alla Terra degli Incensi è luminoso, e forma parte integrante di quel continente. Ma questo istmo è troncato nettamente da una linea trasversale, al di là della quale il resto della penisola appare di colore molto più cupo. Malgrado questo, non si può dubitare che e l'istmo brillante, e la penisola oscura non costituiscano una sola ed identica formazione; la diversità del colore è dunque il prodotto di qualche circostanza accidentale; e probabilmente da ciò, che al confine dell'ombra la penisola si sommerge sotto il livello del Mar Eritreo. Vedremo più tardi a quali argomenti si può appoggiare questa ipotesi, che la Terra di Deucalione e tutte le altre simili siano continenti sottomarini. Mentre le spiagge dell'istmo sono nettamente terminate tanto verso il Golfo Sabeo, quanto verso il Golfo delle Perle, i due lati della parte oscura della penisola perdono di precisione a misura che si

[1] Nell'idea che tutte queste regioni siano continenti sommersi ho dato ad alcune di esse i nomi di eroi diluviani, Noé, Deucalione, Pirra, Ogige.

avanza verso la punta; la quale è talmente sfumata, da render impossibile di precisarne in qualunque modo il contorno. Perciò sulla carta questo, come altri contorni analoghi, è punteggiato. È dunque impossibile dire altro, se non che la penisola è diretta, dopo la sua piegatura, quasi esattamente secondo il parallelo: che procedendo verso la punta diventa sempre più scura di colore, e meno discernibile dal fondo marino circostante; e che finisce per perdersi affatto dirimpetto al Corno d'Ammone, presso il 320° meridiano.

92. Tale sembra il vero aspetto della Terra di Deucalione, considerata per uno stato favorevole delle atmosfere della Terra e di Marte. Ma queste apparenze non sembrano intieramente costanti. Io medesimo ho veduto il 10 dicembre quella parte che si allunga secondo il parallelo splendere alquanto più che la parte contigua all'istmo luminoso. Ma questo è nulla in confronto della varietà di aspetto che la penisola di Deucalione ha offerto ad altri osservatori. Maedler nei suoi disegni del 1830 invariabilmente fa della penisola di Deucalione una parte del continente luminoso, senza indicare alcuna traccia d'ombra neppure di fronte al Corno d'Ammone, dove è troncata. — Nei disegni di Secchi del 1858 si trova espressa molte volte la Terra di Deucalione sotto forma d'un isola che costeggia il continente dal Corno d'Ammone fin quasi al Capo degli Aromi: il Golfo Sabeo è per lui uno stretto lunghissimo, che corre dall'uno all'altro di questi due punti: dell'istmo non vi ha presso di lui alcuna traccia. — Gli osservatori del 1862 sono in gran parte d'accordo per affermare l'esistenza dell'istmo della Terra di Deucalione. I disegni di Kaiser e di Lockyer portano testimonianze irrefutabili a questo riguardo. Anche Lassell lo indica, sebbene meno chiaramente, nei suoi dischi del 24, 25, 27 settembre. Secchi medesimo (25 novembre) chiude il Golfo delle Perle dalla parte di levante con una spiaggia luminosa, ciò che dimostra aver egli benissimo veduta la sponda occidentale dell'istmo.

93. Nel 1864 le testimonianze si dividono maggiormente. Kaiser non ha alcuna deviazione sensibile dai suoi tracciati del 1862: per lui l'istmo è sempre evidente (11 e 19 novembre, 18 e 23 dicembre). Lo stesso dicasi dei disegni di Franzenau (8 e 10 novembre). Solo Dawes, le cui osservazioni di questo luogo mostrano una particolare accuratezza, non sembra neppur sospettare l'esistenza dell'istmo (12, 14, 20 novembre). Conseguentemente la carta di Proctor pone, invece del Golfo Sabeo un lungo stretto come quello delineato da Secchi nel 1858 (*Herschel II Straits*) e fa al medesimo attraversare il luogo, dove noi poniamo l'istmo luminoso: i due corni del Golfo Sabeo si riducono a due piccole indentazioni del continente equatoriale (*Dawes' forked Bay*): la Terra di Deucalione diventa un'isola, come presso Secchi (*Phillips Island*). Tutte queste testimonianze sono di alto valore, sebbene si contraddicano reciprocamente. Non allungherò la discussione col citarne altre, tanto più che questo punto è stato con particolarissima diligenza trattato dal sig. Terby, pp. 64-68 della sua *Areografia*. Terby sembra inclinato a concludere, che la vera configurazione sia rappresentata dai disegni di Secchi e di Dawes, onde verrebbe per conseguenza, l'istmo della Terra di Deucalione veduto da Maedler, da Lockyer, da Kaiser, da Franzenau, e da me per più mesi osservato, esser un'illusione prodotta da nuvole.

94. A mio avviso le due versioni si possono conciliare facilmente tenendo conto della facilità particolare, con cui vedremo formarsi strati di nebbia su tutte le terre

oscure in generale. Qualunque sia la spiegazione che si voglia dare di questa tendenza, essa è un fatto constatato da varie osservazioni, e già abbiamo veduto aver essa luogo in modo notevole ed incontrastabile per la Noachide. Tale tendenza allo stato nebbioso è tanto maggiore, quanto più obliqua è l'irradiazione solare sulle regioni in questione. Noi osserveremo ora, che quella parte della Terra di Deucalione, la quale si estende lungo il parallelo alla latitudine australe di circa 20°, nelle opposizioni del 1830, del 1862, e del 1877 per lungo tempo ricevette i raggi solari sotto incidenza quasi perpendicolare. All'incontro nelle opposizioni del 1858 e del 1864 quella regione si presentò obliquamente, sotto un'incidenza di 32° circa nel primo caso e di 14° nel secondo. Da queste premesse segue, che la Terra di Deucalione ha potuto in questi ultimi casi esser coperta di nebbia più densa, e brillare di luce più viva: l'istmo apparire comparativamente oscuro (non tanto però da illudere Kaiser e Franzenau). Negli anni 1830, 1862, 1877 invece l'istmo ha dovuto brillare più, che la parte protesa della penisola: sia perchè realmente esso pare più chiaro, sia anche perchè l'irradiazione più obliqua del Sole ha potuto permettere su di esso la formazione di nebbia più densa. E così è avvenuto che gli osservatori di quegli anni tutti han potuto constatarne la presenza in modo concorde. Non vi è qui dunque uno *stretto*, ma bensì una penisola ed un istmo.

Sezione X.

Terra di Pirra.

95. La Terra di Pirra è quasi una copia, in dimensioni alquanto ridotte, di quella di Deucalione. Si distacca dal Capo degli Aromi, il quale giace esattamente sull'asse del suo istmo: procede verso sud, declinando alquanto verso levante fino a raggiungere press'a poco il parallelo 24°: indi si piega ad angolo di circa 120° e va ad occupare il mezzo del vuoto, che il Mare Eritreo lascia fra la Terra di Deucalione e l'Isola d'Argyre. Essa ha contorni precisi soltanto in vicinanza del continente, dal quale si diparte; i suoi lati diventano sempre più sfumati e sembrano anche convergere un poco, finchè per gradi insensibili si perdono nel fondo generale dell'Eritreo. È impossibile stabilire con esattezza il luogo ove termina: non mi è mai riuscito di scoprirne traccia ad oriente del meridiano d'Aryn, sebbene certe apparenze inducano a credere che si prolunghi anche un poco di più verso levante. Essa è generalmente assai più scura che la Terra di Deucalione, e non è facile rilevarla in mezzo alla tinta più cupa dell'Eritreo. Il massimo della sua luce è poco dopo la piegatura: l'istmo è alquanto più scuro, anzi nelle vicinanze del Capo degli Aromi è difficile osservarlo, perchè partecipa in gran parte della tinta forte che distingue il Golfo delle Perle e il Golfo dell'Aurora. Quindi è facile scambiare la Terra di Pirra per un'isola, sebbene certamente non lo sia (cf. § 64).

96. Questa disposizione della Terra di Pirra è degna di molta considerazione. Infatti, dato che la tinta scura dell'Eritreo provenga dall'esistenza di un vero mare, chi considera la sua costa settentrionale dal Golfo delle Perle a quello dell'Aurora e nota il contrasto di luce e d'ombra, che ha luogo lungo questa costa così splendente, non potrà indursi a credere, che intorno al Capo degli Aromi vi possa essere

altro che lo stesso mare, che riempie quei due golfi. Quindi nasce spontanea l'idea, che quella lingua di spazio un po' men oscuro, che li divide sia una terra sottomarina, più luminosa in alto, perchè posta a minore profondità, quasi invisibile presso la riva del continente, perchè ivi molto più bassa. Altri fatti che appoggiano questo modo di vedere, si produrranno in seguito.

97. La Terra di Pirra è stata benissimo delineata da Lockyer nel 1862 (sett. 23. $11^h. 55^m.$) in un disegno, che con molta evidenza mostra anche il Capo degli Aromi e la bocca dell'Idaspe. Un altro disegno fatto un'ora dopo mostra soltanto l'istmo di quella penisola. Lord Rosse (29 ottobre 1862) la figura tutta intiera, ma ne connette la punta col ginocchio formato dalla Terra di Deucalione. Kaiser ha veduto la parte protesa della penisola, ma non l'istmo, il 9 e l'11 novembre 1864: l'istmo invece, ma non la parte protesa, il 18 dicembre dello stesso anno. Il disegno da lui fatto in questo giorno indicherebbe anzi l'esistenza di una terza penisola submarina compresa fra il Golfo delle Perle e la foce dell'Idaspe, la quale dunque starebbe in mezzo a quelle di Deucalione e di Pirra, e sarebbe molto più breve. Confesso di non averne visto traccia: e credo che questa apparenza sia un semplice effetto del modo, con cui Kaiser ha interpretato il Golfo delle Perle e la bocca dell'Idaspe.

Sezione XI.

Osservazioni generali sulle terre oscure del Mare Eritreo.

98. Queste terre, per la tendenza prevalente che sembrano avere a coprirsi con strati di nebbia fortemente illuminata dal Sole, nell'inverno dell'emisfero australe di Marte sogliono apparire come isole e continenti luminosi, e come tali si trovano figurati sulla carta di Proctor. Ma siccome il velo luminoso, per la sua natura meteorica, è soggetto a continue variazioni, non troviamo altro luogo della superficie di Marte, dove le delineazioni degli autori siano fra loro in maggior contraddizione. Io ho già tentato d'indicare, come si può render conto delle discordanze, che si manifestano a proposito della Terra di Deucalione, del suo istmo, e del Golfo Sabeo. Gli stessi principî serviranno a render conto di altre contraddizioni in apparenza ancora più inesplicabili.

99. Proctor nella sua carta, fondata (come si disse) principalmente sui disegni di Dawes, al sud del suo Stretto di Herschel II pone l'una dopo l'altra tre grandi terre allungate nel senso del parallelo, e disposte in fila dal sud al nord: sono per ordine l'Isola di Phillips, l'Isola di Jacob, e la Terra di Kunowski (*Phillips Island, Jacob's Island, Kunowski's Land*). Fra il continente e l'Isola di Phillips mette il già citato Stretto di Herschel II: fra l'Isola di Phillips e quella di Jacob, lo Stretto d'Arago (*Arago's Straits*): fra l'Isola di Jacob e la Terra di Kunowski lo Stretto di Newton (*Newton's Straits*). La Terra di Kunowski sarebbe poi connessa con un continente polare che secondo me non esiste.

100. Tutte queste non sono per noi che trasformazioni atmosferiche della vera carta dell'Eritreo. Gl'istmi delle penisole di Pirra e di Deucalione essendo collocati nella zona torrida di Marte e rimanendo per lo più oscuri, brillanti strati di nuvole formandosi più facilmente nelle parti di latitudine più elevata, noi avremo un'isola

nuvolosa di Phillips, rappresentante la parte più australe della Terra di Deucalione, un' altra isola nuvolosa di Jacob, che rappresenta l'estremità della Terra di Pirra, e da ultimo una terza isola maggiore, formata dalle nebbie coprenti la Noachide e la vera Isola d'Argyre: la quale terza isola di nuvole mi diede tanto fastidio (§§ 85-87), e m'impedì di completare la descrizione di Argyre e di Noachide secondo il mio desiderio. Si confrontino le carte annesse alla presente Memoria con quella di Proctor. Queste isole di vapori, saranno spesso, vere Simplegadi, portate di qua e di là dall'azione delle correnti atmosferiche, attaccate insieme due a due, od anche tutte e tre, talvolta invece sminuzzate e divise, o cangiate anche di forma. Queste formazioni meteoriche, imitanti i contorni delle terre oscure del Mar Eritreo, saranno altrettante *immagini meteoriche* di quelle terre.

101. Esempî della riunione di due fra i banchi di nuvole sopraccennati sono abbastanza frequenti presso gli osservatori. La grande isola accennata nei disegni di Secchi (1858) sopra il Golfo Sabeo si può con molta probabilità credere risultata dalla coalizione dei banchi corrispondenti alle penisole di Pirra e di Deucalione. Il grande spazio chiaro, che sulla carta di Maedler (1830) occupa la medesima regione protendendosi più avanti fin quasi al polo australe, ci mostra una massa nebulosa, che in quell'anno ha servito di comune involucro alle parti più avanzate delle Terre di Deucalione e di Pirra, e alla Noachide. Nella sua carta la gran nube in questione è anzi tripartita verso oriente, ed indica così chiaramente la sua origine. Non moltiplico gli esempî, che si posson facilmente riscontrare presso gli osservatori, e di cui varî furono raccolti da Terby nella sua tante volte citata *Areografia*.

102. Un esempio notevole di un banco di nube formata sopra una delle terre oscure e poi spostato da qualche altra forza (vento senza dubbio), si trova nei tre disegni fatti da Lockyer la sera del 23 settembre 1862. Nel primo di essi ($10^h. 25^m$ Greenwich) la Terra di Deucalione ha la stessa forma che presso di noi fino alla piegatura: dopo di questa si biforca in due lingue affatto uguali. Di queste l'una, cioè l' inferiore, è la vera penisola: l'altra non ne è che l'immagine meteorica spinta dai venti alquanto verso sud-ovest, ma con maggior forza all'estremo orientale, che all'estremo occidentale. Nel secondo disegno ($11^h. 55^m$ Greenwich) si riproduce esattamente lo stesso fatto, e si vede l' immagine meteorica della Terra di Deucalione toccare già colla sua punta orientale la Terra di Pirra, e confondersi con altra nebbia coprente la Noachide. Nel terzo disegno ($12^h. 55^m$ Greenwich) quell'immagine meteorica è molto diminuita d' intensità, forse per l'azione continuata del Sole, il quale circa tre ore prima è passato al suo meridiano, e l'ha di nuovo in parte ridotta a vapori trasparenti. Non si scorge di essa altro che l' estremità orientale, ed anche questa molto affievolita.

103. Un fatto simile, sebben meno chiaro, sembra mostrarsi nei disegni di Lockyer del 23 e del 25 settembre 1862, dove strisce di nubi prendono origine sopra la Terra di Deucalione, e si spingono nella direzione di sud-ovest in molte lingue e filamenti paralleli. La stessa stessissima cosa appare nel disco di Kaiser del 23 dicembre 1864. Ivi una corrente di nubi che sembra uscire dal Corno d'Ammone (corrente che in varia forma si trova in tutti i disegni che ha fatto Kaiser di questa regione) vien trascinata in direzione parallela a quella che domina i vapori coprenti

di comune velo le Terre di Deucalione e di Pirra, cioè verso sud-ovest. Questo fatto si ripete il 31 ottobre e il 10 dicembre 1862. Invece il 19 novembre 1864 Kaiser ha veduto due correnti di nubi tendere direttamente al polo australe partendo l'una dal Corno d'Ammone, l'altra dal ginocchio della Terra di Deucalione.

104. Non adduco discussioni consimili, che si potrebbero fare sopra altre delineazioni. M' incresce moltissimo di non aver potuto constatare simili fenomeni colla propria esperienza. Durante tutto l' intervallo delle osservazioni utili del 1877 l'emisfero australe di Marte fra il polo e il grande diaframma fu totalmente libero da vapori: così che ad eccezione di quelli che per lungo tempo velarono la Noachide, e di un altro caso che riferirò nell'articolo seguente, nessuna variazione ho potuto constatare con sicurezza nell'accennato spazio, che si potesse attribuire a nuvole vaganti sulla superficie del pianeta. Questa circostanza ha facilitato grandemente il rilievo topografico, ma lasciò molto imperfette le mie nozioni sulla meteorologia di Marte.

Sezione XII.

Terre d' Ogige e di Proteo.

105. Il Bosforo Gemmato, che sta fra Thaumasia ed Argyre, non è di tinta uniforme: lungo il suo mezzo corre in forma di striscia meno oscura la Terra d'Ogige, che ho potuto osservare con distinzione soltanto la sera del 2 ottobre (4°2), confermandone l'esistenza il 4 novembre (86°). La vidi girare in forma lievemente arcuata intorno a Thaumasia, ma a causa dell'obliqua posizione non ho potuto seguirla sino al termine occidentale, il quale però sembra non dover oltrepassare di molto il Capo delle Grazie, se si deve giudicare dal colore che altre volte ho visto prendere in quei luoghi il Mare Australe. Invece il termine orientale nel Mar Eritreo si potè stabilire abbastanza bene all' incirca sul parallelo che passa per la punta dell'Aurea Cherso. Ivi la Terra d'Ogige sembra accennare colla sua estremità verso est: però l'osservazione, anche nell' ottima aria del 2 ottobre, fu alquanto dubbia. La sua tinta stimai press' a poco uguale a quella della parte più chiara della Terra di Pirra. Ed altro non posso aggiungere su questo delicatissimo e difficilissimo oggetto, di cui non trovo indizio presso altri osservatori, ad eccezione di Lockyer, il quale sembra averlo veduto la sera del 23 novembre 1862 a $12^h.55^m$: il suo tracciamento corrisponde quasi a capello col nostro. Forse Dawes ne ebbe un'idea il 28 gennaio 1865: ma le molte striscie che nei suoi disegni occupano queste regioni mi paiono per lo più d' origine meteorica. Anche la mia propria osservazione, sebbene confermata ad un mese d' intervallo, potrebbe forse esser interpretata nello stesso modo, se non fosse in qualche modo appoggiata dal citato disegno di Lockyer, e dalla relazione, che la Terra d' Ogige sembra avere con quella di Proteo.

106. Quest'altra piccolissima, ma notabilissima fra le terre oscure del Mare Eritreo, fu da me trovata anche il 2 ottobre e figurata come una macchia assai poco più chiara di quel mare di contro alla Terra d'Ogige e a levante della punta dell'Aurea Cherso, come sulla carta è indicata. Io non ho potuto giudicare a mia piena soddisfazione se si connetta o no coll'Aurea Cherso: il disegno che ritengo migliore, la

dà distaccata, e così pure l'ho figurata sulle carte. La sua terminazione orientale mi parve abbastanza definita: essa formava una punta parallela e quasi simmetrica a quella della Terra d'Ogige. La tinta era uguale a quella della parte più chiara della penisola di Pirra. L'esistenza della Terra di Proteo fu anche confermata il 4 novembre.

107. Due altre volte ho veduto, non già la Terra di Proteo, ma la sua immagine meteorica (§ 100), cioè uno strato di nuvole illuminate che la copriva, imitandone la forma. La prima volta fu il 26 settembre (84°): nel qual giorno vidi projettarsi fuori dell'estremo orientale di Thaumasia (o meglio dell'Aurea Cherso, che io allora non aveva ancora imparato a distinguere da Thaumasia) una striscia bianca orizzontale. Questa interrompeva netto il grande arco scuro, o il gran sopracciglio che incombe sopra l'occhio formato da Thaumasia. In questa occasione fu fatto il disegno XVII, riprodotto nella Tavola II annessa a questa Memoria, dove il fenomeno è accuratamente rappresentato. Il non aver disegnato questa striscia luminosa nel giorno 24 mi fece allora sospettare che si trattasse qui di qualche apparenza variabile: ciò che fu confermato dalle osservazioni posteriori. Infatti il 2 ottobre trovai in quel luogo la Terra di Proteo, tanto più scura: i due oggetti, quasi uguali in estensione ed in forma, ma così diversi riguardo allo splendore mi fecero desiderare ulteriori schiarimenti. I quali non si fecero aspettare. Infatti il giorno 4 ottobre (18°) si ripresentò la striscia luminosa del 26 settembre. Il 4 novembre invece si riprodusse l'apparenza più oscura del 2 ottobre. Tutte queste mutazioni m'indussero a dar all'oggetto in discorso il nome di *Terra di Proteo.*

108. Qui non vi può esser dubbio. La Terra di Proteo si è coperta due volte di un velo luminoso, il 26 settembre e il 4 ottobre; e due volte si è discoperta. Essa ha mostrato dunque due volte di seguito e con rapida vicenda le medesime variazioni, che in un periodo più lungo ed una sola volta ho potuto constatare nella Noachide. Queste sono le osservazioni, le quali mi condussero a supporre che su questa specie di terre oscure (o bassi fondi come io li credo) si producano strati di nebbie, che ne imitano la forma. E abbiamo già veduto che tale supposizione giova a spiegare le variabili apparenze, che le Terre di Deucalione, di Pirra e di Noé hanno offerto a tanti osservatori degni di fede. Sulla causa, che può facilitare la produzione di nebbia in quelle regioni non è questo il luogo di esporre congetture.

Sezione XIII.

Arasse, Icaria, Colonne d'Ercole.

109. Dopo questa escursione fra le terre oscure del Mare Eritreo, ritorniamo al grande diaframma, e ripigliamo la descrizione delle regioni continentali, che avevamo abbandonata al Golfo Aonio ed al Fasi. Già ho indicato, che questo canale, uscendo dal Lago della Fenice si biforca e manda verso occidente un braccio tortuoso detto Arasse, il quale sbocca nell'estremità più orientale del Mare delle Sirene. L'Arasse vidi io per la prima volta il 24 settembre (98°) e molte volte dopo. Alla sua curvatura, che è molto evidente, e costituisce un caso piuttosto raro nei canali onde è sparso il pianeta, ho posto particolare attenzione, e ne feci parecchi disegni

il 24 e il 25. L'Arasse è più largo al principio e alla fine, che nel mezzo, dov'è estremamente sottile: ma non vi è difficoltà a seguirlo in qualunque parte del suo corso. Il 26 settembre (91°) mi sembrò anzi l'Arasse più visibile che la parte inferiore del Fasi.

110. Tra l'Arasse ed il Fasi giace la regione grossolanamente poligona, detta Icaria: sulla quale ho notato un colore alquanto meno luminoso, che nelle regioni confinanti di Thaumasia, di Dedalea, e d'Elettride. Specialmente notevole mi è sembrato il contrasto di luce fra Icaria e Dedalea lungo l'Arasse, che le divide. Al di là della bocca del Fasi l'Icaria è contornata dal Golfo Aonio, e al di là della bocca dell'Arasse, da breve tratto del Mare delle Sirene. L'angolo tra il Fasi e l'Arasse è chiuso dalle Colonne d'Ercole, canale di larghezza considerevole ed uniforme, uno dei più visibili del pianeta, il quale fa comunicare il Mare delle Sirene col gran Mare Australe. Le Colonne d'Ercole ho veduto per la prima volta il 20 settembre, o d'allora in poi sempre, anche il 3 gennaio 1878, quando il diametro del disco era ridotto a 8",4, e con qualche fatica ancora il 21 marzo, quando il diametro non era più di 5",2.

111. L'Arasse e le Colonne d'Ercole e il principio del Mar delle Sirene furono benissimo veduti da Kaiser il 10 dicembre 1864, e figurano anche sulla sua carta, sebbene interpretati in un modo particolare. Avendo infatti Kaiser ignorato del tutto la larga foce del Fasi, questa foce e il poligono d'Icaria fanno parte, presso di lui, della grande ovale di Thaumasia: le Colonne d'Ercole figurano come estremità destra del grande sopracciglio o arco che copre quella regione: l'Arasse, confuso col principio del Mare delle Sirene, forma un lungo raggio rettilineo uniforme. La Thaumasia di Kaiser, arricchita così dell'Aurea Cherso da una parte, e dell'Icaria dall'altra, occupa sulla sua carta 64° di longitudine, mentre sulla nostra carta senza quelle due appendici ne tiene soli 45°. Con questo si spiega perchè la Thaumasia di Kaiser, invece che da un grazioso contorno ellittico, è terminata in alto da un arco circolare, ed è appuntata in forma di mandorla alle sue due estremità. Ed ancor s'intende, perchè il Lago del Sole, il quale sulla mia carta occupa una posizione così eccentrica nell'ovale di Thaumasia, presso Kaiser sta quasi nel mezzo. Infatti anche presso di noi il Lago del Sole giace quasi esattamente nel mezzo fra la radice dell'Aurea Cherso e la foce delle Colonne nel Mar delle Sirene, che sono i due punti corrispondenti alle due estremità della Thaumasia di Kaiser. Così tutto s'accorda, e le differenze fra me e l'eccellente osservatore di Leyda non sono che apparenti (¹).

112. Le Colonne d'Ercole sono chiaramente indicate anche da Lockyer (1862, 18 ottobre), Lord Rosse (1862, 14 settembre), Lassell (1862, 17 novembre). Maedler pure le disegnò benissimo nel suo 20° disco del 1830 colle porzioni attigue del Golfo Aonio e del Mare delle Sirene.

(¹) Confesso che nel principio il trovare il Lago del Sole così eccentricamente collocato nell'ellisse di Thaumasia, in contraddizione flagrante con Kaiser, mi aveva fatto nascere il sospetto di cambiamenti, sospetto, che dietro le cose esposte, è certamente insussistente. Questo è un bell'esempio della necessità d'interpretare esattamente i disegni degli osservatori, prima di trarne conseguenze circa mutazioni possibili della superficie del pianeta.

Sezione XIV.

Dedalea, Canale delle Sirene, Oceano.

113. Al nord d'Icaria dall'altra parte dell'Arasse giace un altro tratto circondato da canali, segnato col nome di Dedalea. Il suo colore è press'a poco come quello di Thaumasia ed appartiene ai tratti chiari, se non chiarissimi, del pianeta. La dividono da Thaumasia e da Tharsis la parte più australe del Fasi, il Lago della Fenice ed il canale o fiume Eosforo. Quest'ultimo, uscito dal Lago del Sole, traversa quello della Fenice, e continua verso nord-ovest direttamente, ma giunto nelle vicinanze dell'Equatore sbocca nel gran canale detto Oceano. Tale sbocco dell'Eosforo è stato veduto da me molte volte, ma non mai molto distintamente, sebbene l'Eosforo stesso nei primi mesi del 1878 sia divenuto assai largo e visibile: talchè l'ho potuto ancora benissimo distinguere il 21 marzo, essendo il diametro apparente del pianeta 5″, 2.

114. Il limite occidentale di Dedalea è formato dal canale o fiume delle Sirene, il quale corre in direzione press'a poco meridiana ed ha la sua foce australe nel Mare delle Sirene vicinissima alla bocca dell'Arasse; la foce boreale è nell'Oceano, non lungi dall'Equatore. La parte australe del fiume delle Sirene è stretta, e precisamente delimitata: la foce boreale invece è larga in foggia di tromba. Questo canale l'ho veduto molte volte a partir dal 18 settembre, e si è mostrato abbastanza facile anche presso gli orli del disco: però durante il 1877 la parte inferiore più larga si è sempre mostrata pallida e senza limiti decisi. Certo questo in parte ha dovuto provenire da turbamenti dell'atmosfera di Marte; perchè infatti il 6 gennaio 1878 essendo il diametro di Marte ridotto a 8″, 2 contro ogni aspettazione mi comparve il canale delle Sirene largo, oscuro, e visibile più che prima non fosse mai stato; e questa appariscenza durava ancora il 21 di marzo, nel qual giorno potei discernere nettamente non solo la foce boreale di esso, ma anche una parte notabile della riva attigua dell'Oceano, prima veduta sempre in modo confusissimo. Credo che accostandosi il Sole all'equatore del pianeta (esso vi pervenne il 22 di febbraio 1878) si diradò la nebbia, e malgrado la maggiore distanza, divenne manifesto ciò che prima si vedeva dubbiosamente.

115. Questo fenomeno offerto dal canale Eosforo e dal canale delle Sirene di una bocca ampia e non sempre ben terminata si è presentato in varî altri luoghi di Marte, siccome accennerò. Della imperfetta visibilità può essere causa un velo di nebbia, che offuschi quella regione, come certamente è il caso del fiume delle Sirene: ma altre osservazioni mi lasciano pensare, che almeno in parte l'effetto si possa ripetere da una vera *deltazione* in quelle imboccature, cioè dalla divisione del canale maggiore in due o più altri canali, troppo sottili per essere discernibili. Allora deve nascere una sfumatura o una nebulosità scura su fondo chiaro nello stesso modo che dall'insieme di più stelle, invisibili una ad una, si formano piccoli cumuli aventi l'aspetto di nebulose. Citerò più sotto un esempio notabile di questa illusione.

116. L' Oceano, nel quale si versano l' Eosforo e il fiume delle Sirene quasi congiunti alla loro foce, egli stesso è un grandioso canale, forse il più notabile di quanti esistono nella superficie di Marte, tanto per la sua larghezza, che gli darebbe quasi diritto al nome di mare, quanto per la sua enorme lunghezza, che nell'opposizione del 1877 potei tracciare per 140° gradi circa, ma che probabilmente è ancora maggiore, non avendone potuto io vedere nè il principio, nè la fine. Prima a cagione delle nebbie che in settembre, ottobre, novembre e decembre occuparono costantemente la regione da esso percorsa, poi per effetto della soverchia distanza del pianeta in gennaio, febbraio e marzo, non mi è stato possibile vederlo che come un'ombra o serie continua di ombre in forma di nastro, di tinta poco scura e mal determinato nei suoi confini; così che sono da aspettarsi nel suo tracciamento molte e notevoli rettificazioni. La sua sezione orientale dal punto ove in esso si versa il Nilo (punto di cui avrei desiderato fare un esame più accurato) sino al meridiano 180° è quello di cui è stato possibile definire meno imperfettamente la giacitura, grazie specialmente alle vedute che potei ottenere in gennaio e marzo 1878. Molte dilucidazioni sull'Oceano e specialmente sulla sua riva boreale (che posso dire intieramente sconosciuta) si potranno ottenere nell'opposizione del 1879.

117. Non mi è stato possibile trovare traccia evidente dell' Eosforo e del canale delle Sirene presso alcuno degli osservatori da me consultati, se forse come rappresentante di quest' ultimo canale non si voglia considerar l'ombra che è a destra del disegno di Kaiser, 24 ottobre 1862. La presenza dell' Oceano in contiguità della regione da noi chiamata Dedalea è però testificata da Kaiser in modo indubitabile col suo disco del 23 novembre del medesimo anno. I disegni di Kaiser del 1864 sono contro ogni aspettazione ancor più poveri in questo luogo, che quelli del 1862, in cui il pianeta si presentava meno favorevolmente. La sua carta qui è affatto vuota. Il solo Dawes nell'opposizione del 1864 ha qui, come quasi per tutto, gran ricchezza di particolari, i quali però per la massima parte furono irreconoscibili nel 1877. Il suo disco del 3 novembre 1864 contiene appunto questa regione al centro, piena di strisce scure, la maggior parte delle quali tende dal nord-est al sud-ovest. Vi si distingue il Lago del Sole e il Mare delle Sirene. La lunga stria, che dall'estremo orientale di questo mare scende fin sotto a ciò che noi chiamiamo Tharsis, è stata da Proctor decorata del titolo di canale di Bessel (*Bessel's Inlet*). Sulla sua carta questo si estende lungo il 240° meridiano, che è il nostro 120°. Considerando attentamente quel disegno di Dawes si comprende però, che il canale di Bessel meglio starebbe sotto il 125° meridiano. Allora sulla nostra carta noi lo riscontriamo immediatamente ed esattamente, quanto a posizione e a forma, nel complesso formato 1° colle rive dell'Oceano contigue a Tharsis e a Dedalea; 2° col canale delle Sirene tutt' intero; 3° colla prima sezione del Mare delle Sirene, dalla bocca del detto canale fino rimpetto alle Colonne d' Ercole. Questa piccola porzione del Mare delle Sirene costituisce quella specie di lago, nel quale Dawes e Proctor terminano in alto il canale di Bessel. Tutto coincide dunque benissimo, ammettendo che a Dawes l'ultima sezione del Mare delle Sirene sia apparsa separata dal resto, probabilmente da strisce di nuvole. Il canale delle Sirene, e l'esistenza del nostro Oceano nelle parti contigue a Tharsis e a Dedalea si trovano così confermati dalle osservazioni di Dawes.

118. Con questo si rende anche ragione del perchè nella carta di Proctor il suo *Mare di Maraldi* (presso noi Mare delle Sirene e Mare Cimmerio) sia tanto più breve del vero. Fra i nostri punti fondamentali n. 19 e 41, che ne segnano le estremità vi sono gradi 107°, 5 di longitudine. Secondo Kaiser anzi vi sono 112°, 3 (vedi il catalogo dei suoi punti da noi riferito § 38). Invece Proctor mette soltanto 80°, al più 85°. Ma se consideriamo il lago, che forma il capo della *Bessel's Inlet* come parte del suo Mare di Maraldi, si ha per lunghezza totale 102°, ciò che si accosta molto più alla verità. Nei suoi bei dischi del 1858 Secchi non ha avuto occasione di presentare questa parte del pianeta con sufficiente evidenza.

Sezione XV.

Mare delle Sirene, Memnonia, Amazonide. Canali dei Giganti e dei Titani.

119. Siamo giunti al principio di quella lunga serie di mari interni, divisi da sottili diaframmi, che circondano, in direzione alquanto inclinata al parallelo l'emisfero australe di Marte per ben 165° di longitudine. Questa serie può considerarsi come un largo canale della superficie del pianeta, rotto in due punti da interruzioni di poco conto: è una formazione analoga a quella del gran canale detto Oceano, ma incomparabilmente meglio conosciuta di quello. Le due interruzioni accennate lo dividono in tre tronchi principali, cui ho applicato i nomi di Mare delle Sirene, Mare Cimmerio e Mare Tirreno. Una schiera di canaletti minori, per lo più giacenti nella direzione del meridiano, congiunge i tre mari suddetti da una parte coll'Oceano, che corre loro prossimo al nord con rimarchevole e costante parallelismo, dalla parte del sud col Mare Cronio, che può riguardarsi come una terza formazione analoga alle due prime e poco meno che loro parallela. Il Mare Cronio però non è chiuso fra continenti, ma per tre aditi principali comunica col gran bacino marittimo australe.

120. Esaminiamo da prima il Mare delle Sirene. Dalle bocche quasi congiunte dell'Arasse e del fiume delle Sirene questo mare corre a ponente declinando da prima circa 30° verso il sud e poco dopo riceve la foce interna delle Colonne d'Ercole (§ 110). Sotto il meridiano 145° cambia di direzione, e declina ora 30° verso il nord: tale direzione conserva costantemente sino al termine, ove è troncato subitamente in senso quasi perpendicolare alla sua lunghezza. Forma qui tre golfi: dei quali il primo e minore dà sbocco al fiume dei Giganti, il secondo e massimo forma la foce australe del fiume dei Titani: l'ultimo indica nello stesso tempo il termine della sua lunghezza, e l'istmo boreale della penisola Atlantide, che lo divide dal Mare Cimmerio. Il Mare delle Sirene è uno dei più oscuri del pianeta, e di tinta in circa uguale a quella del Lago del Sole: ma credo che sia meno oscuro del Golfo Sabeo e del Golfo delle Perle. La sua tinta mi parve sempre dovunque uniforme: le sue rive tagliate nettissimamente, formano collo splendore delle terre vicine un vivo contrasto, specialmente dal lato boreale.

121. Nel Mare delle Sirene entrano per l'estremo orientale l'Arasse, le Colonne, e il fiume delle Sirene, già descritti: per l'estremo occidentale il fiume dei Giganti e quello dei Titani. Le foci di questi due sono molto vicine, ma pur ben divise, e vanno

in direzioni fra loro divergenti. Procedendo però più al nord nelle vicinanze dell'Oceano ambidue diventano talmente sfumati, che non è possibile tracciarli con esattezza. Nel giorno 16 settembre e nei seguenti io li vidi confusi in una corrente unica allargantesi verso nord in forma di ventaglio. Soltanto il 27 ottobre mi riuscì di constatare che si trattava di due canali distinti e riuscii a separarne le due foci nel Mare delle Sirene. La terra compresa fra i due, di cui l'estensione, a causa delle sfumature accennate, è lungi dall'essere ben determinata, è chiamata Amazonide. Il 3 gennaio 1878, essendosi alquanto diradate le nebbie che prima coprivano questa regione, ho potuto ancora vedere e distinguere l'uno dall'altro il fiume dei Giganti e quello dei Titani, i quali mi parvero molto più larghi ed oscuri, che prima non fossero. Il fiume dei Titani era ancora visibilissimo il 10 febbraio, e il 18 marzo: in quest'ultimo giorno scrissi: « il fiume dei Titani è bellissimo, e mi pare molto dentato e tortuoso ». Il diametro apparente del pianeta era in quel momento di 5″,2.

122. Il fiume dei Giganti e quello delle Sirene coll'Oceano formano un ampio circuito, che parte dall'una estremità del Mare delle Sirene, e vi rientra all'altra estremità. La terra quasi circolare, che così è isolata dal resto, è detta Memnonia: in essa, e specialmente nella sua parte confinante col Mare delle Sirene è notevole un grado di splendore veramente straordinario, di cui l'uguale non ho trovato che sulla sponda occidentale d'Argyre e in un altro luogo di cui dirò più sotto. Questo splendore, che tuttavia rimane molto inferiore alla neve polare, è specialmente sensibile quando la Memnonia si trova presso quell'orlo del disco che non è affetto da fase. Ho potuto constatare questa cosa molte volte, ed ancora ultimamente il 18 marzo 1878. La stessa osservazione è stata fatta da Dawes, il quale nel suo disco del 3 novembre 1864 pone in questo luogo la nota: *White, almost glistening.*

123. Fino a questi ultimi tempi si è creduto, che il Mare delle Sirene e il Mare Cimmerio non facessero che un mare solo, al quale fu dato da Proctor il nome di *Mare di Maraldi*. Così considerato, questo mare è una delle macchie più rimarchevoli e più estese della superficie di Marte e fu notato anche dai primi osservatori, come si può vedere nell'*Areografia* di Terby. Qui accennerò soltanto che la figura del Mare delle Sirene colla piegatura in forma di collo d'uccello dalla maggior parte degli osservatori o non è indicata, o è debolmente indicata. Che questa però esistesse già nel 1864 nella forma assegnata sulla nostra carta è provato dal disegno che ne fece Kaiser il 10 dicembre di quell'anno: dove per ciò che riguarda il Mare delle Sirene e le Colonne d'Ercole l'accordo fra lui e me è tanto grande, quanto si può desiderare. Ma nel fare la sua carta pare che Kaiser non abbia tenuto conto di quel disegno: onde su di essa la figura del Mare delle Sirene è riuscita poco fedele. Quella piegatura dell'estremo orientale del Mare delle Sirene si trova anche abbastanza indicata nei due disegni fatti da Lockyer il 15 ottobre 1862. Nella carta di Proctor essa manca affatto, in conseguenza dell'esser stato troncato quel mare per separarne il capo della *Bessel's Inlet* (vedi qui sopra § 117). Non trovo presso nessun osservatore alcun cenno dei fiumi dei Giganti e dei Titani. Qualche indizio si può, volendo, vederne presso Dawes nel già citato disco del 3 novembre 1864.

Sezione XVI.

Atlantide I e II, Golfo e canale dei Lestrigoni.

124. Atlantide I chiamo quella lunga e sottile lingua di terra, che divide il Mare delle Sirene dal Mare Cimmerio. La sua larghezza è quasi uniforme, di circa 3° o 4° di circolo massimo (100 miglia o poco più): sembra un po' maggiore nella parte boreale, dove si attacca alla Zefiria. È facilmente discernibile, anche nell'aria mediocre, ed io ho potuto ancora distinguerla con tutta sicurezza la sera del 30 dicembre 1877, il diametro apparente del disco essendo ridotto a 8″,75 e il 7 febbraio 1878, il diametro apparente essendo di non più che 6″,54. In quest'ultima sera trovo scritto «Atlantide I di una strana evidenza». Il 18 marzo però, essendo l'aria discretamente buona, non si poteva più discernere nettamente: il diametro del disco era allora di 5″,2. Nella prima osservazione che feci dell'Atlantide I il 14 settembre 1877 (205°), credetti che il colore della penisola nell'istmo inferiore o boreale fosse alquanto più scuro che il resto, e rimasi dubbioso, se vi fosse una connessione decisa col continente di Zefiria. Questo dubbio non mi si presentò mai più altre volte, in condizioni atmosferiche anche molto più felici. Debbo però ad ogni modo notare, che la parte orientale di quell'istmo e il golfo attiguo, formato dal Mare delle Sirene nel nostro 26° punto fondamentale, non mi apparvero mai con distinzione completa e in modo da soddisfarmi pienamente. Vi è certamente in questo luogo qualche particolarità riservata ad osservatori avvenire.

125. Fin dallo stesso giorno 14 settembre notai, essendo l'atmosfera molto tremolante, che la parte del Mare Cimmerio costeggiante l'Atlantide I pareva molto meno oscura che il rimanente del medesimo mare: la stessa osservazione feci il 20 ottobre consecutivo. Finalmente il 21 ottobre (199°) venni in chiaro della causa reale di quest'apparenza, e scoprii quella lunga e dritta penisola quasi parallela ed uguale all'Atlantide I, ma un po' più sottile, che sulla carta è segnata Atlantide II. Lo stesso giorno, essendo 218° la longitudine del meridiano centrale, notai che essa era affatto diritta, un po' più stretta in alto che in basso, e terminata in alto con una punta ottusa e sfumata. Vidi inoltre, che aveva una tinta alquanto più chiara del Mare Cimmerio, ma più scura dell'Atlantide I: onde anche questa penisola è da mettere insieme a quelle di Deucalione e di Pirra. L'Atlantide II è un oggetto molto difficile: il 30 dicembre, essendo il disco ridotto a 8″,75 di diametro non si poteva più riconoscere, mentre era tuttavia visibilissima l'Atlantide I.

126. Lo spazio di Mare Cimmerio, che è compreso fra le due Atlantidi, il 21 ottobre sembrava sufficientemente oscuro, e l'ho chiamato Golfo dei Lestrigoni. Nel suo intimo recesso fra gl'istmi boreali di Atlantide I e di Atlantide II ha la sua foce il fiume dei Lestrigoni, il quale limita ad occidente la Zefiria. Esso corre press'a poco nella direzione del meridiano, e l'altra sua foce che per le nebbie soltanto con grave difficoltà e penosa incertezza ho potuto travedere nei giorni 20, 21, 27 ottobre e 30 dicembre, sta sul gran fiume Oceano. Il fiume dei Lestrigoni è assai

meno visibile che quelli delle Sirene, dei Titani e dei Ciclopi; tuttavia l'ho ancora potuto riconoscere il 7 febbraio 1878, il diametro apparente del disco essendo allora di 6″,54.

127. L'Atlantide I come diaframma dividente il Mare Cimmerio dal Mare delle Sirene si può già riconoscere nei disegni fatti da Maedler nel 1837 (vedi specialmente i dischi 7, 14, 15, 16, 17 nella Tavola V dei *Beiträge*), in una forma però, a dir vero, molto rudimentare. Dopo di lui varî osservatori la videro e la disegnarono, specialmente Lockyer e Kaiser nel 1862, i cui dischi sufficientemente s'accordano col nostro tracciamento. Il 9 e l'11 ottobre 1862 riuscì anzi a Lockyer di constatare tracce della nostra Atlantide II, la quale però secondo lui aderirebbe alla riva australe del Mare Cimmerio, anzichè alla settentrionale. Per altre descrizioni dell'Atlantide I si può consultare l'*Areografia* di Terby, pag. 90. Il sig. Terby, che ha avuto il merito di chiamare l'attenzione degli osservatori su questa penisola, propone per essa il nome di *Terra di Webb*.

128. Quanto al fiume dei Lestrigoni, sembra ch'esso appaia sulla nostra carta per la prima volta: a meno che non si voglia ravvisarlo nella leggera nube, che sul disegno di Kaiser del 3 gennaio 1865 occupa la parte sinistra inferiore del disco. La bocca del fiume dei Lestrigoni nel Mare Cimmerio è poi certamente indicata da Phillips nel suo disegno del 15,16 ottobre 1862; io la ravviso almeno nella piccola indentazione che segue a destra l'istmo inferiore di Atlantide I, abbastanza chiaramente, se non esattamente, indicato sul medesimo disegno.

Sezione XVII.

Mare Cimmerio: Fiume dei Ciclopi.

129. Ciò che resta dell'antico Mare di Maraldi dopo tagliatone il Mare delle Sirene e le due Atlantidi, designo col nome di Mare Cimmerio. La sua tinta è discretamente uniforme, il colore uguale a quello del Mare delle Sirene e del Lago del Sole; ma le sue rive non son da per tutto ben decise, specialmente le australi, che io ho rappresentato con una semplice linea diretta lungo il parallelo, senza poter discernervi indentazioni notevoli altre che le bocche dei canali Simoe e Scamandro. Invece molto ben definita è la riva occidentale lungo la penisola detta Esperia.

130. Il Mare Cimmerio ha comunicazione col gran fiume Oceano per mezzo di due aditi: cioè pel fiume dei Lestrigoni, e per il fiume dei Ciclopi. Il primo è già stato descritto. Molto più importante di questo sembra però il fiume dei Ciclopi, che ho sempre potuto vedere tutte le volte che questa parte del pianeta si è presentata alla vista. In settembre, ottobre e novembre veramente esso appariva più come ombra sfumata e indistinta, che come linea continua, a cagione senza dubbio delle nebbie, che ingombravano in quel tempo questa parte delle terre equatoriali. Ma queste essendosi diradate più tardi col scendere del Sole verso l'Equatore, nei giorni 25, 28 e 30 dicembre, non arrivando il diametro del disco a 9″ lo vidi come lunga striscia apparentissima ed oscura scendere prima per forse 18° o 20° nella direzione del meridiano, per volgersi poi a nord-est e raggiungere anch'esso il fiume Oceano, confermando così i tracciamenti anteriormente da me ottenuti con molta fatica. Questa

visibilità poi si mantenne sempre durante le osservazioni del 1878, e ancora si manteneva il 17 marzo, sebbene il diametro del disco allora fosse poco più di 5″. Io non posso credere che la larghezza del fiume dei Ciclopi sia meno di 3° o 4° di circolo massimo (100 miglia almeno) anche nelle parti più anguste. La regione giacente fra il fiume dei Ciclopi e quello dei Lestrigoni ho chiamato Eolide.

131. Per quanto concerne le osservazioni anteriori del Mare Cimmerio, rimando all'*Areografia* di Terby. Qui noterò solo, che l'ampio e visibile fiume dei Ciclopi non può esser altro che l'ingresso del vasto mare interno segnato sulla carta di Proctor col nome di *Huggins Inlet*: mare interno che forse in qualche parte è identico al nostro Oceano. In quella carta Proctor ha avuto per fonte un disegno di Dawes del 1° dicembre 1864. La curvatura e la direzione del corso non coincidono che mediocremente, ma considerate le molte minute discordanze che quello stesso disegno presenta con altri osservatori in mezzo ad una concordanza approssimativa generale, l'identità non mi pare dubbia. La posizione della imboccatura nel Mare Cimmerio coincide a capello. Nelle osservazioni del 28 e 30 dicembre 1877 io ho posto molta attenzione per verificare se si poteva ridurre il tracciato del fiume dei Ciclopi a riprodurre esattamente il principio dell'*Huggins Inlet;* ma mi son convinto ciò non esser possibile. Il fiume dei Ciclopi esce dal Mare Cimmerio seguendo per circa 20° la direzione del meridiano, e soltanto più basso piega ad oriente: mentre secondo Dawes e Proctor la direzione dell'*Huggins Inlet* fa col meridiano angolo di 45° circa appena uscendo dal Mare Cimmerio e più sotto fa un angolo anche maggiore.

132. Il sig. Terby ha raccolto tutte le testimonianze degli osservatori, che si possono riferire all'*Huggins Inlet* (*Aréographie*, p. 93-96). Ve ne sono parecchi che confermano il mio modo di tracciarne l'ingresso nel mare Cimmerio. Il disegno di Secchi del 20 giugno 1858 mostra a manca due canali in direzione del meridiano, uno dei quali sembra non possa esser che il fiume dei Ciclopi. Le testimonianze di due altri disegni del 17 e 18 giugno non possono esser chiamate in esame, trovandosi allora quella regione troppo prossima ai limiti del disco. Il disegno del 24 giugno sarebbe decisivo, se non fosse fatto in aria cattiva. Kaiser nel disco dell'11 ottobre 1862 ha a destra una striscia nel senso del meridiano, che indica una vaga percezione del fiume dei Ciclopi. Come poi la medesima striscia nella carta di Kaiser si presenti obliquamente al meridiano proprio nella direzione dell'*Huggins Inlet* di Proctor, è quanto per ora non intendo. Forse Kaiser ebbe qui in maggior conto il disegno del 7 gennaio 1865, contenente in questo luogo un'ombra indistinta, che potrebbe anche sembrare un ampio mare. Il disegno 41° dell'*Areografia* di Terby fatto dal sig. Gledhill il 6 aprile 1871 dà una direzione meridiana, esattamente come Secchi ed io. Franzenau nel suo disco VI (22 nov. 1864) ha la stessa cosa. Anche il 16° disegno di Knobel (31 maggio 1873), se si attende all'obliquità della projezione ortografica, sembra accostarsi abbastanza al nostro modo di vedere, almeno nella parte prossima al Mare Cimmerio. Speriamo che nell'opposizione del 1879 si riesca a dileguare almeno una parte di queste incertezze.

Sezione XVIII.

Fetontide, Elettride, Eridania.

133. Queste tre regioni formano una zona luminosa limitata al nord dal Mare delle Sirene e dal Mare Cimmerio; al sud dal Mare Cronio, che si stende in direzione del parallelo con larghezza presso a poco uniforme dalle Colonne di Ercole alla gran penisola Ausonia, e aderisce alle terre equatoriali per mezzo dell'Atlantide I e dell'Esperia. Lo splendore di questa zona in sè è alquanto minore che quello delle terre poste sotto il grande diaframma, ma spicca tuttavia abbastanza in mezzo all'oscurità dei mari che la limitano dalle due parti. In generale sembra più luminosa nella parte occidentale presso Ausonia, che nella parte orientale attigua alle Colonne.

134. A partir dalle Colonne è il tratto detto Fetontide, a cui si attacca con perfetta continuità l'istmo australe di Atlantide I: subito dopo viene il canale detto Simoe, il quale gira descrivendo un arco molto pronunziato, ed è uno dei pochi che siano così curvati. Il Simoe è certamente una delle cose più difficili di Marte: esso mi sfuggì del tutto nella prima serie di osservazioni da me fatte su questa regione nei giorni 16-22 settembre e non lo vidi prima del 21 ottobre (197°), nel qual giorno potei delinearne con sicurezza la forma. Ne verificai ancora l'esistenza il 27 ottobre consecutivo (147°).

135. Vien dopo la terra detta Elettride di forma trapezoide, su cui nulla ho a dire: poi lo stretto o canale detto Scamandro. Questo va dritto dal sud al nord, ed è molto più facile a scoprire, che il Simoe. Lo vidi il 16 settembre per la prima volta, e molte altre volte dopo fino al 30 dicembre, in cui era ancora discernibile, essendo il diametro del disco di soli 9″. Il 7 di febbraio non si riconosceva più, anche in buono stato di atmosfera.

136. L'Eridania propriamente non è che la testa australe della gran penisola Esperia. Essa mi parve sempre assai luminosa in confronto delle regioni vicine, specialmente in prossimità dell'orlo del disco; e questa osservazione trovo ripetuta ancora sotto il 24 dicembre. La divide dall'Ausonia il canale Xanto, facilmente visibile anch'esso, del quale la prima osservazione è del 13 settembre, l'ultima del 1° febbraio. Questo ha una foce nel fondo del Mar Tirreno, e l'altra in un ampio golfo del Mare Australe, detto Golfo di Prometeo. Tanto lo Xanto come lo Scamandro mi parvero visibili più per la larghezza, che per la nerezza: ho creduto anche di vedere, che fossero mal terminati alle due sponde.

137. I limiti boreali delle terre qui descritte sono stati osservati necessariamente da tutti quelli, che han veduto il Mare Cimmerio e il Mare delle Sirene. I limiti australi soltanto da quelli che hanno osservato con certezza il Mare Cronio. Vedi la sezione XIX. I canali Scamandro e Simoe compajono qui per la prima volta. Ma lo Xanto è chiaramente indicato da Lockyer (1862, 3 e 9 ottobre), e un po'più confusamente da Kaiser. Anche la linea punteggiata, che termina la parte australe d'Ausonia presso Maedler nella sua carta del 1830 sembra accennare a qualche osservazione fuggitiva od incerta dello Xanto. Il secondo disco del 1832, pubblicato da Maedler nei *Beiträge*, contiene dello Xanto una indicazione anche meno incerta.

Sezione XIX.

Mare Cronio, Thyle I e II.

138. Dal Golfo Aonio e dalla bocca del Fasi la riva del Mare Australe si estende dritta ad occidente per circa 180° di longitudine, salendo poco a poco dal 45° al 58° parallelo sud, e formando varî seni poco evidenti ad eccezione di quello che corrisponde alla foce australe del Simoe, e dell' altro che corrisponde alla foce dello Xanto. Quest'ultimo seno si presentò il 14 ottobre (275°) in ottima condizione d'atmosfera con molta determinazione ed evidenza; mentre il primo è reso sensibile soltanto da uno stringimento che la zona luminosa delle terre descritte nella sezione precedente sembra subire in quel luogo. Le due isole Thyle I e Thyle II formano qui, colle terre ora accennate, una specie di lungo mare mediterraneo a più sbocchi, al quale ho dato il nome di Mare Cronio. Esso si è presentato generalmente come una striscia poco meno scura che il Mare delle Sirene e il Mare Cimmerio, attraversante, quando il 190° meridiano passava al centro, tutto il disco visibile da destra a sinistra secondo il parallelo; sembrava una corda oscura tesa nel circolo che contornava il disco. Nell'aria ottima invece si è potuto riconoscere che la larghezza del Mare Cronio non è affatto uniforme, sia a cagione delle indentature del lato boreale, sia anche per causa dello stretto d'Ulisse, che passa fra le due isole di Thyle, e per causa del contorno rotondeggiante di queste. Simili ineguaglianze, come pure la larghezza stessa del Mare Cronio si presentano alquanto ridotte, a cagione dell'obliquità secondo cui si projettano: durante le osservazioni il raggio visuale in media fu inclinato di 55° sulla superficie esaminata. Il Mare Cronio è visibilissimo, sempre che non sia occupato da nebbie: io lo vidi ancora con tutta facilità il 3 gennaio e il 10 febbraio, essendo il disco apparente ridotto a 8″,5 e a 6″,4 di diametro.

139. Della vera condizione delle due isole di Thyle non fui informato che per successivi gradi. Nel giorno 13 settembre e nei consecutivi riconobbi che il Mare Cronio nella parte occidentale era separato per un intervallo più chiaro dal mare che circondava la calotta nevosa. Questo intervallo mi parve arrotondarsi verso il suo termine occidentale presso il meridiano del fiume Xanto. Più tardi il 20 settembre (152°), essendo la Fetontide al meridiano centrale, vidi un promontorio splendente e rotondo al sud delle Colonne d'Ercole. Supposi che quelle due estremità rotondeggianti appartenessero ad una unica isola allungata secondo il parallelo, che chiamai Thyle. Fui però disingannato il 20 ottobre (219°), per la scoperta di uno stretto, che tagliava questa supposta isola in due altre minori. Tale stretto, che sulla carta porta il nome d'Ulisse, era evidentissimo, malgrado che avesse già passato il meridiano da lungo tempo e fosse già molto vicino all'orlo sinistro del disco. Vidi allora nettamente anche i termini australi delle due isole, che mi parvero ovali allungate nel senso del parallelo, a cagione dell'obliquità della projezione: in realtà esse sono press'a poco rotonde. Il 21 ottobre riuscii ad osservare il passaggio dello stretto d'Ulisse al meridiano centrale: dirò più esattamente del suo asse, che corre quasi esattamente nella direzione nord-sud. In questa circostanza notai che la più occidentale delle due isole (Thyle II) sembra essere

alcun poco più grande e più australe dell'altra, o di Thyle I. Altre osservazioni di posizione rispetto alle due isole feci il 27 ottobre, confermando le annotazioni precedenti.

140. È singolare la splendidezza e la visibilità di queste isole, quando sono prossime all'orlo del disco. Molte volte ho veduto presentarsi Thyle II col suo estremo occidentale sull'orlo sinistro, quando al centro passava il 280° meridiano, o qualche altro ad esso vicino. L'ultima osservazione di tal genere fu fatta il 16 novembre, essendo il diametro del disco ridotto a 13″,3. Ho già avvertito, che la stessa loro esistenza mi risultò dal loro presentarsi all'orlo del disco in forma di macchie luminose poco distanti dalla macchia nevosa polare; ed ho anche avvertito, che lo stretto d'Ulisse fu scoperto quando già era molto lontano dal meridiano centrale. Sono apparenze analoghe a quelle che ho già narrato a proposito d'Argyre.

141. Il Mare Cronio già si trova disegnato con molta esattezza da Maedler nel 1830. È anche benissimo indicato sul disco di Secchi del 18 giugno 1858. Lockyer pure l'ha veduto il 3, 9, 11 ottobre 1862. Taccio di altri osservatori. Kaiser non solo indica sulla sua carta il Mare Cronio nel suo stile indeterminato e nebuloso; ma ha perfino sopra di esso una macchia abbastanza luminosa, che non dubito d'identificare con l'isola di Thyle I. Le longitudini assegnate ai termini di questa sono 258° e 305°, o secondo il nostro modo di contare, 143° e 190°, mentre noi abbiamo 134° e 180°; la differenza in parte è dovuto a ciò, che Kaiser ha preso come polo della sua carta la macchia nevosa; in parte si spiega coll'imperfezione dell'immagine da lui avuta. La latitudine collima benissimo colla nostra. Thyle II sembra invece sia stata confusa coll'Eridania da Kaiser, il quale non ha veduto lo stretto denominato sulla nostra carta stretto di Tifi. Qualche traccia di Thyle si ha egualmente presso Lockyer nei già citati disegni, sebbene la troppa estensione che vi si assegna possa dar fondamento a giusti dubbî. Il disegno che la carta di Proctor dà di queste regioni è affatto insufficiente, il Mare Cronio non potendo certamente esser confuso con ciò ch'egli chiama *Mare di Phillips*. Anche la viziosa disposizione dei suoi *Mari di Maraldi e di Hooke* ha contribuito a rendere i suoi tracciamenti affatto difformi dal vero.

Sezione XX.

Esperia, fiume degli Etiopi.

142. Fra il Mare Cimmerio e il Mar Tirreno si allunga nella direzione generale da nord-ovest a sud-est la grande penisola Esperia, congiungendo la zona delle terre equatoriali con la zona delle terre descritte nella sezione XVIII. Il suo asse è alquanto curvato, e la larghezza non è costante, ma nella parte boreale almeno due volte maggiore che nell'australe, dove sotto la latitudine di circa 30° sud si restringe a meno di 8° di circolo massimo.

143. Ciò che rende per noi importantissima questa penisola è l'ombra forte che si stende attraverso alla sua parte più angusta sopra un terzo circa della lunghezza. Il termine australe di quest'ombra è piuttosto ben definito, e dall'intimo seno del Mar Tirreno si stende a nord-est attraverso alla penisola fino al Mare Cimmerio: presso questo termine l'ombra ha il suo massimo grado d'oscurità, il quale però

ancora non giunge alla nerezza del Mar Cimmerio, e meno ancora a quella del Tirreno. A partir da esso limite l'ombra viene digradando e facendosi sempre meno densa, così che verso il mezzo della penisola non se ne scopre più traccia. Non sono mai riuscito ad afferrarne con precisione il vero limite boreale, e pare che qui dall'ombra si passi alla luce per gradi insensibili. Questi fenomeni mi sembrano permanenti, ed ogni volta che ho potuto veder bene Esperia al centro del disco, sempre l'ombra era visibile allo stesso modo: l'ultima volta potei distinguerla con certezza il 4 febbraio 1878, essendo il diametro apparente di Marte 6″,67.

144. Ho pure fatto l'osservazione costante, che quando Esperia era portata dalla rotazione del pianeta presso l'orlo del disco, invariabilmente quell'ombra appariva più scura, simulando allora un'estensione dei mari fra cui è posta. Allora Esperia appariva troncata nella parte superiore e si presentava come una semplice prominenza obliqua o peninsulare del continente equatoriale. La prima vista di questo genere ebbi il 10 settembre (280°), essendo l'ombra distante già 55° di longitudine dal meridiano centrale. Da principio anche credetti che fosse questa l'apparenza normale, e segnai in luogo dell'ombra un canale comunicante fra il Mar Tirreno e il Mar Cimmerio. Alcuni giorni dopo però dovetti rettificare le idee. Infatti già il 12 settembre dovetti avvedermi, che quando Esperia è al meridiano centrale, malgrado la presenza dell'ombra i due lati destro e sinistro della penisola continuano visibilissimi per tutta la sua lunghezza ed attestano così una unità di formazione geografica, della quale è necessario tener conto. Addurrò più tardi gli argomenti che mi fanno credere probabile, che Esperia verso il suo mezzo abbassi tanto il suo livello, da esser inondata dal Mar Cimmerio e dal Mar Tirreno, stabilendo così fra i due bacini una comunicazione accidentale. Il fatto, che l'ombra sta appunto nel luogo più stretto della penisola, accresce per me questa probabilità, o per lo meno riceve, nella precedente ipotesi, una spiegazione molto naturale.

145. Dalla parte d'Eridania i confini d'Esperia non sono nettamente determinati: io li segno lungo il 40° parallelo australe. Non così all'estremità boreale. L'ultimo e più occidentale seno formato dal Mare Cimmerio riceve la bocca del fiume degli Etiopi, canale che vien dritto dal nord ad sud, e stabilisce un'altra comunicazione a traverso del continente equatoriale. La foce del canale degli Etiopi nel Mare Cimmerio fu da me scoperta per la lunghezza di 5 o 6 gradi il 14 settembre (219°): più oltre le nuvole non concessero di vedere in quello e nei giorni seguenti. Il 20 ottobre mi fu possibile seguirlo per circa 10° sempre nella stessa direzione. La sera del 21 ottobre vidi il prolungamento ulteriore, fino all'incontro coll'Eunosto, e scoprii il canale Lete, che unisce il fiume degli Etiopi alla Piccola Sirte ed al Mar Tirreno, delimitando così completamente Esperia da quella parte. Sulla rete di canali che solcano questa regione dirò sotto più accuratamente.

146. L'Esperia fu osservata molto bene da Maedler nel 1830; il disegno ch'egli ne dà coincide quasi esattamente col nostro. Veramente nella carta da lui pubblicata non appare l'ombra di cui ho parlato: ma se si considerano bene i suoi dischi n. 11, 13, 14 e 17 la si troverà proprio nel luogo che le si conviene. Non si poteva far di meglio! Anche Lassell nel disco del 5 novembre 1862 s'accorda bene. Invece Kaiser e Lockyer nel 1862 e Dawes nel 1864 figurano Esperia come una striscia

di larghezza e di chiarezza quasi uniforme, anzi Dawes dà all'istmo boreale o inferiore uno stringimento affatto singolare e contrario a tutte le altre osservazioni; e questa configurazione è passata nella carta di Proctor, dove la penisola ha il nome di *Terra di Burckhardt.* Nessuno di questi ha indizio dell'ombra che copre la parte più angusta di Esperia.

147. Altri osservatori invece videro benissimo quell'ombra, e la sezione da essa occupata attribuirono al mare, disegnando Esperia come una penisola molto più breve, attaccata soltanto in basso al continente equatoriale. Simile interpretazione si trova presso Secchi (17 e 18 giugno 1858): Franzenau (20 novembre 1864): Green (n. 43 e 49 dell'*Areografia* di Terby, 16 e 28 maggio 1873): osservatori tutti, pei quali l'ombra allora appariva alta presso l'orlo del disco. Questo dunque è un effetto simile a quello da me notato qui sopra § 144, e certamente è dovuto alla medesima causa, l'obliquità della linea visuale rispetto alla superficie di quella regione. Sulla natura probabile del modo con cui opera questa causa esporrò più tardi una congettura.

Sezione XXI.

Mare Tirreno. Piccola Sirte. Fiume Lete.

148. Nella grande zona dei mari interni che siam finora venuti descrivendo, il Tirreno forma l'ultima e la più grande sezione. Esso si stende sopra una larghezza pressochè uniforme di 8 a 10 gradi in direzione obliqua da nord-ovest a sud-est per una lunghezza non minore di 80°: comunica col Mare Cronio per mezzo dello Xanto: coll' Oceano e coll' Eunosto per mezzo del fiume Lete, e forse, per mezzo del Nilo, col Mar Polare boreale. Sembra poi, che coll' inondazione di certi bassi fondi esso si mescoli anche col Mare Cimmerio e col Mare Eritreo. Nelle parti australi il suo colore è simile a quello del Mare delle Sirene, ma nelle parti boreali è anche più cupo e non inferiore in nerezza al Golfo delle Perle. Ad occidente limita la gran terra d'Ausonia, che gli si stende parallela: ad oriente e settentrione spinge nella zona delle terre equatoriali due profondi golfi, detti sulla carta Grande e Piccola Sirte.

149. La Piccola Sirte limita verso occidente la parte inferiore di Esperia, e si spinge come punta acuta entro terra nella direzione di nord-est. Nel suo intimo recesso confluiscono due canali, il fiume Lete e il fiume Tritone. Di quest' ultimo, che è il principale diremo più sotto. Quanto al fiume Lete, esso è un breve tronco di 12 o 15 gradi di lunghezza. che continua lungo l'asse primitivo della Piccola Sirte fino ad incontrare sotto angolo acuto il fiume degli Etiopi, ed isolando così Esperia dal resto delle terre equatoriali. Il fiume Lete è uno degli oggetti più difficili da me incontrati nell' esplorazione di Marte. Molte e molte volte io aveva esaminato la Piccola Sirte e la foce del fiume Tritone, e mi era maravigliato della maniera poco naturale con cui si congiungono insieme. Un simile gomito ad angolo retto era senza esempio nei canali fin allora da me veduti in Marte. Il 20 ottobre (234°) per aria assai buona, dopo aver scoperto in quei luoghi varie novità esaminai attentamente l'intervallo fra la Piccola Sirte e il fiume degli Etiopi. Non vidi nulla: onde fui convinto, non essere Esperia in alcun modo divisa dalle terre equatoriali. Ma il

21 ottobre (216°) ebbi un intervallo veramente magnifico, durante il quale constatai e l'esistenza del Lete, e la sua connessione col fiume degli Etiopi, e la connessione, quasi egualmente delicata, di questo coll' Eunosto. Lo schizzo fatto rapidamente in quel momento servì di base alla carta.

150. Il Mar Tirreno è chiamato *Hooke's Sea* nella carta di Proctor, ed è un oggetto dei più noti sulla superficie di Marte. Anche il golfo detto Piccola Sirte si trova indicato con maggiore o minor evidenza presso quasi tutti gli osservatori. Veggansi principalmente Maedler, Secchi, Kaiser, Lockyer e Dawes.

Sezione XXII.

Ulteriori osservazioni sul fiume Oceano. Eunosto, Campi Elisi.

151. Lo stato veramente sfavorevole dell'atmosfera di Marte, che dominò negli ultimi mesi del 1877 lungo tutta la regione che si estende al nord del Grande Diaframma fra i meridiani 90° e 200° ha impedito di fare sul grandioso Canale Oceano osservazioni molto esatte. Tutte le foci che in esso hanno i numerosi canali che vengono dal sud, dall' Eosforo al fiume dei Ciclopi, furono, durante la maggior appariscenza del pianeta, appena travedute e disegnate su impressioni più o meno fuggitive. Alcune osservazioni fatte in dicembre, gennaio, febbraio e marzo manifestarono in tutte quelle linee una colorazione più interna, e un corso più deciso: ma le dimensioni del disco erano allora troppo ridotte, perchè fosse possibile trarre da quelle osservazioni delineamenti molto sicuri.

152. Come ho detto, il principio e la fine dell' Oceano non si poterono da me osservare: la sua presenza mi constò indubitatamente nei confini di Tharsis e di Dedalea, e di là fino al canale delle Sirene è confermata anche dalle osservazioni di Dawes (§ 117). Senza troppa difficoltà, ma come ombra sfumata e non definibile con esattezza fu veduta la parte compresa fra il fiume delle Sirene e quello dei Titani: la miglior osservazione qui fu fatta il 27 ottobre, e confermata a più riprese, ultimamente ancora il 21 marzo, ma in distanza troppo grande del pianeta. Dalla foce del fiume dei Titani a quella del fiume dei Ciclopi si hanno molte osservazioni, ed anche tentativi di determinar posizioni (come quelle dei nostri punti 28, 29, 33) ma nulla di ben preciso. A partir dalla foce del fiume dei Ciclopi l'Oceano si volge al nord seguendo il 200° meridiano. Questa parte è stata disegnata il 27 e il 28 ottobre e riveduta piuttosto bene il 30 dicembre. La sua esistenza è sicura, non così la forma del suo corso, che si presentava in troppo grande scorcio. Invece incerta anche riguardo all' esistenza è l'altra diramazione verso il nord, segnata di contro al fiume dei Titani. Credo poi sicura l'esistenza di altro canale o mare al nord dell'Oceano, segnato fra i meridiani 130° e 150°: forse è una circonvoluzione o diramazione dell'Oceano stesso: ma la posizione è molto dubbiosa. Tutte queste sono osservazioni del 27 e 28 ottobre, fatte in molta prossimità del lembo inferiore e impedite dall'atmosfera poco trasparente del pianeta. Le osservazioni posteriori da me fatte su questa parte non giovarono molto alla sicurezza dei tracciamenti.

153. Per quanto concerne la larghezza dell' Oceano, essa probabilmente non è così uniforme come indica la carta. Era impossibile assegnar misure di cose, la cui

esistenza appena si poteva metter fuori di dubbio. Lo stesso dico delle gradazioni delle tinte, dove le tinte eran sì poco discernibili. Delle terre poste a settentrione dell'Oceano non è possibile affermar altro che la loro esistenza, e tutto deve rimettersi all'esame da farsi nelle prossime opposizioni.

154. Dall'Oceano entrando nel fiume dei Ciclopi per la larga sua foce boreale si incontra una diramazione di esso verso nord-ovest detta Eunosto, la quale raccoglie il fiume degli Etiopi ed il Lete ad esso congiunto, facendo così comunicare l'Oceano col Mar Tirreno: da questa parte l'Eunosto non pare molto ampio, ma più oltre verso nord-ovest si allarga forse quanto l'Oceano, ed il suo corso va dritto a congiungersi col Nilo nella gran piegatura che questo fa verso Occidente: nell'intervallo raccoglie dal sud la foce del fiume Thot, che viene dal Lago Tritone. L'Eunosto fu da me scoperto il 20 ottobre nella sua parte più orientale: il suo prolungamento fino al Nilo, e la sua congiunzione col Lago Tritone per mezzo del Thot furono constatati, non senza qualche dubbiezza residua, il 9, 10 e 12 marzo, nei quali giorni pure fu veduto di nuovo tutto il fiume degli Etiopi. In queste ultime osservazioni l'Eunosto era molto nero e visibile, malgrado che il diametro apparente del disco del pianeta non fosse più che 5″,45. La parte occidentale dell'Oceano, il fiume dei Ciclopi, e l'Eunosto formano un grande arco; alla terra compresa nel suo interno si è dato il nome di Campi Elisi.

155. Osservazioni così incerte, come sono le precedenti, non possono dare un paragone molto istruttivo coi risultati dei disegni anteriori. Già si è veduto, che l'esistenza dell'Oceano sotto Tharsis e Dedalea ha per sè anche la testimonianza di Dawes. La parte seguente fra il fiume delle Sirene e quello dei Titani sembra in qualche modo indicata nei disegni di Maedler (vedi *Beiträge,* 1832 n. 1 e 2: 1837, n. 6, 7, 15, 16, 17), ma con poca sicurezza. La carta pubblicata nei *Beiträge* non darebbe a dir vero una concordanza molto soddisfacente col nostro tracciamento. Certamente però tutto l'Oceano dal fiume delle Sirene a quello dei Ciclopi è stato veduto a Washington da Harkness il 6 settembre 1862 [1]. Anche Secchi ha la medesima parte dell'Oceano nel suo disco del 16 novembre 1862. Kaiser qui non mette che ombre diffuse: Lockyer ha niente affatto. Quel tronco dell'Oceano invece che si dirige verso settentrione sotto il 200° meridiano è molto bene indicato da Maedler nella sua carta dei *Beiträge.* La coincidenza di posizione, direzione e curvatura è qui completa quanto si può desiderare. Indicato pure sembra questo giro dell'Oceano nel 49° disegno dell'*Areografia* di Terby, eseguito dal sig. Green il 13 maggio 1873: e sarebbe la macchia curva, che occupa il centro del disco.

156. Lo stesso tronco settentrionale-occidentale dell'Oceano, insieme col fiume dei Ciclopi e coll'Eunosto formano un ampio arco, nel quale mi pare di ravvisare parte dell'*Oudemans' Inlet* della carta di Proctor. L'accordo è abbastanza soddisfacente tanto per la forma, quanto per la posizione. L'*Oudemans' Inlet* s'incontra pure in varî disegni del signor Knobel (1873) stando ai quali essa formerebbe un circuito chiuso, e i Campi Elisi (*Fontana's Land*) ne occuperebbero il centro in forma d'isola.

(1) *Washington observations*, 1862 pag. 512.

157. L'Eunosto è certamente indicato da Secchi nel disco del 20 giugno 1858 e vi è tracciata anche la sua connessione col fiume dei Ciclopi, il tutto però in forma alquanto diversa dalla nostra. Kaiser ha tracce indubitabili, sebbene indeterminatissime, dell'Eunosto nei suoi dischi del 29 novembre e del 28 dicembre 1864. Da quest'ultimo anzi sarebbe indicato il fiume degli Etiopi, come pure nel disegno 43° dei pubblicati da Terby nell'*Areografia*. Anche Franzenau sembra darne indizio nei suoi dischi del 20 e del 22 novembre 1864: che poi il fiume degli Etiopi sia stato delineato da Secchi nel disco del 20 giugno 1858 mi pare indubitabile, malgrado alcune difficoltà che quest'ipotesi sembra sollevare.

158. Ciò che non si può trovare in alcun modo nel nostro disegno è la parte orientale dell'*Huggins Inlet* di Dawes e di Proctor. Già ho detto che la parte occidentale non può rintracciarsi, se non identificandola col nostro fiume dei Ciclopi (§ 131). Se questa supposizione fosse vera, sarebbe necessario congiungere l'*Huggins Inlet* coll'*Oudemans Inlet,* che sulla carta di Proctor appaiono distinte. Ma anche dopo esser arrivati, con questa identificazione violenta, alla bocca del fiume dei Ciclopi nell'Oceano, quale dei due tronchi di quest'ultimo canale dovremo prendere come continuazione dell'*Huggins Inlet?* Qui la discordanza è tale, che si è obbligati ad abbandonare qualunque discussione. Speriamo che le prossime opposizioni gioveranno a dar qualche maggior lume su tutte queste regioni ora così imperfettamente conosciute.

Sezione XXIII.

Libia: Gran Sirte e Nilo: fiume e Lago Tritone: fiumi Nepente e Thot: Lago Meride.

159. Alla Gran Sirte, che nella carta di Proctor è appellata *Mare di Kaiser*, si giunge dalla Piccola Sirte costeggiando l'elegante e regolarissima curva che formano le spiagge della Libia. Vi sbocca il Nilo, che viene in direzione nord-sud dall'emisfero boreale e di tutti i canali che solcano la superficie di Marte è il più notabile e conosciuto da maggior tempo. Intorno al 45° parallelo il Nilo si divide in due rami, uno dei quali è il già descritto Eunosto: l'altro si volge ad occidente per quasi mezza circonferenza del pianeta, limitando a settentrione le terre di Aeria, Arabia, Eden, Chryse, Ophir e Tharsis, e spingendo verso il sud una quantità di canali, di cui già si è data la descrizione, fino a congiungersi coll'Oceano. Questa parte del Nilo non si potè da me esaminare che assai tardi, nell'intervallo fra il 18 febbraio e il 7 marzo 1878, e la sua descrizione nella carta naturalmente non può riguardarsi che come una prima approssimazione. Durante quell'intervallo il Nilo apparve come una corda nera nella parte inferiore del disco, la quale ne separava un piccolo segmento luminoso. Tale corda era più lunga quando passavano al meridiano centrale le parti occidentali vicine all'Oceano, e più breve quando passavano le parti orientali vicine alla Gran Sirte: ciò che indica chiaramente, il corso del Nilo dopo la piegatura non seguire precisamente il parallelo, ma accostarsi alquanto all'Eritreo nelle parti più occidentali. Rimarchevolissimo poi è il fatto, che i tre grandi canali detti Nilo, Oceano ed Eunosto fra tutti e tre formano una fascia continua che gira tutt'intorno al pianeta, percorrendo la zona delle terre equatoriali.

160. La configurazione del Nilo qui sopra descritta è quasi intieramente conforme al disegno datone da Dawes il 20 novembre 1864: anche gli altri disegni di quell'anno, malgrado discordanze di minuti particolari, collimano abbastanza bene colla nostra descrizione, e prolungano il Nilo fin sotto il meridiano del Lago del Sole. Nella carta di Proctor pare che il Nilo sia in parte rappresentato dal canale di Nasmyth (*Nasmyth Inlet*) e in parte dal Mare di Ticone (*Tycho Sea*). Vi sono molte discordanze fra Dawes, Proctor e me, delle quali per ora è inutile tentare la conciliazione, che solo può derivare da nuove ed accurate ricerche fatte in aspetto favorevole del pianeta. L'opposizione del 1877 presentava queste regioni sotto una troppo forte obliquità. Una parte del Nilo fra il 10° e il 40° meridiano è stata già veduta da Maedler nel 1830, e forma nella sua carta la macchia segnata *v*. Veggonsi pure i disegni di Secchi del 1858, di Kaiser e di Franzenau del 1864, di Knobel del 1873 e il 15° disegno dell'*Aréographie* di Terby, fatto da Green il 25 maggio 1873. Quest'ultimo è notabile per ciò, che offre con tutta evidenza la congiunzione del Nilo colla parte settentrionale del Phison.

161. Il Lago Tritone è oggetto abbastanza facile: lo riconobbi già il 12 settembre, e ancora lo rividi il 24 dicembre, il diametro del disco essendo ridotto a 9",2. Le migliori osservazioni di esso e della regione circostante furono fatte il 14 ottobre. Il Lago Tritone è oblungo dal sud al nord, le sue dimensioni ho stimato essere 6° e 3°: il suo colore è molto scuro, come pure quello dei suoi due emissarî australi, il fiume Tritone e il fiume Nepente. L'emissario boreale, che porta il nome di Thot, non fu veduto da me che in marzo; non posso darne alcuna esatta descrizione e solo mi par certo, che esso si allarghi molto nella foce, con cui si congiunge all'Eunosto. Il fiume Tritone è un canale molto facile a distinguere, da me veduto la prima volta il 12 settembre e l'ultima volta il 13 marzo. Esce dalla punta australe del Lago Tritone, e formando un grazioso arco, va ad attaccarsi alla Piccola Sirte, coll'asse della quale e del fiume Lete sta quasi ad angolo retto. Il fiume Nepente esce anch'esso dalla punta australe del Lago Tritone, e descritta quasi una parabola, con ampia foce di colore oscurissimo si getta nel Nilo formando con questo il promontorio d'Osiride; questo è una lunga penisola, il cui colore va diventando sempre più cupo verso la punta, e che si deve pertanto annoverare anch'esso fa le terre oscure (o sommerse) del pianeta. Al sommo della parabola è lateralmente connesso col Nepente il Lago Meride, che è press'a poco quadrato, con due angoli attigui al Nepente, gli altri due essendo arrotondati. Il suo diametro è forse di 4°, il colore oscurissimo. Il Lago Meride è una delle cose più difficili che siano da vedere in Marte: le osservazioni che lo riguardano sono del 13 e principalmente del 14 ottobre. Anche il Nepente è difficile a veder bene: ma congetturarlo si può facilmente dal contrasto di tinta che lungh'esso offre la terra di Libia colla regione molto più chiara d'Iside che sta nell'interno della parabola suddescritta, fra il Nilo e il Thot. Il 13 settembre trovo già scritto « Fra il Lago Tritone e la punta della Gran Sirte vi è una linea arcuata, non distinta come oggetto a sè, ma solo come confine della regione d'Iside, molto più chiara che la parte confinante di Libia ». Il 14 ottobre però il Nepente apparve come una bella linea oscura e visibilissima. Alla sua foce nel Nilo il Nepente si allarga molto, e forma una specie di lago oscurissimo, che è facile scambiare colla

punta della Gran Sirte. Il Nilo, venendo da settentrione, imbocca direttamente questa foce e il Nepente, che ne è il prolungamento naturale: il suo sbocco nella Gran Sirte si fa per un braccio laterale, ciò che produce quella specie di dissimetria che si osserva nella carta. La Terra d'Iside è di particolare splendore, all'incirca come già fu detto della Memnonia. Ma un pezzetto della regione d'Iside (segnato sulla carta con contorno a punti subito a ponente del Lago Tritone) il 14 settembre mi si mostrò splendente più che qualsiasi altra parte del pianeta, e non ho dubitato di paragonarlo colla neve polare. Questa macchia bianchissima rividi con molta distinzione il 14 ottobre, e mi parve formare un quadrato di circa 1″5 di lato (circa 8° di circolo massimo). Se questa era neve, pare si dovrebbe concludere l'esistenza di un gruppo di alte montagne sulle rive occidentali del Lago Tritone.

162. Alla regione compresa fra l'Eunosto e il fiume Tritone ho dato il nome di Amenti. La tinta di questa parte è più chiara che quella della Libia e di Esperia, alquanto meno però che la Memnonia e la Terra d'Iside. La Libia ed Esperia sono d'un colore giallognolo, il quale diventa nella Libia sempre più manifesto, a misura che si procede verso il promontorio d'Osiride.

163. Questo per la riva orientale della Gran Sirte. La riva occidentale forma una curva quasi perfettamente uguale e simmetrica all'orientale: ma laddove la prima termina in un golfo (la Piccola Sirte), questa termina in un promontorio (il Corno d'Ammone). Essa è elegantemente curva, brillante ed unita: non senza indizio però di minutissime indentazioni. Dentro terra non è stato possibile scoprir nulla fino al Phison. Qui è la regione che abbiam chiamato Aeria: e con questa è finita la perlustrazione del Grande Diaframma, incominciata nella sezione II.

164. Sebbene la Gran Sirte sia una delle prime cose che si son vedute in Marte dagli antichi osservatori, pure nella sua descrizione non si trova un completo accordo. Molte di queste discrepanze si potranno forse attribuire alla presenza di nuvole, ed anche alle ombre, che ramificate projetta fuori la parte inferiore di Ausonia, come più sotto diremo. Una parte deriva anche senza dubbio dalla molto diversa forma, che questo gran golfo prende nelle diverse obliquità. Siccome però in questa parte la carta di Proctor e la nostra si accordano benissimo, non aggiungeremo altro: tanto più che una discussione molto particolareggiata di questo punto si trova nell'*Areografia* del sig. Terby, e qualche altra aggiunta vi faremo noi, descrivendo la gran penisola Ausonia. Più interessante è la comparazione di quanto hanno veduto i diversi osservatori nell'interno della Libia e delle regioni vicine.

165. Il Lago Tritone è stato benissimo veduto già nel 1830 da Maedler, il quale l'ha segnato colla lettera *g* sulla sua carta. Nel 1873 Knobel lo ha figurato più volte nella posizione appunto da me assegnata. Vedi i suoi disegni del 23 aprile e del 23 maggio. Così Maedler, come Knobel, lo rappresentano isolato, senza alcuna comunicazione nè col Nilo, nè colla Gran Sirte. Ma all'occhio linceo di Kaiser nel 1862 non sfuggirono nè il Lago Tritone, nè il fiume Tritone, nè il fiume Nepente: e stanno delineati nel suo bizzarro disegno del 2 dicembre 1862, del quale egli non ha voluto tener conto nel comporre la sua carta. Per convincersi che realmente si tratta di ciò, basta osservare, che il Lago Tritone, insieme colla parte orientale del Nepente, e col fiume Tritone formano il profilo di un angolo curvilineo affatto simile

quello della Gran Sirte. L'interno di quest'angolo curvilineo è occupato da regioni più oscure che lo spazio esterno, come sopra si è detto. Kaiser dunque ha considerato questa configurazione come una specie di ombra o di duplicazione della Gran Sirte, e come tale l'ha interpretata nel suo del resto fedelissimo disegno. Egli stesso racconta, che avendo ripetuto questo disegno il giorno consecutivo, trovò esattamente la stessa cosa (1). Questo è un insigne esempio ad un tempo della somma acutezza e fedeltà di quell'osservatore, e del modo singolare, con cui egli talora ha interpretato le cose da lui vedute. Non vi ha il minimo dubbio, che dei due angoli ombreggiati occupanti il mezzo di quel disegno, quello che è a destra rappresenta col suo vertice il Lago Tritone, col suo lato sinistro il fiume Tritone, e col suo lato destro la parte del Nepente che sta fra il Lago Tritone e il Lago Meride.

166. Il fiume Nepente è stato pure assai bene delineato dal sig. Green il 28 maggio 1873 (n. 44 dei disegni dell'*Areografia* di Terby); ed anzi si può ravvisare, in un rigonfiamento che sta in alto, un indizio del Lago Meride. Per Green non esiste il Lago Tritone; ma un ramo orientale del Nepente scende giù lungo il meridiano fino a raggiungere un'ombra collocata trasversalmente. Quel ramo è certamente il nostro fiume Thot, e quell'ombra è senza dubbio la parte più occidentale dell'Eunosto.

167. Del resto, se la parte orientale del fiume Nepente è stata veduta da pochi osservatori, la parte occidentale, a cagione della larga ed oscura foce, per cui entra nel Nilo, è stata veduta da moltissimi: a dir vero però, le osservazioni non si accordano fra loro molto bene, e le mie differiscono da tutte le altre, eccettuate quelle or ora riferite di Kaiser e di Green. Proctor sulle indicazioni di Dawes allarga quella foce entro terra in modo da surrogare ad essa e al Lago Meride un altro lago assai più largo, ch'ei chiama addirittura *Mare di Main:* il promontorio compreso fra questo e la Gran Sirte forma la *Penisola di Hind,* corrispondente al nostro capo d'Osiride. E può darsi benissimo che il 20 e il 26 novembre 1864, quando Dawes disegnò le cose a quel modo, l'aspetto di quella regione fosse diverso che nel settembre e nell'ottobre 1877. Tuttavia è singolare, che del *Mare di Main* il 20 e 22 novembre 1864 (dunque contemporaneamente alle osservazioni di Dawes) nessuna traccia fu vista da Franzenau. Maedler nel 1830, Knobel nel 1873 osservano, rispetto al Mare di Main lo stesso alto silenzio. Quanto ci danno Secchi nel 1858 e Kaiser nel 1864, unicamente ha rapporto coll'ampia e visibilissima foce, in cui si allarga il Nepente prima di raggiungere il Nilo. I due dischi disegnati da Lockyer il 3 ottobre 1862 sono preziosi per le variazioni meteorologiche di cui danno l'istoria appunto in questa regione; Lockyer non ha visto nè il Nepente, nè il Lago Meride, nè il Lago Tritone. Le macchie segnate *g* sono buchi nelle nuvole, attraverso a cui si vede una parte della Gran Sirte. Altrimenti come si spiegherebbe la forma insolita ed angusta, che la Gran Sirte ha in quei disegni? Tutto sommato, mi sembra che l'esistenza del *Mare di Main* richieda ancora conferma, se non si voglia ridurlo al quasi invisibile Lago Meride, oppure con maggior probabilità alla larga e visibile foce del Nepente, quale io l'ho veduta e disegnata, e che Secchi nel 1858 ha veduto e disegnato

(1) *Annalen der Sternwarte in Leiden,* vol. III, pag. 30.

nello stesso modo. È la seconda e più boreale projezione sinistra del suo « Scorpione ». Con egual fedeltà vi si trova rappresentato il nostro promontorio d'Osiride: la differenza delle direzioni, più che d'altro, è effetto della prospettiva diversa.

Sezione XXIV.

Ausonia, Mare Adriatico, Chersoneso, Euripo.

168. Quella immensa regione, che sotto nome di Ausonia si allunga sul pianeta per più che un quarto della sua circonferenza ha per figura e per disposizione, molta rassomiglianza coll'Ausonia terrestre : e da tale somiglianza è derivato il suo nome e quello dei due mari fra cui si estende. Il suo colore è meno brillante che quello dell'Eridania e dell'Ellade, anzi anche meno che quello della sponda Libica sul Mare Tirreno. È quasi uniforme fino alla piegatura della penisola, dove di contro alla Piccola Sirte s'avanza il Capo Circeo. Di là comincia ad essere sfumato leggerissimamente, poi più oscuro a partire dal meridiano 282°, sotto il quale Ausonia si biforca, inviando un ramo sottile o più breve, l'Enotria, incontro alle spiagge d'Aeria, e delimitando così il Mar Tirreno. L'altro ramo, assai più largo e più lungo, detto Japigia, si spinge lontano verso occidente nel Mare Eritreo, fin di contro all'estremità della Terra di Deucalione. Ma le tinte di questi due rami, oltrepassata la biforcazione, sono già tanto oscure, che finora gli areografi dedicarono al mare lo spazio da loro occupato. La verità è, che questi due rami d'Ausonia hanno i medesimi caratteri che le terre oscure (o se si vuole, sommerse) del Mare Eritreo, ed appartengono alla medesima classe. V'è qui dunque forse del mare, ma se vi è, esso ricuopre terre, che in nessun modo e sotto nessun titolo è lecito separare dal continente d'Ausonia.

169. Questa grande regione, se è facile a vedere per la sua ampiezza, appartiene alle cose più difficili a descrivere con esattezza, a cagione della gran varietà di tinte raccolte nei suoi confini. Nelle prime osservazioni da me fatte, la penisola mi pareva terminata con una breve sfumatura all'incirca sotto il 290° meridiano: così la trovo figurata nei miei disegni del 10 e dell'11 settembre. Però già sotto il 12 settembre (271°) sta scritto « Mi è sembrato per qualche momento, che l'Ausonia non si arrestasse nel punto prima segnato, ma a traverso del mare si prolungasse fino a congiungersi coll'Aeria per una mezza tinta sempre più cupa, che a contatto coll'Aeria poco differisce da quella del Mar Tirreno .... questo è certo, che sul prolungamento della costa Tirrena d'Ausonia verso Aeria sta il limite della tinta oscura del Mar Tirreno ». Ma queste osservazioni furono più tardi revocate in dubbio da altre, ed io rimasi affatto incerto sulla costituzione di questa parte del pianeta fino al 10 ottobre (301°) nel qual giorno scrissi, che « l'Ausonia pareva attaccarsi all'Aeria per un basso fondo, avvolgendosi però col suo lato australe intorno all'Ellade ». E poco dopo (314°) : « Certamente l'Ausonia si allarga in forma di tromba a raggiunger l'Aeria ». Osservazioni, che furono confermate il 12 ottobre (280°) : « Il piede d'Ausonia poggia sulla costa d'Aeria così manifestamente, come prima non mai ». Lo stesso giorno cominciai a sospettare

della biforcazione. Anche il 13 ottobre (298°) « la connessione dell'Ausonia coll'Aeria era della massima evidenza ».

170. Il vero stato delle cose non mi si palesò che il 14 ottobre in un intervallo d'aria veramente stupenda, che mi servì anche a più altre importanti osservazioni. Essendo al centro del disco il meridiano 281°, « finalmente si scioglie l'enigma finora offerto dall'Ausonia inferiore. Essa è divisa in due code o piedi, come nel disegno è indicato (vedi Tav. II, disegno XXV). I rami sono ambidue in mezza tinta. L'intervallo è $\frac{2}{3}$ di tinta, cioè mezza tinta oscura. Nella divisione dei rami vi è un punto nero, o per lo meno un gran rinforzo d'oscurità ». Questo è il nostro punto fondamentale 49. Aggiungerò che il punto nero in questione era vicinissimo alla riva del Mar Tirreno, così che rimase il dubbio, che il ramo dell'Enotria in quel luogo fosse diviso dalla terra principale. Ma per quanto aguzzassi l'occhio, non mi venne fatto nè di confermare, nè di confutare questo dubbio: e dopo il 14 ottobre non ebbi più occasione di riveder questo luogo con sufficiente larghezza di dimensioni. Il 9 novembre « l'attacco di Ausonia con Aeria è visibile, ma non i particolari ». Il 16 novembre « si vede la biforcazione d'Ausonia: tutto è come prima, niente vi è da correggere nei disegni. Immagine squisita, sebbene la piccolezza impedisca d'andare in cerca di novità ». Osservazioni del 21 dicembre, del 28 gennaio e del 5 marzo non fecero che confermare le cose qui esposte, nei limiti concessi dalla piccolezza del disco apparente.

171. Dai disegni fatti il 14 ottobre risulta, che il punto nero collocato nella biforcazione è ben limitato soltanto da tre parti, ma nella direzione d'Aeria se ne parte una specie di coda o striscia sfumata, la quale si prolunga verso occidente, formando, con intensità e precisione sempre decrescente, il lato settentrionale del ramo Japigio. E che nel triangoletto oscuro (*Sinus Deltoton* della carta), compreso fra i due rami d'Ausonia e la costa d'Aeria, l'oscurità è massima lungo la linea o coda sopradetta e va diminuendo a misura che si procede verso settentrione. La sua tinta si perde senza salto in quella più chiara di Enotria, la quale dal canto suo è più luminosa verso il Mar Tirreno, e al suo confine con esso offre un contrasto affatto tagliente colla tinta scura ed uguale di questo mare. L'Enotria forma qui un'elegante curva esattamente parallela al lido opposto di Libia. Il suo attacco con Aeria è molto distinguibile e forma il nostro 55° punto fondamentale. La sua tinta, benchè chiara in confronto del Tirreno, è molto oscura in confronto della brillante regione d'Aeria, specialmente vicino al punto 55°; ne segue che la riva di Aeria forma tanto con l'Enotria, come collo spazio triangolare accennato un contrasto assai vivo, e vi è una separazione di confini affatto decisa. A ciò si aggiunge anzi, che nell'immediato contatto con Aeria tutte quelle dipendenze d'Ausonia crescono d'oscurità e sono poco meno nere, che lo stesso Tirreno. Avviene qui ciò che notammo per l'istmo della penisola oscura di Pirra (§ 95).

172. La Japigia non è così ben terminata come l'Enotria. Poco dopo la separazione i suoi contorni diventan diffusi, e rimpetto al Corno d'Ammone non ve n'ha più traccia decisa. La sua punta offre lo stesso aspetto che la punta della Terra di Deucalione, che le sta di contro. Insensibilmente si perdono l'una e l'altra

formando lo stretto *Scilla e Cariddi*, dove il Mar Eritreo è di color quasi così cupo, come il Golfo Sabeo. Quel nastro scuro, che è formato dal Golfo Sabeo, è parso quindi ad alcuni osservatori piegarsi di contro al Corno d'Ammone, salire verso il sud formando il passo di Scilla e Cariddi, poi ripiegarsi intorno alla penisola di Deucalione. Tuttociò ha dato origine a quella forma serpeggiante ed uncinata, che presso Kaiser (ed anche in qualche disegno di Lockyer) è così distinta, e che alcuno ha denominato « la macchia serpentina ». Kaiser ha dato a questa macchia una forma curiosa e poco naturale: meglio l'indica Lockyer nel suo disco del 25 settembre 1862, 10^h 50^m. Devo tuttavia dire, che di questa macchia o di questo tratto di mare la parte orientale, cioè l'*uncino,* che circonda l'estremo della penisola di Deucalione, e la divide dalla terra Japigia non mi è mai sembrato tanto oscuro, da potersi considerare come faciente una sola cosa con quel veramente oscurissimo nastro, che forma il lato settentrionale del Golfo Sabeo. Il disegno XXV, Tavola II dà press'a poco le giuste proporzioni di tutte queste tinte, come si deve aspettare di vederle quando l'atmosfera di Marte non è turbata da vapori. Ma non nego, che se in qualche momento la penisola di Deucalione si coprisse di bianca nebbia, il contrasto col mare circostante potrebbe facilmente far nascere l'idea di quella forma serpentina che han veduto Kaiser e Lockyer e che trovo pure in un disegno fatto da Knott il 23 settembre 1862 (n. 26 dell'*Areografia* di Terby).

173. Ma per ritornare alla Japigia, devo aggiungere che il suo lato australe, curvandosi concentricamente all'Ellade, lascia sospettare un prolungamento d'Ausonia anche verso quella parte dell'Eritreo, che è fra l'Ellade e la Noachide. Ivi infatti, nel luogo che la carta chiama Ellesponto, dopo essermi invano dibattuto per molte sere onde accertare qualche cosa di definito in quelle località (la Noachide era tuttavia coperta di vapori, che occupavano anche in parte le contigue regioni) il 14 ottobre mi parve di scorgere a destra dell'Ellade un altro pezzo di terra oscura, che però soltanto vagamente potei constatare, e disegnare nel disco XXV (vedi Tav. II). Qualche momento mi è sembrato anche di tracciare una connessione fra questa terra oscura e la Japigia a traverso dell'Adriatico. Osservazioni ulteriori diranno se questa fu illusione. Certamente questo è uno dei luoghi del pianeta più difficili a decifrare per le transizioni impercettibili delle tinte e per la mancanza di definiti contorni, e la difficoltà era ancora accresciuta nell'autunno del 1877 dalla presenza di precipitazioni atmosferiche. Sulla carta ho messo quello che mi è sembrato più probabile. Ma intanto è mio obbligo di dire, che quanto sovr'essa sta compreso fra le longitudini 315° e 30° e fra le latitudini australi 30° e 55° (Ellesponto, Noachide, Argyre orientale) riposa sopra osservazioni incertissime e deve essere con diligenza riveduto nelle future opposizioni.

174. Per completare la descrizione d'Ausonia, resta a parlare della sua parte meridionale-orientale. Dal Capo Circeo, che segna una piegatura nell'asse della penisola, questa sale con larghezza quasi uniforme fino al 40° parallelo. Ad oriente chiude il fondo del Tirreno, e confina coll'Eridania per mezzo dello Xanto. Dalle bocche di questo il lido meridionale monta obliquamente verso il polo lungo il vasto golfo di Prometeo. In tutta quest'ampia zona di terra, che ho potuto osservare benissimo il 14 ottobre, non s'incontra nè canale, nè lago, nè altra interruzione.

175. Ad occidente l'Adriatico segue con curvatura e lunghezza e tinta uniforme l'andamento d'Ausonia. La sua tinta è più pallida che quella del Tirreno, e rassomiglia piuttosto a quella del Mare Cronio. Presso il fondo scava nella terra d'Ausonia un angolo, che ben si potrebbe chiamare un Golfo di Venezia. Ma verso il sud fra l'Ausonia e l'Ellade caccia un canale dapprima larghissimo e visibilissimo, il quale rapidamente poi si restringe e diventa sottilissimo e difficilissimo a vedere al di là del parallelo 52°. Fino al 10 ottobre io aveva sempre chiamato questa parte *Istmo dell' Ellade*, credendo riunite le due terre: ma in quel giorno (305°) cominciai a sospettare una divisione, e il 12 ottobre scoprii lo stretto chiamato Euripo, e finalmente il 14 ottobre (271°) potei con tutta certezza disegnare e l'Euripo e la lunga penisola affilata detta Chersoneso, specie di corno ricurvo, del quale la punta si va poco a poco colorando e perdendo nel fondo del Mare Australe. Altro esempio di terra oscura o sommersa. L'Euripo fu da me ancora distinto il 9 novembre, essendo il disco ridotto a 14″, 3 di diametro.

176. L'Ausonia nella sua parte più chiara, prima della divisione in due rami, è stata veduta da molti osservatori. Nella sua carta del 1830 Maedler la nota distintamente, e ne indica anche i confini lungo ciò che noi chiamiamo Xanto, Golfo di Prometeo ed Euripo. Egli sembra troncarla nei dintorni del Capo Circeo. Dawes la conduce anche meno innanzi di Maedler, e la termina in forma larga, tozza e rotondeggiante, come si vede nella *Terra di Cassini* di Proctor, il quale ha molto più breve di noi l'Adriatico, sotto il nome di *Mare di Zöllner*. Non vi è traccia nè dello Xanto, nè dell'Euripo. In quattro dei suoi dischi Lockyer allunga l'Ausonia al di là del Capo Circeo, e vi sarebbero indizî così dello Xanto, come dell'Euripo: ma in questi disegni la figura varia tanto, che dobbiamo supporre, Lockyer avesse qui davanti a sè non la vera Ausonia, ma una sua immagine meteorica. Tre di quei disegni son fatti nell' intervallo di un'ora e mezzo il giorno 3 ottobre 1862, e non si può certamente spiegarne le differenze con variazioni di prospettiva, senza parlare dei contorni mal definiti, che Ausonia conserva in tutte e tre. Lo stesso pare si debba dire dei disegni di Rosse, 22 luglio, 6 ottobre e 6 novembre 1862; e non meno di quelli di Lassell 29 settembre, 4 novembre e 5 novembre 1862.

177. La stessa causa, congiunta colla frequenza, con cui le nubi di Marte sembrano prediligere le terre oscure sparse nei suoi mari, rende difficilissimo il giudicare le osservazioni di coloro, i quali hanno veduto e figurato la connessione di Ausonia con Aeria. Kaiser ha certamente veduto Ausonia sgombra da nubi il 5 ottobre 1862: quel suo disegno (salvo il prolungamento dell'Adriatico fino al polo australe) coincide assai bene in molte cose colla nostra carta e con quella di Maedler. Ma questo disegno non conduce Ausonia molto al di là del Capo Circeo, sebbene una parte del ramo Japigio possa esservi indicata. Kaiser però ha perfettamente distinto il ramo d' Enotria il 22 novembre 1864; egli ne ha figurato l'attacco con Aeria, ed ha pure descritto l'ombra che riempie il Golfo Triangolare (*Sinus Deltoton*). Non si può immaginare coincidenza più parlante. Il Capo Circeo, una parte del tronco inferiore, e un'altra volta l' Enotria e la sua congiunzione con Aeria stanno nel disco del 28 dicembre 1864, di cui Kaiser si è servito per far questa porzione della sua carta. Altri disegni da lui fatti non presentano che informi masse di nuvole.

178. Anche Franzenau sembra indicare tutta l' Ausonia e l' Enotria nei due disegni del 20 novembre 1864; ma le variazioni che si trovano tra l' uno e l'altro indicano disordini meteorici. La larghezza da lui assegnata al Mar Tirreno pare fuori d' ogni proporzione. Secchi invece non ha l'Enotria: ma dal 13 al 16 giugno 1858 in quattro disegni ha perfettamente ritratto il ramo Japigio, il passo di Scilla e Cariddi, e l' estremo opposto della Terra di Deucalione. Vi è anche una parte del Mare Adriatico, e nei disegni del 14 e del 15 giugno è fortemente annunziato il Capo Circeo.

179. Che le ramificazioni inferiori d' Ausonia siano frequente teatro di variazioni meteoriche è stato già colle sue proprie osservazioni constatato da Lockyer, e coll' aiuto di queste e d' altre dimostrato dal sig. Terby, il quale ha consacrato ad esse un capitolo importante della sua *Areografia* (pag. 51-56). Nello studio ulteriore di questo soggetto converrà saper ben distinguere le strisce chiare o chiaroscure descritte qui sopra, che sono appendici permanenti d'Ausonia, dalle strisce di carattere transitorio; queste ultime possono ben anche esser periodiche, e la facilità di osservarne il passaggio sul fondo oscuro della Gran Sirte, del Golfo Triangolare, e del Mare Eritreo potrà spandere molta luce sulla meteorologia del pianeta. Nelle mie proprie osservazioni del 1877-78 non mi è stato possibile scorgere indizî di strisce o di macchie non permanenti.

Sezione XXV.

Ellade, fiume Alfeo, Ellesponto.

180. Nella concavità che il corso curvo d'Ausonia e del Mare Adriatico forma verso occidente giace l' Ellade, una delle più curiose e stupende formazioni del pianeta. È un' isola rotonda, e lievissimamente allungata nel senso sud-est nord-ovest, di perimetro affatto regolare, il cui diametro non misura meno di 30° del circolo massimo di Marte (poco meno di mille miglia italiane). È circondata quasi per ogni parte dall' Adriatico, dall' Eritreo e dal Mare Australe: soltanto quel breve tratto, per cui (salva la presenza dell' Euripo) sembra aderire ad Ausonia, le toglie il carattere schiettamente insulare di Argyre e delle due gemelle isole di Thyle. Il suo colore è giallo ordinariamente, più brillante agli orli del disco, che quando si trova al meridiano centrale. Talvolta l'ho creduta altrettanto luminosa che Aeria, altre volte assai meno. In una occasione però l' ho osservata tanto bianca e tanto luminosa quanto la calotta polare. Ciò fu il 16 dicembre a 21^h 55^m siderali, e la relativa notizia è questa. « Ellade straordinariamente bianca: coperta di neve? o di nebbia? Macchia polare ben visibile. Sotto, Arabia ed Aeria gialle, molto men chiare dell'Ellade». Il 21 dicembre era ricomparso il primitivo colore e nei giorni seguenti non accadde di constatare altro di nuovo. Anche il 4 marzo trovo scritto: « Ellade assai bianca, che par neve, molto più bianca di Aeria e di Arabia ».

181. Un esame diligente da me fatto dell' Ellade non mi permise per lungo tempo di scoprir nel suo interno altro che una luce pressochè uniforme, che qualche volta pareva un poco più intensa verso gli orli. Ma il 12 ottobre (285°) scoprii ch' essa è divisa nella direzione nord-sud da una sottilissima linea longitudinale che passa quasi esattamente pel suo centro: sulla carta questa è detta fiume Alfeo.

175. Ad occidente l'Adriatico segue con curvatura e lunghezza e tinta uniforme l'andamento d'Ausonia. La sua tinta è più pallida che quella del Tirreno, e rassomiglia piuttosto a quella del Mare Cronio. Presso il fondo scava nella terra d'Ausonia un angolo, che ben si potrebbe chiamare un Golfo di Venezia. Ma verso il sud fra l'Ausonia e l'Ellade caccia un canale dapprima larghissimo e visibilissimo, il quale rapidamente poi si restringe e diventa sottilissimo e difficilissimo a vedere al di là del parallelo 52°. Fino al 10 ottobre io aveva sempre chiamato questa parte *Istmo dell' Ellade,* credendo riunite le due terre: ma in quel giorno (305°) cominciai a sospettare una divisione, e il 12 ottobre scoprii lo stretto chiamato Euripo, e finalmente il 14 ottobre (271°) potei con tutta certezza disegnare e l'Euripo e la lunga penisola affilata detta Chersoneso, specie di corno ricurvo, del quale la punta si va poco a poco colorandó e perdendo nel fondo del Mare Australe. Altro esempio di terra oscura o sommersa. L'Euripo fu da me ancora distinto il 9 novembre, essendo il disco ridotto a 14″, 3 di diametro.

176. L'Ausonia nella sua parte più chiara, prima della divisione in due rami, è stata veduta da molti osservatori. Nella sua carta del 1830 Maedler la nota distintamente, e ne indica anche i confini lungo ciò che noi chiamiamo Xanto, Golfo di Prometeo ed Euripo. Egli sembra troncarla nei dintorni del Capo Circeo. Dawes la conduce anche meno innanzi di Maedler, e la termina in forma larga, tozza e rotondeggiante, come si vede nella *Terra di Cassini* di Proctor, il quale ha molto più breve di noi l'Adriatico, sotto il nome di *Mare di Zöllner.* Non vi è traccia nè dello Xanto, nè dell'Euripo. In quattro dei suoi dischi Lockyer allunga l'Ausonia al di là del Capo Circeo, e vi sarebbero indizî così dello Xanto, come dell'Euripo: ma in questi disegni la figura varia tanto, che dobbiamo supporre, Lockyer avesse qui davanti a sè non la vera Ausonia, ma una sua immagine meteorica. Tre di quei disegni son fatti nell' intervallo di un'ora e mezzo il giorno 3 ottobre 1862, e non si può certamente spiegarne le differenze con variazioni di prospettiva, senza parlare dei contorni mal definiti, che Ausonia conserva in tutte e tre. Lo stesso pare si debba dire dei disegni di Rosse, 22 luglio, 6 ottobre e 6 novembre 1862; e non meno di quelli di Lassell 29 settembre, 4 novembre e 5 novembre 1862.

177. La stessa causa, congiunta colla frequenza, con cui le nubi di Marte sembrano prediligere le terre oscure sparse nei suoi mari, rende difficilissimo il giudicare le osservazioni di coloro, i quali hanno veduto e figurato la connessione di Ausonia con Aeria. Kaiser ha certamente veduto Ausonia sgombra da nubi il 5 ottobre 1862: quel suo disegno (salvo il prolungamento dell'Adriatico fino al polo australe) coincide assai bene in molte cose colla nostra carta e con quella di Maedler. Ma questo disegno non conduce Ausonia molto al di là del Capo Circeo, sebbene una parte del ramo Japigio possa esservi indicata. Kaiser però ha perfettamente distinto il ramo d'Enotria il 22 novembre 1864; egli ne ha figurato l'attacco con Aeria, ed ha pure descritto l'ombra che riempie il Golfo Triangolare (*Sinus Deltoton*). Non si può immaginare coincidenza più parlante. Il Capo Circeo, una parte del tronco inferiore, e un'altra volta l'Enotria e la sua congiunzione con Aeria stanno nel disco del 28 dicembre 1864, di cui Kaiser si è servito per far questa porzione della sua carta. Altri disegni da lui fatti non presentano che informi masse di nuvole.

178. Anche Franzenau sembra indicare tutta l'Ausonia e l'Enotria nei due disegni del 20 novembre 1864; ma le variazioni che si trovano tra l'uno e l'altro indicano disordini meteorici. La larghezza da lui assegnata al Mar Tirreno pare fuori d'ogni proporzione. Secchi invece non ha l'Enotria: ma dal 13 al 16 giugno 1858 in quattro disegni ha perfettamente ritratto il ramo Japigio, il passo di Scilla e Cariddi, e l'estremo opposto della Terra di Deucalione. Vi è anche una parte del Mare Adriatico, e nei disegni del 14 e del 15 giugno è fortemente annunziato il Capo Circeo.

179. Che le ramificazioni inferiori d'Ausonia siano frequente teatro di variazioni meteoriche è stato già colle sue proprie osservazioni constatato da Lockyer, e coll'aiuto di queste e d'altre dimostrato dal sig. Terby, il quale ha consacrato ad esse un capitolo importante della sua *Areografia* (pag. 51-56). Nello studio ulteriore di questo soggetto converrà saper ben distinguere le strisce chiare o chiaroscure descritte qui sopra, che sono appendici permanenti d'Ausonia, dalle strisce di carattere transitorio; queste ultime possono ben anche esser periodiche, e la facilità di osservarne il passaggio sul fondo oscuro della Gran Sirte, del Golfo Triangolare, e del Mare Eritreo potrà spandere molta luce sulla meteorologia del pianeta. Nelle mie proprie osservazioni del 1877-78 non mi è stato possibile scorgere indizî di strisce o di macchie non permanenti.

Sezione XXV.

Ellade, fiume Alfeo, Ellesponto.

180. Nella concavità che il corso curvo d'Ausonia e del Mare Adriatico forma verso occidente giace l'Ellade, una delle più curiose e stupende formazioni del pianeta. È un'isola rotonda, e lievissimamente allungata nel senso sud-est nord-ovest, di perimetro affatto regolare, il cui diametro non misura meno di 30° del circolo massimo di Marte (poco meno di mille miglia italiane). È circondata quasi per ogni parte dall'Adriatico, dall'Eritreo e dal Mare Australe: soltanto quel breve tratto, per cui (salva la presenza dell'Euripo) sembra aderire ad Ausonia, le toglie il carattere schiettamente insulare di Argyre e delle due gemelle isole di Thyle. Il suo colore è giallo ordinariamente, più brillante agli orli del disco, che quando si trova al meridiano centrale. Talvolta l'ho creduta altrettanto luminosa che Aeria, altre volte assai meno. In una occasione però l'ho osservata tanto bianca e tanto luminosa quanto la calotta polare. Ciò fu il 16 dicembre a $21^h\ 55^m$ siderali, e la relativa notizia è questa. « Ellade straordinariamente bianca: coperta di neve? o di nebbia? Macchia polare ben visibile. Sotto, Arabia ed Aeria gialle, molto men chiare dell'Ellade ». Il 21 dicembre era ricomparso il primitivo colore e nei giorni seguenti non accadde di constatare altro di nuovo. Anche il 4 marzo trovo scritto: « Ellade assai bianca, che par neve, molto più bianca di Aeria e di Arabia ».

181. Un esame diligente da me fatto dell'Ellade non mi permise per lungo tempo di scoprir nel suo interno altro che una luce pressochè uniforme, che qualche volta pareva un poco più intensa verso gli orli. Ma il 12 ottobre (285°) scoprii ch'essa è divisa nella direzione nord-sud da una sottilissima linea longitudinale che passa quasi esattamente pel suo centro: sulla carta questa è detta fiume Alfeo.

Durante l'osservazione stimai che detta linea facesse un angolo di circa 10° col circolo massimo condotto dal centro dell' Ellade alla calotta nevosa. Ma riducendo la direzione al meridiano di Marte, si trova che essa vi si sovrappone esattamente. Il suo corso non è geometricamente rettilineo, ma lievemente ondulato: però le ondulaaioni son troppo piccole per produrre una deviazione notabile dalla direzione costante lungo il meridiano. Tutte queste osservazioni furono confermate il 13 e il 14 ottobre. Evidentemente questo è un canale simili a tanti altri che percorrono il pianeta nella direzione di un meridiano. Ma la sua posizione è veramente strana ed inaspettata. In qualche momento mi è sembrato di congetturare un altro canale ancor molto più sottile, che dal punto ove il primo traversa il centro dell' Ellade andrebbe all'Adriatico in direzione di est-nord-est: ma non son riuscito ad assicurarmi in modo soddisfacente della sua esistenza.

182. Quella parte del Mare Eritreo, che giace fra l'Ellade e la Noachide è stata da me denominata Ellesponto quando ancora credeva all' esistenza della Noachide come terra brillante simile all' Ellade. Se, come sembra, è terra oscura (o sommersa?) l'Ellesponto non ha più alcuna ragione di essere fra l' Ellade e la Noachide. Più vicina alla prima mi è sembrato di vedere il 14 ottobre un altro tratto di terra oscura; l'osservazione però è incertissima e non sono in grado neppure di dire, se fosse o no aderente alla sponda dell'Ellade. Vedi sulla sua possibile relazione con Ausonia il § 173.

183. L' Ellade si trova in contatto con quella regione del Mar Eritreo, dove sembra più frequente la produzione di nuvole. Per questa ragione di raro si trova disegnata in tutta la sua integrità ed ampiezza. Sembra inoltre, che per qualche causa non facile a determinare lo stato dell'atmosfera che la circonda abbia una tendenza a disporsi in zone ad essa concentriche. Talora appare al suo centro un nucleo luminoso, ma di essa assai minore, come presso Kaiser (22 novembre e 23 dicembre 1864), Lockyer (3 ottobre 1862), Schmidt (26 settembre 1862, disco n. 8 dell'*Areografia* di Terby), Schröter (20 novembre 1798, disco n. 7 dell'*Areografia* suddetta). Qualche volta intorno a tale nucleo più chiaro si sviluppa una zona concentrica, che tutto e quasi tutto lo circonda: così descrissi io l' Ellade nell' unico disegno di Marte da me fatto nel 1862, e così pure si trova presso Lockyer nell'ultimo suo disegno del 3 ottobre del medesimo anno e sopratutto presso Dawes, nel disco del 26 novembre 1864. Secchi nel 1858 non vide bene dell' Ellade altro che il lembo australe, a cagione della posizione poco favorevole del pianeta in quell'anno. Intiera invece la si trova presso Lassell (5 novembre 1862) e Knott (3 novembre 1862, n. 9 dell'*Areografia* di Terby). Schmidt la figurò pure ottimamente in Atene il 19 settembre 1862 come si vede dal disegno pubblicato da Klein nel primo volume della sua *Descrizione del Cielo* (¹). Forse l'orlo sfumato è qui da attribuire a nebbia diffusa tutt' intorno. Questo disegno lascia pure travedere il ramo Japigio d'Ausonia, e l'Ausonia stessa, o più probabilmente una sua immagine meteorica. Maedler nel 1830 non vide chiaramente dell'Ellade che la metà inferiore, ma tuttavia ne congetturò esattamente la forma come si vede dalla prima edizione della sua carta. Nella

(¹) *Handbuch der allgemeinen Himmelsbeschreibung*. Braunschweig, 1869.

carta di Proctor la figura dell' Ellade (*Lockyer's Land*) sembra desunta dal disegno sopra accennato di Dawes, ed è quindi troppo piccola. Anche per la posizione sfavorevole che ebbe l'Ellade nel 1864 la parte australe di questa terra è segnata solamente per via di congettura ed attaccata ad un continente polare, che la carta di Proctor suppone esistere tutt' intorno al polo australe.

184. Dell'esistenza dell'Alfeo non ho potuto trovare conferma presso alcun osservatore. Solo fra tutti, Knott nel suo citato disco del 3 novembre 1862 mette attraverso all'Ellade due strie oscure parallele ad angolo di 45° circa col meridiano. Ma nè l'una, nè l'altra permette la più lontana comparazione col fiume Alfeo.

Sezione XXVI.

Mar Polare Australe.

185. Se noi facciamo astrazione dalle due isole di Thyle, la calotta polare di Marte limitata dal 60° parallelo di latitudine australe è intieramente coperta dal mare, il quale in alcune direzioni si estende anche un poco più lontano dal polo sud del pianeta. L'opposizione del 1877 fu estremamente favorevole per l'esame di questa parte: l'asse era inclinato, in ottobre, di soli 65° sulla linea visuale, così che tutta la massa delle nevi rimase sempre in vista, ed in certe configurazioni appariva notabilmente addentrata nel disco e circondata per ogni verso da spazî oscuri. Inoltre a partir dal principio di ottobre si può dire aver dominato in quei luoghi una serenità completa, in grazia della quale più d'una volta (specialmente il 2 ottobre, il 21 ottobre, il 17 novembre e l'11 dicembre) ho veduto salire il mare senza interruzione sino alla macchia delle nevi, rimanendo anche un poco più oscuro nelle vicinanze di queste, forse per effetto di contrasto. Se esiste in questo tratto qualche isola, certo dev'esser molto minore di Argyre e delle due gemelle isole di Thyle: altrimenti non avrebbe mancato di prodursi brillante agli orli del disco come quelle tre isole, ed anche l'Ellade han sempre fatto. Regioni più estese non potrei ammettere in tale tratto, che o sepolte sotto la neve polare (?) o sotto forma di terre oscure (bassi fondi?) simili alla Noachide. Forse una simile regione (o un mare poco profondo?) esiste fra Thyle I, Argyre e Thaumasia: perchè quella parte del Mare Australe al largo del Golfo Aonio, oltrepassata una certa distanza dalle coste, mi è sempre parsa di una tinta meno cupa che tutti gli altri mari di Marte da me veduti, senza eccezione. Può anche darsi che questo colore meno cupo sia connesso soltanto colla latitudine, come diremo più tardi. Ma per quanto abbia esaminato quel luogo, non ho mai potuto riconoscere traccia di contorni anche debolmente indicati, che possano riferirsi a terre di qualunque colore. Solamente ho visto l'ombra che circonda le coste circostanti farsi sempre più pallida a misura che si andava lontano dalle medesime. Nelle altre parti il Mar Australe mi parve sempre di un colore fra il rosso mattone e l'olivastro, poco dissimile da quello dell'Adriatico.

186. Queste mie osservazioni sono intieramente confermate da quelle quasi contemporanee del sig. John Brett (1), il quale con un riflettore di 9 pollici avendo

(1) *Monthly notices of the Royal Astronomical Society*, dec. 1877, vol. XXXVIII pag. 60.

particolarmente esaminato questo punto, così decide in proposito: « The south polar patch now in wiew is surrounded with a dark stain, and this darkness is on one side continuous with the so called sea, and of equal darkness with it. There is no break or barrier in the straits which join the polar dark patch to the equatoreal dark patch. Therefore, if there be snow, it is lying on the sea, or on a polar island ». L'aver veduto la neve polare circondata dal mare solamente da una parte dipende da questo, che il sig. Brett, avendo cessato le sue osservazioni coll'8 ottobre non giunse a vedere le isole di Thyle separate dalla calotta nevosa; separazione, la quale anche a me non divenne affatto manifesta che nei giorni 20 e 21 ottobre, quando riconobbi nettamente la spiaggia australe delle due isole di Thyle, e il tratto di mar polare ad esse sovrastante.

187. Nelle opposizioni precedenti sembra che questa parte del pianeta sia stata sempre più o meno velata da nuvole o da nebbie, come è da aspettarsi in tali latitudini. Maedler nel 1830 sembra non vedesse di scoperto che tre strisce divergenti dal polo, da lui designate colle lettere x, y, t. Esse corrispondono sufficientemente bene alle bocche del Golfo di Prometeo, dell'Ellesponto e del Bosforo gemmato nel Mar Polare. Libero era pure il Golfo Aonio, corrispondente alle bocche del Fasi e alle Colonne d'Ercole. Ma il resto nella carta di Maedler è bianco, cioè coperto di nubi. Eppure l'opposizione del 1830 ha avuto luogo in condizioni astronomiche e climatologiche (parlo del clima di Marte) quasi identiche a quelle dell'opposizione del 1877. Due altre opposizioni, quelle del 1845 e del 1847 sarebbero state molto favorevoli per ripetere tali osservazioni: i pochi disegni che si fecero in quegli anni pare siano rimasti inediti.

188. Nel 1862 si ebbe di nuovo una vista assai favorevole per le regioni polari di Marte, in circostanze simili a quelle del 1830 e del 1877. Intorno alla neve polare quasi tutti gli osservatori si accordano a mettere un anello oscuro: anello che Proctor portò sulla sua carta col nome di *Mare di Phillips*. La corona nebulosa che segue intorno a questo anello è presso Kaiser aperta in quattro luoghi corrispondenti al Golfo di Prometeo, all'Ellesponto, al Bosforo Gemmato, ed al Golfo Aonio: così almeno risulta dai disegni, coi quali non si accorda sempre la carta. Di tali aperture (che a capello coincidono colle strisce oscure di Maedler) solo la seconda e la terza sono visibili con precisione nei disegni di Lockyer (specialmente in quelli del 23 settembre 1862) e in quelli di Lassell (22, 24, 25, 27 settembre 1862). La seconda e la quarta sono ben indicate presso Phillips, specialmente la seconda, corrispondente all'Ellesponto. Questa è pure indicata da Knott nel già citato disco del 3 novembre 1862 e da Schmidt nel disegno del 19 settembre, pubblicato da Klein (1).

189. Per quanto concerne la corona annulare di terre, che sulla carta di Proctor circonda il *Mare di Phillips*, si può ben affermare ch'essa non esiste, almeno sotto questa forma di zona continua. Abbiam veduto bensì che esistono in qualche modo le regioni chiamate da Proctor, *Terra di Lockyer, di Cassini, di Burckhardt, di Kepler, di Kunowski:* ma niuna di esse giunge al 75° parallelo, come indicherebbe la sua carta. *L'Oceano de la Rue* (parte dell'Eritreo) non è chiuso verso il sud da altra terra che dall'*isola nevosa di Dawes* (Argyre), e dalla Noachide. Anche il *Mare di Lambert* (Ellesponto?) è sicuramente aperto verso il polo.

(1) Vedi qui sopra § 183.

Sezione XXVII.

Considerazioni generali sui risultamenti ottenuti nello studio comparativo precedente.

190. La comparazione che nel corso di questo capitolo III si è fatta coi lavori di antecedenti Astronomi non solo ha servito a rischiarare molte volte la natura delle loro e delle mie osservazioni, ma ha procurato l'inestimabile vantaggio di una verificazione parziale preventiva di molti risultati non prima conosciuti. Molte configurazioni, che nella mia carta, superficialmente giudicando, apparirebbero nuove, risultarono invece già descritte da tempo più o meno lungo, con maggiore o minor evidenza: e molte particolarità dei disegni anteriori, delle quali era impossibile o difficile assegnare il vero significato, si trovarono in modo plausibile dichiarate dalle mie osservazioni. In questa mutua confermazione di risultati, più che nella scoperta di nuove particolarità, sta a mio avviso quel grado di utilità, che si può attribuire a questo nostro saggio areografico. Molte cose si conoscevano, ma non eravamo certi di conoscerle, ed ora invece lo siamo. Una ricapitolazione rapida dei punti, che si possa ritenere come sufficientemente accertati, potrà servire d'illustrazione a quanto ho detto.

191. Maedler dunque, benchè armato soltanto di un piccolo cannocchiale di Fraunhofer di 4 ½ piedi di foco, non solo ha riconosciuto e molto esattamente delineato i principali tratti della superficie dell'emisfero australe e delle regioni equatoriali: ma vi ha segnato oggetti, la cui osservazione indica e nell'istrumento una gran precisione e nell'occhio dell'osservatore un'acutezza non comune. Il Golfo Sabeo, l'istmo della Terra di Deucalione, il Golfo della Perle, il Golfo dell'Aurora, l'Agatodemone e il Lago del Sole, il Mare Cronio, la vera figura d'Esperia e l'ombra che ne occupa la parte più angusta: la Piccola Sirte, la giusta disposizione del Mar Tirreno, d'Ausonia, del Mare Adriatico e dell'Ellade: da ultimo il Lago Tritone, il Nilo a settentrione di Chryse, sono scoperte che gli appartengono. Egli ha esattissimamente tracciato una parte dell'Oceano e ha indicato sui suoi disegni più volte la separazione del Mare delle Sirene dal Mare Cimmerio, accennando così all'esistenza dell'Atlantide I.

192. Secchi nel 1858 ha potuto meno bene (a cagione dell'inclinazione dell'asse) esaminare la regione principalmente da me studiata: i suoi disegni sono più specialmente utili per lo studio della zona torrida e dell'emisfero boreale del pianeta. Nondimeno vi troviamo, oltre ai Golfi Sabeo, delle Perle e dell'Aurora, già veduti da Maedler, il corso del Gange: la parte inferiore d'Ausonia col Capo Circeo: il promontorio d'Osiride: la bocca del Nepente nel Nilo: il fiume dei Ciclopi e l'Eunosto. La penisola di Esperia gli parve troncata a causa della sua ombra. Secchi ha pure ben descritto il contorno settentrionale dell'Ellade.

193. Gli splendidi disegni di Lockyer (1862) sono specialmente istruttivi per le notizie che danno sulla meteorologia del pianeta, il quale in parecchi di essi è variamente offuscato da nuvole. Ciò malgrado dobbiamo ad essi la prima notizia o la conferma di molti punti della topografia di Marte. La vera figura della penisola di Deucalione: la penisola di Pirra: la bocca dell'Idaspe e il capo degli Aromi: Thaumasia nel suo completo contorno: il Golfo Aonio e le Colonne di Ercole: Atlantide I

accordo colla generalità degli altri osservatori, forse per qualche condizione speciale del pianeta nel 1864, o per qualche altra causa sconosciuta. Queste discordanze si trovano naturalmente anche trasportate nella carta di Proctor, dove inoltre se ne aggiungono altre provenienti dall'inesatta orientazione assunta per quei disegni, o da interpretazione non giusta dei medesimi. Così nella carta per esempio troviamo intieramente soppresso il Mare delle Sirene, che nella sua integrità e in forma sufficientemente prossima al vero si trova delineato da Dawes nel disco del 3 novembre 1864: ed è ignorata intieramente l'Atlantide I[a], che pure Dawes nello stesso disco ha indicato nella sua vera giacitura e posizione. Da questo errore nacque l'altro di assegnare alla *Terra di Burckhardt* (Esperia) e ai due mari contigui una disposizione che non hanno, spingendoli fin quasi al 60° parallelo australe. Il *Passo di Bessel* secondo lo stesso Dawes (disco del 3 novembre 1864) termina appena 20° più basso di ciò che la carta chiama *Mare di Dawes* e quindi in ogni caso non più basso del 10° parallelo nord: Proctor invece spinge la *Bessel's Inlet* fino al 35° parallelo boreale, dandole così una lunghezza di 85° o di 90° dal sud al nord, invece di 25° o 30° che al più dovrebbero essere. Tutte le latitudini australi da 30° in su sono stranamente esagerate: nelle regioni polari poi quasi tutto è fantastico. Per tutte queste ragioni la carta di Proctor non solo è di gran lunga inferiore a quelle di Maedler e di Kaiser, ma non rappresenta neppure esattamente le osservazioni dello stesso Dawes. Esso tuttavia ha avuto il non piccolo merito di spandere nel pubblico molte giuste notizie sulla costituzione fisica del pianeta Marte, e d'interessare molte persone ai problemi dell'Areografia.

200. Non devo chiudere questi cenni sulle carte areografiche senza parlare dell'*Aréographie* del signor Terby, non foss'altro che per render giustizia ad un'opera di cui tanto mi sono giovato ad ogni passo. Terby non ha composto alcuna carta nuova: egli ha raccolto tutte o quasi tutte le osservazioni areografiche fatte prima del 1874, classificandole secondo le regioni del pianeta: le ha comparate fra di loro, ed ha posto in evidenza ciò che da esse emerge di sicuro, ciò che è ancora dubbio, e le quistioni che restano ancora a risolversi. L'industria e la coscienza e l'acutezza da lui impiegate in questo lavoro sono troppo evidenti, e non hanno bisogno de'miei elogi. Forse col prendere a base la carta di Maedler, o quella di Kaiser, invece che quella di Proctor, il lavoro sarebbe stato più facile, e varie questioni si sarebbero sciolte da sè. Ma la maggior difficoltà vinta, non che detrarre, cresce pregio a questo lavoro, che per molto tempo sarà la fonte principale a cui gli areografi dovranno attingere per comparare le loro alle antiche osservazioni.

Capitolo IV.

Osservazioni, deduzioni, e congetture sopra la natura della superficie del pianeta e della sua atmosfera.

Sezione I.

Luogo della calotta polare australe osservato in diverse opposizioni.

201. *Osservazioni di Bessel nell' opposizione del* 1830. Per questa opposizione noi abbiamo nella sezione XXIII degli *Annali astronomici di Königsberga* (pag. 94 e 95) dodici osservazioni fatte da Bessel col celebre eliometro di Fraunhofer, che danno, oltre ai diametri polare ed equatoriale del pianeta, anche la posizione della macchia polare. Oudemans nel n. 838 delle *Astronomische Nachrichten* ha già pubblicato i risultati di queste osservazioni nell' intento di determinare la direzione dell' asse rotatorio del pianeta. Della macchia polare australe egli dà però soltanto la latitudine areografica. Non ho creduto inopportuno di rifare questo calcolo, onde avere il luogo completo. Il metodo da me seguìto è questa volta sostanzialmente identico a quello praticato da Oudemans e da Kaiser nella risoluzione dello stesso problema. Se dal centro C del disco apparente di Marte (fig. 9) si conduce il raggio CNL passante per la macchia nevosa N, la projezione di questo raggio, durante un giro intiero di N sul suo parallelo HK farà sul disco una oscillazione di andata e di ritorno fra i limiti estremi CX CY, ed è manifesto, che la legge di quest' oscillazione nel caso presente sarà pochissimo diversa da quella dei moti vibratorî: cioè detta λ' la semi-amplitudine $XS = SY$, si potrà assumere che sia $LS = \lambda' \sin CPN$. Sia O il punto del globo di Marte che serve di origine alle longitudini contate come noi sogliamo fare, nel senso della saetta: l' angolo sferico OPC sarà la longitudine areografica del centro del disco (cioè ω) nell' istante dell' osservazione. La longitudine areografica della macchia nevosa sarà poi $OPN = \theta$. E però avremo $CPN = \omega - \theta$. Sia p l'angolo di posizione del diametro CPS contato al modo solito da R per Y verso S; e sia P l'angolo di posizione della macchia nevosa: sarà manifestamente $P = p + LS$, ossia

$$P = p + \lambda' \sin(\omega - \theta).$$

L'angolo P è dato dall' osservazione: quanto a p, esso è uguale al p_1 corrispondente calcolato coll' aiuto delle effemeridi e accresciuto d' una correzione dp che si deve determinare: l' equazione di condizione prenderà la forma

$$P - p_1 = dp + \lambda' \cos\theta . \sin\omega - \lambda' \sin\theta . \cos\omega$$

e le tre incognite del problema saranno dp, $\lambda' \cos\theta$, e $\lambda' \sin\theta$, a determinare le quali si avranno tante equazioni, quante sono le osservazioni disponibili fatte su P. Nella tavoletta che segue stanno gli elementi del calcolo. La prima colonna contiene la data delle osservazioni, la seconda il tempo siderale di Königsberga, la terza il tempo

medio corrispondente al meridiano di Berlino, corretto per la successiva propagazione della luce. Nella quarta colonna stanno le longitudini areografiche del centro del disco corrispondenti agli istanti delle osservazioni [1]. La quinta dà gli angoli di posizione della macchia nevosa osservati da Bessel. La sesta dà i valori di p_1 calcolati coi luoghi di Marte che stanno nel *Berliner Jahrbuch* di Encke pel 1830, ed usando la posizione dell'asse di Marte stabilita da Oudemans. Nella settima si ha il $P - p_1$ della nostra formula, e nell'ultima gli errori che restano dopo aver sostituito nelle equazioni i valori più probabili delle incognite.

Data 1830	Tempo sid. Königsb.	T. medio di Berlino corretto per l'aberrazione	Long. del centro del disco ω	P osservato	p_1	$P-p_1$	ε
agosto 30	23h.20m	ag. 30, 5097	130°,7	162°.16′	150°.13′	(+12°. 3′)	(+5°,47)
sett. 7	22. 55	sett. 7, 4705	45, 9	157. 21	151. 3	+ 6. 18	+3, 54
— 19	24. 0	— 19, 4825	303, 9	148. 20	152. 46	— 4. 26	+2, 79
— 21	23. 30	— 21, 4562	276, 9	147. 34	153. 4	— 5. 30	+1, 66
— 22	22. 49	— 22, 4252	257, 2	146. 16	153. 13	— 6. 57	—0, 82
ottob. 2	22. 35	ott. 2, 3880	155, 5	158. 53	154. 35	+ 4. 18	—0, 67
— 3	22. 50	— 3, 3957	149, 4	160. 26	154. 42	+ 5. 44	+0, 26
— 12	23. 56	— 12, 4167	77, 0	159. 14	155. 26	+ 3. 48	—1, 92
— 14	23. 21	— 14, 3867	48, 7	157. 41	155. 32	+ 2. 9	—0, 93
— 15	23. 5	— 15, 3730	35, 2	158. 51	155. 35	+ 3. 16	+1, 78
— 20	22. 19	— 20, 3273	334, 5	147. 40	155. 37	— 7. 57	—2, 49
— 21	23. 11	— 21, 3600	337, 5	147. 13	155. 37	— 8. 24	—3, 20

Uno sguardo dato ai $P - p_1$ mostra, che il primo di essi deve essere affetto da un errore considerevole: io l'ho escluso dal calcolo, il quale così è fondato sopra sole 11 equazioni. Risolvendole col metodo dei minimi quadrati e dando a tutte il peso 1, si ricava

$$dp = -0°,20 \pm 0°,54$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda' \sin\theta = +2,64 \pm 0,79 \\ \lambda' \cos\theta = +6,68 \pm 0,69\end{array}\right\} \text{ e quindi } \left\{\begin{array}{l}\lambda' = 7°,18 \pm 0°,71 \\ \theta = 21°,55 \pm 5°,70.\end{array}\right.$$

L'error probabile di un P osservato risulta $\pm 1°,66$; l'equazione trascurata lascia l'errore $+5°,47$, il quale veramente è alquanto fuori della comune probabilità.

202. Questi risultati si accordano benissimo con altre osservazioni. Il 7 settembre Bessel durante le misure ha veduto la macchia polare projettarsi tutta sul disco. Ed infatti al tempo segnato essendo $\omega = 45°,9$, la macchia nevosa aveva oltrepassato il meridiano centrale di soli 24°,35. Ancora un'altra volta Bessel vide la macchia tutta sul disco e fu il 15 ottobre: allora si aveva $\omega = 35°,2$, e la neve aveva oltrepassato il meridiano centrale di non più che 13°,65. Finalmente il dì 29 settembre 1830 a 23^h 20^m siderali di Königsberga la macchia fu invisibile a Bessel per la troppa obliquità della vista. Calcolando si trova, che in quel momento $\omega = 196°,8$: la macchia aveva oltrepassato il meridiano centrale di 175°,25, cioè non mancavano

(1) Per fissare l'epoca di queste longitudini mi son servito di sei passaggi del vertice d'Aryn al meridiano centrale osservati da Maedler nello stesso anno 1830 e riportati da Kaiser nel volume III delle *Osservazioni di Leyda*, pag. 66, colonna B. Le longitudini ω così calcolate furono verificate coll'aiuto dei disegni fatte dal medesimo Maedler nella stessa opposizione ed in ogni caso trovate concordanti.

ad essa che 4°,75 per giungere al meridiano *opposto* al meridiano centrale, e al punto della minima visibilità.

203. Anche i disegni fatti da Maedler nella medesima opposizione confermano quanto si è qui sopra dedotto dalle misure di Bessel. I disegni del 1830 pubblicati nel volume VIII delle *Astronomische Nachrichten* danno della calotta nevosa un' indicazione soltanto schematica: ma consultando l'edizione dei medesimi disegni data nei *Beiträge,* dove alla calotta polare sembra sia stata posta maggior diligenza, si troverà che due soli disegni hanno la macchia sotto figura di ellisse intiera, e suppongono quindi una obliquità minore che negli altri casi. Questi disegni corrispondono ad $\omega = 42°,1$ e ad $\omega = 25°,2$. Nella prima osservazione la macchia aveva passato il meridiano centrale di 20°,55, nella seconda di soli 3°,65. La confermazione è dunque quanto si può completa, per quanto riguarda la longitudine θ della macchia nevosa.

204. Rispetto alla distanza polare notiamo, che il valore di λ' qui sopra calcolato dà la grandezza dell'escursione XS (fig. 9), non già la distanza PN fra il polo di Marte e il centro della macchia polare. Si avrà quest'ultima distanza con sufficiente approssimazione, moltiplicando XS pel seno dell'arco CP, che misura l'inclinazione dell'asse di Marte rispetto alla linea visuale. Quest'arco CP il giorno 19 settembre 1830 (in cui ebbe luogo l'opposizione) importava 66°,6. Se ne conclude $PN = 6°,59$: e così le coordinate definitive della macchia polare australe per l'opposizione del 1830 risulteranno dalle osservazioni di Bessel come segue:

$$\theta = 21°,55 \pm 5°,70 \qquad \lambda = 6°,59 \pm 0°,66.$$

205. *Osservazioni di Kaiser nell' opposizione del* 1862. Una serie di 12 osservazioni fatte da Kaiser nel 1862 coll'intento di determinare la posizione dell'asse di Marte e il luogo areografico della neve australe è stata da Kaiser medesimo calcolata e pubblicata nel vol. III degli *Annali dell' Osservatorio di Leyda* p. 83,84. Secondo questo Astronomo la distanza polare della macchia nevosa nel 1862 sarebbe stata 4°,26: la longitudine della medesima, ridotta al nostro modo di contare, 166°,53. Ma nel suo calcolo è incorso un errore di segno, in conseguenza del quale la longitudine è stata mutata di 180° [1]. I veri risultati delle osservazioni di Kaiser sono

$$\lambda = 4°,26 \qquad \theta = 346°,53.$$

Che la cosa sia veramente così come ho detto, e che la macchia nevosa nel 1862

(1) È quanto risulta dal diretto esame del calcolo di Kaiser. Dopo di aver ridotto tutte le posizioni da lui misurate al 31,00 ottobre t. m. di Leyda, Kaiser le rappresenta colla formula

$$P = 150°,01 - 4°,26 \sin(d - 77°,73)$$

ove d è quello ch' egli chiama *Erdwinkel* della macchia da lui designata con d (Lago del Sole), ed è insomma l'angolo percorso da questa macchia rispetto al meridiano centrale a partire dal suo ultimo passaggio per questo meridiano (Vedine la dichiarazione a pag. 36 dello stesso vol. III degli *Annali di Leyda*). Tra questo d e il nostro ω vi è la relazione $d = \omega - 88°,8$. Surrogandone il valore nella formula precedente, essa diventa

$$P = 150°,01 - 4°,26 \sin(\omega - 166°,53)$$

formula che dà il minimo valore di P per $\omega = 256°,53$. Ora una semplice riflessione sulle condizioni del problema dimostra, che quando P è minimo, la neve si trova alla sua massima digressione orientale, e che le mancano 90° per arrivare al meridiano centrale. La neve dunque giungeva a questo meridiano, quando $\omega = 256°,53 + 90° = 346°,53$: e tale era dunque la sua longitudine areografica nel 1862, stando alle osservazioni di Kaiser.

fosse realmente dalla parte del vertice d'Aryn e del Mare Eritreo, non dalla parte opposta, si vede dai disegni dello stesso Kaiser, dei quali tre hanno la macchia tutta sul disco, cioè quelli del 24 ottobre, del 23 novembre, e del 14 dicembre 1862, fatti quando ω era uguale a 88°,4, 55°,8, e — 89°,9 rispettivamente: dei quali valori il medio è 24°,8, più prossimo a 346°,53 (ovvero a — 13°,17), che a 166°,53. Del resto gli errori delle osservazioni di Kaiser fra $\omega = 340°$ e $\omega = 90°$ sono molto forti, e l'esattezza probabile del suo risultato non sembra molto grande.

206. *Osservazioni di Lockyer nell'opposizione del* 1862. Nella sua Memoria sulla opposizione del 1862 (1) Lockyer ha potuto constatare dalla discussione dei suoi disegni, che la macchia nevosa polare aveva una eccentricità notabile rispetto al polo, deviando da questo in una direzione poco diversa dal meridiano di longitudine 20°. Lockyer conta le longitudini nel modo da noi usato. Quanto alla distanza della neve dal polo, egli l'ha stimata di pochi gradi, senza indicare precisamente quanti fossero.

207. *Osservazioni di Linsser nell'opposizione del* 1862. Il mio amico di cara memoria Carlo Linsser eseguì a Pulkova nel 1862 27 disegni di Marte coll'aiuto di un cannocchiale di 5 piedi di foco (che credo fosse di Fraunhofer), e da essi ricavò alcune deduzioni circa la rotazione di Marte e la natura delle sue macchie. Di questo lavoro nessun ricordo è stato pubblicato, fuorchè un breve articoletto nel giornale settimanale di Heis (2). Ivi Linsser dice che durante il 1862 la macchia polare si trovò nella latitudine areografica australe di 70°, e nel meridiano, che sta 30° ad occidente del primo meridiano di Maedler (o del vertice d'Aryn). Per quanto concerne la longitudine mi sembra chiaro che l'espressione ad *occidente* deve intendersi rispetto ad un osservatore collocato in Marte e non rispetto all'osservatore terrestre. Infatti in due o tre altri luoghi di quell'articolo Linsser intende sempre l'oriente e l'occidente nel modo che appare stando sulla superficie del pianeta. Secondo le sue osservazioni nel 1862 si aveva dunque $\theta = 30°$. Riguardo alla latitudine di 70°, io non vi posso scorgere altro, che con *lapsus calami*. Una distanza polare di 20° si sarebbe manifestata nella macchia con diversità di aspetto ben più grandi di quelle che furono vedute da tutti gli osservatori e dal medesimo Linsser.

208. *Osservazioni di Hall nell'opposizione del* 1877. Recentissimamente nel n. 2174 delle *Astronomische Nachrichten* il professore Asaph Hall, da 34 osservazioni di posizione della macchia polare fatte col gigantesco equatoriale di Washington, ha dedotto le coordinate della medesima. Egli assegna, per l'epoca 1877 settembre 17,00 t. m. di Greenwich, la posizione della macchia (numerata rispetto al polo australe nel piano parallelo all'equatore?) in 311°,40. Questo risultato sembra indicare, che la macchia polare in quel momento dovesse aver oltrepassato il meridiano centrale di 48°,60. Ora nel medesimo momento la longitudine areografica del centro del disco era, secondo l'effemeride di Marth, di 69°,26: cioè di tanto il vertice d'Aryn aveva oltrepassato il meridiano centrale. Ne segue, secondo il nostro modo di contare, la longitudine $\theta = 69°,26 - 48°,60 = 20°,66$. L'error probabile di questo dato è $\pm 3°,6$ secondo Hall. La distanza polare della macchia nevosa era, secondo il medesimo

(1) *Mem. of the R. Astr. Society*, vol. XXXII, p. 187.
(2) *Wochenschrift für Astronomie* 1864, p. 117-120.

osservatore, $\lambda = 5°,11 \pm 0°,3$. Questi risultamenti a dir vero non s'accordano coi nostri, contemporaneamente ottenuti, entro i limiti degli errori probabili, ma tuttavia la differenza, considerata la difficoltà delle osservazioni, e il diverso modo tenuto nel determinare gli angoli di posizione (1), si può riguardare come molto piccola. La distanza fra le due posizioni del centro della macchia nevata da lui e da me assegnate non è che di 1°,31 del circolo massimo del pianeta, ossia di 42 miglia italiane. Anche quando Marte è nella massima vicinanza, tale intervallo non arriva a sottendere 0",3 nell' occhio dell' osservatore.

209. *Comparazione di tutti i risultati precedenti e conclusione.* Il quadro che segue dà il modo di paragonare fra loro tutti i risultamenti fin qui citati e discussi.

1830	Bessel	$\theta = 21°,55$	$\lambda = 6°,59$
1862	Kaiser	— 13, 47	4, 26
	Lockyer	20	—
	Linsser	30	—
1877	Hall	20, 66	5, 11
	Schiaparelli	29, 47	6, 15

Prendendo i valori medî di θ e di λ per ciascuna opposizione si ottiene

1830	$\theta = 21°,55$	$\lambda = 6°,59$
1862	15, 51	4, 26
1877	25, 06	5, 63

e sembra derivarne con grande probabilità la conclusione già presentita da Linsser nel suo lavoro sopra citato: *Nei diversi solstizî meridionali di Marte la macchia polare australe, quando è ridotta alle minime dimensioni, occupa sempre press' a poco sul pianeta il medesimo luogo.* Questo luogo dista dal polo cinque o sei gradi nella direzione del mezzo del Mare Eritreo. E consultando la carta dell' emisfero australe in projezione polare che è annessa a questo scritto, si noterà che la deviazione dal polo avvicina la macchia al centro del grande bacino del Mare Australe, scostandola dalle isole di Thyle, a cui, se tal deviazione non fosse, la neve quasi verrebbe ad addossarsi. Tale fatto probabilmente non è accidentale, e sembra accennare ad un' influenza sfavorevole, che la prossimità delle terre eserciterebbe sulla formazione e sull' estensione della macchia polare.

Sezione II.

Variazioni di grandezza della macchia polare australe.

210. Le osservazioni esatte sulla grandezza della macchia polare australe da me eseguite si estendono dal 23 agosto al 4 novembre 1877. Durante tutto questo intervallo nessun punto della macchia giunse mai a toccare il circolo terminatore o l'orlo del disco, e la macchia si è sempre tutta intiera projettata su quello. Con un telescopio perfetto e in buone condizioni d' aria si avrebbe dunque dovuto sempre vedere un filetto colorato fra la macchia bianca e il limite vicino del lembo. Questo

(1) Vedi il citato luogo delle *Astronomische Nachrichten.*

per noi generalmente non avvenne fino a tutto il 26 settembre; quel filetto (la cui grossezza non superava generalmente una piccola frazione di secondo) essendo obliterato sia dalla confusione delle immagini (che in quel tempo di raro furono ottime) sia dalla diffusione inevitabile nel contorno brillante della neve, e forse anche da qualche traccia di dispersione prodotta dal rifrangersi dei raggi luminosi nell'atmosfera. Che che ne sia, negli ultimi giorni di settembre e durante tutto l'ottobre, la neve essendo diminuita di larghezza, e lo stato delle immagini essendo diventato assai migliore, quel filetto colorato diventò più cospicuo, e si vide sempre la neve distaccata dall'orlo, e tutta projettata nell'interno del disco. Distaccata poi che fosse o no, dal calcolo e dalle misure risulta che essa fu sempre tutta visibile e quindi le stime della sua grandezza non soffrono per questo lato veruna eccezione.

211. La tavoletta seguente mostra con qual grado di progressione andò mutando l'ampiezza della neve australe durante il citato intervallo. La prima colonna indica la data, la seconda i giorni trascorsi a partire dal solstizio australe di Marte (che avvenne il 18 settembre), la terza il diametro della neve in gradi del circolo massimo di Marte per tutto il tempo in cui questa apparve approssimativamente circolare (ellittica nella prospettiva): a partire dal 26 settembre la figura avendo mostrato deviazioni sensibili dalla rotondità fu sostituito al diametro della neve il diametro del circolo di area equivalente. Questi numeri furono desunti da misure prese sui disegni eseguiti e naturalmente non possono essere di molta precisione; inoltre la possibilità di errori sistematici di stima non rimane esclusa. Tuttavia il decremento è avvenuto in proporzioni così enormi, da non lasciar alcun dubbio sulle verità del fatto.

Variazioni della neve australe di Marte nel 1877.

Data 1877		Dal solstizio australe giorni	Diametro della neve australe	Data 1877		Dal solstizio australe giorni	Diametro della neve australe
agosto	23	— 26	28°,6	settembre	20	+ 2	18°,5
»	28	— 21	23, 9	»	22	+ 4	14, 7
settembre	3	— 15	26, 0	»	24	+ 6	13, 8
»	10	— 8	23, 9	»	25	+ 7	11, 5
»	10	— 8	18, 5	»	26	+ 8	11, 5
»	11	— 7	20, 2	»	30	+ 12	12, 5
»	12	— 6	17, 4	ottobre	1	+ 13	13, 7
»	13	— 5	16, 9	»	2	+ 14	11, 8
»	14	— 4	17, 4	»	4	+ 16	12, 7
»	15	— 3	14, 1	»	10	+ 22	10, 4
»	15	— 3	16, 1	»	12	+ 24	9, 5
»	16	— 2	16, 1	»	13	+ 25	9, 3
»	18	± 0	19, 1	»	14	+ 26	7, 6
				»	27	+ 39	7, 0
				novembre	4	+ 47	7, 0

212. Allo scorcio di ottobre e al principio di novembre la macchia polare era ridotta a tal grado di esilità, che io mi aspettava di vederla sparire da un giorno all'altro. Ma non fu così. Per tutto il novembre e per tutto il dicembre e una parte del gennaio essa continuò ad esser visibile con maggiore o minor evidenza in tutte le configurazioni del pianeta: anzi verso il mezzo di dicembre mi parve un po' cresciuta e stimai che il suo diametro arrivasse alla metà di quello dell'Ellade, cioè a 15 gradi. Il 30 dicembre e il 2 gennaio mi parve di nuovo che la sua ampiezza

fosse almeno di 15° o 20°. Più tardi l'esistenza della neve divenne sempre più difficile a constatare sia per la cresciuta obliquità della vista, sia per l'invasione progrediente dell'ombra, e da ultimo per le nebbie che in quelle parti cominciarono a manifestarsi rendendo luminosa tutta la regione polare e confondendo nel loro bagliore indistinto i limiti della calotta nevosa. Dall'insieme delle osservazioni però sembra risultare con molta probabilità che la superficie della macchia bianca, dopo raggiunto un *minimum* di ampiezza alla fine di novembre o al principio di dicembre, abbia ricominciato a crescer lentamente. Parrebbe dunque che abbia luogo sulla calotta nevosa di Marte lo stesso fenomeno che si osserva per le corrispondenti calotte terrestri. È noto che sulla Terra la stagione più propizia per le navigazioni polari ritarda notabilmente rispetto al solstizio estivo. Per Marte il solstizio estivo dell'emisfero australe ebbe luogo il 18 di settembre e l'equinozio consecutivo il 22 di febbraio. Il ritardo sarebbe dunque di 2 ½ mesi circa. Sulla Terra esso è alquanto più breve, come si conviene alla minor lunghezza delle stagioni.

213. *Osservazioni di Lockyer e di Lassell nel* 1862. Nel 1862 il progressivo decremento della macchia nevosa australe non fu meno manifesto che nel 1877. Il 22 luglio, cioè quaranta giorni prima del solstizio australe di Marte (che nel 1862 accadde il 1° di settembre) Lord Rosse fece un disegno del pianeta, dove l'ampiezza della calotta nevosa australe non è meno di 36°. La legge del suo consecutivo decremento è dato dalle due tabelle seguenti, che ne offrono i diametri tratti dai disegni di Lockyer e di Lassell.

a) *Serie di Lockyer*:

Data, 1862	Giorni dal solstizio australe	Diametro della neve australe	Data, 1862	Giorni dal solstizio australe	Diametro della neve australe
settembre 17 *a*	+ 17	18°,0	ottobre 3 *a*	+ 33	9°,5
» 17 *b*	+ 17	13, 8	» 3 *b*	+ 33	8, 8
» 23 *a*	+ 23	10, 0	» 3 *c*	+ 33	10, 0
» 23 *b*	+ 23	12, 9	» 9	+ 39	11, 0
» 23 *c*	+ 23	12, 9	» 11	+ 41	8, 4
» 23 *d*	+ 23	11, 3	» 15 *a*	+ 45	7, 3
» 25 *a*	+ 25	10, 0	» 15 *b*	+ 45	6, 8
» 25 *b*	+ 25	9, 3	» 18	+ 48	7, 5

b) *Serie di Lassell*:

Data, 1862	Giorni dal solstizio australe	Diametro della neve australe	Data, 1862	Giorni dal solstizio australe	Diametro della neve australe
settembre 13	+ 13	20°,0	ottobre 21	+ 51	8°,6
» 20	+ 20	14, 5	» 23	+ 53	7, 6
» 22	+ 22	13, 0	» 25	+ 55	8, 0
» 24	+ 24	9, 0	» 27	+ 57	8, 2
» 25	+ 25	11, 1	novembre 4	+ 65	8, 0
» 27	+ 27	9, 3	» 5	+ 66	9, 3
» 29	+ 29	10, 4	» 15	+ 76	7, 1
ottobre 11	+ 41	7, 6	» 17	+ 78	5, 5
» 13	+ 43	10, 6	» 18	+ 79	8, 2
» 15	+ 45	9, 4	» 22	+ 83	9, 1
» 17	+ 47	9, 1	dicembre 8	+ 99	7, 5
» 18	+ 48	9, 3	» 11	+102	9, 5

Queste due serie si accordano tanto bene fra di loro, quanto si può aspettare in simil materia e indicano una diminuzione analoga a quella ch'ebbe luogo nel 1877. La

serie di Lassell poi procede abbastanza innanzi per indicare un *minimum* nelle dimensioni della macchia polare intorno alla metà di novembre, circa 2½ mesi dopo il solstizio, ciò che si accorda benissimo con quanto fu da me osservato nel 1877 (v. qui sopra).

214. *Osservazioni di Maedler nel* 1830. In quell'anno il solstizio australe di Marte ebbe luogo il giorno 11 settembre. Secondo Maedler le dimensioni della macchia polare avrebbero diminuito fino al 5 di ottobre, e da quel tempo sarebbero cresciute di nuovo, così che il minimo avrebbe avuto luogo soli 24 giorni dopo il solstizio. Riporto qui i risultamenti consegnati da Maedler nei *Beiträge*, pag. 114:

Data, 1830		Giorni dal solstizio australe	Diametro della calotta australe	
			in diametri di Marte	in gradi
agosto	31	— 11	1 : 9	12°,7
settembre	10	— 1	1 : 10	11, 5
»	15	+ 4	1 : 16	7, 3
ottobre	2	+ 21	1 : 18	6, 4
»	5	+ 24	1 : 20	5, 7
»	20	+ 39	1 : 15	7, 6

Se si dovesse stare a queste indicazioni dovremmo dire, che nel 1830 la neve polare si ridusse a minori dimensioni che nel 1862 e nel 1877. Questo può essere; sebbene della piccolezza dell'istrumento adoperato da Maedler debba pure tenersi conto. Ma l'esser stata la macchia meno visibile il 5 ottobre che nei giorni immediatamente anteriori e posteriori non è certamente provenuto da che essa abbia raggiunto in quel tempo un *minimum* d'ampiezza reale: sì bene derivò dall'eccentricità della macchia rispetto al polo, la quale era allora ignorata da Maedler. Infatti nei giorni 10 settembre e 19 ottobre i disegni di Maedler (che sono il 1° e il 22° nella edizione del 1830, *Astronomische Nachrichten* vol. VIII) furono fatti nelle configurazioni indicate da $\omega = 354°$ e $\omega = 350°$ rispettivamente, non mancando alla macchia polare che pochi gradi prima che passasse al meridiano centrale. Invece tutte le osservazioni degli ultimi giorni di settembre e dei primi di ottobre furono fatte quando la macchia polare era lontana dal meridiano centrale quasi una mezza circonferenza e si presentava in projezione più obliqua e con più forte scorcio. Nel disegno del 5 ottobre essa aveva oltrepassato di 135° questo meridiano e quindi dovea esser poco visibile, a cagione della forte obliquità della visuale. Nè vale insistere, che il *minimum* di appariscenza della macchia, se fosse stato effetto di sola variazione di prospettiva, avrebbe dovuto aver luogo alcuni giorni prima del 5 ottobre: perchè probabilmente esso fu ritardato di alcuni giorni dal fatto, che durante tutto il tempo delle osservazioni la macchia realmente si trovò in progressiva diminuzione. Non crediamo dunque che sia fondato, quanto Maedler dice su questo proposito nel suo primo lavoro (*Astr. Nachr.* n. 191 p. 450) e ripete a pag. 114 dei *Beiträge,* che il *minimum* della macchia australe nell'opposizione del 1830 abbia seguìto di meno che un mese l'epoca del solstizio australe. Qualunque cosa del resto si voglia credere a questo riguardo, è manifesto, che lo studio delle variazioni di ampiezza delle calotte polari di Marte sembra degno di occupare gli osservatori più che finora non sia avvenuto.

Sezione III.

Sopra la figura della macchia polare australe.

215. Indicazioni precise sopra una deviazione della macchia nevosa dalla forma circolare si trovano raramente presso gli osservatori. Perchè tal deviazione si renda manifesta, è necessario anzitutto che la macchia si distacchi dal lembo, e si projetti tutta sul disco. Diversamente l'effetto sarà poco sensibile, e si ridurrà a produrre variazioni periodiche nella larghezza trasversale apparente della macchia, di cui forse qualche indizio si può riconoscere nelle citate serie dei diametri di Lockyer e di Lassell.

216. Le osservazioni del 1862 non offrono che pochi segni di una tal deviazione. Nei dischi di Lockyer non ne trovo traccia sensibile: neppure in quelli che danno la macchia tutta sul disco. Ciò sembrerebbe indicare, che la neve si conservò press'a poco rotonda nell'intervallo dal 17 settembre al 18 ottobre che abbracciano quei disegni. Secchi però, nei dischi del 18 ottobre e del 25 novembre 1862 lascia indovinare un allungamento della macchia nella direzione del Golfo Sabeo e nella direzione opposta. Lassell, il quale pare che alla figura della macchia nevosa abbia posto molta attenzione, conferma l'indicazione di Secchi. Veggansi le sue figure del 24 e del 25 settembre, specialmente quest'ultima, dove la macchia spinge verso il Golfo Sabeo una punta molto visibile, sebbene molto accorciata dalla prospettiva.

217. Nell'opposizione del 1877 a partire dal 24 settembre la macchia si trovò, con poche eccezioni, sempre tutta projettata sul disco. Aiutato dalla buona atmosfera e dalla forza di definizione del telescopio, avrei potuto fare una storia completa ed abbastanza accurata delle sue variazioni di forma. Ma assorbito dallo studio delle macchie stabili del pianeta, non ho atteso a questa parte con tutta la diligenza desiderabile. Tuttavia non credo inutile di esporre quel poco di sicuro, che su quest'argomento ho potuto trovare nel mio giornale d'osservazione. Tutta la storia delle trasformazioni della macchia nevosa dal 24 settembre al 4 novembre 1877 può dividersi in quattro periodi.

218. *I° periodo*: 24-26 *settembre*. Il 24 settembre mi accorsi per la prima volta, che la neve non era rotonda. La disegnai tre volte nelle configurazioni indicate da $\omega = 112°$, $117°$, $132°$. La figura era di una ovale più appuntata da una parte che dall'altra. Mi parve, che l'apside più acuto di questa ovale si rivolgesse verso il centro del disco sotto $\omega = 132°$. — Il 25 settembre ripetizione quasi esatta dei medesimi fenomeni. Osservai la neve sotto $\omega = 95°$, $120°$, $163°$. Nella seconda osservazione la neve sembrava presentare il suo apside appuntato ancora un poco verso destra [1]: nella terza era passato di molto a sinistra. Quindi la coincidenza della sua direzione con quella del meridiano centrale ebbe luogo in una configurazione poco diversa da quella del giorno precedente. — Il 26 settembre per $\omega = 85°$ l'apside acuto era ancora molto lontano dal meridiano centrale verso destra. Tutte le osservazioni di questo periodo si rappresentano molto bene, ammettendo che la calotta

[1] La destra e la sinistra qui si riferiscono all'immagine rovesciata nel cannocchiale astronomico.

nevosa fosse alquanto prominente in quella parte del suo perimetro, che guardava nella direzione del 132° meridiano.

219. *II° periodo*: 30 *settembre* - 2 *ottobre*. Il 30 settembre, essendo $\omega = 68°$ e la neve isolata dall'orlo sul disco, il grand'asse dell'ovale si trovò press' a poco parallelo al lembo, e la macchia appariva estremamente oblunga. Ciò darebbe 158° per la direzione di uno degli apsidi. Non si poteva discernere quale dei due fosse il più acuto. Dal disegno fatto il 1° ottobre in aria cattiva nulla si è potuto ricavare di preciso. Il 2 ottobre potei di nuovo constatare la figura allungata della neve. Un disegno fatto sotto $\omega = 18°$ indicherebbe circa 160° per la longitudine di uno degli apsidi. Sotto $\omega = 45°$ fu fatto un diligente schizzo della calotta in aria eccellente; dal quale risulta un apside più schiacciato e più largo verso la longitudine 350°, e un altro più acuto nella direzione 170°. La neve, più che ovale, appariva adesso triangolare cogli angoli arrotondati. La base del triangolo corrispondeva all'apside schiacciato e il vertice all'angolo acuto. — Il 4 ottobre per $\omega = 356°$ non si vedeva nella neve obliquità alcuna, soltanto essa pareva più rotonda del solito. Apparenza prodotta dai due apsidi, uno dei quali si presentava press' a poco in quell'epoca nella direzione del centro. Tutte le osservazioni di questo periodo si accordano bene fra di loro, e danno 158°, 160°, 170°, 176° per longitudine di uno degli apsidi. Il cambiamento nella direzione del grand'asse dell'ovale nevosa è indubitato: da 132° l'apside più acuto è passato a circa 166°.

220. *III° periodo*: 10-27 *ottobre*. Raccolgo sotto un solo periodo tutte le osservazioni di questo intervallo, non perchè sia certo, che in esso non abbiano avuto luogo mutazioni di figura della massa nevosa, ma perchè quelle osservazioni non si contraddicono fra di loro, e tutte possono esser spiegate con una sola forma triangolare di essa massa.

Il 10 ottobre ($\omega = 298°$) trovo scritto *Calotta stretta ed acuta*: il disegno corrispondente lascierebbe congetturare una figura triangolare allungata, di cui il vertice più acuto abbia il suo asse parallelo appunto al 298° meridiano. Ma questa induzione non pare confermata dal disegno fatto poco dopo sotto $\omega = 307°$, se non in quanto press' a poco in quest' ultima direzione parrebbe collocato il maggior diametro della macchia bianca. Il giorno 11 ottobre l'aria fu cattiva e della figura della neve non trovo registrato nulla. — Il 12 ottobre per un tempo stupendo potei distintamente esplorare la forma della neve: la quale appariva come un triangolo scaleno, coi due lati maggiori alquanto convessi all' infuori. La direzione che formava l'asse del vertice più acuto accennava alla longitudine 133° dalla parte della punta, e 313° dalla parte opposta. Questo risultamento fu confermato dal disegno fatto poco dopo sotto $\omega = 304°$. — Il 13 ottobre non trovo notato altro che una riduzione notevole nelle dimensioni della neve. Il disegno fatto sotto $\omega = 328°$ indica soltanto, colla sua poca diversità della figura rotonda, che il maggior diametro della neve giaceva allora in una longitudine non molto diversa da quella, ma non dà informazioni sicure. Sommando insieme tutti i risultati dei giorni 10, 12, 13 ottobre si trova che la direzione della massima dimensione ha cambiato sensibilmente a partir dal II° periodo: da 166° l'apside acuto è ritornato alla direzione 133°, cioè a quella del primo periodo. — Il 14 ottobre in aria ottima si riconosce ancora che

la neve è un triangolo scaleno coi lati convessi. L'asse della punta che ora sembra più spiccata tende alla longitudine 272°. Questo cambiamento forse si può spiegare con sole variazioni di prospettiva. Altre osservazioni sulla neve non ho fatto di poi sino al 27 ottobre. Il 27 ottobre ($\omega = 162°$) si è potuto figurare la neve molto distintamente: essa era triangolare di lati quasi rettilinei. La punta più acuta accennava al 146° meridiano. Nel giorno seguente i disegni confermano in genere questo risultamento, la direzione della punta acuta sarebbe però piuttosto 130° o qualche cosa di simile. In totale dunque si ha in questi giorni lo stesso risultato che si era ottenuto nei giorni 10-13 ottobre.

Tutte queste osservazioni del III° periodo sembrano combinarsi abbastanza bene, ammettendo una sola figura di triangolo scaleno, in cui le linee mediane di due angoli acuti siano dirette l'una 133°, l'altra secondo 272°.

221. *IV° periodo*: *4 novembre*. In questo giorno la neve non apparve più come un triangolo, ma bensì come una sottile striscia più lunga che larga, il cui asse risultò dal disegno giacere nella direzione 106° dalla parte dove la striscia sembrava più angusta.

222. *Conclusione*. La macchia nevosa dal 24 settembre al 4 di novembre ha cambiato continuamente di figura, e si presentò come ovale variabile di grandezza e di forma dal 24 settembre al 4 ottobre. Dal 10 ottobre al 4 novembre ebbe sempre figura di triangolo irregolare, con variazioni in parte apparenti e in parte anche reali. Tali variazioni per tutto il tempo delle osservazioni non sono impossibili a spiegare con semplici troncature o sfaldature delle figure anteriori, e non sembra necessario ammettere che tutta la macchia polare girasse d'un pezzo galleggiando, come forse si potrebbe esser inclinati a supporre. Io ho fatto un tentativo per rappresentare in un disegno l'istoria di tutti questi rivolgimenti, ma il materiale essendo insufficiente, questa è in parte risultata ipotetica; onde non credo opportuno di accrescere con essa la mole della presente Memoria.

Sezione IV.

Sopra la natura della macchia bianca polare.

223. Dopo tutte queste osservazioni e deduzioni è chiaro, che fra le ipotesi possibili sulla natura della macchia polare si devono escludere tutte quelle, che condurrebbero a considerare questa macchia come qualche cosa di permanente sulla superficie di Marte, per esempio un grande strato di quarzo bianco o di marmo di Carrara. La macchia polare è qualche cosa, la cui estensione è connessa col luogo di Marte nella sua orbita: tale estensione è minima circa due mesi e mezzo dopo il soltizio australe del pianeta, nel tempo appunto, in cni secondo le esperienze che facciamo sulla Terra, deve colà regnare la massima temperatura. La Terra ha anch'essa ai suoi poli due macchie bianche consimili, la cui estensione è minima circa due mesi dopo il solstizio che loro apporta la stagione più calda [1]. L'analogia

[1] Il mese di agosto è generalmente riguardato come il più favorevole per le esplorazioni artiche, come tutti i viaggiatori di quelle regioni attestano.

è così evidente, così completa, che in mancanza di altre supposizioni più plausibili, noi abbiamo diritto di riguardare (come già moltissimi hanno fatto) le macchie polari di Marte come il risultamento di una condensazione solida dei vapori dell'atmosfera del pianeta. I quali vapori, stando a ciò che le ricerche spettroscopiche di Vogel (¹) hanno indicato, probabilissimamente sono vapori d'acqua. Ma si tratti d'acqua o d'altra materia, le apparenze rimangono spiegate egualmente bene. Così è giustificato il nome di *neve* o di *macchia nevosa* con cui spesso la macchia polare è stata designata nelle ricerche precedenti.

224. Ammessa l'esistenza di una crosta ghiacciata, si può domandare in qual modo essa riposi sulla superficie del pianeta. Le nevi dei poli terrestri sono impegnate fra isole e variamente impedite nei loro movimenti generali: soltanto quando una parte di esse si rompe, può subire un trasporto sensibile, come è avvenuto ai ghiacci che resero vani i tentativi di Parry per giungere al polo, e a quelli che portarono il *Tegethoff*. Quali movimenti possa prendere una tal crosta, errante liberamente sulla superficie d' un mare non impedito: se essa oscillerebbe stabilmente intorno ad una posizione fissa, oppure se dalla rotazione del pianeta e dalle correnti sarebbe spinta tutta in corpo verso inferiori latitudini, è difficile prevedere. Sembra però che se quest' ultima ipotesi si verificasse, la calotta non giungerebbe neppure a formarsi o a prendere una ragguardevole estensione. O forse la calotta non esisterebbe come sistema permanente, ma sciogliendosi nelle parti troppo vicine all' equatore, si riformerebbe continuamente nelle parti opposte, siccome spesso avviene delle nuvole nella nostra atmosfera.

225. Comunque sia, la persistenza delle nevi australi di Marte intorno alla medesima posizione per lunghe settimane, provata dalle nostre osservazioni di posizione riferite nella prima parte di questa Memoria; e più la persistenza degli ultimi residui nello stesso luogo durante le fusioni estive del 1830, del 1862 e del 1877, sembrerebbe indicare con qualche probabilità che la calotta nevosa sia aderente al corpo solido del pianeta. Tale aderenza forse è prodotta, come per la Terra, dall' essere impegnati i ghiacci in isole, in scogli; od anche semplicemente proviene dall' esser questi appoggiati per il loro peso sul fondo del Mar Polare. Vedremo ragioni di credere, che una parte almeno di mari di Marte abbia pochissima profondità. Che se non si voglia ammettere la natura liquida di ciò che noi chiamiamo *mari*, la permanenza di quelle nevi al medesimo punto si spiega agevolmente da sè.

226. L' area straordinariamente piccola a cui nel 1877 si è ridotta la neve polare, non maggiore di un circolo di 7 od 8 gradi di diametro, è un altro fatto degno d' attenzione. Nulla di simile ha luogo sulla Terra, dove se in alcune direzioni i ghiacci artici han permesso di penetrare sino al parallelo 84°, in altre mantengono permanente impero fin sotto il 62°. Invece i ghiacci di Marte possono lasciare scoperto il polo australe: *questo è certamente avvenuto* alla fine di ottobre, o al principio di novembre 1877. La differenza di temperatura fra il mezzo della calotta ed i suoi orli non sembra che in tali circostanze possa esser molto grande:

(¹) *Untersuchungen ueber die Spectra der Planeten*. Leipzig 1874, pag. 20.

onde quasi si è indotti a credere, che la permanenza delle nevi in quel luogo così ristretto di area e così fisso di posizione abbia una causa speciale. La supposizione di qualche isola o almeno di qualche basso fondo si presenta qui naturalmente di nuovo.

227. In un recente articolo pubblicato nelle *Notizie mensili* della Società astronomica di Londra ([1]) il signor Brett pensa che la macchia polare non sia che un ammasso di nuvole. Ciò potrebbe forse ammettersi, se questa non fosse troppo fissa di sito, e troppo dissimile in apparenza dalle vere nubi, che sì spesso ingombrano la superficie del pianeta. Veramente il sig. Brett non ha trovato traccia di queste nuvole sull'emisfero australe nel 1877, ed anche noi abbiam veduto, che in certe parti di esso furon rarissime, sebbene in altri luoghi abbiano abbondato anche troppo. Nelle opposizioni del 1830 e del 1862 la loro presenza fu anche facile a constatare. Or queste nubi non sono di bianco così abbagliante, nè hanno quella costanza di posizione, che distingue la calotta polare. Brett attesta di aver potuto distinguere *l'ombra* projettata dalla supposta calotta di nuvole sul pianeta. Io dichiaro di non aver mai veduto nulla di simile, sebbene abbia considerato la calotta polare ben più di 100 volte durante l'opposizione del 1877. Talvolta l'orlo superiore appariva di un bianco un po' men puro che il resto; e tutto l'insieme sembrava produrre l'idea, che la calotta fosse una specie di stiacciata bianca più rilevata agli orli, più depressa nel mezzo. Qualche cosa di simile attesta di aver veduto il prof. Hall col gran refrattore di Washington (*Astron. Nachr.* n. 2174). Son cose certamente da notare, le quali per ora tuttavia non possono servire di base ad alcuna illazione ([2]).

Sezione V.

Sopra l'atmosfera di Marte.

228. L'esistenza dell'atmosfera di Marte si manifesta in tre modi diversi: 1° dalla maggior luce che l'orlo del disco ha in confronto colle parti centrali; 2° dalla minor evidenza con cui, in certe circostanze almeno, si presentano le macchie, quando si accostano agli orli del disco; 3° finalmente dagli intorbidamenti transitorî che succedono sopra alcune regioni, e che non possono interpretarsi in altro modo, che come nebbie o nuvole simili a quelle dell'atmosfera terrestre. A queste manifestazioni si può aggiungere ancora la variabilità della calotta polare, che è difficile non

([1]) *Monthly Notices of the Royal Astr. Society* vol. XXXVIII, dec. 1877.

([2]) Forse è questo il luogo di accennare, che la luce della calotta essendo *bianca* la refrazione atmosferica ne eleva l'immagine sull'orizzonte più che non faccia per la superficie circostante del pianeta, nel quale prevale la luce *rossa*. Se durante le osservazioni del 1877, in cui Marte ebbe sempre una declinazione australe notabile, ammettiamo che la refrazione fosse qualche cosa come 100″. è chiaro che bastava una differenza di $\frac{1}{500}$ nel valore delle rifrazioni della calotta e del pianeta per produrre in alto e in basso della macchia un orlo colorato di 0″,2: quantità certamente non insensibile all'occhio armato di forti ingrandimenti. Forse questa è una delle cause, per cui così spesso nei disegni di Marte la macchia nevosa è rappresentata da un' ellisse assai troppo vicina al circolo (qualche volta anzi da un circolo).

connettere colle vicende di un atmosfera del pianeta. Discorriamo qui dei due primi effetti.

229. *Splendore dell' orlo del disco.* Uno splendore crescente in modo continuo e accelerato dal centro verso i lembi si è sempre manifestato nelle nostre osservazioni, ma non in modo costante. Durante il mese di settembre la zona perimetrale, in cui questo incremento si manifesta, mi è sembrata molto più larga, che in ottobre ed in novembre: nei quali mesi questa zona si venne talmente restringendo, da non formare più quasi altro, che una linea luminosa intorno al disco, senza apprezzabile larghezza. Questa l' ho veduta sempre lungo la parte dell' orlo non affetta da fase, sia che al perimetro del disco si trovassero parti chiare del pianeta, sia parti oscure. L'osservazione più precisa a questo riguardo fu da me fatta il 2 ottobre in aria veramente stupenda. In quest' occasione potei osservare il luogo del limite australe della fase nelle vicinanze della neve polare sotto la forma indicata dalla figura 10ª: cioè di una esagerazione della curvatura nel punto B dove sta il corno della falce oscura: esagerazione che dalla figura geometrica della fase non può risultare. L'interpretazione di questo fatto si può ottenere, supponendo che la zona chiara limitante il disco in AB riceva la maggior parte del suo splendore dall' ultimo contorno, nel quale la luce sia addensata fortemente. Allora la principal luce verrà a mancare, se non subitamente all' estremità geometrica della falce scura, certo in un breve intervallo a partire da detta estremità. Mancherà dunque quasi subitamente la causa, che dà al nostro occhio quell'ampliamento fittizio del disco che tutti sanno, e in poco spazio sembrerà il contorno passare dall'arco AB all'altro più interno *ab*. Il contorno avrà dunque la figura AB *ab* invece che dovrebbe essere A'B'*a'b'*. Ciò manifestamente non succederebbe se l' incremento della luce del disco non fosse rapidissimo nella vicinanza dell'orlo. Questa osservazione fu da me ripetuta parecchie volte e me ne sono servito talvolta per riconoscere sul lembo il luogo dove incominciava la fase oscura. Il significato più naturale di questo fatto sembra si abbia ammettendo, che nell'atmosfera di Marte siano sospesi corpuscoli capaci di rifletter la luce ed in variabile quantità, come è dei vapori vescicolari e del pulviscolo che ingombra l'atmosfera terrestre. Quando l'ingombro è maggiore, la zona perimetrale luminosa del disco deve naturalmente apparire più larga. E il fatto che questa zona durante le osservazioni si è venuta restringendo sembra indicare che l'atmosfera del pianeta in quell' intervallo si è venuta progressivamente rischiarando.

230. L'esistenza della zona luminosa perimetrale si potrebbe anche spiegare ammettendo alla superficie di Marte asperità simili a quelle che stanno sopra la Luna, le quali fanno apparire nel plenilunio il disco del nostro satellite alquanto più luminoso presso gli orli che presso il centro. Questa ipotesi che a prima giunta pare anche plausibile, non è necessaria, dal momento che l' esistenza dell'atmosfera di Marte è appoggiata ad altre prove. Inoltre essa richiederebbe l' esclusione dal pianeta di qualsiasi cosa che rassomigli ai nostri mari: perchè la zona luminosa perimetrale esiste tanto sulle parti oscure, quanto sulle parti chiare della superficie del pianeta. Da ultimo l' incremento rapidissimo che la luce della zona perimetrale di Marte ha verso gli ultimi confini del disco non può assimilarsi alla distribuzione di luce che si osserva sul perimetro della Luna piena, per la quale il detto incremento

è senza dubbio assai più lento. Ciò consta non solo dall'ispezione diretta e dall'osservazione qui sopra riferita § 229: ma in modo anche numericamente dimostrativo risulta dalle osservazioni, che il prof. Zöllner ha fatto sulla legge che regola le variazioni dell'intensità luminosa totale di Marte dipendentemente dalla sua fase. Egli ha trovato, che a partir dall'opposizione la luce di Marte per causa della fase decresce con proporzione assai più rapida che non quella della Luna per fasi di eguale ampiezza (1). Volendo con Zöllner spiegare questo fatto coll'assumere l'esistenza di asperità alla superficie di Marte, converrebbe supporre i fianchi di quelle prominenze inclinati di 76° sull'orizzonte, come l'autore stesso ha calcolato; ammettere cioè che il pianeta sia ispido di acute punte; ed è ancora a dubitare, se con ciò si giungerebbe allo scopo desiderato. La vera causa del fenomeno sta nella strettissima zona perimetrale luminosa prodotta dall'atmosfera di Marte: zona che già per una fase pochissimo diversa dalla piena illuminazione viene a scomparire totalmente o quasi totalmente su metà del contorno del disco, e produce così una forte e subita diminuzione nella somma totale della luce emanata dal pianeta.

231. *Diversa visibilità delle macchie nelle diverse distanze dal lembo.* Il decrescere di questa visibilità dal centro agli orli, e la conclusione che se ne trae relativamente all'esistenza su Marte di un'atmosfera non assolutamente trasparente, sono cose notissime. Dalle mie osservazioni risulterebbe anche qui una notabile variabilità dell'effetto, corrispondente ad una pari variabilità nel grado di trasparenza. Facendo astrazione dalla macchia polare e da tutte le regioni collocate al nord del Grande Diaframma, dove poco e male si poteva vedere, anche al centro del disco: considerando quindi soltanto la regione delle grandi macchie, e specialmente il Mare Eritreo, il Lago del Sole e la zona dei mari mediterranei, trovo che generalmente durante il mese di settembre la visibilità cessava alla distanza dal lembo uguale ad un quinto del raggio del disco, ciò che corrisponde alla distanza di 53° dal punto centrale, o dal polo dell'emisfero visibile. Negli ultimi di settembre tuttavia questo limito è stato superato, specialmente per il Lago del Sole, il quale ho potuto scoprire per la prima volta il 20 settembre, quando aveva già oltrepassato il meridiano centrale di 63°, e il 1° ottobre, quando mancavano 61° a raggiungerlo. I disegni da me fatti durante l'ottobre abbracciano sull'equatore da 120° a 130° di longitudine, ciò che indica, esser allora stati ancora riconoscibili oggetti distanti di 60° o 65° dal polo dell'emisfero visibile. L'aver riconosciuto i limiti australi di Thyle II il 21 ottobre indica, che in quel giorno si potevano scoprire cose nuove alla distanza di 55° dal centro. Ma non mi è mai riuscito di poter seguire a vedere le macchie oscure fin proprio al lembo, come alcuno attesta d'aver fatto. Bensì durante l'ottobre, essendo già forte la fase oscura (da 21° a 35°) ho potuto vedere prolungarsi i limiti dei mari e delle terre fino al limite di essa. A cagione della forte obliquità con cui la superficie del pianeta è illuminata presso questi limiti, la luce diventa più debole e ciò favorisce la visibilità di certi contrasti di lume e d'ombra, che altrimenti l'occhio non giungerebbe ad afferrare. Ad un complesso di tali circostanze io devo per esempio di aver potuto constatare il 20 ottobre ($\omega = 243°$)

(1) *Photometrische Untersuchungen*, p. 127. Lipsia, 1865.

presso il corno inferiore della fase oscura l'esistenza dell'Eunosto, il quale come pallidissima ombra non si rendeva sensibile se non per questo, che spiccava debolmente sopra un fondo ancora alquanto più pallido. A questo proposito ancora si può aggiungere, che la visibilità dei particolari della superficie di Marte è nelle vicinanze del lembo resa più difficile (oltre che dall'accorciamento, di cui non occorre parlare) anche dall'essere ivi l'occhio maggiormente impedito dalla zona splendente perimetrale del lembo. Questa zona appare comparativamente più luminosa nei minori ingrandimenti, per i quali credo d'aver notato che lo spazio utile di visibilità sia molto più ristretto, che per le amplificazioni maggiori.

232. Questo per le macchie oscure. Ma per le macchie molto chiare, o almeno per certe parti più luminose delle terre che stanno al sud del Grande Diaframma succede questo: ch'elle appaiono più splendenti presso gli orli, che presso il centro. Le regioni che in modo più certo e con maggior frequenza mi hanno presentato questa proprietà sono: 1° le due isole di Thyle, la cui esistenza fu riconosciuta presso il lembo e solo più tardi constatata con osservazioni presso il meridiano centrale; 2° l'Isola d'Argyre, il cui splendore al lembo sinistro tanto mi colpì quando la vidi per la prima volta il 24 settembre, da dar origine al nome di questa terra; 3° l'Ellade, che è il caso di tutti più facile a verificare. In grado assai minore partecipano di questa proprietà l'Eridania e la Memnonia, e al nord del Grande Diaframma la regione chiamata Chryse.

233. Io non saprei dare alcuna spiegazione ben sicura di questo fatto. Son forse queste regioni montuose, e succede in parte per esse ciò che si verifica per la Luna? La quale nel plenilunio è più luminosa agli orli, non però in guisa da produrre l'effetto della zona perimetrale che si osserva in Marte. Come Zöllner ha fatto osservare per la prima volta, l'esistenza di forti asperità nella superficie fa crescere lo splendore apparente della medesima tanto più, quanto maggiore è l'obliquità della vista sulla superficie stessa (¹). Noi potremmo dunque immaginare che lo stesso avvenga per Thyle, per Argyre, e per l'Ellade, in lontananze dal centro del disco non abbastanza grandi perchè il cresciuto assorbimento dell'atmosfera di Marte possa controbilanciare l'effetto così prodotto. O proviene la maggior luce e questo modo di comportarsi della medesima da veli di nebbia? per i quali l'illuminazione obliqua segue leggi diverse che per le superficie solide. Quando il velo di nebbia sia abbastanza trasparente per lasciare alla superficie sottostante del pianeta una parte notevole dell'illuminazione solare, e si supponga che la nebbia rifletta meglio la luce che la superficie suddetta, anche questa spiegazione può diventar possibile.

234. L'apparire che fanno queste regioni all'orlo del disco come macchie luminose, le ha fatte talvolta comparare alla neve polare, la quale in certi disegni è rappresentata per conseguenza come doppia. Oltre alla macchia polare, tre macchie luminose furono constatate simultaneamente all'orlo di Marte dal sig. Webb in un suo disegno dell'aprile 1856; l'origine delle quali probabilmente è da attribuire a fenomeni del genere qui considerato (²). Veggansi ancora i disegni n. 7, 42, 45 fra

(¹) *Photometrische Untersuchungen* p. 33 e segg.
(²) *Monthly Notices of the Royal Astr. Society* vol. XVI, p. 188.

quelli pubblicati dal sig. Terby nella sua *Areografia*. Io sarei inclinato a credere, che nel primo di essi Schroeter abbia rappresentato, oltre alla macchia nevosa, anche l' isola di Thyle II al lembo precedente del pianeta.

Sezione VI.

Processi meteorici sulla superficie di Marte.

235. Nelle sezioni I-IV ho riferito minutamente le osservazioni e le deduzioni che riguardano il più importante e il più osservabile di questi processi meteorici, qual' è probabilissimamente la formazione e lo scioglimento delle nevi polari. Qui resta a discorrere degli intorbidamenti a cui è soggetta l'atmosfera di Marte, e che tutto porta a credere esser conseguenza di vapori (d'acqua?) in essa contenuti. L'esistenza di questi vapori sotto forma gazosa è dimostrata dallo spettroscopio: la loro presenza sotto forma vescicolare risulta dall' osservazione diretta.

236. Quando le nuvole di Marte si projettano sopra le macchie oscure del pianeta, si mostrano come striscie o chiazze sfumate e per lo più mal contornate d'aspetto variabile. Possono talora esser tanto brillanti, quanto le parti più luminose del pianeta, come ho a suo luogo riferito della striscia lucente che per due volte in pochi giorni coperse la Terra di Proteo (§§ 106, 108). In altre occasioni possono apparire di tinta meno chiara, sempre però più chiara che il fondo su cui si projettano. Così più volte trovo nel mio giornale chiamata fumosa o caliginosa la nube, che coperse per più mesi di seguito la Noachide, come a suo luogo si è dichiarato. Ciò indica probabilmente non un colore particolare della nube (altrimenti queste nubi si osserverebbero come macchie scure variabili sul fondo chiaro dei continenti, di che non conosco esempio), ma una maggior trasparenza della medesima. In tal caso senza render affatto invisibile il fondo, quel velo raro basta a confondere i tratti, e a rendere impossibile l'esatta descrizione dei contorni. Questo credo sia avvenuto su quasi tutto il Mar Eritreo nei giorni 10 e 11 ottobre. La sera del 10, dopo aver senza difficoltà fatto osservazioni sulla regione compresa fra il 240° e il 350° meridiano, le interruppi per osservare la cometa scoperta pochi giorni prima da Tempel: indi ripigliai l'esplorazione di Marte, ed essendo $\omega = 8°$ scrissi quanto segue: « Marte bellissimo. Il Mar Eritreo è in gran parte ottenebrato da nuvole. Noachide oscura. Terra di Deucalione appena visibile. Invece è chiarissima l'Arabia, e ben distinto il Golfo Sabeo ». Il giorno dopo, sotto $\omega = 343°$: « Continua in Marte la torbidezza sopra la Noachide e il Mar Eritreo ». Non posso dire con precisione quando cominciasse questo stato di cose: certamente fu fra il 4 e il 10 d' ottobre. Nè anche quando finisse: perchè soltanto il 14 ottobre potei rivedere la parte più orientale del Mare Eritreo, e anche quella in troppa vicinanza del lembo destro. Il 4 novembre il Mare Eritreo era intieramente libero nella sua parte occidentale.

237. Se le nuvole di Marte sopra le parti oscure del pianeta si rendono visibili per visione positiva, sulle parti chiare la loro presenza si riconosce soltanto in modo negativo, cioè non per quello che di esse si vede, ma per quello che impediscon di vedere. Durante l'opposizione del 1877 dal settembre al decembre gran parte del pianeta fra il Grande Diaframma e il parallelo 30° di latitudine boreale era

ingombrata da nuvole. Tutto il continente equatoriale fra la Gran Sirte e il Gange deve credersi che fosse così ottenebrato: perchè malgrado la più sostenuta attenzione in tutto quel tratto non mi è riuscito di vedere altro che una superficie uguale e lucente senza indizio d'interruzioni che si spingessero a qualche distanza considerevole dal Mar Eritreo. Solo pochi gradi entro terra potei seguire le foci dell'Indo e dell'Idaspe, e più che osservare, congetturare quelle del Gehon e del Phison. Tutti i canali, che sulla nostra carta solcano così variamente quella regione sono stati veduti nel febbraio e nel marzo 1878, benchè il pianeta fosse allora quattro e cinque volte più lontano dalla Terra, che nel settembre e nell'ottobre precedenti. Senza dubbio il Sole scendendo all'equatore dileguò il velo impenetrabile che prima si stendeva in quei luoghi e li rendeva affatto inaccessibili alle osservazioni.

238. Invece fra le longitudini 110° e 240°, in tutto lo spazio che circonda al nord il Mare delle Sirene e il Mare Cimmerio, il velo pareva uniforme durante il settembre e l'ottobre 1877, ma non impenetrabile; e a traverso di esso furon riconosciuti tutti i canali tracciati sulla carta dal fiume delle Sirene a quello degli Etiopi, sebbene con molta incertezza, e diverse parti furono meglio vedute in diversi tempi. Più tardi, in dicembre, gennaio e febbraio, il velo si diradò, e malgrado le dimensioni del pianeta ridotto al diametro apparente di 8″ od anche di 6″ fu possibile confermare l'esistenza e il corso del fiume delle Sirene, di quelli dei Giganti, dei Titani, e dei Ciclopi, dell'Oceano e dell'Eunosto, divenuti linee visibilissime e di tinta forte. Fra i meridiani 250° e 300° nessuna apparenza nebulosa è venuta a turbare le osservazioni: il fiume Tritone, il Nepente, il Lago Tritone, il Lago Meride, la Gran Sirte ed il Nilo conservarono sempre una gran costanza d'aspetto, e la diversa loro visibilità si potè spiegare semplicemente col maggiore o minor favore delle condizioni atmosferiche terrestri.

239. E questo è il poco, che intorno alle nuvole (forse sarebbe meglio dir nebbie) di Marte ho potuto raccogliere dalle mie osservazioni del 1877. Ben altrimenti istruttiva a tale riguardo è stata l'opposizione del 1862, come si può vedere nei disegni degli egregi osservatori Kaiser, Lockyer, Rosse, Lassell, Phillips e Secchi. Come regioni classiche a questo riguardo appaiono il Mar Eritreo e la Gran Sirte, colle terre confinanti così ad oriente, come ad occidente. A lungo ho descritto (capo III, sezione XI) le formazioni di nebbie sulle terre oscure (bassi fondi?) di cui questa parte del pianeta è tutta ingombra, e gli errori che ne son derivati nelle carte areografiche. Anche nel 1862 si osservarono projettate sulle macchie oscure del pianeta nubi di maggiore o di minor splendore, cioè più o meno opache e quindi più o meno illuminate. Sulla zona delle terre equatoriali pare che il velo fosse anche più denso che nel 1877 perchè lo stesso acutissimo osservatore Lockyer ha quasi dovunque affatto vuota la metà inferiore dei suoi dischi. Il mare polare nel 1862 non fu intieramente libero da nubi come nel 1877: e nel descriver quel mare ho notato, come nel velo che lo ricopriva esistessero varie aperture corrispondenti alle vie di comunicazione di esso mare con altri mari più vicini all'equatore. Le quali sono sostanzialmente quattro: cioè 1° il Golfo Aonio, che raccoglie il Fasi, l'Ellesponto, e lo stretto di Palinuro: 2° il Bosforo Gemmato, e 3° l'Ellesponto, che aprono la via all'Eritreo; 4° il Golfo di Prometeo, che raccoglie lo Xanto e lo stretto di Tifi.

La quinta via possibile, che corrisponde allo stretto d'Ulisse fra Thyle I e Thyle II è troppo alta in latitudine per poter esser comparata convenientemente colle altre dal lato meteorologico: sebbene essa pure fosse scoperta nel 1862 (capo III, sez. XXVI).

240. Nel 1830 Maedler trovò occupata da nubi la parte orientale del Mare Eritreo, e la parte occidentale del medesimo presso il Bosforo Gemmato: poi tutto il Mare Australe, ad eccezione di quattro strisce corrispondenti ai quattro canali di comunicazione sopra nominati. E forse il non aver egli allora potuto prender notizia del fiume delle Sirene, nè di quello dei Ciclopi, nè del visibilissimo Gange, può far sospettare che anche molte parti delle terre equatoriali nel settembre e nell'ottobre 1830 fossero coperte da un velo denso analogo a quello che tanto impacciò nel 1862 e nel 1877. Questo velo però non esisteva nelle parti boreali di Chryse, onde Maedler potè riconoscere sott'essa la parte più occidentale del corso del Nilo. Ma nel 1830, come nel 1862 e nel 1877, tutta la zona dei mari interni, cominciando dal Lago del Sole fin dopo la Piccola Sirte fu costantemente libera da ogni offuscazione.

241. In questo insieme d'osservazioni è notevole: 1° La relazione che hanno colla distribuzione delle nebbie polari australi i canali di comunicazione del Mare Australe coi mari delle latitudini temperate; 2° l'agglomerarsi delle nebbie marine sulle terre oscure (o bassifondi?) comprovato da parecchi esempî; 3° la trasparenza grande che hanno molte di queste nebbie, ciò che lascia congetturare poca densità o grossezza nel senso verticale; 4° il progressivo diradarsi di questi veli sulle terre equatoriali dall'epoca del solstizio australe di Marte fino a quella dell'equinozio consecutivo; 5° la serenità che pare abbia sempre dominato sui mari interni nelle epoche immediatamente consecutive al solstizio australe. Fenomeni tutti, dei quali si hanno poche osservazioni, e sui quali è desiderabile si rivolga l'attenzione dei futuri areografi, per vedere quello che in essi si può riguardare come legge costante e generale.

242. Ho limitato il presente esame alle tre opposizioni, che corrispondono al solstizio australe del pianeta, e che fra le osservate sono quelle che meglio si corrispondono climaticamente fra loro. Quanto si è detto sulla meteorologia di Marte riguarda dunque soltanto i mesi, che immediatamente precedono e immediatamente seguono quel solstizio. Rimarrebbe ora ad investigare quanto avviene nelle altre stagioni di Marte: qual è il modo di estendersi della neve australe sopra gli spazî oscuri e sopra gli spazî luminosi del pianeta: quale è nelle diverse stagioni il grado normale di trasparenza dell'atmosfera nelle diverse latitudini areografiche. Le nostre osservazioni sono troppo brevi e troppo incomplete per servir di base alla trattazione di simili questioni. Il ritardo di $2\frac{1}{2}$ mesi che la neve indica pel colmo della state nelle regioni polari australi, esiste anche pel massimo di trasparenza dell'atmosfera nella zona temperata. Il progressivo rischiararsi in dicembre, gennaio, febbraio e marzo della nebbia che copriva le terre equatoriali all'epoca del solstizio da me osservato (18 settembre 1877) è certamente un effetto del Sole ridisceso a culminare su paralleli meno australi. Forse al moto del Sole è pure connessa la nevicata, o la bianchissima nebbia osservata sull'Ellade il 16 dicembre, 90 giorni dopo il solstizio australe. Il diametro di 25° e di 30° osservato nella neve australe ancora nel mese che precede il solstizio (v. qui sopra § 211) fa congetturare un'estensione ancora molto maggiore in altre epoche dell'anno di Marte.

243. Noteremo ancora, che nella zona fra il 10° e il 30° parallelo australe, che fu verticalmente percossa dal Sole durante le nostre osservazioni, non si manifestò niente di simile alle zone delle piogge e delle calme equatoriali terrestri, che sogliono accompagnare sui nostri mari il moto del Sole in declinazione. Quella zona anzi, durante la maggiore irradiazione solare, fu tutta intiera libera da nubi, ad eccezione di quei pochi intorbidamenti sul Mare Eritreo, di cui già si è parlato. Anche nel 1830 e nel 1862 quelle latitudini furono quasi interamente libere, e gli oscuramenti ebbero luogo soltanto sull'Eritreo, o in immediata vicinanza di esso. Sembra dunque che il sistema generale della meteorazione atmosferica in Marte non abbia molta analogia con quella della Terra; e se bene ho inteso il senso delle mie e delle altrui osservazioni, pare che sia anche molto più semplice, e press'a poco come segue. Nelle epoche solstiziali un emisfero parrebbe tutto o quasi tutto consacrato all'evaporazione, l'altro alla condensazione. Nelle epoche intermedie una zona di evaporazione parrebbe limitata al sud e al nord da due zone o piuttosto calotte di condensazione. Sulla larghezza di queste zone nelle varie stagioni poi deve influire non solo la declinazione del Sole, ma ancora la ripartizione delle terre e dei mari; le prime infatti sembrano favorire di preferenza lo stato nuvoloso, mentre ai secondi pare destinata maggior purezza di atmosfera, senza dubbio dipendentemente dalle cause che producono fenomeni analoghi sulla terra [1]. Ecco un altro argomento, su cui mi permetto di chiamare l'attenzione degli osservatori: attenzione che dovrebbe esser continuata per quattro o cinque mesi prima e dopo ciascuna opposizione, onde poter seguire con continuità le vicende dei fenomeni. Ciò non presenta la difficoltà che alcuno potrebbe credere: osservazioni utili si possono fare anche quando il diametro apparente sia ridotto a 5″ o 6″. Naturalmente è necessario profittare dei momenti, in cui l'atmosfera della Terra è molto tranquilla, ed impiegare obbiettivi di grande definizione, con amplificazioni non minori di 300 o 400 volte.

Sezione VII.

Delle macchie oscure, che si osservano sulla superficie di Marte.

244. Le macchie oscure di Marte formano ciò, che sulla nostra carta si è distinto col nome di *mari*. Esse non sono isolate, ma comunicano tutte fra di loro per mezzo di striscie oscure più o meno visibili (i *canali* o *fiumi* della nostra carta), avviluppando così il pianeta in una rete continua, e lasciando in mezzo a loro gli spazî chiari sotto forma di altrettante isole. La delimitazione fra le macchie oscure e gli spazî luminosi è quasi da per tutto una linea precisa: soltanto per eccezione in pochissimi luoghi del pianeta il passaggio della piena luce alla forte ombra si fa per gradi, e questi casi saranno più sotto assoggettati ad esame speciale. L'intensità dell'ombra è molto varia nelle macchie oscure: grossolanamente parlando, essa pare aver qualche relazione colla latitudine areografica, e decrescere dall'Equatore verso i poli del pianeta. Questa legge almeno è con sufficiente evidenza osservata nell'emisfero

[1] È noto che i naviganti spesso riconoscono le isole in grandissima lontananza per le nubi o per le nebbie che sopra vi stanno.

australe: dell' altro emisfero le nostre osservazioni non dicono abbastanza perchè si possa portare un giudizio.

245. Al sud del Grande Diaframma la massima oscurità è nella parte boreale del Tirreno, nel Golfo Sabeo, nel Golfo delle Perle, ed in quello dell'Aurora: che son tutti sotto l'Equatore, o poco distanti. Nel Golfo Sabeo (lato boreale) ed in quello delle Perle il contrasto della tinta oscura colla luce dello spazio chiaro attiguo è tale, da produrre, in aria buona, la sensazione di nerezza quasi completa. Il secondo grado di oscurità s'incontra nelle parti medie dal Mare Eritreo, e nelle occidentali presso l'Aurea Cherso; nel Bosforo Gemmato; nel Lago del Sole; nel Mare delle Sirene; nella parte occidentale del Mare Cimmerio; nella parte australe del Mar Tirreno: e meno intenso, ma tuttavia non molto meno, anche nel Mare Cronio e nel Mare Adriatico. Il terzo ed ultimo grado di oscurità appartiene a tutto il Mar Polare Australe preso in grosso nella sua totalità. Sopra l'Ellade e di contro all'Ellesponto esso non è molto meno oscuro del Mare Cronio. Anche intorno alla macchia nevosa del polo la sua tinta è un poco più cupa, forse per effetto di contrasto. La sua parte meno oscura ho trovato essere fra Thyle I, e Argyre di contro al Golfo Aonio, però in molta lontananza dalle spiagge circostanti. Presso a queste ultime corre una zona più nera, la quale circonda Argyre e la parte australe di Thaumasia; forma il Golfo Aonio e lo Stretto di Palinuro. Tutte queste varietà di tinte degli spazî oscuri passano l'una nell'altra per gradi insensibili e non vi è linea di separazione precisa fra le diverse tinte del medesimo mare.

246. Sulla natura di queste macchie oscure e sulla relazione delle medesime cogli spazî chiari si possono fare infinite ipotesi più o meno arbitrarie. Due sole però sono sostenute da analogie sufficienti: e di esse non ve ne ha che una, la quale porga una spiegazione plausibile di tutti i fatti osservati. Si può in primo luogo partire dall'analogia di macchie luminose ed oscure che si vedono nella Luna. In questo caso si supporrebbe la superficie di Marte tutta solida: la diversità di colore deriverebbe dalla diversità dei materiali che compongono lo strato superficiale delle varie regioni: i mari di Marte sarebbero come i mari della Luna: insomma il pianeta ci presenterebbe la sua carta geognostica. Tale ipotesi, sebbene in sè non interamente impossibile, non riesce a spiegare tutti i fatti conosciuti, se non corredandola di altre ipotesi minori sussidiarie, alcuna delle quali molto bizzarra. La presenza di nevi polari (che gode di probabilità quasi confinante colla certezza) e ad ogni modo quella di nuvole e di nebbie estesissime dimostrano, che nell'atmosfera di Marte esiste una circolazione meteorica: che in certe regioni si sollevano vapori, e in altre si condensano. Una tal circolazione è difficile comprendere come possa farsi tutta esclusivamente in alto, senza che la superficie del pianeta vi prenda parte. Se i vapori di Marte in qualche luogo si condensano in cristalli, in altri dovranno condensarsi sotto forma liquida. Tali condensazioni liquide (a meno di supporre che la superficie di Marte sia esattamente una superficie equipotenziale) si raccoglieranno nei luoghi più bassi: nasceranno se non mari, certamente laghi più o meno vasti. Le vie, per cui i vapori condensati giungono a simili serbatoi, non potranno avere altra forma, che quella di ruscelli o di fiumi, se si vuole, anche di corso intermittente. Ora tutto questo sistema potrebbe benissimo esser anche latente, cioè sotterraneo, come la circolazione

delle acque nei deserti africani: o potrebbero i laghi in questione esser tutti molto piccoli, e perciò invisibili, o insomma, il meccanismo, con cui la superficie del pianeta concorre alla circolazione dei vapori atmosferici, potrebbe per qualche ignota causa essere non osservabile. Sono tutte cose possibili: ma diventano supposizioni inutili, dal momento che sul pianeta si vedono apparenze precisamente simili a quelle, che ad un osservatore posto in Marte rivelerebbero l'analogo meccanismo di circolazione dei vapori dell'atmosfera terrestre.

247. Supponiamo dapprima un mare tranquillo composto di liquido quasi assolutamente trasparente, nel quale una profondità notevole sia necessaria per assorbire una parte della luce che l'attraversa. Di un fascio di raggi solari che vi penetrano normalmente (o almeno sotto un'incidenza non troppo obliqua), una minima parte sarà riflessa indietro specularmente, il resto penetrerà con una certa perdita fino al fondo, lo illuminerà, e dopo subìta altra perdita in quasi ugual proporzione, renderà quel fondo più o meno visibile ad uno spettatore che lo osservi stando fra Marte e il Sole, o ad ogni modo in direzione non molto differente. Ma questa visibilità del fondo dipenderà principalmente dall'altezza dello strato liquido. Se la massa liquida è molto profonda, essa potrà, malgrado la sua gran trasparenza, assorbire tutta la luce o quasi tutta: poca ritornerà allo spettatore, quel mare gli sembrerà nero affatto o poco meno. Se la profondità è piccolissima, si vedrà il fondo come se nessun ostacolo si frapponesse, e quasi completamente illuminato. Le profondità intermedie daranno dunque tutte le possibili gradazioni fra la nerezza completa, e la piena illuminazione. Simili effetti, sebbene non interamente uguali nelle identiche circostanze, dovrebbersi aspettare anche nell'ipotesi, che la superficie del mare non sia tranquilla, ma moderatamente agitata.

248. Se invece consideriamo uno strato liquido non assolutamente trasparente, ma capace di riflettere, sia colle sue molecole, sia per corpuscoli che vi stanno in sospensione una parte della luce che vi penetra, la nerezza completa non si potrà più avere, e la tinta più cupa possibile dipenderà dalla natura del liquido stesso e delle materie che tiene sospese: il *maximum* di oscurità si potrà avere con una profondità molto minore. Ad ogni modo si comprende, che senza fare alcuna ipotesi speciale sulla natura dei supposti mari di Marte, la varietà delle loro tinte può essere spiegata semplicemente con differenze di profondità o al più di trasparenza, e di composizione chimica. Infinite varietà di tinte nei mari terrestri sono determinate dalla diversa salsedine. Quanto più l'acqua è salata, tanto più cupo è il suo colore. E poichè in generale la salsedine nei mari terrestri decresce colla latitudine (a cagione della minor evaporazione e della maggior precipitazione), ne segue il colore più luteo e più chiaro, che i mari polari della Terra hanno in confronto degli equatoriali. « Coloro che ricavano il sale dal mare, dice Maury [1], sogliono stimare la ricchezza dell'acqua dal suo colore: più la tinta è verdastra, meno l'acqua è salsa; e questo dato è sufficiente per spiegarci i contrasti che le acque del Gulf-Stream presentano con quelle dell' Atlantico, non che il verde chiaro del Mare del Nord e dei mari polari, di fronte all'azzurro scuro dei mari tropicali, e specialmente dell'Oceano Indiano,

[1] *Geografia fisica del mare*, traduzione di L. Gatta. Torino, Loescher 1877, § 71.

le cui acque da alcuni poeti sono state dette nere ». Ora noti il lettore, che *anche in Marte il Mar Polare è di color meno oscuro che quelli della zona torrida, e i mari della zona temperata hanno una tinta intermedia*, come sopra dietro molte osservazioni si è esposto. Ecco qui una coincidenza che forse non è opera del caso, e di cui sembrerebbe difficile dare una spiegazione soddisfacente senza ammettere che le macchie oscure di Marte siano veri mari, simili nelle loro proprietà ai mari terrestri. Altro tema da studiare per i futuri osservatori.

249. La complicata rete di striscie oscure che riuniscono fra loro le macchie da noi considerate come mari è un altro argomento in favore di queste ipotesi. Tali striscie devono il loro colore alla medesima causa che produce il colore dei mari; non possono dunque esser altro che canali o stretti di comunicazione. La spiegazione sembra necessaria e sufficiente ad un tempo. Le strombature od allargamenti di questi canali verso le estremità, e il fatto che spesso si verifica del loro sbocco in vasti golfi sono appunto quanto si può aspettare in un tale sistema d'espansioni liquide. Il Nilo sbocca nella Gran Sirte, il Lete e il Tritone nella Piccola Sirte, il Phison e il Gehon nei corni del Golfo Sabeo, l'Indo nel Golfo delle Perle, il Gange nel Golfo dell'Aurora, e il Fasi nel Golfo Aonio: i fiumi delle Sirene, dei Giganti, dei Titani, dei Lestrigoni, e dei Ciclopi formano alle loro foci australi golfi più o meno importanti. Perfino il Nepente, sboccando nel Nilo forma accanto a questo un allargamento simile ad un ampio estuario. La rete, di cui mari e canali avvolgono le parti od isole luminose prende in conseguenza tutto l'aspetto di un allagamento insufficiente a coprire tutta la superficie del pianeta, ma sufficiente per non lasciare indivise aree troppo grandi. Niente di simile si vede sulla Luna. Volendo spiegare questi fatti con una semplice distribuzione di materie solide variamente colorate, rimarrebbe a ricercare, in qual modo una tale distribuzione reticolata ha potuto prodursi.

250. Si vede, che l'ipotesi d'una costituzione marittima e continentale della superficie di Marte è circondata da grandi probabilità. Ma questa potrebbe quasi elevarsi al grado di certezza, se si riuscisse ad affermare in modo indubitabile la reale disparizione dell'emissario orientale del Lago del Sole, di cui è parlato nel § 77. Questo canale, che fu veduto da Maedler nel 1830, da Kaiser, da Lockyer, da Rosse, da Lassell nel 1862, da Kaiser e da Dawes nel 1864; nel 1877 fu intieramente invisibile ad uno strumento certamente non inferiore in questo genere (come l'effetto dimostra) ad alcuno dei precedentemente impiegati, e malgrado le indagini più diligenti fatte in stato ottimo d'atmosfera, che condussero a scoprire appunto in quei paraggi oggetti così difficili e minuti, come sono il Fonte del Nettare e la parte dell'Agatodemone ad esso contigua, e la punta dell'Aurea Cherso. Se questa variazione sarà in avvenire constatata, credo difficile di trovarne interpretazione più semplice e più naturale che quella di una mutazione nel regime idraulico di quelle regioni, simile forse a quella, che a nostra memoria cambiò nella China il corso del fiume Giallo.

251. Non devo tacere di una obbiezione, che è stata fatta circa la presenza di mari sulla superficie di Marte: dedotta dal fatto, che non è mai stato osservato in questi mari il riflesso del Sole. Egli è certo che se Marte fosse una sfera pulita e dotata del potere di riflettere specularmente i raggi solari, noi dovremmo vedere una

piccolissima immagine del Sole brillare sul suo disco in forma di stella, in una posizione facile ad assegnare ogni momento. Ammettendo che la riflessione sia *totale* è anche facile calcolare l'intensità di quest'immagine, dato il diametro di Marte e la sua distanza dalla Terra e dal Sole. Nell'opposizione del 1877 per esempio, che avvenne il 5 settembre, essendo Marte alla distanza di 1,383 dal Sole, e di 0,377 dalla Terra, l'immagine in questione avrebbe dovuto figurare come una stella del diametro di $\frac{1}{24}$ di secondo d arco, e di splendore uguale a $\frac{1}{2100000000}$ di quello del Sole alla distanza 1. Ora il prof. Zöllner nelle sue *Ricerche fotometriche* (1) ha determinata la quantità della luce totale effettivamente riflessa da tutto il disco di Marte nelle sue opposizioni medie (2) ed ha trovato, che questa quantità è $\frac{1}{6994000000}$ della luce solare alla distanza 1 dalla Terra. Di qui si calcola, che la luce totale di Marte nell'opposizione del 1877 fu $\frac{1}{2990000000}$ di quella del Sole alla distanza 1. Dunque lo spettro luminoso del Sole riflesso nei mari di Marte avrebbe dovuto in quest'opposizione dar più luce da sè solo, che tutto il disco del pianeta quanto era largo.

252. Questo risultamento ha per base la riflessione *totale* dei raggi solari alla superficie del pianeta. Quando però si consideri quale piccola frazione un liquido trasparente, come l'acqua, riflette indietro nelle incidenze poco lontane dalla normale (come son quelle che dobbiamo sempre considerare nel caso presente), le conclusioni subiranno una grande modificazione. Se poniamo che i mari di Marte siano formati di un liquido per cui l'indice di refrazione sia $\frac{4}{3}$ (come press'a poco è per l'acqua), dalla teoria ondulatoria della luce risulterebbe riflessa (in direzione normale o poco diversa dalla normale) solo la 49ª parte della luce incidente (3). L'assorbimento nel doppio passaggio a traverso dell'atmosfera di Marte vuol pure esser tenuto in conto. Ammettendo che sia uguale a quello che produrrebbe l'atmosfera terrestre, si deve ridurre la luce dello spettro luminoso ancora alla metà per questa cagione, e in luogo di $\frac{1}{49}$ avremo $\frac{1}{98}$, o in numero rotondo, $\frac{1}{100}$. Con tutte queste supposizioni adunque si avrebbe per l'intensità dell'immagine solare veduta per riflesso nei mari di Marte

$$\frac{1}{21 \times 10^{10}} \text{ di quella del Sole.}$$

Nella sua citata opera Zöllner dà per luce di *α Aurigae,* dietro proprie osservazioni fotometriche,

$$\frac{1}{5{,}57 \times 10^{10}} \text{ di quella del Sole.}$$

(1) *Photometrische Untersuchungen.* Leipzig 1865, p. 131.

(2) Nelle quali si suppone la Terra distare dal Sole di 1,00000, Marte dalla Terra 0,52369 e dal Sole 1,52369.

(3) Jamin, *Cours de Physique*, vol. III, p. 677. La formola di Fresnel ivi riferita diventa indeterminata per l'incidenza normale. Questa indeterminazione si scioglie osservando che per i, r molto piccoli, si ha $i = nr$.

Perciò anche dopo tutte le accennate diminuzioni, il 5 settembre 1877 il Sole avrebbe dovuto apparire nello specchio convesso formato dai mari di Marte con una intensità uguale a $\frac{1}{4}$ di α *Aurigae*, e quindi come una bella stella di 3ª grandezza.

253. Si vede, che la questione non è tale, da esser passata sotto silenzio. Una stella di 3ª grandezza nel mezzo del Mare Cimmerio o del Mare Eritreo non mancherebbe di rendersi sensibile, malgrado l' influsso incontestabile, che la luce del disco circostante deve esercitare sulla visibilità. Ma non è probabile, che i mari di Marte siano tanto tranquilli da formare una immagine netta, come quella che qui si è supposto. L'esistenza di venti sembra provata da qualche osservazione (§ 102) già riferita. Un increspamento anche lievissimo della superficie scioglierà l' immagine unica in una infinità di piccole immagini. Ora egli è vero, che la somma delle loro intensità luminose non riuscirà per questo molto differente dall'immagine unica: ma quella somma sarà dispersa sopra un largo spazio, di cui l' estensione dipenderà dalla forma delle onde e dalla pendenza dei loro fianchi. La formazione di creste molto forti e molto ripide distruggerebbe affatto ogni immagine. Allora non è più inverosimile, che la specie di nebulosa così formata, la cui luce totale è in ogni caso una piccola frazione di quella del disco, passi inosservata allo spettatore. Ciò sarebbe ancora meno inverosimile, se si ammettesse nel liquido costituente i mari di Marte un potere refringente molto minore di quello dell'acqua. Ma sembra che tali liquidi siano molto rari in natura. Aggiungerò da ultimo che la presente questione è stata discussa già dal professore Phillips [1], il quale, pur dubitando dell' esistenza dei mari di Marte, non sembra credere, che dalla assenza di ogni traccia di riflessione dei raggi solari alla loro superficie si possa trarre contro quell' esistenza un argomento decisivo.

Sezione VIII.

Sopra le terre oscure, o regioni di mezza tinta esistenti alla superficie di Marte.

254. Nel cap. III di questo lavoro abbiamo fatto menzione di alcuni spazî che spiccano in mezzo ai mari di Marte con tinta più chiara di questi e tuttavia notabilmente più oscura che quella delle terre vicine. Queste sono: prima la parte occidentale d'Ausonia co' suoi rami Enotria e Japigia ed il Golfo Triangolare che sta in mezzo: poi nel Mare Eritreo le terre di Noé, di Deucalione, di Pirra, di Proteo e di Ogige: da ultimo l'Atlantide II nel Mare Cimmerio, e fra il Cimmerio e il Tirreno la parte più stretta o il collo della penisola Esperia. Probabilmente bisogna aggiungere a questi l' estremità occidentale del Chersoneso fra il Golfo di Prometeo e l' Euripo, e l' estremità boreale del Promontorio d' Osiride fra il Nilo e la parte più larga del Nepente. Qual è la natura di questi spazî?

255. Se si riguardano le macchie di Marte come semplici colorazioni di un suolo solido, tale varietà di tinte non domanda alcuna particolare spiegazione. Il regno minerale, ed anche, volendo, il vegetale possono offrire tutte le gradazioni di

(1) *Proceedings of the Royal Society* vol. XII, p. 435.

tutti i colori possibili. Ma se noi supponiamo queste varietà di chiaroscuro come procedenti dalla presenza di strati liquidi, troveremo una spiegazione altrettanto naturale e forse più istruttiva dei fatti osservati. Noi non abbiamo a far altro, che riguardare la minore oscurità di tinta come il prodotto di un minore assorbimento dei raggi solari nella massa liquida: e allora gli spazî in questione prenderanno per noi il significato di banchi submarini o di bassi fondi.

256. Nelle sezioni VIII, IX, X, XI e XII del capitolo III-io ho riferito le osservazioni, da cui emerge in modo indubitabile la tendenza che hanno le nebbie del Mare Eritreo ad occupare questi spazî di preferenza agli altri più oscuri. Ciò sembra indicare sui medesimi una temperatura diversa che sul mare circostante analogamente a quanto si osserva sui bassi fondi o banchi dei mari terrestri [1]. Che che si voglia pensare di questo, l'influsso di quelle aree di mezza tinta sui processi meteorici dell'atmosfera sembra più facile a dichiarare nell'ipotesi dei bassi fondi, che col semplice fatto della diversa struttura di una superficie dappertutto solida. Che se, prendendo esempio dalla Terra, si volesse supporre quelle aree costituite da mare meno intensamente colorato, oppure da banchi di molluschi o di alghe, basterebbe citare l'istmo ombreggiato d'Esperia, per creare una grave difficoltà, o almeno la necessità di cercare per questo caso speciale una spiegazione diversa.

257. I fenomeni presentati dal collo o istmo d'Esperia sono sommamente istruttivi nella questione che ci occupa. La parte ombreggiata fa corpo, non vi ha dubbio alcuno, coi due tronchi illuminati che stanno alle estremità della penisola: essa giace appunto nel luogo più angusto, dove il Mare Tirreno ed il Cimmerio maggiormente si avvicinano l'uno all'altro. È quasi impossibile difendersi dall'impressione, che il dosso della penisola scenda dolcemente verso il mezzo di essa, lasciando adito ad una comunicazione superficiale fra i due mari. Qualunque altra ipotesi in confronto di questa sembra forzata e poco naturale. Ma vi ha di più.

258. Noi abbiamo citato più sopra varie osservazioni, dalle quali risulta, che l'istmo ombreggiato di Esperia diventa più oscuro, e si confonde coi mari contigui tutte le volte che oltrepassa un certo limite di distanza dal centro del disco (cap. III, sezione XX). Questo fatto è quasi inesplicabile quando l'ombra dell'istmo si voglia riguardare come un accidente superficiale del suolo solido della penisola: riceve invece la più naturale spiegazione supponendola proveniente dall'assorbimento della luce in uno strato liquido. Infatti crescendo l'obliquità della superficie rispetto al raggio visuale, cresce anche la lunghezza del cammino che i raggi solari devono fare nella massa liquida prima e dopo della loro riflessione sul fondo. Gli è come se il mare in quel luogo diventasse più profondo, e quindi l'assorbimento della luce diventa maggiore e la tinta più oscura. Questa è una confermazione non cercata dell'ipotesi da me adottata per spiegare le macchie oscure del pianeta.

259. Dove le terre oscure si attaccano a spazî luminosi il confine non è sempre eguale. Le Terre di Deucalione e di Pirra si staccano con una netta divisione,

[1] « Seitdem namentlich Franklin den Gebrauch des Thermometers in der Schifffahrt empfahl, haben sich sehr viele Reisende von der Brauchbarkeit dieses Instrumentes bei der Erkennung weit ausgedehnter Sandbänke überzeugt ». Kaemtz, *Lehrbuch der Meteorologie*, vol. II, p. 114.

specialmente quest' ultima. Anche il distacco di Atlantide II sembra piuttosto preciso, sebbene non abbia potuto fare su quella località osservazioni abbastanza soddisfacenti. Dell' ombra di Esperia il limite australe sembra preciso, il boreale invece è molto sfumato. La gran penisola Ausonia poi sembra s' immerga per gradi quasi insensibili nella forte oscurità che termina la costa d'Aeria. Anche la punta del Chersoneso (per quanto ho potuto giudicare) si perde nel Mare Australe poco a poco. Invece la punta del Capo d' Osiride sebbene cresca di oscurità a misura che si va restringendo, termina tuttavia nettamente nella biforcazione molto nera del Nilo e del Nepente. Negli spazî interni la tinta varia con molta regolarità. Nella penisola di Deucalione essa sembra uguale per 40 e più gradi di longitudine. Se si prende l'oscurità come misura di profondità, abbiam qui livellazioni perfette, estese per spazî non minori di quelli che s' incontrano nella gran pianura dell'Europa orientale. Ed allora sembra naturale attribuir questo al lavoro delle acque o di quel liquido qualunque, di cui si suppongono formati i mari del pianeta.

260. Considerando le terre ombreggiate come regioni sommerse, si può formare anche qualche plausibile congettura sulla profondità dei mari che le coprono. Risulta infatti dalle esperienze fatte dal padre Secchi nel Mediterraneo, che un oggetto di dimensioni limitate non è più visibile a profondità maggiore di 60 metri, per quanto bianca si voglia supporre la superficie [1]. Sembra però, che la colorazione generale del fondo possa influire (sulla visione a grande distanza) anche da profondità maggiori, e non sarei alieno dal credere esatta l'osservazione fatta da De Tessan [2] circa l'influsso che eserciterebbe sul colore superficiale del mare (anche agitato) il banco delle Aguglie all'estremità australe dell' Africa, sebbene questo banco stia a 200 metri sotto il livello superficiale delle acque. In ogni caso quando si ammetta, che la trasparenza dei mari di Marte sia del medesimo ordine che quella dei nostri, si dovrebbe concludere, la profondità delle acque sopra i bassifondi esser molto piccola. Conclusione confermata benissimo dall' influsso indubitato che quei bassifondi hanno sulla formazione delle meteore atmosferiche. Così pure non molto grande può esser la profondità di tanti fra i canali di Marte, i quali, benchè larghissimi, si mostrano debolmente colorati. I più scuri che abbia visto, sono il Nilo, il Nepente ed il Tritone, i quali il 14 ottobre mi parvero di colore come di inchiostro di China assai forte e poco men che neri.

Sezione IX.

Del colore delle parti più luminose della superficie di Marte.

261. Quelle parti della superficie, alle quali si è dato il nome di *terre* o di *continenti,* sebbene siano per lo più distinguibili senza incertezza dai mari ed anche dalle terre sommerse, non son però tutte di ugual colore e di uguale splendore, anche astraendo, com'è ben naturale, dalla macchia polare. Circa il colore specifico non oso

(1) Queste esperienze sono riferite integralmente dal comm. Alessandro Cialdi nella sua opera *Sul moto ondoso del mare,* p. 258, 287.

(2) Cialdi, opera citata, pag. 248.

pronunziar nulla, prima perchè i vetri del nostro obbiettivo colorano i raggi in verde, secondo perchè il mio occhio essendo fortemente affetto da daltonismo, non distingue bene le gradazioni delle tinte rosse e verdi. L'aspetto generale del pianeta per me non fu quasi altro che quello di un chiaroscuro eseguito con inchiostro di China sopra un fondo generale luminoso di color mattone di cottura più o meno avanzata. Il Grande Diaframma forma, riguardo al colore, una linea di separazione molto notevole, ad ostro del medesimo le tinte essendo generalmente assai più cariche. Nella Tavola V ho cercato di dar qualche idea della cosa, ma convien pur confessare, che (per colpa mia, non dell'artista) quelle figure, per quanto concerne la colorazione, sono molto imperfette.

262. Riguardo al maggiore o minore splendore delle terre è difficile pronunziare qualche cosa di assoluto: perchè spesso sono coperte da veli più o meno densi, che ne accrescon la luce. Questi veli mi pare che si disciolgano o almeno diventino più rari quando il Sole culmina alla massima altezza sopra una data località; nel qual caso credo d'aver notato che lo splendore della regione considerata sia il minimo possibile, il suo colore meno bianco e più vicino a quello del mattone cotto. L'Ellade ha mostrato tali variazioni di colore a più riprese, come si è indicato a suo luogo. Anche tutta la zona delle terre equatoriali, che dal settembre al dicembre 1877 era sempre stata luminosissima (specialmente lungo il Grande Diaframma), nel febbraio e nel marzo 1878 riscaldò la sua tinta e nel medesimo tempo (salvo che nel centro di Chryse) affievolì la sua luce. Mentre l'Ellade in settembre e ottobre 1877 era sempre stata molto meno luminosa di Aeria, di Arabia e di Chryse, al principio di marzo 1878 la proporzione s'invertì nel modo più manifesto. Credo che di questo si possa assegnar ragione, notando, che al principio di marzo Aeria, Arabia e Chryse erano affatto scoperte da veli nebulosi, e lasciavan vedere tutti i loro canali: mentre in settembre ed in ottobre eran sepolte sotto un velo quasi impenetrabile, che nulla lasciava trapelare alla vista. Al contrario l'Ellade, che il 12 ottobre era scoperta al punto da lasciar vedere l'Alfeo onde è bipartita, più tardi apparve sempre come un disco brillante, talvolta luminoso al punto, da imitare la macchia nevosa: ciò che non so meglio spiegare, che coll'ammettere su di essa un forte velo di nebbia.

263. Si capisce, come tali vicende rendano quasi impossibile il dare alle diverse regioni la proporzione conveniente di tinta, anche astraendo dal colore. In generale nella Tavola V mi son attenuto alle proporzioni osservate nei mesi di settembre e di ottobre, diminuendo però la chiarezza della zona equatoriale, onde tener conto del suo vero stato quale si osservò in febbraio ed in marzo. Ma tutto questo è ancor meno che un tentativo grossolano. La vera colorazione di Marte dovrà esser oggetto di studî speciali per parte di osservatori più abili di me in questa materia, e non potrà esser ben conosciuta, se non quando si sapranno meglio apprezzare gli effetti delle variazioni apparenti prodotti dalle precipitazioni meteoriche. Raccomando specialmente lo studio della Memnonia, la cui chiarezza ho trovato eccezionale in qualunque circostanza, e quello delle regioni contigue al Lago Tritone, dove mi è parso scorgere un breve tratto non meno bianco che la neve polare (§ 161).

Sezione X.

Osservazioni sulla struttura del pianeta e sopra alcune notabili configurazioni esistenti alla sua superficie.

264. L'aspetto della carta annessa a questa Memoria offre alcune singolarità e parallelismi di struttura, che sembrano connessi colla formazione del pianeta. Forse non sarà ingrato ai geologi l'accennare qui i principali e più manifesti.

265. I. *La maggior parte delle terre è raccolta in una zona equatoriale continua,* la quale circonda tutto il pianeta senza interruzione di mari considerevoli. Tale zona è limitata al sud dal Grande Diaframma, il cui corso nel modo più preciso e conveniente si descrive partendo dalla Gran Sirte, e camminando lungo le coste d'Aeria, d'Arabia e di Chryse sull'Eritreo fino al Gange: di là contornando l'Aurea Cherso e Thaumasia, ed entrando per le Colonne d'Ercole nel Mare delle Sirene: ritornando pei lidi boreali di questo, del Mare Cimmerio e del Mar Tirreno fino alla Gran Sirte. In questo giro, s'intendono traversati gl'istmi settentrionali delle penisole di Deucalione, di Pirra, delle due Atlantidi e di Esperia. Il confine della zona equatoriale verso il nord non ha potuto essere descritto nella opposizione del 1877: però dalle osservazioni degli Astronomi precedenti sembra certo, che tal confine poco differisca dal 50° parallelo di latitudine boreale, e che anch' esso giri tutt' intorno al pianeta. La zona delle terre equatoriali dunque non è simmetrica rispetto all'equatore, ma giace più dalla parte del nord, ed i due bacini marittimi polari da essa separati sono molto disuguali.

266. II. *Nell'emisfero australe vi sono altre terre disposte in due zone parallele alla precedente.* La prima zona corre sotto le latitudini temperate, ed è formata dalle regioni dette Icaria, Fetontide, Elettride, Eridania, Ausonia (parte australe), Ellade, Noachide, Argyre e Terra d'Ogige: gira tutt'intorno al polo oscillando fra il 30° e il 60° parallelo con una sola interruzione notabile di 40° di longitudine di contro a Thaumasia. Quest'ultima regione si può dire che appartenga tanto a questa, quanto alla zona equatoriale. Altra interruzione di minor importanza è formata dall'Ellesponto, seppure non vi è in quel luogo un basso fondo, che ne occupa la maggior parte (§ 182). Pare che a questa zona ne corrisponda un'altra simmetrica nell'emisfero boreale, ma di questo non posso parlare *de visu.* La seconda zona delle terre australi non si estende che per 120° di longitudine ed è formata dalle due isole di Thyle, con un'interruzione nello stretto d'Ulisse. Fra questa e la precedente il Mare Cronio forma una zona di mare e una divisione completa.

267. III. *Fra la zona equatoriale e quella delle latitudini temperate australi corre una serie di mari interni interrotti da lunghe penisole continentali o subacquee tutte inclinate nella direzione da nord-ovest a sud-est.* Questa singolarità è una di quelle che più colpiscono nella carta di Marte. I mari interni sono: l'Adriatico, il Tirreno, il Cimmerio, il Mare delle Sirene, il Lago del Sole e della Fenice, poi i tre sfondi dell'Eritreo, cioè il Golfo dell'Aurora, il Golfo delle Perle ed il Golfo Sabeo: ai quali per complemento si può aggiungere ancora il *Deltoton* o Golfo Triangolare. Le penisole, tutte obbedienti alla medesima direzione generale sono: la parte

media e boreale d'Ausonia, coi suoi due rami, Enotria e Japigia: quindi Esperia, Atlantide II e Atlantide I. Poi (oltrepassata l'irregolarità di distribuzione dipendente da Thaumasia) di nuovo abbiamo l'Aurea Cherso, della quale forse la Terra di Proteo è un'appendice: la penisola di Pirra e quella di Deucalione. Come si vede, la presenza del Mare Eritreo non disturba per nulla questa legge di formazione, la quale, quanto alla direzione delle penisole è violata apparentemente solo dove giace la regione Thaumasia. Queste lingue di terra sono o intieramente, o in parte sottomarine: non vi è che una eccezione, Atlantide I, la quale però potrebbe anche non esser tale in modo assoluto (§ 124). È notabile, che la direzione in cui giacciono tutte queste penisole è quella che acquisterebbero i venti alisei e le correnti marine in quella regione dipendentemente dalla rotazione del pianeta. Non è dunque impossibile, che tutto questo frastaglio sia un lavoro delle mare e dell'atmosfera, e le penisole, depositi di lenta e graduale formazione, o residui d'un lavoro di corrosione.

268. IV. *Dove le anzidette penisole si attaccano alle due zone continentali esse son fiancheggiate dalle bocche di ampî canali che traversano le zone medesime.* Se noi percorriamo le connessioni di tutte le penisole colla zona equatoriale, troviamo, che la penisola di Deucalione è fiancheggiata dal Gehon e dall'Indo; quella di Pirra, dall'Idaspe e dal Gange: l'Aurea Cherso dall'emissario della Fontana di Gioventù e dall'Agatodemone: l'Atlantide I dal fiume dei Titani e da quello dei Lestrigoni: l'Atlantide II dal fiume dei Lestrigoni e da quello dei Ciclopi: Esperia, dal fiume degli Etiopi e dal Lete. L'attacco boreale di Ausonia con Aeria è imperfetto, e qui la legge è imperfettamente osservata, o almeno non manifestamente. La legge vale anche per le connessioni delle penisole colla zona delle terre temperate australi, per i casi dove tali connessioni esistono. L'Atlantide I sta fra le Colonne d'Ercole e il Simoe: l'Atlantide II fra il Simoe e lo Scamandro: Esperia, fra lo Scamandro e lo Xanto, l'Ausonia australe, fra lo Xanto e l'Euripo. Questi fatti non sembrano privi d'importanza: essi confermerebbero il sospetto che tutte quelle penisole siano in un modo o in un altro lavoro delle acque.

269. V. *I canali, da cui le due zone; equatoriale e temperata australe, sono traversati, giacciono in gran parte secondo il meridiano.* Questo fatto potrebbe sembrare una pura conseguenza dell'allungarsi di queste zone lungo il parallelo. Però esso si mantiene anche in casi, in cui una direzione inclinata sarebbe più naturale, per es. nel fiume dei Lestrigoni, e dei Ciclopi e dei Titani. Singolare poi al tutto è la direzione esattamente meridiana dell'Alfeo che divide l'Ellade, sebbene in quel caso nulla sembri domandare quella direzione piuttosto che qualunque altra.

270. VI. *La zona equatoriale è suddivisa in altre zone da lunghissimi canali giacenti nella direzione del parallelo.* Questi canali, che sono il Nilo, l'Oceano e l'Eunosto, formano una cintura completa intorno al globo di Marte, in generale però più prossima al polo boreale, che al polo australe del pianeta. Essi variano molto di larghezza e a quanto pare anche di profondità. Sarà da esaminar più tardi con qual convenienza si possano riguardare come una serie di mari interni analoghi a quelli che furono descritti qui sopra, § 267. Nell'opposizione del 1877 non si è potuto osservarli abbastanza bene per decidere se in essi vi sia qualche soluzione di continuità.

271. VII. *Non esistono in Marte grandi masse continentali continue: ma tutta la superficie asciutta del pianeta è divisa da molti canali in un numero stragrande d'isole.* Questa singolare ed inaspettata disposizione dei mari e dei continenti di Marte, così diversa da ciò che si vede sulla Terra, risulta evidente dal semplice aspetto della carta. Ma non si deve credere, che la rete dei canali in questa delineati sia completa. Anzi essa non comprende che le linee più grosse e più facili a vedere in tanta distanza. Già ho avuto occasione d'indicare, che quanche volta i canali sembrano allargarsi e perdersi in sfumature quasi impercettibili, fenomeno che nel modo più naturale sembra spiegato coll'ammettere suddivisioni dei canali maggiori in un numero più o men grande di altri minori, troppo sottili per esser visibili uno ad uno. Ma vi ha ancora altro. Durante il corso delle mie osservazioni in ottobre 1877 mi è avvenuto due o tre volte di aver momenti brevissimi di quiete atmosferica assoluta o poco men che tale. In queste circostanze pareva che ad un tratto un denso velo si levasse dalla superficie del pianeta, la quale appariva come un complicato ricamo a più colori. Ma tale era la piccolezza di quei particolari, e così fuggevole la durata di tale stato di cose, che non era neppur possibile formarsi una coscienza ben chiara e certa delle cose vedute, e rimaneva solo l'impressione confusa di una fitta rete, di linee sottili, e di minute macchie. Una simile osservazione si trova anche presso Secchi, in data del 29 giugno 1858. « Marte è tutto rosso, e solo leggermente sparso qua e là di macchiette gialle, rosse, e cupe, che formano una specie di variegato difficilissimo a descriversi e che non dà presa alla fantasia (¹) ». Tali osservazioni conducono a credere, che sia dei canali di Marte come dei solchi della Luna, il cui numero cresce a misura che si aumenta il potere ottico e l'attenzione degli osservatori. In Marte dunque la separazione del liquido e del solido non è così grande e perfetta, come sulla Terra. Sono le sue isole banchi pochissimo emergenti da un vasto impaludamento, oppure scogli divisi da un sistema di fessure della crosta? L'una e l'altra supposizione è per ora egualmente plausibile: ma forse non è lontano il tempo, in cui anche a questioni di tal fatta si potrà dare sufficiente risposta.

272. I grandi sollevamenti e le grandi depressioni della Terra sono attribuite dai geologi alle forze interiori della sua massa, che non sembrano ancora del tutto esaurite, e sono principalmente effetto o trasformazione del calore interno del nostro pianeta. Se noi ammettiamo con Laplace che i pianeti siansi formati per condensazione o per agglomerazione consecutiva di parti primitivamente distribuite sopra un grandissimo spazio, sarà facile, dietro i principî della teoria meccanica del calore, trovare di quanto la temperatura di quella materia ha dovuto elevarsi pel fatto della condensazione. Questo calore di condensazione fu calcolato da Helmholtz pel Sole in 28 milioni di gradi centesimali. Per la Terra trovo, dietro gli stessi principî, 8988°: e per Marte 1995° (²). Tutte le altre circostanze essendo uguali, il calore interno di

(¹) *Memorie dell' oss. del Collegio Romano*, vol. I, pag. 22.

(²) Questo calcolo è fatto sull'espressione conosciuta $\frac{3}{5}\,\frac{M}{\mu}\,:\,\frac{1}{425}\,\frac{\rho^2}{R}$ dove M R son la massa e il raggio di Marte (o dell'astro per cui si fa il calcolo), μ, ρ le stesse quantità per la Terra. Si suppone che il calore specifico della massa sia costante ed uguale a quello dell'acqua, e che l'equivalente meccanico del calore sia di 425 chilogrammetri. L'unità delle lunghezze è naturalmente il metro.

Marte dovrebbe esser molto minore che quello della Terra. Se a questo si aggiunge che secondo l'ipotesi di formazione Marte dovrebbe esser più antico della Terra, e quindi aver subìto un periodo più lungo di raffreddamento: che, il suo volume essendo tanto minore, il suo raffreddamento ha dovuto esser tanto più rapido: non sembrerà irragionevole congetturare, che esso si trovi più che la Terra progredito verso il periodo dell'assoluta impotenza delle forze interiori e dell'esclusivo predominio delle forze livellatrici della sua atmosfera e de' suoi mari.

273. Qualunque sia il peso (per ora ad ogni modo non molto grande) che si voglia dare a queste speculazioni, una cosa è manifesta: l'importanza, che lo studio accurato della superficie di Marte ha non solo per la storia delle formazioni planetarie, ma anche per la geologia terrestre. La Luna è un corpo troppo diverso dalla Terra, per potere dal suo studio ricavare molto frutto per la storia del nostro pianeta. Sotto questo riguardo Marte è di gran lunga più promettente. Non solo la geologia, ma anche la meteorologia terrestre potrà ricavar molto lume dallo studio di questo pianeta. In altro luogo ho mostrato come da esso si possa aspettare un giudizio poco meno che definitivo sulle novelle ipotesi ideate da Croll e da altri per ispiegare i periodi glaciali per mezzo delle variazioni dell' eccentricità dell' orbita terrestre. Sopra le nevi polari di Marte, come si è veduto, noi sappiamo già molte cose, che invano desideriamo di conoscere per le croste glaciali che circondano i poli della Terra. E sebbene il sistema generale di meteorazione atmosferica in Marte sembri diverso da quello che è in vigore presso di noi (§ 243), non si può dubitare che la possibilità di comprendere qui in un colpo d'occhio ciò, che sulla Terra domanda il concorso di tanti uomini e di tanti telegrafi, potrà illuminare le questioni relative alla nostra meteorologia, come due esempî paralleli di un medesimo problema si rischiarano l'un l'altro, quand'anche non riguardino dati uguali e circostanze esattamente identiche.

Sezione XI.

Del limite di visibilità degli oggetti minuti sul pianeta Marte.

274. Terminerò questa Memoria col dimostrare che i vantaggi accennati nel paragrafo antecedente come conseguenza di uno studio continuo ed accurato del pianeta si possono ottenere realmente in misura molto maggiore di quello che si sia sperato finora, purchè all'esplorazione del pianeta si consacrino mezzi adeguati e soprattutto la necessaria perseveranza. Fino a qual limite di grandezza si potrà sperare di vedere distintamente oggetti collocati sulla superficie di Marte? Di tale importante quistione esaminerò colla scorta dell'esperienza da me guadagnata quattro casi: cioè il limite di visibilità: 1° di una macchia luminosa sopra fondo oscuro; 2° di una macchia oscura sopra fondo luminoso; 3° di una linea luminosa sopra fondo oscuro; 4° di una linea oscura sopra fondo luminoso.

275. A. *Macchia luminosa sopra fondo oscuro.* Non conosco sopra Marte alcuna isola abbastanza minuta, che si presti ad osservazioni di questa fatta. La seguente è ancora molto lontana dal limite. Il 26 febbraio 1878, essendo il diametro del disco ridotto a 5″,82 vidi presso il lembo del pianeta l'Isola d'Argyre sotto forma d'un

ellisse luminosa allungata. Dalla carta rilevo, che il diametro maggiore di questa ellisse poteva essere di 15° di circolo massimo, il minore forse la metà. In secondi angolari sarebbero 0″,77 e 0″,38. Pare dunque, che una macchia luminosa od isola rotonda di 0″,50 di diametro non dovrebbe offrir difficoltà, anche projettandosi sopra un mare molto debolmente colorato, com' era l' Eritreo nel nostro caso. Ma è certo, che con un contrasto maggiore di luce e d' ombra sarebbe visibile anche una macchia sottendente un angolo assai minore.

276. B. *Macchia oscura sopra fondo luminoso.*

Osservazione I. Il 2 ottobre 1877 scoprii le due piccolissime macchie oscure dette sulla carta Fonte del Nettare e Fonte di Gioventù. Mi parvero rotonde, ma tanto eran piccole, che sulla loro forma non ho osato pronunziare con certezza. Stando ai disegni fatti il diametro di ambedue non superava $\frac{1}{8}$ della loro reciproca distanza, la quale stimai esser $\frac{1}{5}$ del diametro del disco, cioè di 21″,2. Ne risulta pei diametri della 2 piccole macchie 0″,53. Ambedue spiccavano con molta nerezza sul fondo luminoso circostante.

Osservazione II. Il 14 ottobre 1877 scoprii senza alcuna difficoltà il Lago Meride e potei anche accertare che la sua forma tende ad imitare quella di un quadrato. Dagli schizzi che ne ho fatto risulterebbe, il suo lato essere la quinta parte della distanza fra il Lago Tritone e il Nilo presso la foce del Nepente: distanza che sulla carta è 20°. Essendo in quel giorno il diametro del disco 18″,8, ne concludo per il lato del quadrato formante il Lago Meride 0″,65. È dunque possibile distinguere ancora *la forma* di una macchia oscura di questa grandezza sopra un fondo luminoso. Qui i limiti erano ben precisi e il contrasto di luce e d' ombra molto forte.

Osservazione III. Il 21 febbraio 1878, essendo il diametro apparente del disco ridotto a 6″,00 vidi benissimo il Lago del Sole a poca distanza dal centro del disco, e mi parve, che l' avrei veduto ancora quando fosse stato alquanto più piccolo: potei ad ogni modo distinguere perfettamente la sua rotondità. Supponendone il diametro di 11°, se ne conclude per larghezza apparente al tempo dell' osservazione 0″,58. La tinta non era molto scura ed il contrasto col fondo circostante non molto forte.

Osservazione IV. Lo stesso Lago del Sole, in una posizione anche non molto centrale, fu veduto da me distintamente il 21 marzo 1878, coll' Eosforo suo emissario. In quel giorno il diametro apparente del disco era di 5″,2: il Lago del Sole sottendeva dunque col suo diametro apparente maggiore 0″,50 appunto, e col suo diametro apparente minore anche un po' meno.

Conclusione. Il risultato generale di queste osservazioni è, che in condizioni favorevoli si può vedere in Marte una macchia oscura su fondo chiaro senza difficoltà, quando il diametro apparente della medesima sottenda 0″,50. Un diametro un po' maggiore (0″,60) permette anche di distinguere qualche cosa della figura delle macchie.

277. C. *Linee luminose sopra fondo oscuro.*

Osservazione I. Il 4 febbraio 1878, essendo il diametro del disco ridotto a 6″,67 non solo vidi benissimo lo stretto collo della penisola Esperia, ma potei accertarmi che esisteva ancora sovr' esso la medesima ombra, che vi aveva notato tante altre

volte. La larghezza di quel collo non può stimarsi a più di 8° e l'arco da esso occupato nell'occhio dell'osservatore non arrivava certamente a 0″,50. Questo caso è notabile così pel debole contrasto, come ancora per la possibilità di distinguere in sì piccolo spazio una diversità di tinte.

Osservazione II. Il 7 febbraio 1878, essendo il diametro del disco ridotto a 6″,54 mi apparve l'Atlantide I « con una strana evidenza ». La larghezza di questa penisola non arriva in nessun luogo a 5°. Quindi nel tempo di quella osservazione essa sottendeva nell'occhio certamente meno di 0″,28.

Osservazione III. Il 5 marzo 1878, essendo il diametro del disco ridotto a 5″,60 vidi benissimo la penisola di Deucalione distinta fra gli spazî più oscuri del Golfo Sabeo e del Golfo delle Perle che la fiancheggiano. Mettendo 10° per la larghezza della parte considerata, ne concludo la larghezza apparente 0″,49. Caso notabilissimo pel poco contrasto di tinte.

Osservazione IV. Il 12 marzo 1878, essendo il diametro del disco ridotto a 5″,40 vidi tutta Esperia, ma l'ombra sul collo non era più discernibile. Ammettendo come sopra 8° per la larghezza minima della penisola, essa rimaneva ancor visibile sotto un angolo di 0″,37.

Conclusione. Dall'insieme di queste osservazioni appare, che una linea luminosa si può benissimo ancora distinguere su fondo oscuro quando la larghezza arrivi a $\frac{1}{3}$ di secondo: una larghezza di $\frac{1}{2}$ secondo permette di distinguerla anche quando si tratti di contrasti molto deboli.

278. D. *Linee oscure sopra fondo luminoso.*

Osservazione I. Il 12 ottobre 1877, essendo il diametro del disco 19″,41 vidi molto chiaramente la divisione dell'Ellade in due parti; e la linea oscura dividente (che sulla carta è chiamata fiume Alfeo) stando allo schizzo fatto in grande scala, non eccedeva $\frac{1}{15}$ del diametro dell'Ellade stessa. Sulla carta questo diametro prende 27°,4 di circolo massimo. L'Alfeo avrebbe dunque la larghezza reale di 1°,83. Se ne deduce per la larghezza apparente nel tempo dell'osservazione 0″,31. Il contrasto era poco sensibile e la linea poco oscura, forse per l'inevitabile diffusione del contorno.

Osservazione II. Il 14 ottobre delineai come striscia oscura e forte il fiume Nepente, la cui larghezza certo non era più che un terzo di quella del Lago Meride. Dal calcolo qui sopra esposto sul Lago Meride (§ 276) risulta per la larghezza apparente del Nepente 0″,22. Qui il contrasto fra la luce e l'ombra era fortissimo.

Osservazione III. Il 21 ottobre 1877, essendo il diametro apparente del disco 17″,52 scoprii il fiume Simoe fra l'Elettride e la Fetontide, e potei distinguere benissimo che era curvato in foggia di arco poco meno che semicircolare. Dallo schizzo fatto pare che non si possa mettere la sua larghezza a più di $\frac{1}{6}$ della lunghezza, e questa prende sulla carta circa 12°. Il Simoe ha dunque 2° di larghezza, i quali in quel giorno e in quella posizione sottendevano nell'occhio dell'osservatore 0″,31. La linea era visibile con tutta nettezza e senza la minima difficoltà.

Osservazione IV. Il 13 marzo 1878 essendo il diametro apparente del disco ridotto a 5",37 vidi distintamente il fiume dei Ciclopi, e meno chiaramente, ma tuttavia con bastevole certezza il fiume degli Etiopi, l'uno e l'altro presso la foce nel Mare Cimmerio. A nessuno dei due è possibile assegnare una larghezza maggiore di 5°. Ciò sottendeva in quel momento 0",23, e furono visibili quei fiumi come due linee parallele di grossezza probabilmente minore di questa.

Conclusione. Sono dunque ben visibili filetti oscuri sulle terre luminose di Marte quando la loro larghezza apparente giunge a $\frac{1}{4}$ di secondo. La larghezza di $\frac{1}{3}$ è sufficiente nel caso di contrasto poco sentito.

279. *Conclusione generale.* Ove noi ammettiamo, che con un istrumento uguale al nostro Equatoriale di Merz si possa investigare la superficie di Marte in ottime condizioni d'atmosfera, quando il suo disco arriva a 25" di diametro apparente: risulterà che una macchia luminosa su fondo oscuro, od oscura su fondo luminoso sarà visibile senza troppa difficoltà, quando ad un discreto contrasto di tinta si congiunga un diametro reale uguale ad $\frac{1}{50}$ di quello del pianeta (137 chilometri). Epperciò usando sufficiente diligenza si potranno scoprire in Marte (almeno nelle parti non troppo vicino al polo boreale) tutte le isole non minori della Sicilia, e tutti i laghi non minori del Ladoga e dello Tsad. Isole come l'Islanda e Ceylan, laghi come quello d'Aral e il Victoria Nyanza devono essere oggetti molto cospicui. Similmente una striscia luminosa su fondo oscuro od oscura su fondo luminoso dovrà essere ancora visibile, quando la sua larghezza non sia meno di $\frac{1}{100}$ del diametro del pianeta (70 chilometri circa). Quindi lingue di terra od isola come la Jutlandia e Cuba e l'istmo centrale Americano: stretti o laghi come il Tanganyika, il Nyassa, il Mar Vermiglio devono esser distinguibili, usando qualche attenzione. Facilissimi dovrebbero essere oggetti come l'Italia, l'Adriatico, il Mar Rosso, Sumatra e Nippon.

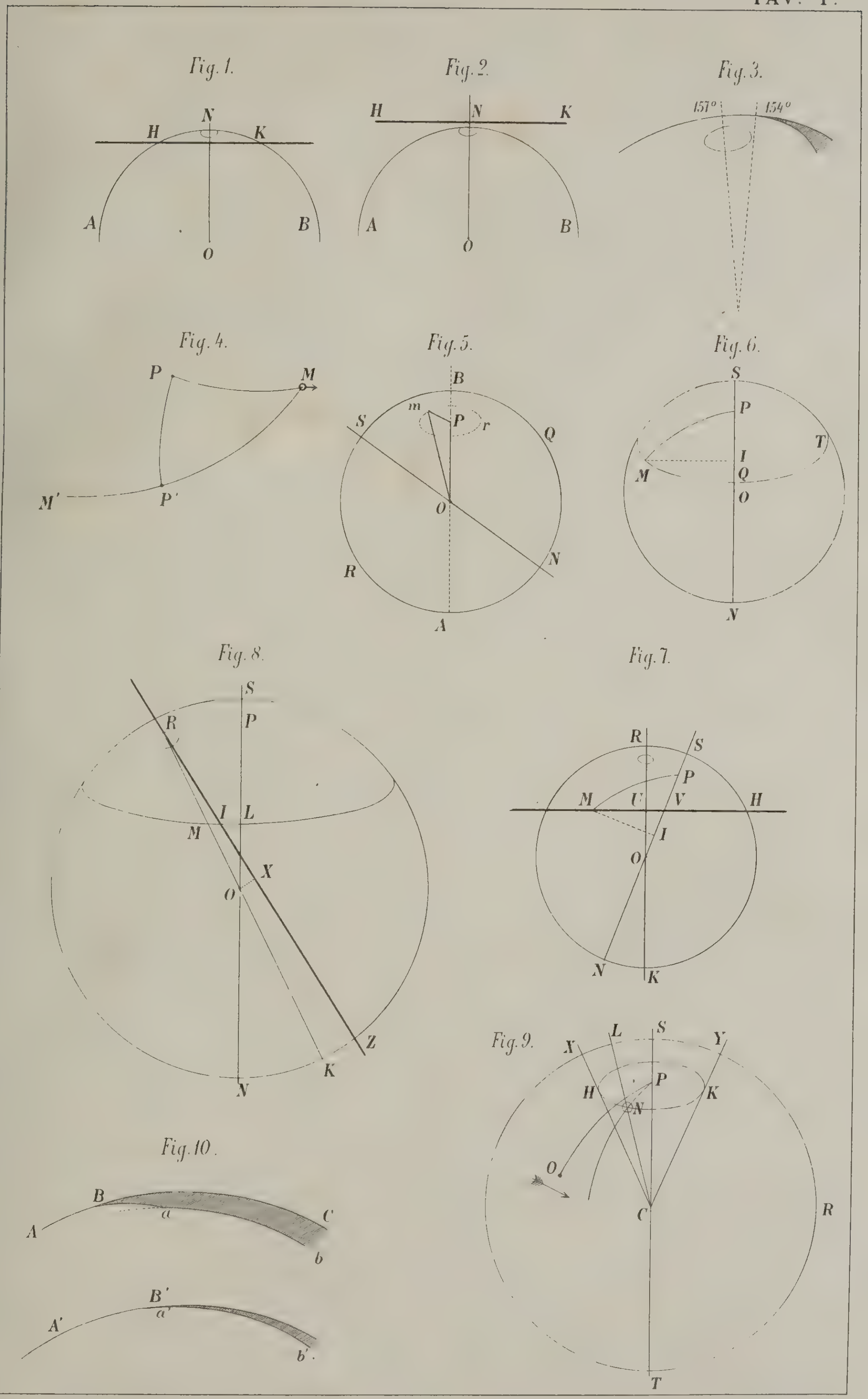
280. Tali limiti di visibilità s' intendono riferiti a quanto si può ottenere da un obbiettivo di 218 millimetri d'apertura come il nostro. Evidentemente l'ostacolo invincibile che qui pone termini impreteribili è la diffusione dei contorni proveniente dalla diffrazione. Tale diffusione fa sì che le linee più sottili sono allargate in strisce gradatamente decrescenti d' intensità d' ambo i lati, per il che il contrasto col fondo viene grandemente diminuito: l' occhio non afferra più quelle forme che con isforzo, e la visione diviene penosa ed incerta. A questo si rimedia soltanto col crescere l'apertura dell' obbiettivo, siccome è noto. Le conseguenze indicate nel paragrafo precedente danno dunque soltanto un limite *inferiore* di quanto è possibile ottenere nell' esame di Marte e non vi ha dubbio che questo limite sarà presto oltrepassato quando a tale esame si consacri la potenza di alcuno dei giganteschi Refrattori, che gli ottici negli ultimi anni hanno imparato a costruire.

INDICE DELLE MATERIE

INTRODUZIONE . . . . Pag. 308
CAPITOLO PRIMO — *Nuova determinazione della direzione dell' asse rotatorio di Marte* . . . . » 310
CAPITOLO SECONDO — *Determinazione del luogo areografico dei punti fondamentali e costruzione della carta*. . . . . » 325
Sezione I. *Osservazioni e loro riduzione* . . . . » ivi
Sezione II. *Comparazione delle posizioni precedenti con quelle ottenute da Maedler e da Kaiser* . . . . » 341
Sezione III. *Costruzione della carta areografica* . . . . » 345
CAPITOLO TERZO — *Descrizione dell' emisfero australe del pianeta e di una parte dell'emisfero boreale, secondo le osservazioni fatte a Milano nel 1877 comparate con quelle di Astronomi anteriori* . . . . » 347
Sezione I. *Generalità* . . . . » ivi
Sezione II. *Il Grande Diaframma e il Corno d'Ammone* . . . . » 350
Sezione III. *Golfo Sabeo: Phison, Hiddekel e Gehon* . . . . . . » 352
Sezione IV. *Golfo delle Perle: Indo ed Idaspe: Chryse*. . . . . » 354
Sezione V. *Gange e Golfo dell'Aurora. Ophir. Aurea Cherso* . . » 356
Sezione VI. *Thaumasia, Lago del Sole*. . . . . » 259
Sezione VII. *Lago della Fenice. Eosforo, e Fasi* . . . . » 361
Sezione VIII. *Isola d'Argyre: Terra di Noé* . . . . » 363
Sezione IX. *Mare Eritreo, Terra di Deucalione*. . . . . » 365
Sezione X. *Terra di Pirra*. . . . . » 367
Sezione XI. *Osservazioni generali sulle terre oscure del Mare Eritreo* » 368
Sezione XII. *Terre d' Ogige e di Proteo*. . . . . » 370
Sezione XIII. *Arasse, Icaria, Colonne d'Ercole* . . . . » 371
Sezione XIV. *Dedalea, Canale delle Sirene, Oceano*. . . . . . . » 373
Sezione XV. *Mare delle Sirene, Memnonia, Amazonide, Canali dei Giganti e dei Titani* . . . . » 375
Sezione XVI. *Atlantide I e II. Golfo e canale dei Lestrigoni* . . . » 377
Sezione XVII. *Mare Cimmerio: Fiume dei Ciclopi*. . . . . » 378
Sezione XVIII. *Fetontide, Elettride, Eridania* . . . . » 380
Sezione XIX. *Mare Cronio. Thyle I e II* . . . . » 381
Sezione XX. *Esperia, fiume degli Etiopi* . . . . » 382
Sezione XXI. *Mare Tirreno. Piccola Sirte. Fiume Lete* . . . . . » 384
Sezione XXII. *Ulteriori osservazioni sul fiume Oceano. Eunosto, Campi Elisi* » 385
Sezione XXIII. *Libia: Gran Sirte e Nilo: fiume e Lago Tritone: fiumi Nepente e Thot: Lago Meride* . . . . » 387
Sezione XXIV. *Ausonia, Mare Adriatico, Chersoneso, Euripo* . . . . » 394
Sezione XXV. *Ellade, fiume Alfeo, Ellesponto* . . . . » 395
Sezione XXVI. *Mar Polare Australe*. . . . . » 397
Sezione XXVII. *Considerazioni generali sui risultamenti ottenuti nello studio comparativo precedente* . . . . » 399

CAPITOLO QUARTO. — *Osservazioni, deduzioni, e congetture sopra la natura della superficie del pianeta e della sua atmosfera* pag. 405
Sezione I. *Luogo della calotta polare australe osservato in diverse opposizioni* . . . . » ivi
Sezione II. *Variazioni di grandezza della macchia polare australe* . » 407
Sezione III. *Sopra la figura della macchia polare australe.* . . . . » 411
Sezione IV. *Sopra la natura della macchia bianca polare* . . . . . » 415
Sezione V. *Sopra l'atmosfera di Marte* . . . . » 415
Sezione VI. *Processi meteorici sulla superficie di Marte.* . . . . . . » 419
Sezione VII. *Delle macchie oscure, che si osservano nella superficie di Marte* » 422
Sezione VIII. *Sopra le terre oscure, o regioni di mezza tinta esistenti alla superficie di Marte* . . . . » 427
Sezione IX. *Del colore delle parti più luminose della superficie di Marte* » 429
Sezione X. *Osservazioni sulla struttura del pianeta e sopra alcune notabili configurazioni esistenti alla sua superficie* . . . . » 431
Sezione XI. *Del limite di visibilità degli oggetti minuti sul pianeta Marte* » 434

TAV. I.

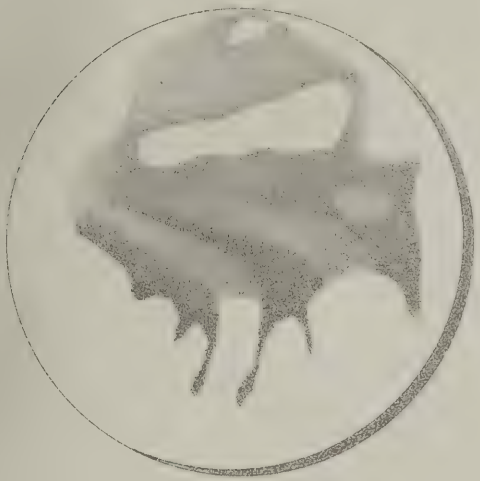


1343 Milano, Lit. A. Moldenhauer

XX.

2 Ottobre

ω = 18° δ = −24°



XVII.

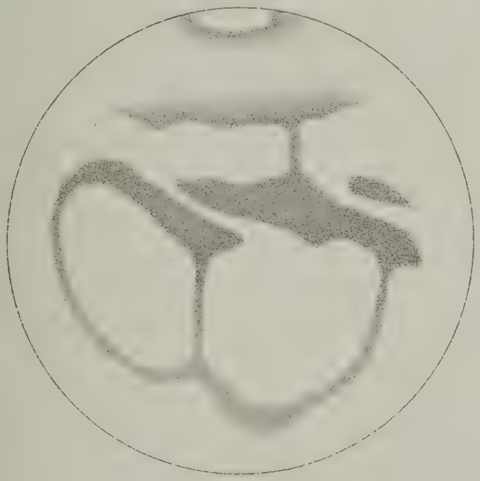
26 Settembre

ω = 85° δ = −23°

XIII.

18 Settembre

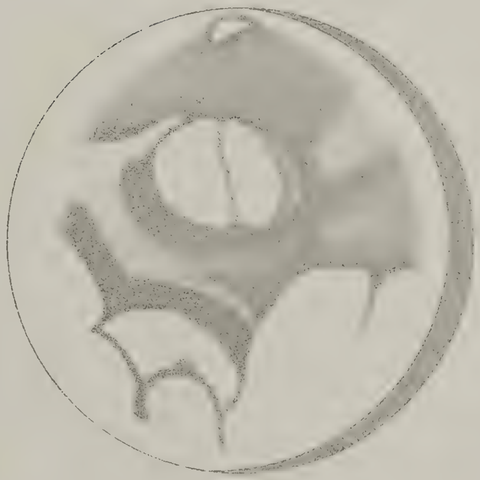
ω = 181° δ = −23°



XXV.

14 Ottobre

ω = 298° δ = −25°



688 Milano, Lit. A. Moldenhauer.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Tab. IIII.

Hemisphærium Martis Australe

stereographice descriptum.

Milano, Lit. A. Moldennauer

MAPPA A

Exhibens Planetæ Martis Chorographi

Latitu

Ex propriis Observationibus atque

in Speculâ Bray

composuit, supputavit atq

187

Lit. F. Holzerhaus

RAPHICA

Polum Australem et Parallelum 40^{um}

ealis:

ope Tubi Merziani decempedalis

liolani habitis

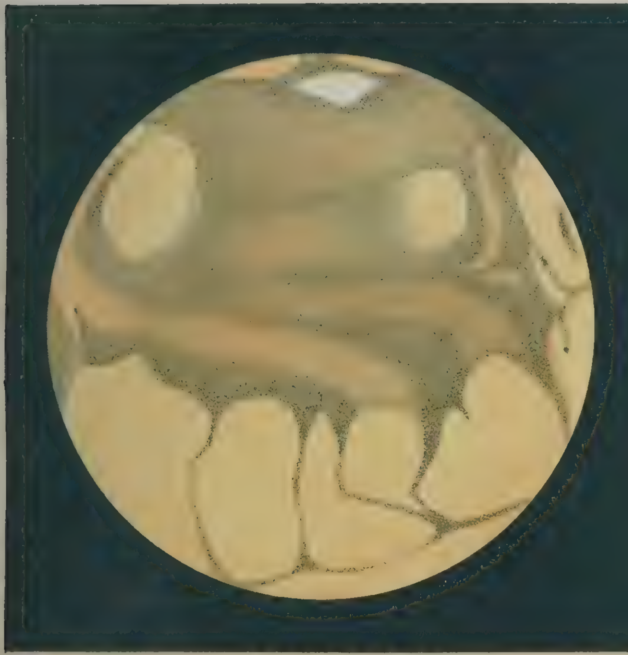
eavit **J.V. Schiaparelli**

8.

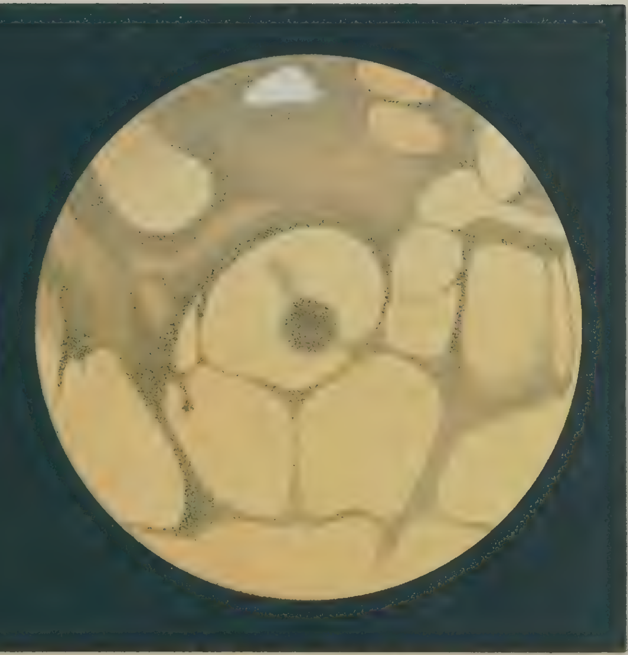
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

MARTE

secondo le osservazioni fatte col Tubo Equatoriale della Specola di Brera Settembre 1877 Marzo 1878

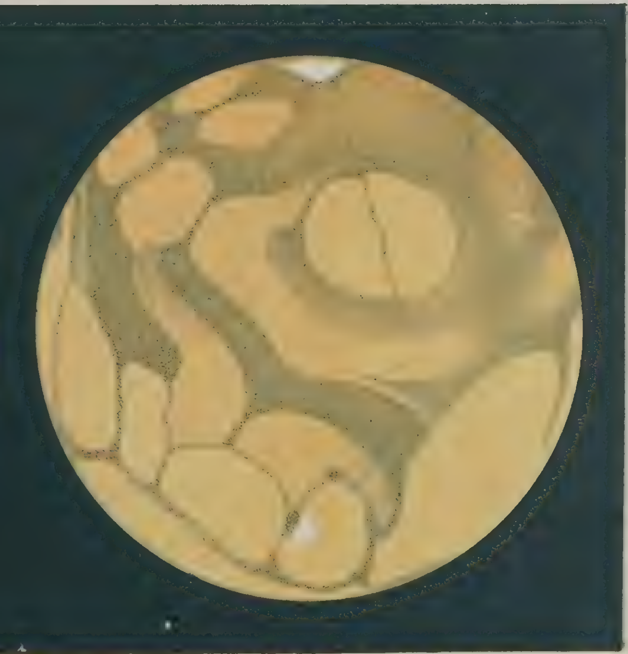


I. $\omega = 0°$



II. $\omega = 90°$

III. $\omega = 180°$



IV. $\omega = 270°$

Questi disegni sono projezioni ortografiche col centro nella longitudine areografica di 0°, 90°, 180° e 270° e nella latitudine areografica australe di 25°

559 Milano ...

LIBRARY
OF THE
UNIVERSIT ILLINOIS

Sulla Carbotialdina ed altri composti solforati.

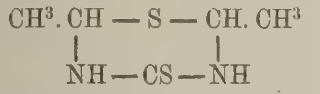
Nota del prof. ICILIO GUARESCHI

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia

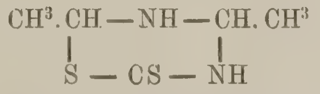
nella seduta del 7 aprile 1878.

La carbotialdina $C^5H^{10}N^2S^2$ fu scoperta da Redtenbacher e Liebig (1848) che l'ottennero per l'azione del solfuro di carbonio sull'ammonialdeide. Intorno alla costituzione di questa sostanza si sa ben poco, ma ciononostante furono proposte diverse formole più o meno ipotetiche. Erlenmeyer (1) diede le due formole seguenti:

I.



II.



Formole queste simili a quella colla quale lo stesso autore rappresenta la tialdina.

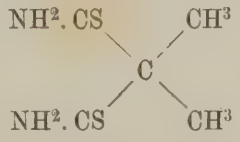
La prima di queste formole, secondo la quale la carbotialdina sarebbe una solfurea composta, è ammessa anche da Claus (2) principalmente perchè col cloruro mercurico la carbotialdina fornisce: solfuro mercurico, aldeide, cloruro d'ammonio, acido cloridrico ed acido solfocianico. Ma questo modo di decomposizione col cloruro mercurico può spiegarsi tanto colla formola I quanto coll'altra II, sia anche colla formola di Mulder.

La formola II di Erlenmeyer è accettata da Wislicenus (3).

Nel 1868, E. Mulder (4) per l'azione dell'aldeide sul solfocarbamato d'ammonio ottenne il *solfocarbamato di dietilidene* che considerò come identico alla carbotialdina di Redtenbacher e Liebig; egli rappresentò quindi la carbotialdina colla formola:

$$CS.NH^2.SN(CH.CH^3)^2$$

Finalmente, per rendere meno imperfetto questo cenno storico, dirò che Hlasiwetz e Kachler (5), non so per quali ragioni, diedero alla carbotialdina la formola:



Lascio di trascrivere le formole, di Weltzien e d'altri.

(1) *Lehr. d. org. Chem.* 1867, pag. 309.
(2) Berichte d. deut. Chem. Gesell. 1872, Vol. V, pag. 363.
(3) Strecker-Wislicenus, *Lehr. dorg. Chem.* pag. 421.
(4) Zeitsch. f. Chem. 1868, Vol. IV, pag. 377.
(5) Jahrs. 1873, p. 774, e Gaz. chim. it. 1872, pag. 457.

Tutte queste formole, eccetto quella di E. Mulder, non hanno, a mio avviso, alcun fatto decisivo in loro appoggio; anzi quella di Hlasiwetz e Kachler, nella quale si ammette la catena tricarbonica $= C \begin{matrix} \diagup CH^3 \\ \diagdown CH^3 \end{matrix}$, come se la carbotialdina derivasse, per esempio, dall' acetone, non ha nessun grado di probabilità.

Le esperienze che io ho fatto sulla carbotialdina mi autorizzano ad ammettere con quasi sicurezza la formola di Mulder, che era caduta affatto in dimenticanza; tutte le reazioni già conosciute della carbotialdina, specialmente quelle che io ora descriverò, si spiegano assai bene colla suddetta formola, mentre sono in contraddizione con tutte le altre accennate.

La carbotialdina sospesa nell' acqua e trattata con permanganato potassico si ossida all' istante con sviluppo di calore.

5 gr. di carbotialdina pura sospesi in circa 250^{cc} d' acqua fredda furono trattati con 24 a 25 gr. di permanganato di potassio in 450^{cc} circa d' acqua; il permanganato fu aggiunto a poco per volta sino a che cessasse lo scoloramento. Anzi procurai che restasse un lieve accesso di carbotialdina. Si sviluppò odore d' aldeide prima, e poi intenso l' odore d' acido cianidrico. Compiuta l' ossidazione filtrai il liquido incoloro, che era lievemente acido. Il liquido aveva odore d' acido cianidrico e dava intensa reazione di cianuri coi sali ferroso-ferrici. Cogli acidi sviluppa anidride carbonica. Aggiunsi alcune goccie di potassa sino a rendere lievissimamente alcalino il liquido ed evaporai. Il liquido, quando fu molto concentrato, diede per raffreddamento de' bei cristalli di solfato potassico, che separai. Trattai il liquido con lieve eccesso di idrato di bario per precipitare gli acidi solforico e carbonico. Filtrai e feci passare attraverso al liquido una corrente d' anidride carbonica, ed il liquido evaporato quasi a secco fu esaurito con alcool assoluto. Per evaporazione, l'alcool lasciò un notevole residuo di *acetato di potassio.*

La parte insolubile nell' alcool fu neutralizzata con acido acetico e lo sciolto, neutro, non diede alcun precipitato coll' alcool assoluto come nel caso della tialdina e della solfaldeide, trattate in ugual modo (v. più innanzi). Non riscontrai traccia alcuna di materia solforata; tutto lo solfo fu trasformato in acido solforico.

Come dirò più innanzi, la tialdina e la solfaldeide che contengono dello solfo unito al carbonio del gruppo etilidenico, danno nelle stesse condizioni il sale di potassio di un acido $C^2 H^4 S^2 O^6 H^2$.

La formazione d' acido cianidrico, che ho osservato spesse volte, benchè in alcuni casi esperimentando su piccole quantità non abbia potuto riscontrarlo, si spiega facilmente sapendosi che l' acido solfocarbamico si decompone prontamente in acido solfidrico ed acido solfocianico:

$$CS \begin{matrix} \diagup NH^2 \\ \diagdown SH \end{matrix} = H^2S + CS.NH$$

e che i solfocianati in soluzione acida col permanganato potassico, danno dell'acido cianidrico e dell'acido solforico (Péan de Saint-Gilles):

$$CS.NH + O^3 + H^2O = CNH + H^2SO^4$$

La carbotialdina con acqua a freddo e poi col cloruro ferrico non si colora in rosso, od appena appena, ma dopo poco tempo si rende manifesto il color rosso del solfocianato che scompare poi per dar luogo ad un precipitato lattiginoso, ed il liquido si colora in rosso intenso se si aggiunge dell'altro cloruro ferrico.

Se si fa bollire con acqua la carbotialdina, si raffredda il liquido e trattasi con cloruro ferrico si ottiene un precipitato di solfuro ferrico; scaldando si sviluppa dal liquido odore d'aglio.

Se dopo aggiunto del cloruro ferrico alla carbotialdina sospesa nell'acqua fredda, si scalda anche lievemente, si ha subito intensissimo il color rosso del solfocianato ferrico.

La *solfurea* e la *difenilsolfurea* scaldate, anche all'ebullizione per lungo tempo, con acqua e cloruro ferrico non danno la reazione dei solfocianati, ma bensì dello solfo e sale ferroso.

Questi fatti sono contrarî all'opinione di Claus, che cioè la carbotialdina sia una solfurea composta. La dietilidensolfurea $(CH^3.CH)^2H^2N^2.CS$ per l'azione dell'acido cloridrico si decompone in cloruro d'ammonio, aldeide e solfurea (Nencki 1875) ed in modo analogo dovrebbe decomporsi la carbotialdina se fosse una solfurea contenente $(CH^3.CH)^2S$ come ammette Claus; invece sappiamo che la carbotialdina dà cloruro d'ammonio, aldeide e solfuro di carbonio (Redtenbacher e Liebig).

Ma il fatto più importante e decisivo, che a mio avviso non può lasciar dubbio intorno alla natura della carbotialdina, si è la facilità con la quale questa sostanza si trasforma in *bisolfuro solfocarbamico* $C^2H^4N^2S^4$; composto questo che sotto il nome di *idranzotina* o *bisolfidrato cianico* fu descritto assai bene nel 1843 da Zeise [1]; si ottiene per l'azione del cloro o dell'acido cloridrico e cloruro ferrico sul solfocarbamato d'ammonio. Io l'ho ottenuto assai puro ed in piccoli cristalli, dalla carbotialdina coll'acido cloridrico e cloruro ferrico.

La carbotialdina sospesa in poca acqua e poi sciolta in un eccesso d'acido cloridrico diluito con egual volume d'acqua, fu trattata con soluzione di cloruro ferrico; il liquido rossastro e limpido lasciato a sè, incominciò dopo alcuni minuti a deporre una materia polverulenta, cristallina, bianca, e a decolorarsi alquanto. Dopo alcune

(1) Berzelius, *Rapp. annuel* 1844, p. 51-54. Non è forse privo d'interesse storico, notare, che Zeise già nel 1843 considerò questa sostanza come un'amide del solfuro di carbonio $H^4N^2(CS^2)^2$. Anche Gerhardt nel 1853 (*Traité*, I, p. 203) rappresentò questo composto con $\left.\begin{matrix} NH^2.CS.S \\ NH^2.CS.S \end{matrix}\right\}$, e Boutlerow nel 1863 (*Lehr. org. Chem.* pag. 587) ne rappresentò la formazione coll'equazione usata anche oggi:

$$2(NH^2.CS.S\,NH^4) + Cl^2 = \begin{matrix} NH^2.CS.S \\ | \\ NH^2.CS.S \end{matrix} + 2\,NH^4Cl.$$

Questa formola fu riprodotta poi nel 1872 da Hlasiwetz e Kachler.

ore filtrai il liquido ancora rossastro, contenente del sale ferroso e che ha odore ben manifesto d'aldeide, e raccolsi la sostanza bianca o appena giallognola, che lavai bene con acqua fredda. Il liquido filtrato, dopo alcuni giorni continuò a deporre altra sostanza identica, ma colorata in giallo. Per ottenere più bello il composto sopraccennato è utile sciogliere la carbotialdina in un grand' eccesso d'acido cloridrico ed aggiungere il percloruro di ferro a poco per volta, facendo in modo che il liquido resti di un color giallo-ranciato appena, ma non rosso; si deve agitare vivamente e poco dopo si separa la sostanza cristallizzata nella proporzione del 70 % circa della quantità teorica. Dopo alcuni tentativi la sua preparazione riesce assai facilmente.

Questo corpo si dimostra al microscopio cristallizzato, alle volte in lamelle a losanga simili ai cristalli d'acido urico ed alle volte in cristalli prismatici che hanno l'aspetto del fosfato ammonico-magnesico. È insolubile nell'acqua anche a caldo, ma solubile nell'alcool e nell'etere. L'acqua bollente lo decompone formando del solfocianato ammonico, dello solfo e solfuro di carbonio. Per riscaldamento non fonde, ma si scompone sviluppando acido solfidrico, solfidrato d'ammonio, dando un sublimato bianco-giallognolo e lasciando appena una traccia di residuo carbonoso.

Questi caratteri corrispondono affatto a quelli del bisolfuro solfocarbamico. Una determinazione di solfo mi tolse ogni dubbio:

gr. 0,1350 di sostanza, essicata sull'acido solforico, e decomposta col clorato potassico e carbonato di sodio, secondo il metodo di Kolbe, diedero 0,6775 di solfato baritico. Quindi:

	Trovato	Calcolato per la formola $C^2H^4N^2S^4$
Solfo	68,92	69,56

Lo stesso composto si ottiene col cloro. La carbotialdina sospesa in poca acqua fu sciolta in un eccesso d'acido cloridrico diluito con un egual volume d'acqua. Alla soluzione filtrata aggiunsi, a poco per volta e sempre agitando, dell'acqua di cloro. Il liquido si mantenne incoloro. Poco dopo incominciò a deporsi il bisolfuro, bianco. Bisogna avvertire di non mettere un eccesso di acqua di cloro e non tutta in una volta perchè allora si separa il bisolfuro solfocarbamico colorato molto in giallo.

Il bisolfuro solfocarbamico è ossidato dal permanganato di potassio; la maggior parte dello solfo è trasformata in acido solforico ed una piccola parte si separa allo stato libero.

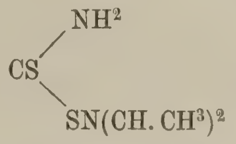
Se si rappresenta il bisolfuro solfocarbamico con $\begin{matrix} NH^2.CS.S \\ | \\ NH^2.CS.S \end{matrix}$ la sua formazione dalla carbotialdina si spiega nel modo seguente:

$$\begin{matrix} NH^2.CS.SN(CH.CH^3)^2 \\ NH^2.CS.SN(CH.CH^3)^2 \end{matrix} + 4H^2O + Cl^2 = \begin{matrix} NH^2.CS.S \\ | \\ NH^2.CS.S \end{matrix} + 2NH^4Cl + 4C^2H^4O$$

2 mol. di carbotialdina.

Colle altre formole proposte per la carbotialdina mi pare non sia possibile spiegare in modo soddisfacente la sua facile trasformazione in bisolfuro solfocarbamico.

Tutte le reazioni dunque conosciute della carbotialdina e quelle ch'io ho ora descritte concordano a stabilire che questa sostanza deve considerarsi come *solfocarbamato di dietilidene:*



La soluzione alcolica di carbotialdina precipita in nero col *nitrato mercuroso;* coll'*acetato neutro di piombo* si colora prima in giallo e poco dopo fornisce un precipitato giallo che lentamente, a freddo, passa al ranciato, rosso e nero, e che per riscaldamento annerisce assai rapidamente dando solfuro di piombo che si depone in forma di specchio metallico similmente all'argento ridotto dal nitrato coll'aldeide.

Benchè vi sia somiglianza nei nomi, nessuna relazione di costituzione, di reazioni chimiche ecc. esiste tra la tialdina e la carbotialdina.

Ad uno studio simile sottoporrò la carbovaleraldina $C^{11}H^{22}N^2S^2$ di Schröeder.

Tialdina e Tioaldeide.

Dalla tialdina per ossidazione con permanganato di potassio ottenni tra gli altri prodotti, dell'acido solforico, dell'acido acetico ed un acido solforato il cui *sale di potassio* contiene $C^2H^4K^2S^2O^6$. Questo sale si forma in quantità di circa il 90 %₀ della tialdina impiegata.

Avevo molte ragioni per credere che quest'acido solforato non fosse l'acido tioacetico di Kekulé $CH^3.CO.SH$, ma invece il suo isomero, non ancora conosciuto, $CH^3.CS.OH$, e che si denominerebbe *acido β tiacetico*; però le molte analisi del sale potassico conducono alla formola sopraindicata.

Il *sale di potassio* $C^2H^4K^2S^2O^6$ si depone in cristalli lamellari, bianchi, duri, fragili, inodori anche a caldo, solubilissimi nell'acqua, meno solubile nell'alcool dal quale cristallizza. Riscaldato brucia senza fondere, con fiamma azzurra, lasciando un residuo di solfuro e carbone. La sua soluzione precipita: col *nitrato d'argento* in giallo-rosso che poi annerisce; col *nitrato mercuroso,* immediatamente in nero; coll'*acetato di piombo* in bianco, che non annerisce a caldo; col *solfato di rame* in azzurro chiaro; col *cloruro ferrico* dà un lieve color ametista e non intorbida a caldo.

La formazione di questo composto non si spiega bene se si ammette nella tialdina lo solfo allo stato di solfidrile SH.

Preparerò una maggiore quantità di questo sale ed altri sali per esaminare anche l'acido libero. Darò in seguito i particolari di queste esperienze.

Lo stesso sale potassico pare che si formi anche dalla tioaldeide.

Benchè un poco più difficilmente che non la tialdina, anche la tioaldeide $(CH^3CHS)^3$ sospesa nell'acqua, si ossida col permanganato di potassio. Si ottengono dell'acido solforico ed un sale potassico che sembra identico a quello preparato dalla tialdina. Dai pochi saggi che ho fatto sino ad ora si formerebbe in quantità di circa il 20 %₀ della tioaldeide impiegata.

La tioaldeide era in bei cristallini aghiformi, fusibili a 45-46°.

Ossisolfobenzide.

L'ossisolfobenzide $(C^6H^4.OH)^2SO^2$ è completamente ossidata dal permanganato potassico.

10 gr. di ossisolfobenzide, ben polverizzata, furono trattati con litr. 1,500 di una soluzione di permanganato potassico contenente 7 a 8 gr. di permanganato. Dopo poco tempo, a freddo, il liquido è perfettamente decolorato. Il liquido filtrato che ha reazione alcalina e sviluppa anidride carbonica cogli acidi, fu evaporato a secco. Il residuo trattato con alcool assoluto e a più riprese, si sciolse solo in parte. Per evaporazione dell'alcool ottenni un residuo bianco che non conteneva solfati e che fu di nuovo purificato cristallizzandolo dall'alcool. Questo composto è il derivato potassico dell'ossisolfobenzide $(C^6H^4.OK)^2SO^2$; la sua soluzione che ha reazione alcalina, neutralizzata con acido cloridrico si rappiglia in una massa di cristalli splendenti di ossisolfobenzide.

La parte del prodotto, insolubile nell'alcool assoluto ma solubile nell'acqua, contiene del solfato di potassio e dell'ossalato di potassio.

Impiegando dunque anche una quantità insufficiente di permanganato potassico l'ossisolfobenzide è totalmente ossidata e non fornisce prodotti intermedî; si ottengono come prodotti: acido solforico, acido ossalico ed anidride carbonica.

Operando nel modo seguente ho potuto determinare esattamente la quantità dello solfo dell'ossisolfobenzide e di altre materie solforate, *facilmente ossidabili* dal permanganato di potassio.

L'ossisolfobenzide in polvere, posta entro palloncino a collo piuttosto lungo, fu mescolata con poca acqua e poi a piccole porzioni aggiunsi del permanganato di potassio in polvere, sino a che restasse permanente il colore violetto. Si scalda se occorre. Per togliere il lieve eccesso di permanganato e l'ossido di manganese formatosi, si scalda per alcuni minuti all'ebullizione con quantità appena sufficiente di acido cloridrico. Il liquido che si ottiene è limpidissimo e quasi incoloro. Nel liquido filtrato se occorre, e convenientemente diluito, si determina l'acido solforico col solito metodo:

gr. 0,4892 di sostanza diedero 0,4505 di solfato baritico, cioè:

	Trovato	Calcolato per la formola $C^{12}H^{10}SO^4$
Solfo	12,65	12,80

Cloez e Guiguet (¹) impiegarono il permanganato per dosare lo solfo nella polvere pirica; Erlenmeyer e R. Hofmann (²) proposero di dosare lo solfo de'solfocianati con soluzione di permanganato.

Solfurea.

La solfurea, assai bene cristallizzata, fusibile a 149° e priva affatto di solfacianato, trattata come la ossisolfobenzide per determinarne lo solfo, diede i risultati seguenti:

(¹) Comptes rendus 1858, T. 46, p. 1110.
(²) Erlenmeyer, *Lehr. dorg. Chem.* p. 171.

gr. 0,223 di sostanza essicata a 100° fornirono 0,682 di solfato baritico. Da cui:

	Trovato	Calcolato per la formola $CS(NH^2)^2$
Solfo	42,02	42,10

Già Mulder e Smith ([1]) avevano osservato che colla solfurea ed il permanganato in soluzione acida si deposita dello solfo, ed in soluzione alcalina si ottiene azoto ed acido solforico.

Difenilsolfurea.

Della difenilsolfurea pura fu nuovamente purificata ricristallizzandola varie volte dall'alcool bollente; si separò in magnifiche lamelle, sottilissime, madraperlacee, che fondevano a 146°,5. Ordinariamente nei trattati si trova indicato 140° quale punto di fusione della solfocarbanilide.

Anch'essa trattata col permanganato, nel modo che ho descritto più sopra, fornisce tutto lo solfo allo stato di acido solforico:

I. gr. 0,3662 di sostanza diedero 0,3625 di solfato baritico.

II. gr. 0,3603 di sostanza fornirono 0,3635 di solfato baritico, cioè:

	Trovato I.	Trovato II.	Calcolato per la formola $CS(NHC^6H^5)^2$
Solfo	13,60	13,87	14,03

Anche l'ossidazione della difenilsolfurea col permanganato è assai regolare; si sviluppa l'odore di aldeide benzoica, ed osservai inoltre che i residui C^6H^5 sono, anche in questo caso, difficilmente ossidati. Infatti dopo il trattamento con acido cloridrico per disciogliere l'ossido di manganese ottenni un residuo polverulento di una materia clorurata che è insolubile nell'acqua, poco solubile nell'alcool e meglio solubile nell'etere. Questa sostanza è forse una benzina clorurata.

Taurina.

La taurina è difficilmente ossidata dal permanganato di potassio, solo una parte è trasformata in acido solforico. In due esperimenti ottenni solo 16,60 e 12,48 $^0/_0$ di solfo, mentre per la formola $C^2H^7NO^3S$ si calcola 25,6 $^0/_0$. Anche dopo prolungata ebullizione con eccesso di permanganato una parte della taurina resta inalterata o forse si forma un composto solforato che non è ulteriormente ossidabile. Io potei separare solo una piccolissima quantità di un prodotto che bruciato con clorato dava acido solforico. Non è impossibile che si formi dell'acido solfoacetico $\begin{matrix} COOH \\ | \\ CH^2.SO^3H \end{matrix}$ quale prodotto intermedio di ossidazione, ma la piccola quantità di materia che era a mia disposizione non mi permise di completare lo studio di questa reazione.

([1]) Berichte T. VII, pag. 1636.

La resistenza che presenta la taurina agli agenti ossidanti va d'accordo col fatto osservato da Salkowsky, cioè, che questa sostanza entro l'organismo animale si trasforma solo in parte in acido solforico; la maggior parte passa nelle urine allo stato di acido taurocarbamico $\begin{array}{l} CH^2.NH.CONH^2 \\ | \\ CH^2.SO^3H \end{array}$

Ora continuo lo studio dei prodotti che si ottengono dalla *tialdina* e dalla *tioaldeide*, come quelli che presentano, mi sembra, qualche importanza; e spero di estendere queste ricerche anche alla *tioformaldeide* $(CH^2S)^3$ che ho tentato di preparare dal solfuro di carbonio col metodo di Girard ma con risultati, sino ad ora, poco soddisfacenti.

Sur un principe fondamental de géométrie et de trigonométrie par Mr. EDOUARD LUCAS.

Mémoire approuvé pour l'insertion dans les Actes de l'Académie
dans la séance du 7 avril 1878.

1. — La définition de la puissance d'un point par rapport à un cercle ou à une sphère, son expression dans le système des coordonnées cartésiennes, et les propriétés les plus élémentaires des déterminants conduisent immédiatement à la démonstration d'un théorème général, qui renferme la plupart des propriétés métriques connues. Ce principe repose sur la proposition suivante, que l'on doit considérer comme l'extension du théorème de Carnot, sur les projections.

Lemme. *Les puissances d'un point par rapport à $n+5$ cercles d'un plan, ou par rapport à $n+6$ sphères de l'espace, sont liées entre elles par $n+1$ équations linéaires et homogènes, dans chacune desquelles la somme des coefficients est nulle.*

En effet, soit

$$x_i = x^2 + y^2 - 2a_i xz - 2b_i yz + c_i z^2,$$

le premier membre de l'équation d'un cercle en coordonnées rectangulaires et homogènes; on sait que x_i représente la puissance d'un point quelconque P de coordonnées x, y et $z=1$, par rapport au cercle O_i. En faisant successivement i égal à 1, 2, 3, 4, 5, et en éliminant x^2+y^2, xz, yz, z^2, entre les cinq équations obtenues, on a l'identité

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & 1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ x_4 & 1 & a_4 & b_4 & c_4 \\ x_5 & 1 & a_5 & b_5 & c_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant s'annule pour des valeurs égales de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; on a donc, par le développement,

(1) $$lx_1 + mx_2 + nx_3 + px_4 + qx_5 = 0,$$

avec la condition

(2) $$l + m + n + p + q = 0.$$

Il est facile d'étendre cette démonstration au cas de six sphères de l'espace.

2. — Cela posé, appelons *puissance mutuelle* de deux cercles de rayons r_i et r_j, de centres O_i et O_j dont la distance est d_{ij}, l'expression

(3) $$a_{ij} = \frac{r^2_i + r^2_j - d^2_{ij}}{2r_i r_j};$$

nous aurons, en particulier

$$d_{ii}=0,\quad d_{ij}=d_{ji},\quad a_{ii}=1,\quad a_{ij}=a_{ji},$$

et, pour deux cercles tangents, soit extérieurement, soit intérieurement

$$a_{ij}=-1,\quad \text{ou}\quad a_{ij}=+1;$$

supposons le point quelconque P placé au centre O_j d'un cercle de rayon r_j; la puissance de ce point par rapport au cercle de centre O_i est

$$x_i=d^2_{ij}-r^2_i,$$

ou, en introduisant la puissance mutuelle

$$x_i=r^2_j-2r_ir_ja_{ij}. \tag{4}$$

Si l'on fait successivement $i=1, 2, 3, 4, 5$, et si l'on porte les valeurs obtenues, dans l'équation (1), en tenant compte de la relation (2), on trouve

$$lr_1r_ja_{1j}+mr_2r_ja_{2j}+nr_3r_ja_{3j}+pr_4r_ja_{4j}+qr_5r_ja_{5j}=0; \tag{5}$$

maintenant, si nous donnons à j les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, nous obtenons cinq équations qui conduisent, par l'élimination de l, m, n, p, q, à l'identité

$$\begin{vmatrix} r_1r_1a_{11} & r_1r_2a_{12} & r_1r_3a_{13} & r_1r_4a_{14} & r_1r_5a_{15} \\ r_2r_1a_{21} & r_2r_2a_{22} & r_2r_3a_{23} & r_2r_4a_{24} & r_2r_5a_{25} \\ r_3r_1a_{31} & r_3r_2a_{32} & r_3r_3a_{33} & r_3r_4a_{34} & r_3r_5a_{35} \\ r_4r_1a_{41} & r_4r_2a_{42} & r_4r_3a_{43} & r_4r_4a_{44} & r_4r_5a_{45} \\ r_5r_1a_{51} & r_5r_2a_{52} & r_5r_3a_{53} & r_5r_4a_{54} & r_5r_5a_{55} \end{vmatrix}=0. \tag{6}$$

Lorsque les rayons ne sont pas nuls, on peut diviser les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne par r_i, et ceux de la $j^{\text{ième}}$ colonne par r_j; on a ainsi

$$\Sigma\pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}=0; \tag{7}$$

d'où, cette proposition:

Théorème fondamental. *Le déterminant des puissances mutuelles de cinq cercles d'un plan ou de six sphères de l'espace est identiquement nul.*

3. — Lorsque deux cercles se coupent, leur puissance mutuelle est égale au cosinus de leur angle A_{ij}, compté conformément au principe des signes; en désignant par T_{ij} et V_{ij} les longueurs des tangentes communes, on a aussi

$$T^2_{ij}=4r_ir_j\sin^2\frac{A_{ij}}{2},\qquad V^2_{ij}=-4r_ir_j\cos^2\frac{A_{ij}}{2}. \tag{8}$$

Lorsque les quatre cercles O_1, O_2, O_3, O_4 sont orthogonaux à un cinquième cercle, la formule (7) donne

$$\Sigma\pm a_{11}a_{22}a_3a_{44}=0,$$

ou, en se servant d'une notation connue,

$$\sin^2 A_{1234}=0. \tag{9}$$

Désignons encore par Θ_i l'angle du cercle de centre O_i avec le cercle radical O_{jkl} de trois autres cercles, on a encore

$$\cos\Theta_1\sin A_{234}=\cos\Theta_2\sin A_{341}=\cos\Theta_3\sin A_{412}=\cos\Theta_4\sin A_{123}$$
$$=\sin A_{1234}. \tag{10}$$

4. — Nous allons montrer que le théorème fondamental s'applique lorsque l'on remplace tous les cercles, ou plusieurs d'entre eux, par des points ou par des droites, situés à distance finie ou indéfinie dans le plan.

Lorsque le rayon r_5 s'annule, le cercle O_5 se réduit à son centre; on a

$$2r_ir_5=r^2_i-d^2_{i5},\qquad 2r_5r_5a_{55}=0;$$

par conséquent, en désignant par X_i le quotient de la puissance de O_5 par rapport au cercle de centre O_i, par le diamètre $2r_i$ de ce cercle, ou la *distance circulaire* de O_5 au cercle de centre O_i, on a

$$r_5 a_{i5} = - X_i ,$$

et le déterminant (6) donne

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & X_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & X_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & X_4 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons d'abord $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$, et remplaçons X_4 par X_{123}, en désignant par X_{123} la distance circulaire d'un point au cercle radical O_{123} de trois cercles O_1, O_2 et O_3; nous aurons

$$(12) \qquad X^2_{123} \sin^2 A_{123} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & X_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

On obtient l'équation homogène et quadratique du cercle radical de trois cercles donnés, en posant $X_{123} = 0$. On a d'ailleurs par le développement

$$(13) \qquad -X^2_{123} \sin^2 A_{123} = X^2_1 \sin^2 A_{23} + \ldots + 2X_2X_3 (\cos A_{12} \cos A_{13} - \cos A_{23}) + \ldots ;$$

c'est l'expression de la distance circulaire d'un point au cercle radical de trois cercles donnés.

5. — Reprenons l'équation (11); on a, en résolvant par rapport à X_4,

$$(14) \qquad X_4 \sin^2 A_{123} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & X_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & X_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \pm \sin A_{123} \sin A_{1234} X_{123} ;$$

cette formule donne l'expression de la distance d'un point au cercle qui coupe trois cercle donnés sous des angles donnés; deux cercles répondent à la question, et sont réciproques par rapport au cercle radical X_{123} des trois cercles donnés; le cercle radical X_{123} est l'un de leurs cercles bissecteurs, l'autre cercle bissecteur a pour équation

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & X_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & X_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

En supposant, plus particulièrement $a_{14} = a_{24} = a_{34} = -1$, et faisant $X_4 = 0$, on trouve

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} 0 & \sin^2 \frac{A_{12}}{2} & \sin^2 \frac{A_{13}}{2} & X_1 \\ \sin^2 \frac{A_{21}}{2} & 0 & \sin^2 \frac{A_{23}}{2} & X_2 \\ \sin^2 \frac{A_{31}}{2} & \sin^2 \frac{A_{32}}{2} & 0 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 :$$

ou, en développant

$$(17) \qquad X_1^2 \sin^4 \frac{A_{23}}{2} + \dots - 2X_2 X_3 \sin^2 \frac{A_{12}}{2} \sin^2 \frac{A_{13}}{2} - \dots = 0 ;$$

ou encore

$$(18) \qquad \sin \frac{A_{23}}{2} \sqrt{X_1} + \sin \frac{A_{31}}{2} \sqrt{X_2} + \sin \frac{A_{12}}{2} \sqrt{X_3} = 0 ;$$

ces trois équations représentent, sous trois formes différentes, l'ensemble du système des deux cercles tangents du premier couple, à trois cercles donnés.

Si l'on fait $a_{14} = a_{24} = a_{34} = \cos\Theta$, on a

$$(19) \qquad \operatorname{tg}^2\Theta \sin^2 A_{123} X_{123}^2 + \begin{vmatrix} 0 & \sin^2 \frac{A_{12}}{2} & \sin^2 \frac{A_{13}}{2} & X_1 \\ \sin^2 \frac{A_{21}}{2} & 0 & \sin^2 \frac{A_{23}}{2} & X_2 \\ \sin^2 \frac{A_{31}}{2} & \sin^2 \frac{A_{32}}{2} & 0 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 ;$$

c'est l'équation du système de deux cercles qui coupent sous le même angle Θ trois cercles donnés. Tous ces cercles possèdent le même axe radical; c'est une proposition connue.

6. — Supposons encore $a_{15} = a_{25} = a_{35} = a_{45} = -1$, dans le déterminant (7), nous obtenons, par une transformation facile

$$(20) \qquad Q = \begin{vmatrix} 0 & \sin^2 \frac{A_{12}}{2} & \sin^2 \frac{A_{13}}{2} & \sin^2 \frac{A_{14}}{2} \\ \sin^2 \frac{A_{21}}{2} & 0 & \sin^2 \frac{A_{23}}{2} & \sin^2 \frac{A_{24}}{2} \\ \sin^2 \frac{A_{31}}{2} & \sin^2 \frac{A_{32}}{2} & 0 & \sin^2 \frac{A_{34}}{2} \\ \sin^2 \frac{A_{41}}{2} & \sin^2 \frac{A_{42}}{2} & \sin^2 \frac{A_{43}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant qui précède est le produit des quatre facteurs

$$(21) \qquad \sin \frac{A_{12}}{2} \sin \frac{A_{34}}{2} \pm \sin \frac{A_{13}}{2} \sin \frac{A_{24}}{2} \pm \sin \frac{A_{14}}{2} \sin \frac{A_{23}}{2} ;$$

donc, lorsque quatre cercles sont tangents à un cinquième, l'un des facteurs précédents est nul; on retrouve ainsi le théorème de M. Casey sur les longueurs des tangentes communes de quatre cercles qui touchent un cinquième.

Si l'on fait $a_{15} = a_{25} = a_{35} = a_{45} = \cos\Theta$, on obtient

$$(22) \qquad \operatorname{tang}^2\Theta \sin^2 A_{1234} + Q = 0 ;$$

on détermine ainsi l'angle du cercle qui coupe quatre cercles donnés sous le même angle; en portant cette valeur dans la relation (19), on obtiendra l'équation d'un cercle qui coupe quatre cercles donnés, sous le même angle.

Il résulte des considérations précédentes que, dans l'application du théorème fondamental, on doit supposer la *puissance mutuelle d'un cercle et d'un point*, comme égale et de signe contraire à la distance circulaire du point au cercle, et la *puissance mutuelle de deux points confondus*, comme nulle.

7. — Lorsque les rayons r_4 et r_5 de deux cercles sont nuls, on a

$$2r_4r_5 = -d^2_{45};$$

par suite, en désignant par X_1, X_2, X_3 et Y_1, Y_2, Y_3 les distances circulaires des deux points O_4 et O_5 aux trois premiers cercles, on a

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & X_1 & Y_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & X_2 & Y_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & X_3 & Y_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & 0 & -\frac{1}{2}d^2_{45} \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & -\frac{1}{2}d^2_{45} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette formule donne la distance de deux points en coordonnées tricirculaires, et aussi, la différentielle de l'arc d'une courbe anallagmatique; on en déduit encore l'équation, en coordonnées tricirculaires, d'un cercle de centre et de rayon donnés.

On voit donc que, dans l'application du théorème fondamental, on doit considérer la *puissance mutuelle de deux points* comme égale, en signe contraire, à la moitié du carré de leur distance.

8. — Lorsque trois rayons r_1, r_2, r_3 sont nuls, on a, en désignant par X_4, Y_4, Z_4, et X_5, Y_5, Z_5, les distances circulaires des trois points aux deux cercles de centres O_4 et O_5

$$(24) \qquad \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}d^2_{12} & \frac{1}{2}d^2_{13} & X_4 & X_5 \\ \frac{1}{2}d^2_{21} & 0 & \frac{1}{2}d^2_{23} & Y_4 & Y_5 \\ \frac{1}{2}d^2_{31} & \frac{1}{2}d^2_{32} & 0 & Z_4 & Z_5 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 & -1 & -\cos A_{45} \\ X_5 & Y_5 & Z_5 & -\cos A_{45} & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

cette formule donne l'angle de deux cercles de rayons donnés, en coordonnées triponctuelles.

Si quatre rayons sont nuls, on obtient la relation entre les puissances de quatre points par rapport à un cercle, et leurs distances mutuelles; lorsque les quatre points sont sur un cercle, on retrouve le théorème de Ptolémée, sur le produit des diagonales d'un quadrilatère inscrit; en particulier, lorsque deux points sont diamétralement opposés, on a les formules d'addition des fonctions circulaires, et ainsi, les diverses formules de la Trigonométrie rectiligne.

Lorsque les cinq rayons s'annulent, on a la relation entre les distances mutuelles de cinq points quelconques d'un plan; cette relation a été obtenue par M. Cayley, au moyen de la multiplication des déterminants [1].

9. — Nous avons supposé, jusqu'à présent, que les rayons r_i s'annulaient; on peut aussi les faire croître indéfiniment, et remplacer les cercles par des droites. Lorsque deux cercles passent par deux points fixes, et que le rayon de l'un d'eux augmente indéfiniment, la puissance mutuelle des deux cercles a pour limite le cosinus de l'angle de la droite et du cercle; en désignant par δ_i la distance du centre O_i de ce cercle à la droite, et par r_i le rayon de ce cercle, ce cosinus a pour expression $\frac{\delta_i}{r_i}$; on doit donc considérer la *puissance mutuelle d'un cercle et d'une droite* comme

[1] Journal de Cambridge, tome II.

égale au quotient de la distance du centre à la droite, par le rayon du cercle: l'application du théorème fondamental donne ainsi, pour quatre cercles et une droite,

$$(25) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \frac{\delta_1}{r_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \frac{\delta_2}{r_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \frac{\delta_3}{r_3} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \frac{\delta_4}{r_4} \\ \frac{\delta_1}{r_1} & \frac{\delta_2}{r_2} & \frac{\delta_3}{r_3} & \frac{\delta_4}{r_4} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on divise les éléments de la dernière ligne et de la dernière colonne par δ_1, et si l'on suppose que la droite s'éloigne indéfiniment, on obtient

$$(26) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \frac{1}{r_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \frac{1}{r_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \frac{1}{r_3} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \frac{1}{r_4} \\ \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_3} & \frac{1}{r_4} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette formule donne le rayon d'un cercle qui coupe sous des angles donnés trois cercles donnés; on obtiendra, plus particulièrement, le rayon du cercle radical de trois cercles, le rayon du cercle qui coupe quatre cercles donnés sous le même angle, ou le rayon du cercle tangent à trois cercles donnés. Dans ce dernier cas, on retrouve une formule donnée par M. Bauer (1).

Il résulte de là, que l'on doit considérer la *puissance mutuelle d'un cercle et d'une droite à l'infini* comme égale à l'inverse du rayon du cercle, et la *puissance mutuelle de deux droites confondues, à l'infini,* comme nulle.

10. — De même, on considérera la *puissance mutuelle de deux droites*, comme égale au cosinus de l'angle de leurs directions: la *puissance mutuelle d'un point et d'une droite,* comme égale à la distance du point à la droite, comptée conformément au second principe des signes (2); et la *puissance mutuelle d'un point et d'une droite à l'infini*, comme égale à l'unité positive.

(1) Journal de Schlömilch, tom. V.

(2) *Note sur l'emploi dans la géométrie d'un nouveau principe des signes.*— Nouvelle correspondance mathématique, tom. II et III.

Ainsi, pour trois cercles O_1, O_2, O_3, un point O_4 dont les distances circulaires aux trois premiers sont X, Y, Z, et une droite à l'infini, on a

$$(27) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & X & \frac{1}{r_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & Y & \frac{1}{r_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & Z & \frac{1}{r_3} \\ X & Y & Z & 0 & 1 \\ \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_3} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est la relation fondamentale entre les puissances d'un point par rapport à trois cercles, en coordonnées tricirculaires.

On obtiendra ainsi, par l'application de notre théorème:

1° la distance de deux points, ou plus généralement, la puissance mutuelle de deux éléments (points, droites, plans, sphères), dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, obliques, trilinéaires, tricirculaires, tétraédriques, tétrasphériques, ou dans les systèmes corrélatifs des coordonnées tangentielles, bipolaires, triponctuelles, tripolaires, etc.

2° les équations de ces différents éléments dans les divers systèmes de coordonnées, et, en particulier, les équations de la droite ou du plan de l'infini, des points circulaires ou du cercle de l'infini, etc.

Il résulte d'ailleurs de ces considérations une extension toute naturelle du *principe de dualité*, que l'on peut formuler ainsi:

Principe de mutualité. *Toute propriété descriptive ou métrique exprimant une relation entre des points, des droites et des plans, s'applique au système plus général dans lequel on remplace les points, les droites et les plans par des cercles ou des sphères.*

Nous terminerons cet exposé par la solution du *Problème de Malfatti généralisé par Steiner*. Il s'agit de déterminer trois cercles tangents entre eux deux à deux et tangents à deux des cercles d'un système de trois cercles donnés.

Désignons par O_1, O_2, O_3 les trois cercles donnés, et par O_4, O_5, O_6 les trois cercles cherchés. On a, en désignant par u, v, w trois inconnues à déterminer, en supposant tous les contacts extérieurs,

$$\begin{aligned} a_{14} &= u, & a_{24} &= -1, & a_{34} &= -1, \\ a_{15} &= -1, & a_{25} &= v, & a_{35} &= -1, \\ a_{16} &= -1, & a_{26} &= -1, & a_{36} &= w, \end{aligned}$$
$$a_{45} = a_{56} = a_{64} = -1.$$

L'application du théorème fondamental, ou du théorème de M. Casey, donne

$$\sin\frac{A_{14}}{2}\sin\frac{A_{25}}{2} = \sin\frac{A_{12}}{2} \pm 1,$$
$$\sin\frac{A_{25}}{2}\sin\frac{A_{36}}{2} = \sin\frac{A_{23}}{2} \pm 1,$$
$$\sin\frac{A_{36}}{2}\sin\frac{A_{14}}{2} = \sin\frac{A_{31}}{2} \pm 1:$$

si l'on pose

$$R = \left(\sin\frac{A_{12}}{2} \pm 1\right)\left(\sin\frac{A_{23}}{2} \pm 1\right)\left(\sin\frac{A_{13}}{2} \pm 1\right),$$

on tire

$$\sin^2\frac{A_{14}}{2} = \frac{R}{\left(\sin\frac{A_{23}}{2} \pm 1\right)^2}, \quad \sin^2\frac{A_{25}}{2} = \frac{R}{\left(\sin\frac{A_{31}}{2} \pm 1\right)^2}, \quad \sin^2\frac{A_{36}}{2} = \frac{R}{\left(\sin\frac{A_{12}}{2} \pm 1\right)^2},$$

par suite

$$u = 1 - 2\sin^2\frac{A_{14}}{2}, \quad v = 1 - 2\sin^2\frac{A_{25}}{2}, \quad w = 1 - 2\sin^2\frac{A_{36}}{2},$$

connaissant u, v, et w, on déterminera séparément le rayon ou l'équation des trois cercles cherchés, puisque l'on connaît la puissance mutuelle de chacun d'eux par rapport aux cercles donnés.

Oggetti preistorici calabresi del Catanzarese e del Cosentino.

Memoria del capitano G. RUGGERO

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia

nella seduta del 3 marzo 1878.

Senza esagerare l'importanza delle parziali raccolte di oggetti preistorici per la Paleoetnologia, specialmente ora che esistono in copia dovunque, e che tali studî hanno potuto giovarsene a progredire oltre la stretta cerchia dapprima assegnata tra difficoltà d'ogni sorta, credo però sempre nella utilità di quelle relative a località che non furono, o che furono solo imperfettamente esplorate. Le provincie calabresi spettano, secondo me, a questa seconda categoria, perchè le sfavorevoli condizioni di viabilità e di sicurezza pubblica non mutate che in questi ultimi tempi, hanno sempre opposto un argine difficilmente superabile alle esplorazioni scientifiche d'ogni specie; difatti malgrado gli studî generali o le esplorazioni parziali di un Philippi, del Tchihatcheff, dei Costa, del Von Rath e di altri, rimane fuori di dubbio che i cultori di qualunque ramo delle scienze naturali vi troveranno più che altrove facile ed abbondante materia di studio. E qui ricorderò a modo di esempio, come le mie ricerche mineralogiche nel 1877, sebbene limitate a breve estensione di terreno, siano state coronate da successo avendo trovato giacimenti svariati ed interessanti per le specie, dovuti specialmente ai fenomeni di metamorfismo tanto singolari ed intensi, nella zona estesa del contatto delle roccie eruttive colle sedimentarie: e come nel 1871 e 1872 avendo cominciato con altri ufficiali una raccolta entomologica per incarico di persona competente in questa materia, ci sia riuscito di avere alcune specie e varietà nuove, cosa ben difficile per le altre provincie.

Fin dal novembre del 1872 al ritorno di Calabria in Verona venni a sapere che armi di pietra erano state scoperte a Decollatura: scrissi immediatamente ad un amico a s. Pietro Apostolo perchè raccogliesse per me oggetti e notizie, ma sebbene avessi la conferma del rinvenimento, non mi fu possibile ottenere un soddisfacente risultato, ed in quell'anno dovetti rinunziare ad altro che non fosse la sola cuspide di lancia in bronzo di Bisignano. Nel nuovo distaccamento in Calabria del 1874 non mancai di ricercare armi di pietra, pietre del fulmine, ma non riuscii più di prima, nè avrei mai sognato di riconoscerne la causa nell'ignoranza mia sul nome calabrese di simili oggetti. Deluso nel primo tentativo, distratto da altre occupazioni, trascurai le ricerche e quasi vi rinunziai, e ricordo che interrogato se non avessi mai pensato ad occuparmi di questo argomento, risposi negativamente anzichè confessare un insuccesso. Stava per terminare l'ultimo mio distaccamento del 1876 quando conobbi per caso il nome col quale venivano colà designate le pietre lisciate ad ascie, parola magica che doveva finalmente schiudermi la via a raccoglierne un

certo numero e relativamente in breve tempo, e tale nome è *truoni* o *cuogni di truono*. Era imminente la partenza: poco feci sul sito, assai più in seguito da lungi; da quel momento non lasciai tregua o riposo a quanti conoscevo sul Catanzarese e nella regione limitrofa del Cosentino; fu un succedersi e replicarsi di lettere, circolari, promemorie ed eccitamenti alle persone che conoscevo nei diversi comuni, ai comandanti dei diversi distaccamenti, a chi per ragione d'ufficio doveva periodicamente compiere il giro di gran parte di quelle regioni, e mediante gli sforzi di tutti riuscii a mettere assieme una cinquantina di pezzi, e più ancora le notizie ordinate relativamente alle località esplorate. Giunto a questo punto, pensai se dovessi o no far conoscere il risultato delle mie ricerche, ma questo dipendeva da quanto fosse già stato fatto da altri relativamente alle provincie calabresi. Il chiarissimo Nicolucci che aveva già raccolto, studiato e pubblicato a più riprese una gran quantità di oggetti preistorici italiani, massime della parte meridionale, ne aveva già di calabresi; nella sua Memoria del 1871 (1) egli cita 37 oggetti di pietra lisciata di 11 comuni dei circondarî di Nicastro e Montelone, ma nessuno di selce; in quella del 1874 (2) ha nuovi oggetti di Calabria; finalmente nel suo catalogo del 1877 (3) riassume tutto il materiale della sua ricca collezione nella quale figurano 58 tra scuri, cunei, sgorbie, mazzuoli ed ascie-martelli calabresi, tra i quali una sola punta di freccia in diaspro rosso: i comuni rappresentati son 20 del Catanzarese e 3 del Cosentino. Il Nicolucci trovò per il primo il bel tipo delle ascie-martelli di Calabria, e le piccole scuri ad uso di amuleto. Le pietre lisciate sono graniti, sieniti, dioriti, affaniti, serpentini diaspro: la fibrolite vi è rappresentata da un piccolo oggetto solamente, la selce piromaca vi manca affatto. Egli determina per neolitiche le pietre lisciate di Calabria colla scorta unica di tal metodo di lavoro.

Ma la selce lavorata che era sfuggita alle ricerche del Nicolucci in quelle provincie, venne ritrovata dall'ingegnere Vincenzo Rambotti in oggetti rozzamente scheggiati, ed in nuclei unitamente a cocci di stoviglie nella valle dell'Alessi a Squillace (4). In ultimo, dirò che qualche altro oggetto preistorico di quelle provincie trovasi nel Museo paleoetnologico di Roma.

Considerando che la metà degli oggetti della mia raccolta provenivano da località non ancora esplorate, che alcuni distinti per forma, materia o dimensioni meritavano di essere conosciuti, che le mie ricerche erano condotte in modo da suggerire qualche considerazione sulle diverse regioni, avendo tenuto conto dei comuni esplorati, sebbene per la brevità del tempo o per altre difficoltà non mi avessero ancora fornito oggetti, mi sono determinato a far noto il risultato di queste ricerche mie; se non servirà ad altro, accrescerà il numero dei dati materiali relativi alla Paleoetnologia calabrese.

(1) G. Nicolucci, *L'età preistoriche nelle provincie pugliesi e calabresi* (Inserta nell'Archivio per l'Antropologia e l'Etnologia, anno 1).

(2) G. Nicolucci, *Ulteriori scoperte relative all'età della pietra nelle provincie napoletane* (Dagli Atti della R. Accademia di scienze fisiche e matematiche. Napoli, 1874).

(3) G. Nicolucci, *Catalogo della collezione* ecc. Napoli, 1877.

(4) Bollettino di Paleoetnologia italiana. Anno 2, pag. 222.

Descriverò adunque progressivamente ogni oggetto in ordine alla forma, accennando brevemente ai caratteri, roccia, luogo di rinvenimento: dirò in seguito quelle altre considerazioni che mi sarà dato azzardare in seguito all'esame degli oggetti e delle altre circostanze relative. — Ma prima mi sia permesso dire di un fatto positivo del quale ho dovuto convincermi malgrado che le apparenze non lo confermino, e questo è la straordinaria quantità di pietre lavorate in Calabria; il contrasto di questa mia osservazione col numero limitato per ora dei pezzi della mia raccolta, verrà spiegato facilmente quando si sappia che la superstizione fu l'ostacolo maggiore che ho dovuto affrontare in queste mie ricerche: e se non fosse stata la convinzione dei contadini di avere in casa loro uno o più Dei tutelari delle domestiche pareti e fattori di miracoli in molte circostanze, io avrei potuto in minor tempo e con minor fatica e spese riunire i *truoni* a centinaia. La massima parte delle famiglie di contadini e molte di quelle agiate dei comuni interni ritengono qualcuno di questi amuleti trovati nei loro poderi, e se tutti i *truoni* non sono precisamente armi preistoriche, lo sono però per la gran parte; il rimanente di tali oggetti sono ciottoli di mare o di fiume ai quali viene assegnata identica origine che alle vere scuri, perchè differenti dai detriti delle roccie circostanti, e da quelli contenuti nei conglomerati terziarî.

Ho accennato alle superstizioni che avvolgono in Calabria la presenza dei *truoni*, e sebbene non sia molto confacente al carattere e scopo di questo scritto l'entrare in argomento più adatto a descrizioni d'altro genere, voglio però enumerarne le principali per confermare l'importanza che si attribuisce a tali oggetti, e la difficoltà di raccoglierne in maggior numero malgrado la loro abbondanza; e non intendo con questo di biasimare quella regione a confronto di altre, perchè anche altrove sono comuni ancora nelle campagne simili o differenti credenze. Vuolsi dunque che tali pietre sieno gli stessi fulmini che si sprofondano nel terreno e poi si risollevano a poco a poco (vedi il Nicolucci nelle Memorie citate): che sospesi sul fuoco ad un filo, questo non possa abbruciare e sia la prova della loro virtù (vedi come sopra); nè per quanti fili si saranno consumati, si decideranno mai a cambiare opinione, e non saprei come spiegare la persistenza di certe credenze a dispetto dei fatti, ammenochè non sia l'effetto della stessa fede cieca che dispone la prova di questi fatti in modo che abbiano a riuscire. Vuolsi ancora che messi nel fuoco al minacciare di un temporale valgano a scongiurarlo: altri mi diceva seriamente che escono di sotterra in abbondanza ogni sette anni: finalmente si ricorre perfino ai *truoni* nei parti difficili, ed esiste un vecchio a Soveria del Simmeri possessore di una bellissima scure di pietra, il quale rifiutò di cederla ad un prezzo elevato, perchè doveva servirsene per questo uso nel quale pare superi la virtù delle altre.

Nè solo ai *truoni* si limita la superstizione, ma sibbene in modo diverso si occupa anche dei bronzi preistorici e di quelli dell'epoca storica; non è veramente generalizzata nelle due provincie, anzi la ritengo limitata a poche persone ed a poche località, ma non è men vero che io potessi averne la prova seguente. In un comune capo di mandamento del Cosentino dove mi trovavo di passaggio nel 1871, feci come al solito ricerca di antichità, e seppi che in quel territorio si trovavano in abbondanza armi, utensili ed ornamenti in bronzo. La persona che mi diede tali notizie, la quale

non apparteneva al volgo, mi apprese che qualche tempo prima avea trovato molti bronzi in un suo podere, ma per la mancanza di ricercatori di tali oggetti, avea dovuto far riseppellire quelli avanzi. L'espressione del mio volto dovette allora tradurre la mia sorpresa unitamente alla domanda che mi veniva alla bocca, perchè l'altro soggiunse: « capirà bene, sig. Capitano, erano utensili di gente pagana, nè poteva ritenerli presso di me ».

Hanno favorito le mie ricerche procurandomi oggetti e notizie le seguenti persone appartenenti a quelle provincie: signor Giuseppe Soluri verificatore metrico; sig. Provenzano Domenico fu Gio. Battista; sacerdote Giuseppe Asturino; cav. Andrea Cefali deputato al Parlamento; sotto-tenente Berardelli del 7° bersaglieri; furiere Tromby id. id.; dottor Giuseppe Caiola; sig. Aiello Francesco farmacista; sig. Jenzi Girolamo maestro elementare; ed i seguenti ufficiali del mio reggimento: capitano Galliano; tenente cav. Morelli di Popolo; tenente Issautier e finalmente il capitano Adami ora alla 13ª compagnia alpina. Ricevano tutti i miei ringraziamenti, ma specialmente la gentilissima sig.na Enrichetta Soluri da Catanzaro, la quale a prezzo di costanti e noiose ricerche mi procurò la gran parte degli oggetti e mi fu cortese di continui incitamenti ad intraprendere questo modesto lavoro.

I. — Descrizione degli oggetti.

d'ordine	Forma — Conservazione Misure — Peso	Densità	Caratteri della materia della quale son fatti	Luoghi ed elevazione	ANNOTAZIONI
I n. corrispondente Tav. I.ª	Ciottolo allungato con taglio stretto ad una estremità - Superficie mediocremente lisciata (Lungo mm. 128, largo 43, alto 31, taglio 24). Peso gram. 277,91.	3,035 (1)	Struttura granitica - Grani di feldispato bianco di quasi 1 mm. alquanti prominenti in massa lamellare nerastra, la quale fonde al cannello in smalto nero lucente magnetico - Durezza da 5,5 a 6 a seconda degli elementi - Polvere grigia - Diorite (2).	Territorio di Cicala - Tra 600 e 900 metri (3).	
II Tav. II.ª	Accetta a fianchi quasi rettilinei, taglio quasi retto - Levigata e lucente - Solco incavato e levigato come il rimanente, su di una faccia vicino ad alcune asperità della roccia non levigate (139 - 51 - 32). Peso 331,83.	2,958	Colore verde variabile traente in qualche parte al giallo rossastro - Lucentezza cerea - Piccole laminette lucenti nella massa - Struttura scagliosa - compatta ma tenace - Dur. da 3 a 5,5 c. sopra - Schegge sottili fondono = 2,5 ribollendo in sm. vetroso chiaro-verdognolo; altre = 3 in sm. giallastro; il rimanente della massa non fonde ma scolorasi. Nel tubo ch. legg. traccia di umidità - Roccia serpentinosa con elementi accessorî.	Terr. di Feroleto - Tra 200 e 800.	Non saprei dare una spiegazione soddisfacente circa l'uso del solco; traccia di solco alquanto curvo vedesi pure sul fianco del n. 46.
III	Altra come sopra, ma più piccola - Levigata quasi a lucido - Ha una piccola scanalatura attorno la punta fatta da poco per sospenderla (86 - 41 - 27). Peso 142,92.	3,000	Bigio oscuro con tendenza al verdognolo - Struttura affanitica a 2 elementi - Dur. da 5,5 - 6. Polv. grigiastra - Schegge fusibili in miscuglio di bollicine bianco-grigie e sm. nero magn.° - Diorite a minutissimi elementi che passa all'affanite.	Terr. di Fossato-Serralta - Tra 400 e 800.	
IV	Altra - Superficie scabra ma levigata a lucido verso il taglio (102 - 42 - 28). Peso 181,43.	3,020	Come il n. 1 ma l'elemento bianco è in XX più angolosi - qualche rara pagliuzza di mica bianca - Diorite.	Tiriolo - Regione Malfone - Tra 300 e 400.	

(1) Mancando di mezzi di precisione per la determinazione delle densità, dovetti ripetere molte volte le pesate a media, ed usare molte cautele massime per quelle alquanto porose alla superficie. Dalle differenze appena bili nei diversi esperimenti, e dalle prove fatte su esemplari di densità conosciuta, mi convinsi che l'errore non a superare due o tre unità della 3ª cifra decimale al maximum.

(2) Non ho creduto di limitarmi a dare la semplice determinazione della roccia, ma ho accennato quasi sempre ratteri della densità, fusibilità al cannello secondo la scala di Kobell, della durezza ecc. Sono talmente variate cie calabresi con tanti passaggi dall'una all'altra e per l'instabilità dei caratteri esterni, che è facilissimo di iare nella determinazione. Queste indicazioni guideranno dunque il lettore quando dubitasse della mia determine, e l'aiuteranno a determinarle se mi sono trovato incerto come è avvenuto per alcune. Devo far presente superficie di molte è alterata per lunga esposizione al fuoco: che di alcuni non ho potuto avere senza guastarli iccolissime schegge, e talora la sola polvere. Trovai anche un ostacolo nella mancanza di un microscopio ad ndimento sufficiente per distinguere i varî elementi e riunire quelli di egual aspetto per procedere agli assaggi diverse specie, massime dei feldispati.

(3) Non sorprenda la differenza nei limiti massimo e minimo delle elevazioni; chi conosce quelle regioni, o esaminate sulla carta al 50000 dello Stato Maggiore colle curve di 10 in 10 metri, saprà che a pochi metri ntalmente, corrispondono quote differentissime. Quando potei avere indicazioni sulla distanza e direzione dai anche approssimativamente, ho potuto dare i limiti più ristretti; quando mi si indicò la regione ristretta, la e diedi una quota sola: quando non ebbi che l'indicazione del territorio di un comune, allora dovetti citare differenti di molto.

V	Accetta più lunga, più larga alla punta, e fianchi più rettilinei - Era levigata quasi a lucido, ma rimane poco della superficie lavorata, essendo scrostata e guasta massime al taglio (115 - 55 - 37). Peso 487,22.	3,002	Grigio nerastro - Struttura XX^{na} scistosa di feldispato e amfibolo - Dur. da 5,5 - 6. - Varietà di diorite alquanto scistosa.	Terr. Cicala - Tra 600 e 900.	
VI V. Tav. II.ª	Un fianco è più curvo - Levigata, ma non a lucido. Ha rotta la punta e parte del taglio (168 - 76 - 48). Peso 939,72. - Intera, doveva passare i 200 mm. di lunghezza.	2,984	Bigio oscuro tendente al verdognolo - Str. affanitica scistosa - Traccie di colorazione rossastra tra i piani di scistosità dovuti all' alterazione dell' amfibolo - Dur. = 5 - 6 polv. grigia chiara - Affanite dioritica.	Terr. di Cortale - Tra 250 e 800.	È l'accetta più de che si conos ora di Calabria
VII	Altra ma con taglio più rettilineo, largo, e molto grossa e attondata alla punta - Poco levigata (83 - 47 - 33). Peso 193,72.	2,751	Struttura granitica quarzo, feldispato rossigno e amfibolo - Sienite.	Terr. di Savelli - Tra 400 e 1000.	
VIII V. Tav. II.ª	Altra piccola - Levigata perfettamente e lucente nella parte lavorata, ma appena ottenuto il taglio, non si curarono di levigare le parti rientranti del ciottolo. Taglio guasto da un lato (59 - 38 - 18). Peso 65,94.	2,986	Bianco e grigio-azzurrognolo confusi in macchie o venature fibrose intrecciate - Struttura fibro-scistosa ma tenace - Lucentezza sericea - Alla punta e di fianco avvi una piccola massa di quarzo - In altre parti, macchie e venature ferruginose - Translucida al taglio e nelle schegge - Inattaccabile da acidi - Infusibile al can. ma s'imbianca, e coll' azotato cobalto si colora intensamente in azzurro - Dur. compresa tra 6,5 e 7 - Sillimanite.	Terr. di Fossato-Serralta - Tra 400 e 800.	
IX	Altra con fianchi più curvi e taglio idem. - Dovea essere molto levigata ma è corrosa profondamente in modo che non rimane che qualche traccia della superficie (133 - 45 - 31). Peso 289,50.	2.857	Sienite ad elementi piuttosto piccoli.	Feroleto - nel torrente alla quota 350.	
X	Altra rotta alla punta - fianchi più retti, ma taglio molto tondo e conservato - Poco levigata (98 - 50 - 33). Peso 256,59.	3,087	Strutt. granit. a picc. elementi con tendenza a scistosità - Feldispato, amfibolo e poca mica chiara - Qualche vena di XX^{ni} bruni metallici che sembrano magnetite colla lente - Diorite.	Terr. Cortale - Tra 250 e 800.	
XI V. Tav. II.ª	Altra a taglio tondeggiante e molto largo, e terminante in punta più acuta - Levigata e lucente (102 - 52 - 28). Peso 201,40.	2,972	Bigio-giallognolo con piccole venature verdastre e macchiettine verdi nella massa - Struttura affanitica scagliosa - Dur. da 5 a 6 - polvere quasi bianca - Schegge fondono ribollendo in sm. giallognolo. Pare composta di due elementi indiscernibili ma che sembrano feldispato e amfibolo grammatite, e aver qualche analogia colle saussurriti e giade.	Sorbo s. Basile - Tra 500 e 800.	
XII	Altra - Superficie scabra (90 - 48 - 29). Peso 201,78.	3,115	Bigia - Strutt. granit. a minutissimi elementi bianchi, bigi e rosei con poca mica e qualche grano giallo diafano piccolissimo - Schegge danno al cannello un miscuglio che alla lente mo-	S. Pietro Apostolo - Tra 600 e 900.	

			strasi formato di puntini chiari, e sm. nero magnetico. Granulite granatifera?		
III v. III.ª	Accetta molto larga - Superficie quasi levigata a lucido (67 - 49 - 21. Taglio 47). Peso 112,67.	3,093	Nerastro uniforme con alcuni piccoli grani color d'olio di dur. 6 - Colla lente vedonsi piccolissimi XX^{ni} allungati e chiari sparsi nella massa - Struttura quasi compatta e tenace. Non potei aver schegge - Dur. circa 5,5 - Polvere bigia che al cannello fonde in goccioline nere magnetiche - La pietra non è magnetica - Affanite con minerali accessorî.	Pietraffitta, vicino al Convento di san Franc. - Circa 600.	
IV v. IV.ª	Altra larga e molto sottile - Fianchi curvi - Sup. levigata quasi a lucido - Guasta superiormente - Taglio poco conservato (76 - 48 - 10. Taglio 42). Peso 62,51.	2,964	Verde bruno e variabile - Per il rimanente vedi il n. 2 - Serpentina, prevalente con minerali accessorî.	Savelli - Tra 400 e 1000.	Malgrado il taglio più stretto del corpo, non posso persuadermi per l'estrema sottigliezza che abbia servito da cuneo.
V av. I.ª	Altra grande ma un po' curva lateralmente per difetto del ciottolo impiegato - Una faccia molto incavata per far scomparire in parte le asperità della pietra - Molto levigata - Taglio conservatissimo (153 - 65 - 3. Taglio 55). Peso 543,04.	2,935	Bigio-giallognolo come al n. 11 ma le venature sono appena visibili e non hanno che lieve tendenza al verdognolo - Durezza intorno a 6 - Polvere quasi bianca - Struttura come al n. 11 - Fonde ribollendo in vetro giallognolo. Pare composta di feldispato e grammatite.	Sorbo s. Basile - Tra 500 e 800.	Uno dei migliori oggetti della raccolta per la grandezza e conservazione. Malgrado il taglio più stretto, non so persuadermi a ritenerlo un cuneo.
VI av. I.ª	Altra a taglio un poco più stretto del corpo - Levigata e lucente inferiormente, scabra superiormente (118 - 45 - 33. Taglio 43). Peso 269,47.	3,065	Colore verde oscuro tigrato di nero verdastro, e verde-giallognolo confusi insieme - Strutt. sub-cristallina a elementi indistinti - Dur. da 5 a 6 - Polvere biancastra - Schegge fondono = 4 in sm. biancastro con qualche piccola bollicina di sm. nero magnetico.	Catanzaro - alla fornace di mattoni sulla via per Gagliano - Circa 320.	
II	Altra mediocremente levigata (90 - 43 - 33. Taglio 40). Peso 216,39.	3,049	Bigio-oscuro - Come al n. 3 - Diorite che fa passaggio all'affanite.	Gimigliano - Tra 300 e 600.	
III	Altra meno levigata - Taglio un poco guasto (95 - 48 - 34. Taglio 44). Peso 242,50.	3,038	Colore bigio-oscuro - Tutto come al n. 3 - Passaggio della diorite alla affanite.	Sorbo s. Basile - Tra 500 e 800.	
IX	Altra - Superficie poco levigata, meno che verso il taglio (95 - 45 - 31. Taglio 41). Peso 209,00.	2,995	Colore oscuro prodotto da alterazione, ma internamente è più chiaro assai - Strutt. come al n. 1 - Diorite.	Cicala - Tra 600 e 900.	
X	Altra, mediocremente levigata - Guasta verso il taglio da un lato (85 - 47 - 33. Taglio 43). Peso 179,16.	2,653	Bigio - È una leptinite granitica.	Gimigliano - Reg. Mangani - Tra 500 e 600.	
XI	Altra ma più tonda sopra - Mediocremente levigata (66 - 41 - 21. Taglio 38). Peso 97,72.	3,108	Grigio scuro - Strutt. granitica ad elementi molto minuti bianchi e bruni che fondono in sm. bianco, bigio, e sm. nero magnetico - Dur. 5,5 a 6 - polv. grigia - È una diorite a minuti elementi.	Sorbo s. Basile - Tra 500 e 800.	
XII	Altra - Superficie mediocremente levigata (75 - 41 - 25. Taglio 37). Peso 128,78.	3,053	Grigio chiaro - Struttura XX^{na} scistosa a piccoli elementi con molti granati alterati - Gneiss granatifero.	Nicastro - Reg. Foresta - Tra 400 e 700.	

XXIII	Accetta - come sopra (75 - 43 - 24. Taglio 39). Peso 117,80.	2,871	Bigio-oscuro - Affanite.	Cortale - Tra 250 e 800.
XXIV	Altra con fianchi e taglio più curvi - Piuttosto ben levigata - Guasta superiormente (69 - 40 - 24. Taglio 34). Peso 113,33.	3,022	Diorite a minuti elementi con poca mica.	Savelli - Tra 400 e 1000.
XXV	Altra a faccie irregolari e scabre: levigate verso il taglio (127 - 52 - 31. Taglio 48). Peso 344,39.	2,810	Struttura porfiroide - Pasta bigio-verdognola che si fonde = 3 in sm. vetroso bigio macchiato di nero - Piccoli XX^{ni} neri e chiari di 1 m m. circa, sparsi nella massa - Piriti alterate - Varietà di sienite porfirica.	Savelli - Tra 400 e 1000.
XXVI	Altra - Superficie mediocremente levigata - Taglio guasto (113 - 44 - 31. Taglio 40). Peso 295,15.	3,065	Tutto come al 24.	Sorbo s. Basile - Tra 500 e 800.
XXVII	Altra - Poco levigata - Guasta al taglio (106 - 46 - 34. Taglio 41). Peso 284,57.	2,926	Gneiss granatifero ad elementi piccolissimi.	Presso l'abitato di Platania - Tra 700 e 800.
XXVIII	Altra - Superficie ben levigata (113 - 51 - 33. Taglio 44). Peso 327,86.	2,996	Diorite a piccoli elementi - Pare vi sia un po' di quarzo.	Gimigliano - Reg. s. Felice - Tra 600 e 700.
XXIX	Altra - Sufficientemente levigata (117 - 46 - 34. Taglio 39). Peso 313,51.	3,051	Come al n. 3.	Cicala - Tra 600 e 900.
XXX V. Tav. I.ª	Altra più tondeggiante. (88 - 36 - 28. Taglio 25. Peso 143,97.	3,084	Come al n. 24.	Belsito - Tra 400 e 700.
XXXI	Altra, ma più stretta superiormente - Poco levigata - Guasta massime al taglio (92 - 46 - 35. Taglio 38). Peso 220,50.	2,914	Diorite a minuti elementi con mica bianca, e alquanto scistosa.	Cicala - Tra 600 e 900.
XXXII	Altra più tonda - Rotta superiormente (102 - 45 - 36. Taglio tondo 35). Peso 274,67.	2,990	Come al n. 4 - Diorite.	Terr. Cicala - Reg. Montagna - Tra 800 e 900.
XXXIII V. Tav. III.ª	Altra quasi tonda, con superficie piana superiormente - Poco levigata - Taglio guasto (77 - 39 - 32. Taglio 28). Peso 181,37.	3,198	Granito a piccolissimi elementi e con poca mica bianca - Traccie di un elemento nero (mica o amfibolo) - È zeppo di graniti alterati dai più piccoli a quelli di 6 mm.	Cicala - Tra 600 e 900.
XXXIV	Altra come sopra, ma grande - Superficie scabra - Da un lato pare siasi usata per lisciatoio - Taglio molto usato (104 - 48 - 41. Taglio dovea essere di 35). Peso 390,13.	3,031	Struttura granitica - Feldispato bianco, e rossigno alla superficie per alterazione - Amfibolo nero verdastro - Dur. 5,5 e 6 - Diorite a minuti elementi.	? ?
XXXV	Altra terminante quasi a punta - Taglio guasto, ma alquanto arcuato a sgorbia - Una faccia molto convessa, dalla parte concava del taglio - Superficie levigata (103 - 49 - 34. Taglio 46). Peso 262,26.	3,129	Bigio oscuro omogeneo - Struttura affanitica - Un elemento bianco-grigio, si mostra evidente in qualche rara massa XX^{na} sparsa nella pasta - Come al n. 6 - Affanite.	Fossato - Serralta - Tra 400 e 800.
XXXVI V. Tav. II.ª	Altra rotta a metà - Pare dovesse essere molto lunga - Sup. levigata a lucido - Taglio con tendenza	2,960	Come al n. 24, con poca mica.	S. Pietro Apostolo - Tra 600 e 900.

	alla curva della sgorbia. (? - 33 - 21. Taglio 28). Peso 73,36.				
XXXVII V. Tav. III.ª	Accetta con faccia più curva dell'altra - Taglio come sopra - Liscia e lucente 75 - 39 - 23. Taglio 35). Peso 111.70.	3,000	Come al n. 24, con poca mica.	Feroleto - Tra 200 e 800.	
XXXVIII V. Tav. III.ª	Come sopra ma molto piccola - Levigata a lucido (43 - 23 - 11. Taglio 21). Peso 19,64.	3,248	Verde macchiettato di bianco-verdognolo - Strutt. finamente granosa - Durezza circa 6,5 - Non potei aver schegge, ma solo pochissima polvere biancastra che al cannello si fa magnetica.	In un piccolo rivo a Monterosso C. - Tra 250 e 350.	Deve aver servito come amuleto.
XXXIX	Altra come sopra, ma termina a punta più acuta - Taglio sempre come sopra (92 - 41 - 27. Taglio 39). Peso 160,40.	2,978	Come al n. 24.	Sorbo s. Basile - Tra 500 e 800.	
XL	Altra ma colle faccie più eguali - Taglio guasto - Sup. ben levigata (79 - 40 - 24. Taglio 36). Peso 119,70.	2,920	Bigio oscuro - Tutto come al n. 3.	Fossato - Serralta - Tra 400 e 800.	
XLI V. Tav. III.ª	Altra molto sottile e larga - Una faccia più tondeggiante - Taglio netto e conservatissimo con leggera curvatura a sgorbia - Sup. molto levigata e lucida (90 - 62 - 16). Peso 146,06.	3,175	Bianco, bianco-grigio più o meno oscuro confusi in macchie e venature fibrose intrecciate - Lucentezza sericea - Struttura fibro-lamellare - Translucida al taglio e nelle schegge - Infusibile, ma si comporta come al n. 8 - Nella massa son disseminati cristalli rossastri di egual durezza 7, e macchiette nero-verdognole - Sillimanite.	Avuta da Gimigliano, ma trovata fuori del Comune da chi lavorava alla ferrovia.	Ornamento della collezione per forma e materia.
XLII V. Tav. III.ª	Utensile più volte rifilato - La superficie di lavoro levigata a lucido, lasciò a nudo alcune asperità del ciottolo - Taglio con leggera curvatura a sgorbia (61 - 42 - 18). Peso 70,40.	3,065	Verde macchiato di verde più chiaro e più oscuro a sfumature - Struttura finamente lamellare - Lucentezza meno cerea del 38 - È magnetica - Durezza 3 e 5,5 - Polvere biancastra magnetica, che al cannello si fa grigia e fonde = 5 in sm. bruno magnetico - Le schegge si scolorano e fondono sui margini come sopra.	Gimigliano - Reg. Difesa - Tra 600 e 900.	
XLIII V. Tav. III.ª	Accetta a fianchi quasi retti e paralleli - Levigata mediocremente (87 - 39 - 26). Peso 188,28.	3,043	Grigio oscuro - Come al n. 6 - Affanite.	Feroleto - Reg. s. Michele - Tra 300 e 700.	
XLIV	Altra più grande con i fianchi più curvi - Rotta in un fianco al taglio - Lisciata ma non lucida (100 - 48 - 32). Peso 311,08.	3,183	Bigio-verdognolo - Struttura affanitica - Dur. 5 e 6,5 - Polvere biancastra - Schegge fondono sui margini = 3 in sm. nero lucente magnetico.	Savelli - Tra 400 e 1000.	
XLV V. Tav. III.ª	Altra ma più corta e sottile - Levigata a lucido (59 - 39 - 15). Peso 68,35.	2,983	Color nerastro sparso di piccoli puntini lucenti come mica dorata - Polvere rossastra alla superficie alterata. Internamente è meno oscura e i punti son grigio-metallico - È magnetica - Dur. 5 e 5,5 - Polvere grigia - Struttura sub-lamellare - Schegge si comportano come al n. 42 - Serpentina prevalente con amfibolo e magnetite.	Sorbo s. Basile - Tra 500 e 800.	

XLVI V. Tav. IV.ª	Accetta a due tagli mal conservati - Superficie levigata e lucente - Solco curvo poco incavato in un fianco (70 - 35 - 32. Taglio 25 e 28). Peso 96,32.	2,980	Come al n. 2 - Roccia serpentinosa.	Gimigliano - Reg. Cottura - Circa 800.	
XLVII V. Tav. IV.ª	Altra come sopra - Il taglio più largo è rotto dall'uso - Quello stretto, quantunque rettilineo è lavorato come quelli a sgorbia ed è conservatissimo - Levigata e lucente (? - 35 - 13. Taglio 35 e 19). Peso 49,65).	2,999	Verde piuttosto chiaro a macchie con venature tendenti al bluastro - Strutt. scagliosa-compatta - Lucentezza un po' grassa come quella della giadeite - Dur. 5 e 5,5 - Polvere bianca - Fonde 2,5 ribollendo in sm. biancastro e vetro giallognolo.	Cotronei - Tra 300 e 900.	
XLVIII V. Tav. IV.ª	Ascia - martello - Superficie scabra - Taglio leggermente arcuato a sgorbia (141 - 101 - 61). Peso 1471,63.	2,943	Strutt. granitoide a due elementi di grossezza da 1 a 4 mm., ma molto intralciati e confusi - L'amfibolo bruno-verdastro con i soliti caratteri è in prevalenza - Il feldispato bianco-bigio in nuclei a struttura XX^{na} è alterato alla superficie - Diorite.	Terr. di Taverna - Tra 500 e 900.	Più grande di quelli calabresi della collezione Nicolucci.
XLIX V. Tav. IV.ª	Accetta a doppio uso di taglio e punta - Questa ultima è rotta - Sup. levigata quasi a lucido alle estremità, ma poco nella parte centrale (86 - 40 - 29). Peso 150,50.	3,008	Come il 24 - Diorite a piccoli elementi.	Spezzano grande a 500 m. verso ovest - Circa 700.	Interessantissimo oggetto per forma, della quale non s'avea conoscenza per ora.
L V. Tav. IV.ª	Utensili a sezione triangolare, della quale due vertici corrispondono ai lati del disegno, l'altro al centro, tondeggiante in modo che par lisciato - La faccia posteriore è quasi piana e finita a leggere scheggiature superficiali - lungo 73, largo alla base 14, alto 6 dalla base alla metà.		Selce biondo-cinerea.	Terr. Vena - Tra 100 e 300.	Pare una cuspide o un punteruolo (La punta è rotta).
LI V. Tav. IV.ª	Frammento di accetta stata tagliata e messa sul fuoco da un fabbro.		Bronzo - Manca quasi del tutto la patina.	Feroleto.	
LII	Cuspide di lancia di forma solita - lunga 170, larga alle alette 36, alla base 25.		Bronzo con meno stagno che nella precedente - Bella patina.	Bisignano.	
LIII V. Tav. IV.ª	Altra ma molto lunga colla costa faccettata - È rotta in due pezzi e manca della punta - Lunghezza che dovea superare per lo meno i 280 o 300 m. m.		Come sopra - Bella patina - Nella superficie di frattura vedesi la lega molto porosa ed ineguale per fusione difettosa.	Feroleto.	

(1)

(1) Al termine del lavoro mi viene annunziata la spedizione di altre 3 accette da Cortale, ed una da Cicala: quest'ultima sebbene guasta è lunga 20 centimetri.

II.

Le diverse epoche preistoriche in Calabria.

Epoca della pietra.

Delle epoche preistoriche calabresi non abbiamo rappresentate da questa raccolta che quella della pietra ed accennata quella del bronzo. La suddivisione della prima generalmente adottata in archeolitica e neolitica, non può far buona prova in Italia [1] dove o si trovano riunite in certe stazioni armi scheggiate e levigate, oppure per mancanza o scarsità di selce in alcune regioni, si dovettero adoperare fin dai primi tempi ciottoli lisciati. Per questo la Calabria trovasi nelle condizioni identiche del Piemonte, Liguria e regioni circostanti, cioè vi manca la selce che abbonda in noduli ed arnioni nei sedimenti cretacei e giuresi, terreni che mancano in Calabria; solamente verso il litorale all'altezza di Squillace comincia a mostrarsi la selce in certi calcari che aumentano poi in estensione nella provincia di Reggio, ed anche ad ovest di Cosenza se ne trova alquanto. Fin ora non mi fu dato scoprire altro oggetto di selce calabrese che il n. 50 della Tav. IV, il quale fu trovato nelle vicinanze di Vena fin dal 1870 circa, e venuto in possesso del capitano G. B. Adami, dal quale lo ebbi in dono in questi ultimi giorni. Per quanto abbia incaricato chi dovesse ricercare altri oggetti di selce nella stessa località, appena conobbi l'esistenza di questo, non ebbi altro, nè se ne conoscono altri da quei terrazzani. Dal carattere del lavoro non esiterei a metterlo tra quelli che vengono designati per neolitici, ma finchè rimarrà solo non ci autorizzerà certamente a far altre deduzioni. Della scoperta dell'ing. Vincenzo Rambotti (vedi introduzione) nella valle dell'Alessi, non posso dir nulla per ora non conoscendone altro che quello che se ne dice nel Bollettino citato; quantunque egli abbia designato quegli oggetti per rozzamente scheggiati, non mi attenterei, prima di averli visti o conosciuti meglio per nuove informazioni, a dire che dovessero caratterizzare l'epoca archeolitica calabrese, specialmente dopo che sappiamo che furono trovati insieme a cocci di stoviglie. Il piccolo numero di oggetti di selce in confronto alla straordinaria quantità di pietre lisciate, parmi che ci dimostri che l'uomo preistorico calabrese avesse dovuto servirsi fin dai primi tempi dei ciottoli levigati, ma che in pari tempo avesse scoperto quella poca selce e se ne fosse giovato per un numero limitato di piccoli oggetti come frecce, punteruoli, coltellini ecc. per i quali non si prestavano le altre roccie.

Le solite pietre lisciate non possono darci da sole un criterio per la distinzione della quale si tratta; la sola selce, e della qualità adatta, si prestò sempre egualmente bene allo scheggiamento, e quindi in epoca posteriore si potè ottenere una maggior finitezza col levigamento, ma questo non dovette succedere colle altre roccie. La differenza della forma dei ciottoli che si avevano sotto mano, la qualità, durezza,

(1) B. Gastaldi, *Iconografia di oggetti di remota antichità* ecc. (Dagli Atti dell'Accademia R. delle scienze. Torino, 1869). Ho preso da quest'ottimo scritto, questa e qualche altra considerazione, che mi pare avrebbero dovuto convincere chiunque, in Italia specialmente, si occupa di tale materia.

tenacità, e struttura della roccia dovevano essere le sole condizioni della riuscita del lavoro, e non si aveva che un solo mezzo di eseguirlo, cioè mediante levigatura con sabbie dure sopra roccie dure; potrebbe quindi succedere che oggetti meglio levigati fossero stati eseguiti durante la prima epoca e viceversa. Non sarà però irragionevole di assegnare ad un' epoca più recente quegli oggetti di forma più ricercata, e specialmente quelli destinati a più usi contemporaneamente quali sarebbero i n. 48 e 49. In questi ed in molti altri, vedesi uno spreco di lavoro non indifferente che ci fa considerare come tal lusso fosse poco adatto ai bisogni delle età più remote, quando potea bastar una rozza scure ben immanicata per tagliare, ed una pietra qualunque o tondeggiante o a punta per martello: solo in tempi più recenti, quando abbondarono gli utensili rozzi e primitivi, si dovette ricorrere ad una maggior ricercatezza compatibilmente con i mezzi disponibili.

Essendo impossibile adunque di ricorrere al carattere della levigatura per distinguere le due età, carattere che sarebbe troppo convenzionale anche se fosse possibile, è d'uopo rimettersene a scoperte più importanti e decisive che non dubito si potranno fare in seguito su quella regione, cioè di vere stazioni; in queste, gli oggetti ed utensili che accompagneranno le armi di pietra, e specialmente i fossili delle specie animali, ci forniranno quei criterî che ci abbisognano.

Epoca del bronzo.

Non sono che tre gli oggetti in bronzo di Calabria che ho potuto avere: una cuspide di lancia tipo solito al n. 52; un'altra ma di fattura molto più accurata ed elegante al n. 53, e di una lunghezza poco comune. Sì l'una che l'altra sono di lega piuttosto rossa per la prevalenza del rame al confronto di quella dell'ultimo oggetto ossia il frammento di accetta, che è di bronzo più giallo. Altri oggetti di bronzo preistorici rinvenuti colà, e dei quali ebbi notizia, sono i seguenti: alcune cuspidi di lancia del tipo e grandezza del n. 52, trovate in Valle Fiumarella verso Catanzaro; sono possedute dal sig. prof. Rambotti a Desenzano, tanto conosciuto per la ricca e stupenda raccolta degli oggetti della torbiera di Polada presso Lonato, condotta con tanto amore, classificata con ordine ammirabile, e della quale prepara una illustrazione che promette essere degna della raccolta stessa.

Un'accetta in bronzo trovata su quel di Cortale e posseduta un tempo dall'onorevole Andrea Cefali Deputato al Parlamento; quest'accetta, se le informazioni avute sono esatte, dovea essere un paalstab.

In molti comuni catanzaresi e cosentini si trovarono e si trovano tuttavia bronzi d'ogni sorta che vengono acquistati da forestieri, o rimangono, sebbene in numero più ristretto in raccolte private. Alcuni vennero in mie mani ed erano della Magna Grecia, ma mi è lecito supporre che una certa porzione di tali bronzi che sono in raccolte calabresi, siano dell'epoca preistorica. Mi riservo a nuove indagini nella mia nuova gita in Calabria.

Passo sotto silenzio l'epoca del ferro, ultima delle età preistoriche che forma l'anello di congiunzione coi tempi storici e che forse spetta più a questi che a quelli. È questione troppo difficile a toccarsi da noi, dove son poche le località che abbiano

fornito monumenti ben accertati appartenenti a quest'epoca ed anche se avessi oggetti in ferro per la Calabria non ne parlerei certamente, eccetto che le circostanze del rinvenimento non autorizzassero a supporli veramente preistorici.

III.

Luoghi di provenienza degli oggetti in pietra.

Daremo prima uno sguardo alla configurazione generale della regione della quale ci occupiamo, e che per la sua costituzione è distinta affatto dal rimanente della penisola.

La catena apenninica terminando col Monte Pollino scende con ripido pendìo a perdersi nella pianura del Crati a sud di Castrovillari. Di qui ricomincia ad alzarsi il terreno verso quel nucleo centrale granitico della Sila che forma gran parte delle due provincie, con un altipiano ondulato tra 1300 e 1600 metri e con una elevazione di oltre i 1900 metri ad est di Cosenza, ed altra di 1785 al Gariglione. Questa regione centrale silana è circondata da una fittissima frangia di contrafforti e diramazioni frastagliata e profondamente solcata da innumerevoli valli e burroni talvolta inaccessibili, che vanno perdendosi ad est e sud-est verso il litorale ed il marchesato, a sud verso il litorale e l'istmo, ad ovest verso Cosenza e la catena del litorale mediterraneo colla quale si confondono. Tutta questa catena montuosa è formata di graniti, gneiss micascisti, talvolta così alterati alla superficie da esser trasformati in sabbie feldispatiche e quarzose da rassomigliare ai sedimenti.

Verso ovest, sulla sinistra della valle del Crati, segue il litorale una catena secondaria di terreni apenninici soprapposti agli scisti, la quale a sud di Cosenza si confonde con i contrafforti della Sila sulla destra del Savuto. La catena principale segue colla dorsale fino a Tiriolo, dove sostiene un monte di calcare isolato e poi si abbassa nuovamente per scomparire sotto i terreni pliocenici dell'istmo Squillace e s. Eufemia, e ricomparire quindi al di là di questo. L'istmo suddetto divide in due regioni distinte la Calabria: la depressione è molto forte, perchè la massima elevazione della dorsale strettissima dalla quale si dipartono gli affluenti di destra del Corace e qualche piccolo rivo di sinistra del Lamato, non supera i 250 metri tra Caraffa e Settingiano.

Malgrado gli sforzi per generalizzare le mie indagini a tutto il territorio delle due provincie, non riuscii che ad avere per ora notizie oppure oggetti dalla massima parte dei comuni compresi tra il parallelo di Cosenza e l'istmo di Catanzaro, in modo che devo considerare questa zona solamente per meglio esplorata in questo breve tempo, e con i mezzi limitati dei quali potevo disporre (¹); però ho potuto anche aver notizie di molti comuni del restante della provincia catanzarese a nord, e di molti altri a sud dell'istmo.

Ho creduto bene di unire a questa parte della presente Memoria, una tabella dimostrante il risultato materiale delle ricerche fatte in più di 90 comuni, completata

(¹) Per questa regione, limitata come si è detto, ho le indicazioni relative a più che i due terzi dei comuni compresi: per le due provincie, ho indicazioni sopra un terzo dei rispettivi comuni.

colle notizie avute dagli scritti del Nicolucci e col numero degli oggetti che so positivamente essersi scoperti in alcuni, ma che andarono in possesso di altri, o dispersi, o nascosti con gelosa cura dal proprietario. Forse qualcheduna delle indicazioni avrà bisogno di conferma o di correzione, ma in complesso credo di poterne tener conto, ed ampliarla in seguito (¹).

Come si è potuto vedere nella descrizione degli oggetti ho cercato di dare le meno inesatte indicazioni sul sito ove furono rinvenuti e sulle quote di altitudine relative; nessuno fu trovato, che io mi sappia, in vere stazioni; sono dunque da ritenersi tutti di provenienza sporadica. L'azione continuamente demolitrice degli agenti esterni su quei terreni granitici e scistosi singolarmente favorita dal diboscamento, la quale riesce evidente anche per il corso di pochi anni a chi conosce quelle provincie, può dare una certa idea dei cambiamenti che avranno dovuto subire nell'esterna loro configurazione dai tempi preistorici in poi. E da questa causa ne sarà derivata la dispersione delle reliquie preistoriche di molte stazioni non sufficientemente al riparo dalle corrosioni del terreno, venendo trasportate in una o più direzioni differenti: e quindi motivo d'incertezza e di errori per chi ora volesse sulla scorta di tali rinvenimenti, ricercare il sito delle primitive stazioni. Ma potendosi continuare le ricerche sul sito stesso, tenendo conto di tutte le circostanze relative, e massime delle condizioni topografiche circostanti alle zone più fertili di tali prodotti, e potendo finalmente contare anche per una certa parte sulla fortuna, si potrà fare qualche cosa di più positivo. Per ora non cercherò che di fissare bene i dati che ho potuto riunire, e se ne scaturirà qualche considerazione, non tralascerò di accennarla.

Ho sentito ripetermi da alcune persone che la maggior parte delle pietre in questione si trovino alla Sila centrale; dovremo prestar fede a questa asserzione, o ritenerla un errore? Stando agli oggetti da me posseduti furono rinvenuti tutti in prossimità dei luoghi abitati, o al più distanti di 5 a 6 chilometri, e tra i 200 e 900 di elevazione. Alcuno di questi mi fu dato coll'indicazione «trovato alla Sila» ma assunte nuove e più esatte informazioni, risultò che fosse stato trovato sulle diramazioni silane e non più di 900 o 1000 metri al massimo. Non è a dire che si trovino solamente in vicinanza dei comuni o villaggi in conseguenza di una coltivazione più estesa attorno tali centri, perchè la coltivazione stessa si spinge a molte parti dell'altipiano centrale, e se realmente vi esistessero tali oggetti non rimarrebbero occulti. Il sottotenente Berardelli del mio reggimento essendo in licenza a Belsito sua patria, ha attraversato la Sila da Rogliano a s. Giovanni in Fiore domandando continuamente notizie dei *truoni,* ma dalle risposte avute ha potuto darmi nuova conferma del fatto già conosciuto per altre indagini, cioè che non si trovino tali oggetti nell'altipiano centrale oltre i 900 o 1000 metri al più. Se confrontiamo questo fatto coll'abbondanza delle pietre lavorate nei territorî dei comuni tra i 600 e 900 metri di altitudine, possiamo ridurre l'asserzione di quelle persone summentovate a questa:

(¹) In questa tabella ho messo alcuni comuni nella colonna indicante che vi si trovano alcuni oggetti, perchè sapevo solamente che se ne trovano, senza essere abbastanza informato sulla quantità relativa.

« i truoni si trovano per la gran parte alla Sila » ed è in questi termini che l'udii ripetere da altri, intendendo per Sila la zona tra i 600 o 700 e i 900 circa.

Se ci allontaniamo dalla zona suddetta scendendo verso i comuni situati più in basso, vediamo in complesso che va scemando la quantità degli oggetti, in modo che giunti alle vicinanze del litorale e nel marchesato non se ne trovano più ; ed anzi in alcuni comuni di questa ultima regione non si conoscono neppure. Possiamo dunque ammettere che i limiti di tali rinvenimenti stiano tra i 900 e 200, ma che la zona più fertile sia quella vicina al limite superiore.

Lo stesso fatto si verifica, almeno per il limite superiore, nella regione a sud dell'istmo, e nella regione montuosa del litorale mediterraneo, ma non posso accertarlo per il limite minimo, chè anzi suppongo che lungo il litorale da Paola ad Amantea si debbano ritrovare anche al livello del mare (1).

Considerando la regione intorno alla Sila tra i 200 e i 900 metri nella quale si rinvengono le ascie di pietra dovremo noi ritenerla per quella delle stazioni preistoriche? Parmi non sia da accettarsi per questa gli stessi limiti di quella, per le modificazioni che devono aver subìte da due cause, cioè dall'azione stessa degli abitanti d'allora i quali devono necessariamente aver disseminato tali oggetti oltre i luoghi abitati, e dalle erosioni e trasporti operati dalle acque. La prima di queste cause avendo esteso i due limiti, e la seconda avendone modificato l'inferiore, noi dovremo ridurre di molto questo ultimo e di poco il superiore. Credo dunque di poter dedurre da queste considerazioni, che la popolazione antistorica avesse scelto le sue stazioni nella zona montuosa che ricinge la Sila preferibilmente tra i 400 e 800 metri di altitudine: e che lo stesso sia avvenuto nella catena del litorale mediterraneo e a sud dell'istmo, facendo però eccezione per ora della spiaggia mediterranea e di quella jonica a sud dello stesso istmo sulle quali non ho dati sufficienti. Il clima invernale troppo rigido dell'interno della Sila e la probabile esistenza di foreste abitate da belve che ne avrebbero impedito l'accesso all'uomo non provveduto di armi adatte: la mancanza nel litorale dell'est al di qua dell'istmo di luoghi che presentassero le condizioni volute per sicurezza e difesa, sono altre ragioni in appoggio alla succitata opinione.

Non indicherò luoghi meglio determinati come quelli che dovessero guidarci nelle indagini dirette a scoprire qualche stazione ; in terreni come questi, dove ad ogni passo si presentano situazioni tali che la fantasia accetterebbe per altrettanti veri ricoveri da selvaggi, è difficile la scelta. Solamente accennerò alle adiacenze del Monte di Tiriolo, ed alle caverne che si trovano nei territorî di Grimaldi e Belsito.

(1) Il Nicolucci ha avuto 29 oggetti dal mandamento di Sambiase, comuni di Gizzeria, Platania e Sambiase, e molti di questi oggetti furono trovati quasi al piano, anzi alcuni vicino alla marina di s. Eufemia. Questo fatto non contradice alle considerazioni che farò in seguito, avuto riguardo alle frequentissime erosioni nei fianchi di quelle valli e vicino alle vette di quei monti, per le quali quella regione trovasi ogni anno ricoperta dalle piene di quei corsi d'acqua: queste vi lasciano sedimenti molto estesi di materiali trasportati da distanza breve, ma da altitudini elevate.

Tabella dei Comuni

nei quali si trovarono armi di pietra, o dai quali ho potuto avere notizie relative all'argomento.

Provincia	Circondario	Mandamento	Comune	Quota di elevazione media dell'abitato	Vi si trovano oggetti in pietra			Numero di quelli	
					Nessuno	Alcuni	Molti	Avuti da me	Conosciuti per informazioni
Catanzaro	**Catanzaro**	Borgia	Girifalco	450	—	1	—	—	—
»	»	Catanzaro	Catanzaro	330	—	1	—	1	—
»	»	Cropani	Andali	620	—	—	1	—	—
»	»	»	Belcastro	500	—	1	—	—	—
»	»	»	Cerva	800	—	—	1	—	—
»	»	»	Cropani	340	—	1	—	—	—
»	»	»	Sersale	800	—	—	1	—	—
»	»	Soveria	Sellia.	620	—	1	—	—	3
»	»	»	Simmeri (e Crichi) .	300	—	1	—	—	—
»	»	»	Soveria.	390	—	1	—	—	3
»	»	»	Zagarise	570	—	1	—	—	—
»	»	Taverna	Albi	730	—	1	—	—	—
»	»	»	Fossato-Serralta . .	730	—	—	1	4	7
»	»	»	Pentone	700	—	1	—	—	1
»	»	»	Sorbo s. Basile . . .	570	—	—	1	7	—
»	»	»	Taverna	550	—	1	—	1	—
»	»	Tiriolo	Amato	500	—	1	—	—	—
»	»	»	Caraffa	370	—	1	—	—	2
»	»	»	Marcellinara	350	—	1	—	—	—
»	»	»	Miglierina	560	—	1	—	—	—
»	»	»	Tiriolo	680	—	—	1	1	5
»	»	»	Settingiano	250	—	1	—	—	—
»	**Cotrone**	Cirò	Cirò	340	1	—	—	—	—
»	»	»	Cruccoli	370	1	—	—	—	—
»	»	»	Melissa	280	—	1	—	—	—
»	»	Cotrone.	Cotrone	0	1	—	—	—	—
»	»	»	Cutro.	250	1	—	—	—	—
»	»	»	Isola di C. Rizzuto .	80	1	—	—	—	—
»	»	Petilia Policastro . .	Mesuraca.	370	—	1	—	—	—
»	»	»	Petilia-Policastro . .	400	—	1	—	—	—
»	»	»	Petronà	890	—	—	1	—	—
»	»	S. Severina	Cotronei	500	—	—	1	1	—
»	»	»	Rocca Bernarda. . .	240	1	—	—	—	—
»	»	»	S. Mauro Marchesato	290	1	—	—	—	—
»	»	»	S. Severina	320	1	—	—	—	—
»	»	»	Scandale	350	1	—	—	—	—
»	»	Savelli	Caccuri	690	—	1	—	—	—
»	»	»	Casino	900	—	—	1	—	—
»	»	»	Cerenzia	640	—	1	—	—	—
»	»	»	Pallagorio	540	1	—	—	—	—
»	»	»	Savelli	970	—	—	1	5	—
»	»	»	Umbriatico	450	1	—	—	—	—
»	»	Strongoli	Belvedere Spinello. .	330	—	1	—	—	—
»	»	»	Casabona.	310	1°	—	—	—	—
»	»	»	Rocca di Neto . . .	170	1	—	—	—	—
»	»	»	S. Nicola dell'Alto. .	560	—	1	—	—	—
»	»	»	Strongoli	320	1	—	—	—	—
»	**Monteleone**	Mileto	Mileto	350	—	1	—	—	2
»	»	Monteleone	Monteleone	470	—	1	—	—	3
»	»	Monterosso Calabro	Monterosso (Calabro)	300	—	1	—	1	2
»	»	»	S. Nicola di Crissa .	520	—	1	—	—	1

Provincia	Circondario	Mandamento	Comune	Quota di elevazione media dell'abitato	Vi si trovano oggetti in pietra: Nessuno	Alcuni	Molti	Numeri di quelli: Avuti da me	Conosciuti per informazioni
Catanzaro	**Monteleone**	Serra s. Bruno . . .	Brognaturo	750	—	—	1	—	1
»	»	»	Serra s. Bruno . . .	760	—	—	1	—	5
»	»	Soriano	Sorianello	470	—	1	—	—	1
»	»	»	Soriano	270	—	1	—	—	2
»	**Nicastro**	Cortale.	Cortale.	430	—	—	1	6	4
»	»	»	Jacurso.	440	—	1	—	—	—
»	»	Feroleto	Feroleto	350	—	—	1	4	10
»	»	»	Feroleto piano . . .	270	—	1	—	—	—
»	»	Gimigliano	Cicala	830	—	—	1	8	5
»	»	»	Gimigliano	580	—	—	1	5	11
»	»	»	S. Pietro Apostolo .	770	—	—	1	2	—
»	»	Maida	Maida	260	—	1	—	—	2
»	»	»	Vena	250	—	1	—	1	—
»	»	Martirano	Conflenti	570	—	1	—	—	1
»	»	»	Martirano	420	—	1	—	—	1
»	»	»	Motta s. Lucia . . .	600	—	1	—	—	2
»	»	Nicastro	Nicastro	260	—	1	—	1	6
»	»	Sambiase	Gizzeria	600	—	—	1	—	5
»	»	»	Platania	760	—	—	1	1	4
»	»	»	Sambiase	200	—	—	1	—	22
»	»	Serrastretta	Decollatura	780	—	—	1	—	10
»	»	»	Serrastretta	840	—	—	1	—	—
Cosenza	**Cosenza**	Aprigliano	Aprigliano	680	—	1	—	—	—
»	»	»	Pietrafitta.	650	—	1	—	1	—
»	»	Dipignano	Dipignano	640	—	1	—	—	—
»	»	»	Domanico	720	—	1	—	—	—
»	»	»	Paterno Calabro . .	610	—	1	—	—	—
»	»	Grimaldi.	Altilia	560	—	1	—	—	—
»	»	»	Grimaldi.	650	—	1	—	—	—
»	»	»	Malito Grimaldi . .	700	—	1	—	—	—
»	»	Rogliano.	Belsito	660	—	1	—	1	—
»	»	»	Rogliano.	640	—	1	—	—	—
»	»	S. Giovanni in Fiore	S. Giovanni in Fiore	950	—	1	—	—	1
»	»	Scigliano	Bianchi	830	—	—	1	—	3
»	»	»	Carpenzano	580	—	1	—	—	—
»	»	»	Panettieri	920	—	1	—	—	—
»	»	»	Pedivigliano.	620	—	1	—	—	—
»	»	»	Scigliano.	640	—	1	—	—	3
»	»	Spezzano grande . .	Spezzano grande . .	800	—	1	—	1	—
»	»	»	Spezzano piccolo . .	720	—	1	—	—	—
»	**Paola**	Aiello	Serra d' Aiello . . .	340	—	1	—	—	—
»	»	»	Terrati.	300	—	1	—	—	—
»	»	Amantea	Lago	450	—	1	—	—	—

IV.

Delle roccie che furono adoperate.

Si è detto che il nucleo di questa regione consta di roccie granitiche e scistose: oltre ai graniti gneiss micascisti si hanno quasi tutte le specie e varietà di roccie che ne dipendono, ed anche alcune emersioni di roccie dioritiche e serpentinose. Una raccolta litologica calabrese sarebbe interessantissima, e sono pentito di non averla fatta perchè ora mi sarebbe utilissima; ho raccolto invece pochissimi esemplari di alcune località, e alcuni ciottoli dei fiumi riservandomi a ricercare in posto le roccie corrispondenti. Quelle che ho meco o che ricordo di aver vedute sono le seguenti:

Graniti — Bianchi, bigi con mica bianca o con biotite, differentissimi per dimensione d'elementi, per disposizione variata degli stessi, per prevalenza dell' uno sugli altri, o per mancanza di qualcuno. Densità trovate da 2,60 a 2,76. Varietà con mica a ventaglio. Pegmatiti, leptiniti ecc. Varietà zeppa di graniti trapezoedrici, dens. da 2,80 a 3. Graniti sienitici, tormaliniferi, protoginici, porfiroidi.

Gneiss — Infinite varietà, densità media = 2,66. Gneiss granatifero, dens. = 2,80. Molti trovanti di questa varietà con altri minerali accessorî, molto tenace, e zeppa di granati in grani di forma indistinta, hanno densità di 3,12. Gneiss sienitico ed altri.

Micaschisti — Molte varietà e passaggi ad altre roccie. In alcuni scisti alla mica si sostituisce il talco; si hanno anche scisti filladici, ecc.

Sieniti — Bigia, bianco-verdognola, rossa. Di questa ne vidi con poco amfibolo dens. = 2,56; altra nero-rossastra con molto amfibolo, dens. = 2,80 e 2,88. Sienite porfirica verdognola, rosea, ecc.

Dioriti — Diorite ad elementi piuttosto grossi, medî, minuti, appena discernibili; affaniti, amfiboliti. Densità 2,94 qualcuna con mica, ma le altre 3 e quelle passanti all'amfibolite 3,11. — Diorite porfirica. Il Von Rath ha designato per porfido dioritico una bellissima roccia caratteristica di Calabria, nella valle della Fiumarella, ma pare che non tutti dividano la sua opinione, e vogliono che sia una sienite porfirica; gli elementi sono quarzo e feldispato con prismi di mica e di amfibolo disseminati nella massa: le densità che avrei trovate sono 2,61-2,66.

Serpentina — Diverse emersioni, e distinta tra queste è quella di Gimigliano che forma il bellissimo marmo oficalce di quella località. Vi si trovano esemplari di bella serpentina nobile verde e nera, altri con elementi accessorî cioè amfibolo, diallagio, asbesto, amianto, crisotilo, ecc. Dn. = 2,60 a 2,66. Trovanti di serpentina ricca in diallagio, dens. 2,66 e durezza 5 ½. Finalmente alcuni ciottoli di eufotide. È da avvertirsi, che l' orneblenda delle roccie calabresi è sempre caratterizzato da prevalenza del ferro sulla composizione ordinaria, per cui dopo fusione è molto magnetico.

Rimane dunque accertato dal confronto degli oggetti preistorici che si conoscono fino ad ora trovati in Calabria colle roccie del paese, che quasi tutti furono lavorati servendosi di queste roccie stesse; e se dico quasi tutti e non tutti, è perchè non essendosi finora scoperto in Calabria giacimento alcuno di fibrolite, giadeite ed altri minerali rappresentati forse in queste raccolte, non si può ancora affermare per tutti

una tale origine. Lasciando dunque da parte qualche oggetto la cui natura non seppi determinare, parliamo solamente di quelli fatti di materie non ancor scoperte in quella regione. Due dei miei, uno del Nicolucci ed uno che so essere posseduto da altra persona, sono di *fibrolite* o *sillimanite,* cioè di quei minerali andalusitici molto somiglianti tra loro, che vennero riconosciuti la prima volta come adoperati per questi oggetti antistorici, dagli assaggi dell'illustre chimico Damour (1). Un altro pure posseduto dalla persona suddetta è di giadeite.

Nè l'una nè l'altra di queste specie non è ancora stata scoperta in Calabria, e senza escludere la possibilità che vi possono essere rappresentate, credo tuttavia che si debba ammettere anche la contraria ipotesi. Se poi oltre alla possibilità, dobbiamo considerarne la probabilità, parmi che almeno per le fibroliti, quest'ultima condizione non si verifichi. Difatti queste specie minerali furono rinvenute fino ad ora in piccole porzioni, in fibre, in fasci bacillari nei graniti e gneiss di qualche parte della Francia, del Tirolo, della Boemia, Moravia, Baviera e dell'America; se per quante varietà di queste roccie ho potuto osservare in Calabria non mi occorse vedere neanche la minima traccia di queste specie, potrà sembrare probabile che vi si possano trovare esemplari delle dimensioni del n. 41 nella Tav. III? Ammettendo adunque o l'uno o l'altro caso, vediamo di spiegare la provenienza di questi oggetti. Nel caso che questi minerali esistano in quella regione, avranno servito agli abitanti d'allora come le altre roccie, ma per limitato numero di oggetti stante la rarità dei pezzi abbastanza grandi da poter esser lavorati. Ma se tali materie non esistono in Calabria, e perciò non vi si potessero mai scoprire, sarebbe indispensabile credere che questi oggetti vi fossero importati o da popolazioni invadenti o per cambî e relazioni di commercio. In generale non si ammettono queste invasioni o queste relazioni durante l'epoca della pietra, e sta bene, ma si è ancora proclivi a negare l'importazione di certi oggetti fatti di minerali che non si riconobbero ancora esistenti in quella regione, quasichè questo fatto potesse infirmare l'opinione succitata. Or bene, non si potrebbero conciliare, supponendo questa importazione avvenuta in epoca più recente cioè contemporaneamente a quella del bronzo? Oramai si è d'accordo sulla scarsità del bronzo e sull'uso degli utensili ed armi di pietra continuato ancora per molto tempo durante questa nuova epoca; senza entrare nelle diverse opinioni circa all'origine del bronzo in Italia, ma citandole solamente è facile vedere come nel caso che il bronzo sia stato composto sul sito, le armi di giadeite, sillimanite ed altre possano esservi state importate per le relazioni tra le popolazioni, già cominciate: se il bronzo fu importato o per invasione o per queste relazioni, le dette armi l'abbiano accompagnato, e debbono l'onore della scelta ai caratteri importanti dei minerali dei quali erano fatte.

Una ultima osservazione circa la scelta dei ciottoli di alcune roccie per la fabbricazione di queste armi, e specialmente per quelli di roccie serpentinose. Come si può vedere nella descrizione di questi oggetti, sono tutti di un peso specifico superiore a tutti quanti gli esemplari presi da me in posto oppure nei trovanti, eppure

(1) A Damour, *Sur la composition des haches en pierre*, ecc. Paris, 1865 (Ext. des Comptes rendus de l'Acad. des sciences).

gran parte di questi sono perfettamente eguali per i caratteri esterni e perfino nella durezza. Non voglio dire con questo che non siano anche queste ascie fatte in paese, anzi credo che tale differenza sia dovuta alla maggior proporzione di elementi accessorî, ma son tratto ad ammirare la facilità di quegli abitanti primitivi nello scegliere i pezzi di maggior densità, anche quando si potea difficilmente avvertire, per la somiglianza degli altri caratteri esterni.

V.

Dei diversi tipi di forma.

Avrei desiderato di seguire la distinzione usata dal Nicolucci per la forma, in cunei, accette, sgorbie, ma incontrai qualche difficoltà dipendente forse dagli oggetti della mia piccola raccolta. Non sempre queste differenze sono chiaramente determinate, anzi numerose gradazioni dell'una all'altra, generano incertezza. Dovrei designare per accette, quelle che hanno il taglio più largo del corpo dell'istrumento: per cunei quelle che l'hanno più stretto; però non so decidermi a riconoscere un' accetta nel n. 7 quantunque di taglio largo più del corpo, perchè talmente ingrossata superiormente da rendere difficile l'immanicatura. Così pure non mi sembrano cunei i n. 14 e 15 (Tav. I e IV) quantunque con taglio più stretto del corpo, e basta dare uno sguardo alla loro forma e sottigliezza specialmente della prima, per convincersene. Finalmente la scure-martello n. 48 Tavola IV, ha il taglio leggermente arcuato a sgorbia come i numeri 35 al 39, e non si può dire che abbia servito a quest'uso: nè l'oggetto al n. 41 Tav. III cesserà di esser considerato un' accetta, quantunque abbia il taglio come sopra. Per togliere di mezzo ogni causa d'errore, designai tutti gli oggetti per accette, ma dalla forma, misure ed altri caratteri, potrà il lettore farsi un criterio per spiegarne l'uso. Ho messo prima quella allungata a taglio strettissimo che pare uno scalpello, indi da quelle a taglio largo più del corpo passai a quelle di taglio più stretto, poi a quelle col taglio leggermente arcuato e finalmente a quelle con i fianchi paralleli: in ultimo ho descritto quelle a doppio taglio, e poi le altre a doppio uso.

Parlando di tipi di forma, non si creda che io voglia stabilire per la Calabria una distinzione da quelle altre provincie italiane dove abbondano le pietre lisciate. Anche qui manca quella costanza di tipo ed anche di dimensioni resa impossibile dalla forma e natura dei ciottoli adoperati; ma se c'è differenza da questa alle altre provincie suddette, la farei consistere nelle seguenti:

1.° Maggiore abbondanza in Calabria di simili oggetti, e specialmente di alcuni tipi più rari, come i martelli-scure: difatti se ne conoscono 7 posseduti dal Nicolucci, due da me, ed uno stato raccolto per me, ma caduto poi in mano di altra persona.

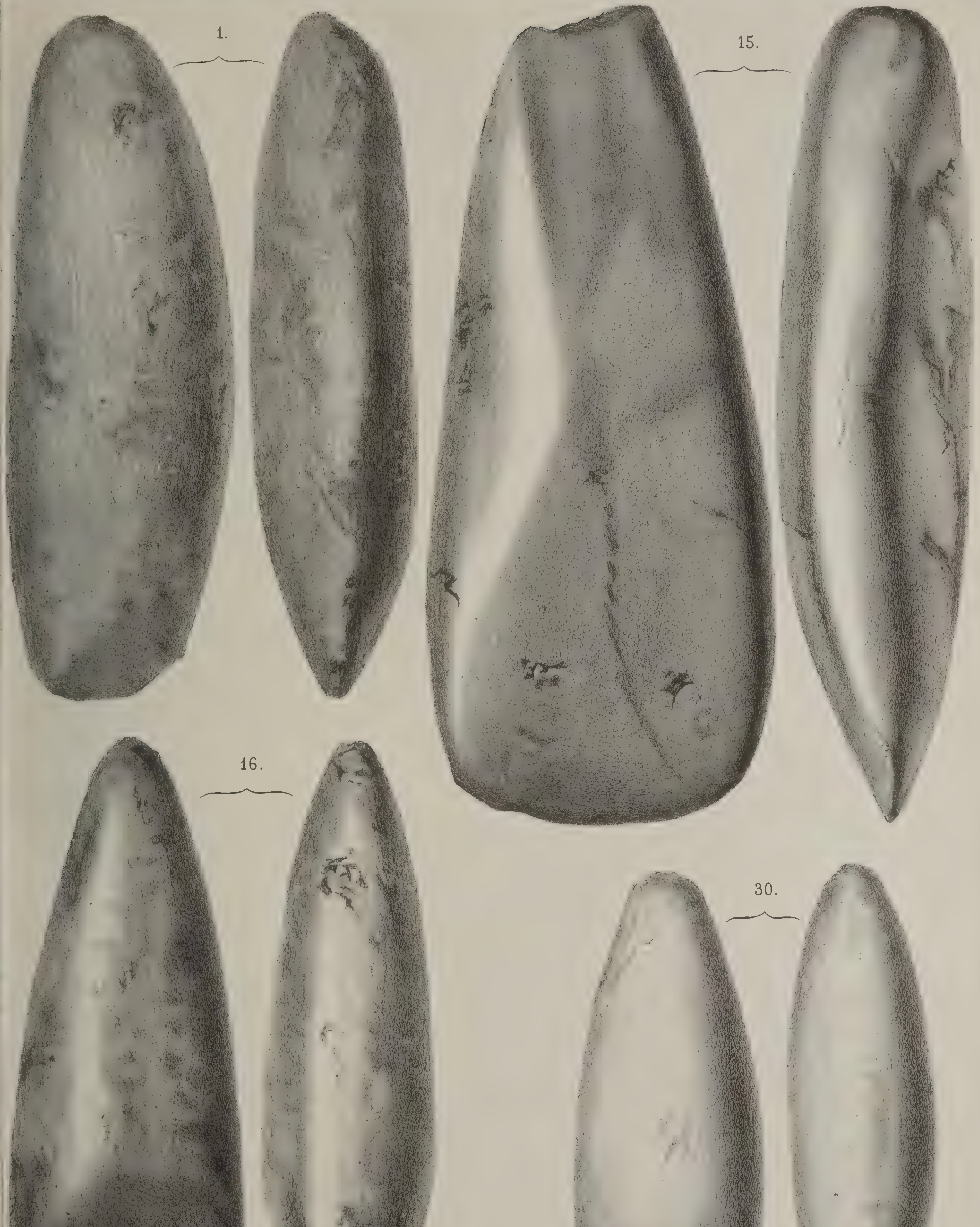
2.° Dimensioni straordinarie di alcune accette o cunei, che trovano riscontro nei tipi nordici; difatti il Nicolucci ne ha di 170 mm. per 49; la mia al n. 15 Tav. I è di 153 per 65, peso 543: quella al n. 6 Tav. II, è di 168 per 76, ma dovea essere molto più lunga, e pesa 939,72: e da pochi giorni seppi che a Cicala se ne trovarono due della lunghezza di 200, delle quali una è destinata per la mia collezione.

3.° Rarità di quelle di roccie non ancora scoperte in paese; difatti mentre sono abbondanti nelle provincie specialmente dell'alta Italia quelle di cloromelanite, giadeite e simili, di Calabria non ne conosciamo che una di giadeite e 4 di fibrolite.

Il lettore avrà già rilevato l'importanza della forma del n. 49 Tav. IV. Mi consta che sono stati rinvenuti in Calabria e specialmente nella regione ad ovest e sud-ovest di Cosenza dei pesi a forma sferoidale allungata con un solco a metà per tutta la circonferenza, ma per quanto abbia fatto, non mi è ancora riuscito di averne. Non ho ancora trovato dei mazzuoli forati, ma dalle notizie avute sembra che non siano mai stati scoperti in questa regione.

Ho detto nell'introduzione, che si trovano in Calabria ciottoli che sono ritenuti dai contadini come aventi eguale origine dei *truoni*, che hanno la stessa importanza e vengono designati con lo stesso nome. Ne ho avuto circa una ventina di tondi oppure ovali, discoidali, di ovoidali più o meno allungati: alcuni leggermente scabri, ma per la gran parte molto lisci ed alcuni lucenti; sono di granito, gneiss, arenaria scistosa, quarzite bianca o grigio-rossastro ed alcuni di roccia serpentinosa simile ai n. 2, 14 e 46. Non presentando alcun carattere che li distinguesse decisamente dagli altri ciottoli, non ho creduto tenerne conto, e raccomandai sempre a chi faceva laggiù le mie veci di ricercare le vere scuri. Ma se non conviene accettare ad occhi chiusi fatti e notizie che non siano scrupolosamente accertate nella loro autenticità, non conviene, credo io, cadere nell'esagerazione opposta, riggettandoli totalmente quando o la tradizione o l'opinione popolare richiama sovra essi la nostra attenzione. Ritengo adunque che non si debbano per ora considerare come adoperati effettivamente nelle epoche preistoriche per pietre da fionda o per altro fine, ma che siano state ritrovate fuori del loro naturale giacimento, come lo provano la credenza popolare ed i luoghi di provenienza nei quali si distinguono facilmente dagli altri ciottoli dei corsi d'acqua o dei conglomerati. Se per ora questo fatto può trovare spiegazione nel trasporto operato e per qualche fine durante l'epoca storica, in seguito a nuove indagini ed alla scoperta di qualche stazione, si potrà decidere la questione. Tra gli altri ne ebbi uno a forma di scure ricurva lateralmente ma tondeggiante nella parte larga: questo è lisciato e lucente a striscie nel fianco concavo, in modo da rendere evidente l'uso al quale era destinato, cioè di lisciatoio. Ma sebbene mi sia stato dato come *truono*, non mi son permesso di metterlo nella raccolta, sulla considerazione che potea aver servito benissimo a quell'uso anche in altre epoche non esclusa la presente.

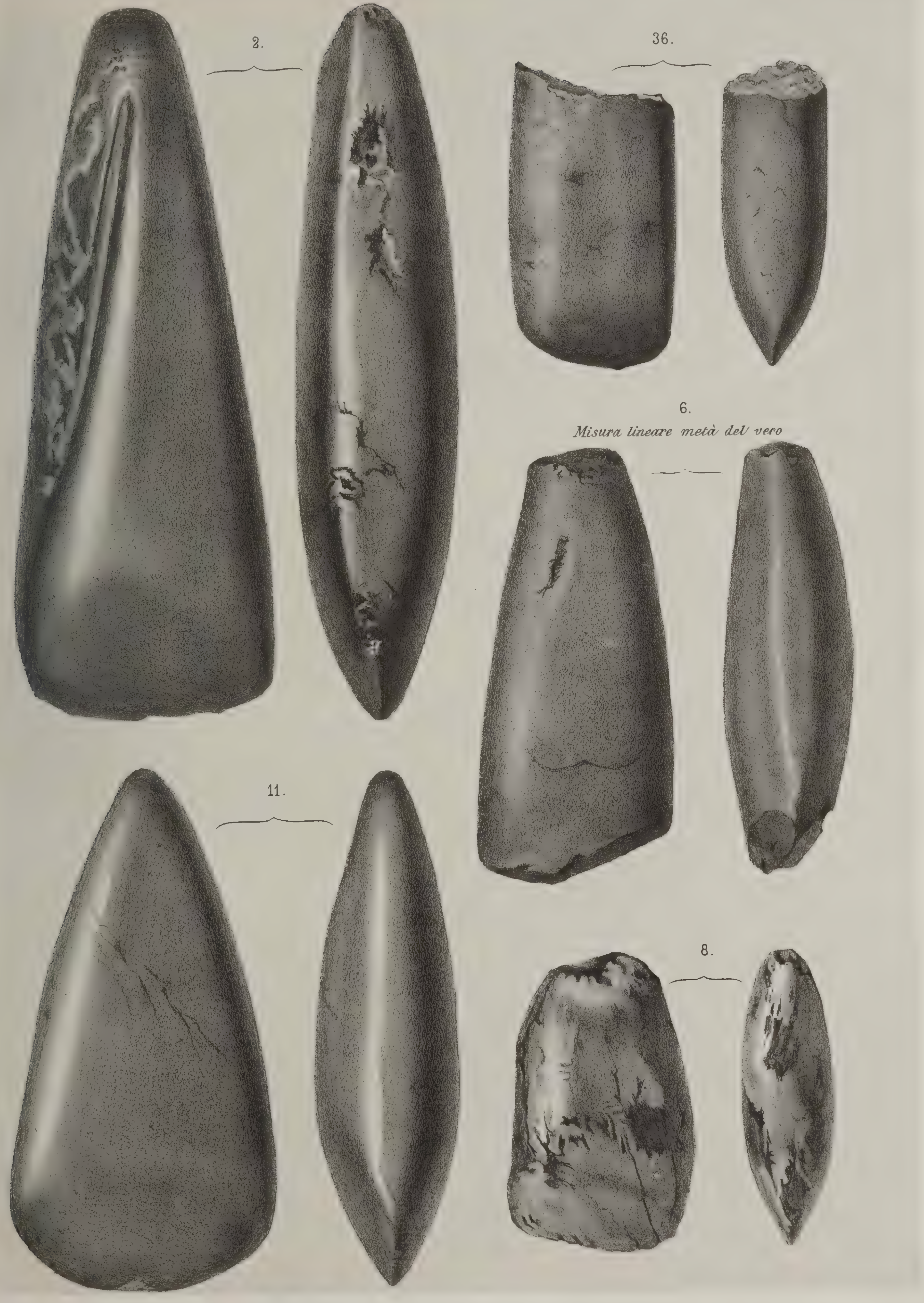
Giunto al termine di questo lavoro dovrei riassumere le poche conclusioni che traggono origine dall'esame degli oggetti calabresi, dalle notizie che ho potuto riunire e dalle considerazioni che mi hanno suggerito; ma queste conclusioni son poche per ora e talmente ovvie che non saranno sfuggite ad alcuno nel seguito della lettura. Se non ho potuto ottenere un risultato che fosse pari al desiderio, ma superiore alle forze mie ed ai mezzi che avevo disponibili, basterà la convinzione che qualche notizia o indicazione relativa alla paleoetnolegia della regione che abbiamo considerata, non sia totalmente inutile. Ed in questa speranza, intendo, per quanto me lo permetteranno le circostanze, proseguire nelle ricerche da lungi, e completarle poi sul luogo nel miglior modo che sarà possibile.

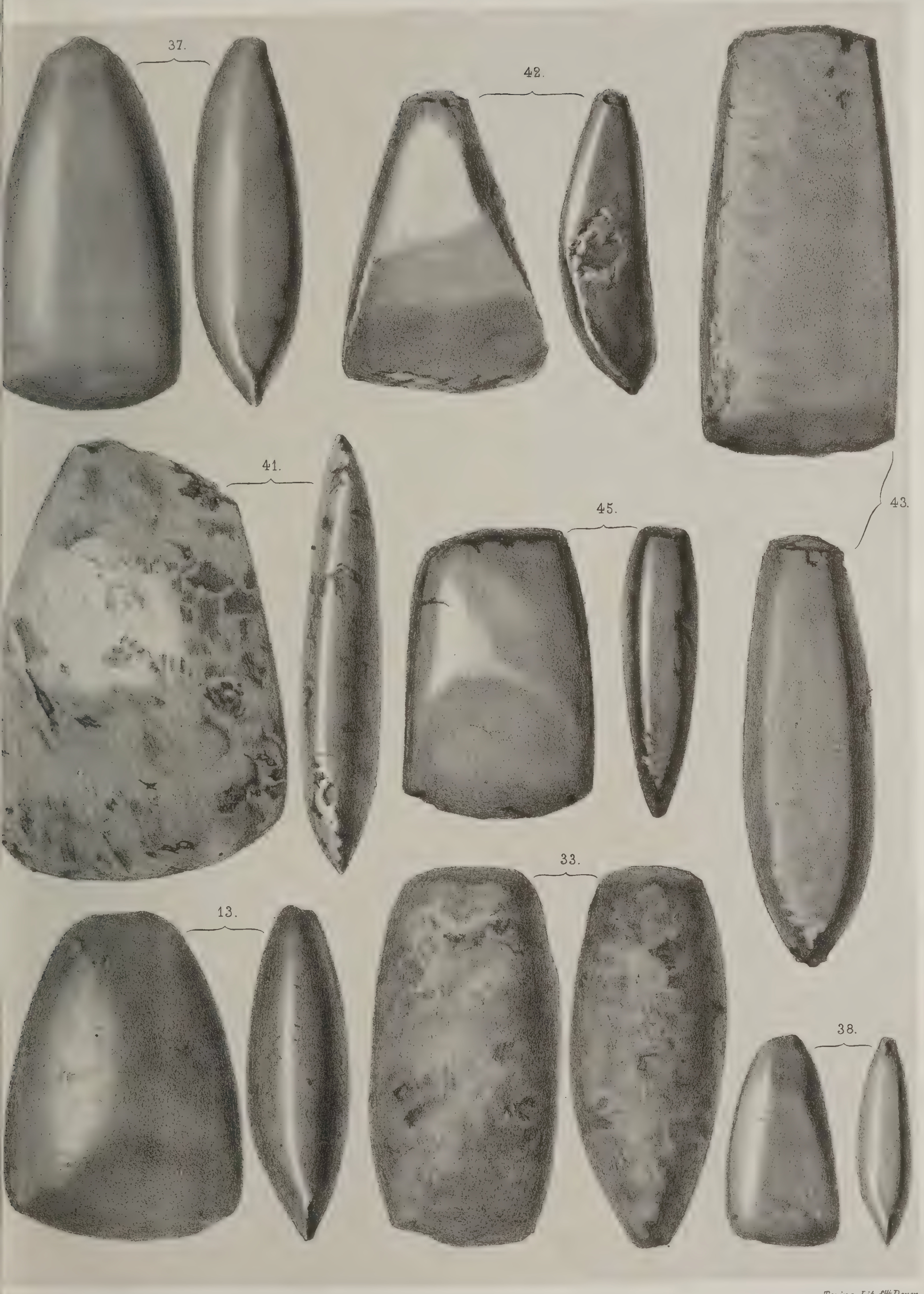


G. Ruggero, dis.

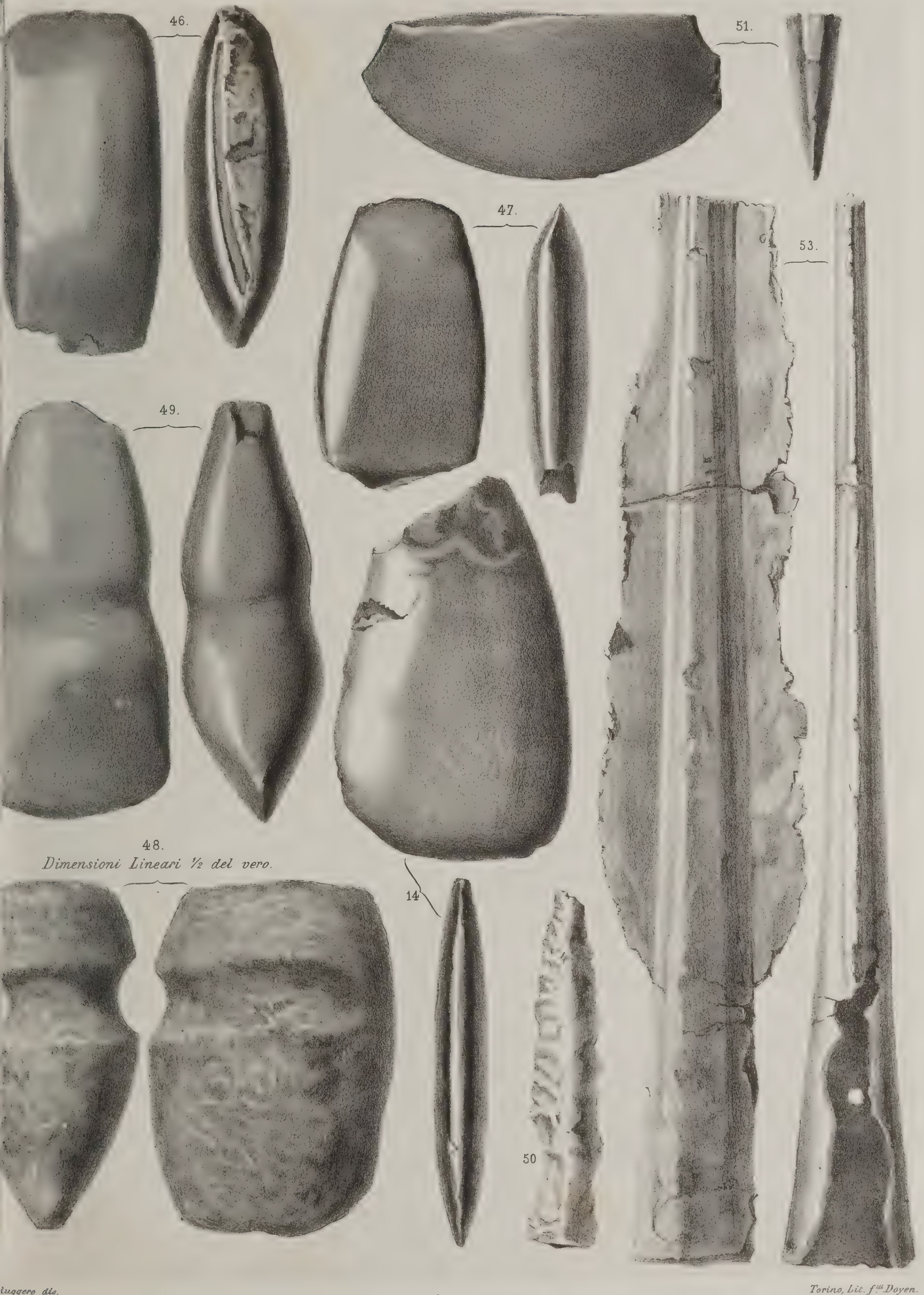
Torino, Lit. f.lli Doyen.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS


2.
36.
6.
Misura lineare metà del vero
11.
8.


37.
42.
41.
45.
43.
33.
13.
38.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS


46.
51.
47.
53.
49.
48.
Dimensioni Lineari ½ del vero.
14
50

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF ILLINOIS

Sull'applicabilità delle superficie degli spazî a curvatura costante.

Nota del dottor LUIGI BIANCHI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia

nella seduta del 5 maggio 1878.

Le considerazioni seguenti mi sono state suggerite dallo studio della Memoria di Klein sulla geometria non-euclidea (Mathematische Annalen, IV Band, p. 573). Esse sono un primo tentativo di ricerche, che forse potranno condurre a risultati ulteriori.

1. — Chiamo *applicabili* due superficie dello stesso spazio o di due spazî diversi a curvatura costante, quando le espressioni dei loro rispettivi elementi lineari, calcolate nella *determinazione metrica* (*Massbestimmung*) dello spazio in cui esistono, sono eguali o si possono render tali con un conveniente cambiamento di coordinate.

Un essere, le cui cognizioni geometriche non si estendessero oltre le due dimensioni, che vivesse successivamente sopra due così fatte superficie applicabili, effettuando sopra di esse le misurazioni colle leggi delle rispettive determinazioni metriche degli spazî, in cui quelle superficie sono collocate, le troverebbe identiche; almeno per quelle regioni dell'una, che hanno corrispondenti regioni sull'altra.

Ciò che segue è relativo alle *superficie di rivoluzione* di uno spazio a curvatura costante $-\frac{1}{4c^2}$, chiamando con questo nome una superficie luogo di cerchi, i cui centri siano sopra una retta r (*asse*) e i cui piani siano tutti perpendicolari alla r stessa. Questi piani passano tutti per la conjugata r' di r rispetto all'*assoluto* (1), e poichè la corda di contatto fra uno di tali cerchi e la sezione del suo piano coll'assoluto è la polare del centro del cerchio rispetto a questa sezione, cioè la retta r', segue che tutti i cerchi suddetti toccano l'assoluto nei punti A, B, ove la r' incontra l'assoluto stesso. Le tangenti ad uno qualunque di questi cerchi uscenti dal centro sono le rette, che vanno ai punti A, B. Una superficie di rivoluzione è dunque bitangente all' assoluto e la corda di contatto è la conjugata r' dell' asse rispetto all' assoluto.

Si costruisca ora una determinazione metrica speciale prendendo a *conica fondamentale* quella in cui un certo piano P (fissato ad arbitrio) passante per r' interseca l'assoluto; allora si potrà far *accordare* la determinazione speciale colla generale in quel punto di r che è il polo di P, in modo cioè che gli angoli intorno

(1) Cfr. per es. D'Ovidio, *Studio sulla Geometria projettiva* (Annali di Matematica, Serie 2ª, Vol. VI, pag. 72).

a questo punto e i segmenti infinitesimi uscenti da esso abbiano nelle due determinazioni la stessa misura, con una scelta conveniente delle costanti della determinazione speciale (Cfr. Klein, § 7, 14).

Una superficie di rivoluzione S, intorno all'asse r, nella determinazione generale, è ancora di rivoluzione nella speciale, intorno al medesimo asse. Infatti i piani passanti per r' sono perpendicolari ad r anche nella determinazione speciale, perchè il punto ove r incontra il piano all'infinito P della determinazione stessa, è il polo di r' rispetto alla sezione di P coll'assoluto, la quale è la conica fondamentale della determinazione metrica speciale. Inoltre le sezioni di P con S si appoggiano in due punti A, B a questa conica fondamentale e quindi sono cerchi anche per la suddetta determinazione, i loro centri trovandosi manifestamente sulla retta r.

Nella determinazione metrica speciale così costruita prendiamo tre assi ortogonali, vale a dire, tre assi passanti per i vertici di un triangolo conjugato rispetto alla sezione di P coll' assoluto, dei quali l'asse z sia la retta r. Assumendo come coordinate di un punto le coordinate cartesiane relative alla detta terna di assi, poichè nella determinazione speciale l'assoluto diviene una sfera di raggio $2c$, dovrà la sua equazione prendere la forma:

$$x^2+y^2+z^2-4c^2=0$$

e l'elemento lineare dello spazio secondo la determinazione generale sarà dato dalla formola (Cfr. Klein, § 14):

$$(1)\qquad ds^2=\frac{4c^2\left\{(xdx+ydy+zdz)^2+(4c^2-x^2-y^2-z^2)(dx^2+dy^2+dz^2)\right\}}{(4c^2-x^2-y^2-z^2)^2}.$$

Consideriamo ora una superficie S, che sia di rivoluzione intorno all'asse z (ossia r) nella determinazione generale e quindi anche nella speciale. Le coordinate di questa superficie saranno date dalle formole:

$$(2)\qquad x=\rho\cos\omega\,,\quad y=\rho\,\mathrm{sen}\,\omega\,,\quad z=\varphi(\rho),$$

mediante le quali vogliamo ora calcolare l'elemento lineare di S nella determinazione generale. Dalle (2) si ricava:

$$xdx+ydy=\rho d\rho\,,\quad dx^2+dy^2=d\rho^2+\rho^2d\omega^2,$$

quindi la (1) ci darà per il quadrato dell'elemento lineare richiesto:

$$(3)\quad ds^2=4c^2\frac{4c^2\left(1+\varphi'^2(\rho)\right)+2\rho\varphi(\rho)\varphi'(\rho)-\rho^2\varphi'^2(\rho)-\varphi^2(\rho)}{\left(4c^2-\rho^2-\varphi^2(\rho)\right)^2}+\frac{4c^2\rho^2}{4c^2-\rho^2-\varphi^2(\rho)}d\omega^2.$$

Ma questa forma dell' elemento lineare conviene anche alle superficie di rivoluzione dello spazio euclideo, quando si prendano a linee coordinate i meridiani ed i paralleli; si ha dunque il teorema:

Le superficie di rivoluzione degli spazî a curvatura costante sono applicabili sulle superficie di rivoluzione dello spazio ordinario; ai meridiani ed ai paralleli delle une corrispondono i meridiani ed i paralleli delle altre.

Da quest' ultima parte del teorema vanno però escluse le superficie di curvatura costante.

È noto inoltre che nello spazio ordinario una superficie di rivoluzione può deformarsi in infiniti modi, pur restando di rivoluzione, e in questo caso i meridiani ed i paralleli restano tali per le successive deformate, escluse solo le superficie di curvatura costante. Potremo quindi enunciare l'altro teorema:

Le superficie di rivoluzione degli spazî a curvatura costante si dividono in infinite classi di superficie applicabili le une sulle altre ed, escluse quelle di curvatura costante, in quelle appartenenti ad una stessa classe i meridiani ed i paralleli dell' una corrispondono ai meridiani ed ai paralleli dell' altra.

Mediante la formola (3) si potranno determinare le superficie di rivoluzione ordinarie applicabili sopra una data superficie di rivoluzione dello spazio non-euclideo, e viceversa, data una superficie di rivoluzione dello spazio ordinario, si potranno trovare quelle pur di rivoluzione dello spazio non-euclideo applicabili sopra di essa. La risoluzione di questi problemi dipende dall' integrazione di un'equazione differenziale di 1° ordine, che nel primo caso si riduce subito alle quadrature.

2. — Consideriamo ora qualche caso particolare ed in primo luogo cerchiamo l' elemento lineare di una sfera col centro nell' origine O degli assi il cui raggio misurato nella determinazione speciale sia r, essendo evidentemente le sfere di centro O tali per le due determinazioni. L' elemento lineare (1) espresso in coordinate polari ρ, θ, φ della determinazione speciale suddetta è dato da:

$$(4) \qquad ds^2 = 4c^2 \frac{\rho^2 d\rho^2 + (4c^2 - \rho^2)(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \cos^2\theta d\varphi^2)}{(4c^2 - \rho^2)^2};$$

ponendovi $\rho = r$, $d\rho = 0$, si avrà l'elemento lineare richiesto della sfera colla formola:

$$ds^2 = \frac{4c^2 r^2}{4c^2 - r^2}(d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2);$$

ma questa espressione del quadrato dell' elemento lineare appartiene anche ad una sfera di raggio $\frac{2cr}{\sqrt{4c^2 - r^2}}$ dello spazio ordinario. Dunque:

La sfera degli spazî di curvatura costante è applicabile sopra la sfera ordinaria.

Si può osservare che il raggio $\frac{2cr}{\sqrt{4c^2 - r^2}}$ è reale (essendo r reale) tanto per la geometria iperbolica, quanto per l' ellittica (Klein, § 11, 12). Infatti, se c è immaginario $= ic_1$, l'espressione precedente diviene $\frac{2c_1 r}{\sqrt{4c_1^2 + r^2}}$ e, se c è reale, siccome $2c$ è il raggio della sfera assoluta misurato nella determinazione speciale, per i punti accessibili dello spazio iperbolico si ha sempre $r < 2c$. Si noti ancora che nella espressione $\frac{2cr}{\sqrt{4c^2 - r^2}}$, che dà il raggio della sfera ordinaria applicabile su quella dello spazio non-euclideo, si può sostituire ad r il raggio di quest' ultima sfera misurato

nella determinazione metrica del suo spazio (Klein, pag. 619, nota). Indicando con R questo raggio, dalla (4) ponendovi $d\theta = d\varphi = 0$ si avrà;

$$dR = \frac{4c^2}{4c^2 - \rho^2}\, d\rho\,,$$

da cui: $\quad R = 2c \operatorname{sett\,tang\,h} \frac{r}{2c}, \quad r = 2c \operatorname{tang\,h} \frac{R}{2c}, \quad \frac{2cr}{\sqrt{4c^2 - r^2}} = 2c \operatorname{sen\,h} \frac{R}{2c}$;

sicchè si può dire che sopra una sfera di raggio R di uno spazio a curvatura costante $-\frac{1}{4c^2}$ vale la geometria di una sfera ordinaria di raggio $2c \operatorname{sen\,h} \frac{R}{2c}$.

3. — Poniamo ora la condizione che la superficie di rivoluzione, il cui elemento lineare è dato dalla (3) sia applicabile sul piano ordinario, ossia che abbia una curvatura nulla. È noto che, se l'elemento lineare di una superficie è dato dalla formola:

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2,$$

quando E, G siano funzioni della sola u, la curvatura K è data da:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{d\sqrt{G}}{du}\right).$$

Esprimendo quindi che la curvatura della superficie il cui elemento lineare è dato dalla (3) è nulla, si avrà la equazione di condizione

$$\frac{d}{d\rho}\left\{\frac{4c^2 - \rho^2 - \varphi^2(\rho)}{\sqrt{4c^2\left(1 + \varphi'^2(\rho)\right) + 2\rho\varphi(\rho)\varphi'(\rho) - \rho^2\varphi'^2(\rho) - \varphi^2(\rho)}} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho}{\sqrt{4c^2 - \rho^2 - \varphi^2(\rho)}}\right\} = 0,$$

ossia, facendo una prima integrazione:

$$\frac{4c^2 - \rho^2 - \varphi^2(\rho)}{\sqrt{4c^2\left(1 + \varphi'^2(\rho)\right) + 2\rho\varphi(\rho)\varphi'(\rho) - \rho^2\varphi'^2(\rho) - \varphi^2(\rho)}} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho}{\sqrt{4c^2 - \rho^2 - \varphi^2(\rho)}} = k,$$

dove k è una costante arbitraria. Eseguendo la derivazione, si trova:

$$(5) \quad 4c^2 - \varphi^2(\rho) + \rho\varphi(\rho)\varphi'(\rho) = k^2 \left\{4c^2\left(1 + \varphi'^2(\rho)\right) + 2\rho\varphi(\rho)\varphi'(\rho) - \rho^2\varphi'^2(\rho) - \varphi^2(\rho)\right\} \left\{4c^2 - \rho^2 - \varphi^2(\rho)\right\}.$$

Integrando questa equazione differenziale del 1° ordine si avranno tutte le superficie di rivoluzione dello spazio non-euclideo applicabili sul piano ordinario. Cerchiamo se fra queste superficie ne esistono di quelle del 2° ordine. Nella determinazione speciale la curva meridiana di una tale superficie di rivoluzione dovrà essere un'ellisse, un'iperbola od una parabola. Quest'ultimo caso non è possibile, perchè, se si prende

$$z = \varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{2p}$$

la (5) non può essere soddisfatta. Restano dunque i primi due, che si possono compendiare nella formola:

$$\varphi(\rho)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\rho^2}\,,$$

dove le due costanti a, b sono reali, od una di esse è puramente immaginaria. Con questo valore di $\varphi(\rho)$ si trova facilmente che la (5) diviene:

$$(6)\qquad a^4(4c^2-b^2)(a^2-\rho^2)=k^2\left\{4c^2(b^2-a^2)\rho^2+a^4(4c^2-b^2)\right\}\left\{(4c^2-b^2)a^2+(b^2-a^2)\rho^2\right\}.$$

Trasportando tutti i termini nel 2° membro dovrebbero essere nulli i coefficienti delle diverse potenze di ρ; ora il coefficiente di ρ^4 è: $4c^2k^2(b^2-a)^2$, dunque si dovrà avere:

$$k=0 \quad \text{oppure} \quad b^2=a^2\,.$$

Ma se $b^2=a^2$, dovrà anche essere nullo il coefficiente di ρ^2, cioè $a^4(4c^2-b^2)$, ossia:

$$b^2=a^2=4c^2$$

e si avrebbe quindi per soluzione l'assoluto, che è da escludersi perchè i coefficienti dell'elemento lineare (3) diverrebbero allora infiniti.

Resta dunque il caso di $k=0$. Allora, perchè la (6) sia soddisfatta, sarà necessario e sufficiente che si abbia: $b^2=4c^2$. Questa è una vera soluzione, perchè, restando a arbitrario, l'espressione (3) non presenta alcuna singolarità.

Le superficie del 2° ordine, che abbiamo così trovato, hanno nella determinazione metrica speciale per lunghezza dell'asse di rotazione $2c$, che è anche il raggio dell'assoluto nella determinazione stessa. Quindi esse sono tangenti all'assoluto nei punti C, D, nei quali r lo incontra (possono essere cioè pensate come superficie di rotazione tanto intorno ad r quanto intorno ad r'). Ne segue che quelle superficie e l'assoluto si segano lungo quattro generatrici, poichè il loro piano tangente comune in C le taglia amendue lungo le generatrici CA, CB e parimenti quello in D lungo le DA, DB. Reciprocamente è facile vedere che ogni superficie del 2° ordine, avente a comune coll'assoluto quattro generatrici, appartiene alla classe trovata ed è quindi applicabile sul piano ordinario.

Inoltre si vede che le sezioni di una tale superficie con piani passanti per r, r' sono due sistemi di geodetiche ortogonali, poichè esse sono le linee ρ, ω della (3); esse corrispondono quindi a due sistemi di rette ortogonali del piano, su cui la superficie è applicabile.

4. — Le cose precedenti stanno in una notevole relazione colla teoria dei movimenti nello spazio non-euclideo (¹). Un movimento in un tale spazio non è altro che una trasformazione omografica, che lascia invariato l'assoluto, cangiando ciascuna generatrice in un' altra generatrice dello stesso sistema. Vi sono poi quattro generatrici, due di un sistema e due dell'altro, che restano affatte invariate per il movimento, e con esse e coll'assoluto restano pure invariate le superficie del 2° ordine del fascio che passa per quelle quattro generatrici. I risultati, che abbiamo precedentemente ottenuto, possono dunque enunciarsi così:

(¹) Cfr. la Memoria di Lindemann nel T. VIII dei Math. Ann. p. 56.

Le superficie dello spazio non-euclideo che restano invariate per un movimento dello spazio stesso, sono applicabili sul piano ordinario.

Inoltre per ciò che precede: Esse sono le uniche superficie di rivoluzione del 2° ordine che godono di questa proprietà.

Come soluzione limite si presenta anche l'assoluto, che già comparve nella discussione della (6).

Se delle quattro generatrici le due di ciascun sistema coincidono, le rette r, r' passano per il punto comune alle due uniche generatrici e giacciono nel piano ivi tangente all'assoluto; le superficie del fascio suddetto toccano l'assoluto lungo le due generatrici e si possono riguardare come sfere, il cui centro è nel punto $r\,r'$ sull'assoluto, ossia all'infinito (1). Queste superficie si chiamano orisfere o sfere limiti. Come caso particolare del teorema generale enunciato si ha quindi l'altro:

Le orisfere sono applicabili sul piano ordinario (2).

Se c diventa infinito lo spazio non-euclideo degenera nell'ordinario e quelle superficie del 2° ordine divengono cilindri circolari, che hanno per asse l'asse di rotazione e traslazione del movimento.

(1) Lindemann, l. c. p. 113.

(2) Cfr. Beltrami, *Teorica degli spazi di curvatura costante*. Annali di Matematica, Serie 2ª, Tomo II.

Intorno al mal di gomma degli agrumi
(*Fusisporium Limoni*, Briosi).
Memoria dell'ing. GIOVANNI BRIOSI

direttore della Stazione chimico-agraria sperimentale di Roma,
approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 5 maggio 1878.

Nel 1862, per la prima volta, avvertivasi in Sicilia una nuova malattia negli agrumi, destinata ad acquistarsi di poi fama ben triste.

Oggidì a tutti son noti i guasti immensi cagionati dal così detto *mal di gomma*, che ha distrutti gli agrumeti di intere provincie, ed ha gettato nella miseria centinaia di famiglie che da pochi ettari di terreno ricavavano a sufficienza per condurre vita non solo agiata, ma lauta e ricca. Gli agrumi costituiscono la coltivazione più rimuneratrice che si conosca in agricoltura; quel che essa rende sembrerebbe favoloso se non fosse vero. A Messina si calcolava che un albero di limone in pieno sviluppo produceva in media 2000 frutti all'anno; ora se si tien conto che fra un albero e l'altro non corre distanza maggiore di 4 a 5 metri, e che i limoni si vendono ad un prezzo che oscilla fra 20 e 40 lire al migliaio, rilevasi facilmente quale rendita enorme ricavavasi da un ettaro di terreno messo ad esperidi.

I danni già cagionati si possono calcolare a diecine di milioni di lire, ed il mal di gomma che invase oltre gli agrumeti della Sicilia, quelli del Napoletano, della Liguria (*mal degli agrumi*), del lago di Garda ecc. prese tale estensione da raggiungere le proporzioni d'una sventura nazionale. Non solo gli agricoltori ed i proprietarî direttamente danneggiati, ma anco i comuni, le provincie ed il Governo fortemente se ne preoccuparono; e diverse giunte di scienziati, in epoche diverse, vennero nominate per eseguire in proposito studî e ricerche. Ultimamente ancora, è noto, il Ministero d'Agricoltura, con lodevole iniziativa offriva in premio 25 mila lire a chi avesse trovato un rimedio efficace.

Detto flagello nemmeno è limitato al nostro paese, poichè sino dal 1832 fu avvertito alle Azzorre nelle cui aranciere (dell'isola san Miguel particolarmente) sembra abbia avuto origine, ed ove verso il 1840 raggiunse il massimo d'intensità e distrusse un quarto degli aranci dell'isola come asserisce il Fouquè nella *Revue des Deux Mondes* (¹); nel 1845 sviluppossi nel Portogallo ove infierì specialmente dal 1858 al 1861 come fan fede i migliori agronomi del paese (²) ed i rapporti dei consoli

(¹) Annali d'agricoltura siciliana n. 60. Palermo, 1874.

(²) Lopes Mendes che ne scrisse nel vol. II dell'*Archivo Rural:* Josè Joaquim de Arevedo Junior ne parlò nel *Faylense:* il dott. Josè Maria Grande nel suo *Manuale del coltivatore:* Joao Ignacio Ferreira

italiani interrogati in proposito per cura del nostro Ministero d'Agricoltura. Nel 1871 l'illustre prof. Wöhler lo trovò alle isole Balearie ove faceva e fa tuttora strage non lieve (1), e sembra, da quanto affermasi, non sconosciuto in Grecia ed in diverse isole dell'Arcipelago (2).

Quello che siasi dal pratico tentato non è credibile, può dirsi che non vi è unguento o polvere fra le tante che offre la farmacia, o che mette sotto mano l'economia domestica, la cui azione non sia stata esperimentata, assieme alle operazioni le più varie sugli agrumi presi dalla gomma. Però malgrado i saggi consigli suggeriti da una giunta di distinti scienziati nominata dal Governo nel 1868 (3), consigli diretti più a prevenire che a curare il male, e le pregevoli osservazioni e ricerche dei professori, Gasperini (4), Froio (5), Thorpe, Garovaglio e Cataneo (6), De Luca (7), Silvestri e Tornabene (8) ecc. può dirsi che oggidì ancora oscilliamo in mezzo ai

Lapa nell'*Archivo Rural*, anno VII, n. 9 ecc. Vedi Alfonso, *Trattato sulla coltivazione degli agrumi*, 2ª ediz., pag. 463, *Annali d'agricoltura siciliana* (Inzenga).

(1) Nel novembre scorso infatti l'illustre prof. A. de Bary mi scrisse che il dr. W. era occupato all'isola Maloria nello studio di tale malattia.

(2) In una visita da me fatta nel 1874 all'isola di Malta non trovai invero una coltivazione di agrumi molto estesa; però negli agrumeti esistenti non si aveva contezza di mal di gomma, cosa che mi venne anco confermata dal nostro Console Generale, il quale più tardi mandavami la lettera seguente, a lui indirizzata dal signor Torregiani, e che pubblico perchè in essa si fa cenno d'un'altra malattia causata da un verme fra noi fortunatamente non ancora avvertito. Eccola:

« Onorevole signor Console

« Valletta 14 settembre 1874.

« Intorno al quesito fattomi da V. S. ho l'onore di esporle:

« Che la malattia della gomma non si ebbe mai in Malta, poichè di essa nessuno della presente « generazione si ricorda, e non è menzionata nè dal prof. Carlo Giacinto che nel 1811 pubblicava « l'*Agraria di Malta*, nè dal prof. Ierafa, tanto minuzioso in quanto concerne le nostre coltivazioni.

« Abbiamo però avuto qualche raro caso della malattia che noi chiamiamo *canchero*; ma dessa « non è la malattia della gomma, si bene l'*esastosi cancheriforme* del prof. Cuppari della R. Univer« sità di Pisa.

« L'anno passato poi a mezzo maggio, le arancie tutte avevano uno o più vermi fra la buccia « e gli spicchi, simili a quelli che talvolta esistono nel formaggio; tutti i frutti così tocchi cadevano; « cosicchè d'estate era impossibile di procurarsi un'arancia, anche pagandola a qualunque prezzo, per « un ammalato per esempio.

« Questo è quel poco che posso dire a V. S., però stia certa, che ne garantisco l'esattezza, essen« domi per l'occasione consultato coi migliori giardinieri e coltivatori di agrumi dei nostri principali « centri produttori. Ho l'onore ecc. Della S. V.

« Devmo F. M. Torreggiani

« Segretario delle esposizioni della Società economico-agraria ».

(3) *Rapporto della Commissione per studiare la malattia degli agrumi in Sicilia a S. E. il sig. Ministro d'Agricoltura e Commercio.*

(4) *Osservazioni sopra alcune malattie degli organi vegetativi degli agrumi.* Napoli (Memoria che non potei procurarmi).

(5) *Idem.* Memoria ridotta ad uso dei coltivatori ed accresciuta di altre esperienze. Napoli, 1868.

(6) *Studî sulle principali malattie degli agrumi.* Milano, 1875.

(7) Vedi Flühler dott. Ad., *Die Krankheit der Agrumen in Sicilien.* Stans in *Central-Blatt für Agrikulturchemie* ecc. von Biedermann, vol. V, 1874, pag. 368 e seguenti.

(8) *Rapporto al Ministero d'Agricoltura* ecc.

dubbî ed alle incertezze; e che nulla, o quasi, ci è di veramente assodato, tanto riguardo alle cause del male, quanto rispetto ai rimedî per guarirlo.

Il male continua, e l'agricoltore dai suoi attacchi si difende unicamente coll'allevare accanto agli alberi già grossi ed in piena forza, pianticelle giovani, destinate à rimpiazzare le antiche che possono morirgli da un anno all'altro. Chi gira pei giardini di agrumi adulti sente bene spesso ripetersi dal contadino: *Eccellenza, il vero rimedio poi, sono questi testimonî*, indicandovi col dito i giovani albereti (*i testimonî*) messi nel controsesto fra gli alberi vecchi già ammalati o destinati ad esserlo fra breve.

Per quanto riguarda l'avvenire, cioè pei giardini giovani che si vanno formando, un primo ristoro, non rimedio radicale, sembra trovato, ed è la pratica che ce lo ha fornito. L'esperienza infatti ha dimostrato che il melangolo (*Citrus bigaradia*, R.) è molto più resistente alla gomma del portogallo (*Citrus aurantium*, R.), e del limone (*Citrus limonum*, R.). Provengono questi da talee o da seme, donde la conseguenza di adottare per le nuove piantagioni il melangolo e di innestare su di esso tutte le altre specie più delicate ([1]). Non va però taciuto che il melangolo è piuttosto lento nello sviluppo, specialmente nei primi anni di vita, che i frutti delle varietà sopra

([1]) Secondo me gli unici consigli che nello stato attuale delle nostre conoscenze possonsi dare all'agricoltore pratico, sono:

1° Le nuove piantagioni farle esclusivamente di melangoli (arancio amaro, arancio forte *Citrus bigaradia*, R.), innestati o da innestarsi a limone od a portogallo, almeno ad 1 metro sopra il suolo; e ciò per impedire che nel caso di attacco dell'oggetto il morbo raggiunga le radici.

2° Nell'impianto di nuovi agrumeti preferire terreni piuttosto sciolti e porosi, specialmente nel sottosuolo, nei quali l'acqua non si fermi e ristagni.

3° Non abbondare mai oltre misura colle irrigazioni; essendo fuori dubbio che la molta acqua favorisce lo sviluppo del male.

4° Seguire l'uso di forzare le piante a dar frutti fuori stagione col negare l'acqua prima, ed irrigarle poi quando si sono ridotte a morire quasi di sete (pratica colla quale si riesce, come è noto, a far fiorire il limone in qualunque epoca), solo allorquando si è decisi a voler perdere l'agrumeto.

5° Sorvegliare continuamente gli agrumeti, e tosto che un albero viene attaccato, tagliare colla massima cura nel sito di sgorgo tanto la corteccia che il legno sottostante, sino a che non si arrivi al legno sano e bianco; estendere anzi il taglio della corteccia in ogni senso, in special modo verticalmente, sino a che il legno sottoposto (volgarmente *alburno*) non si mostri perfettamente bianco, del colore cioè che presenta, quando si fa un taglio in ramo sano, posto lontano dal punto in cui si manifestò la gomma. È buona precauzione, nell'incertezza in cui siamo sulla causa vera del male, di portar fuori dell'agrumeto il legno tagliato e bruciarlo, e nella piaga, non è forse male applicare qualche sostanza leggermente caustica.

6° Quando il male si manifesta sulla parte sotterranea dell'albero, ciò che si avverte per l'improvviso ingiallire delle foglie (fenomeno però che può essere dovuto anco ad altre malattie), il caso è molto più grave, e l'albero più difficilmente si salva; ad ogni modo, scoprire subito le radici e tagliare accuratamente quelle che trovansi attaccate (la loro corteccia è rammolita, mucillaginosa, nerastra e puzzolente), ricoprire di poi le rimanenti piuttosto leggermente per poterle riesaminare all'occorrenza, indi sospendere per certo tempo le irrigazioni.

7° Tenere sempre nell'agrumeto un vivaio di piante giovani da avere pronte, per sostituire a quelle che muoiono.

8° Infine tentare su larga scala l'adozione di concimi minerali (in Sicilia quasi del tutto sconosciuti), almeno a titolo di esperimento.

esso innestate non riescono mai così perfetti nella qualità e nella forma, come quelli innestati sopra limone o portogallo, e che inoltre esso pure non è risparmiato dalla gomma ma solo meglio se ne difende ([1]).

Una sostanza fluida, scura, per lo più torbida, puzzolente, che rammenta la gomma, ma una gomma *sui generis* che si direbbe alterata e guasta, presentasi abbondante e più o meno all'improvviso al pedale degli alberi, o direttamente sulle radici; la corteccia della parte per tal modo attaccata si screpola, si solleva, secca o marcisce (radici), e la pianta da prima ingiallisce, poi a poco a poco perde le forze e muore. Tali in poche parole sono i sintomi esterni con cui periscono gli agrumi attaccati dal *mal di gomma* ([2]).

Questo scolo gommoso, come è naturale, fu quello che attirò mai sempre l'attenzione tanto dell' agricoltore, che dello scienziato, e ad esso di preferenza si sono rivolti studî e cure. Secondo me però la maggior parte degli osservatori si occuparono del fenomeno dello scolo della gomma, in modo troppo esclusivo e direi quasi superficiale, giacchè in fondo esso non è che la manifestazione esterna, che l'effetto ultimo della malattia, e trascurarono troppo d'investigare le cause che lo determinano.

([1]) Diversi proprietarî a Catania, e fra questi alcuni dei migliori, pur riconoscendo che i melangoli meglio dei limoni resistono al male, mi mostravano or sono tre anni giardini nuovi formati interamente di limoni da seme innestati, adducendo, *che tanto tornava lo stesso, perchè quanto si guadagnava coi melangoli in maggiore durata, perdevasi in ritardato sviluppo.* L'esempio però, secondo me, non è da seguirsi.

([2]) « La malattia consiste in uno scolo gommoso che si fa vedere per lo più in primavera od « in autunno al pedale dei fusti degli alberi a breve distanza dal suolo, oppure sulle radici diretta- « mente. Il male incomincia a manifestarsi coll'apparire di alcune gocce di gomma sopra la corteccia « del tronco apparentemente ancor sana, poi lo scolo gommoso cresce, la corteccia si fende, o si buca, « e la gomma si fa copiosa, fluida, torbida, scura e puzzolente.

« Finito o rallentato lo scolo, nel cuore dell'estate o dell'inverno, si trova la corteccia per buon « tratto tutto all'ingiro dei centri d'infezione distaccata dal legno e morta, che secca si solleva, dive- « nuta dura e fragile. La parte più superficiale del legno sottostante trovasi pure alterata, onde per « un solo attacco del male buona porzione dei tessuti periferici e più vitali del tronco, tanto verti- « calmente che orizzontalmente, viene sottratta senza altro alle funzioni della vita vegetativa. Ed « in pochi anni per successivi attacchi la pianta perisce, consumandosi ad ognuno di essi nuova « porzione di strato libroso-cambiale, e della rimanente sovrastante corteccia sino a che compiuto il « giro del tronco, il male arriva ad interrompere del tutto la comunicazione fra la parte aerea e la « sotterranea della pianta, in quei tessuti più particolarmente destinati alla circolazione dei succhi « vegetali più elaborati e perfetti: ed è questo in generale il caso degli alberi innestati sopra melan- « goli a non forte distanza dal suolo.

« Altre volte invece il male non si sofferma al pedale, arrestato dall'innesto, ma scende addi- « rittura dal tronco alle radici, oppure si manifesta direttamente su queste senza nulla lasciare appa- « rire al di fuori, ed il deperimento della pianta allora è più sollecito, la corteccia delle radici « rapidamente infracida, e la perdita dell'albero può seguire in meno di un anno; ed è il caso parti- « colarmente degli alberi di limone proveniente da talee o da seme.

« Non torna superfluo ancora far notare come le alterazioni della zona cambiale, di quello strato « cioè di tessuto tenerissimo che sta fra legno e corteccia, e da cui traggono origine i tessuti non « primordiali, e perciò essenzialissimo alla vita vegetale, si estendono molto al di là dei centri di « scolo cioè sino a qualche metro (in certi casi) più sopra sul tronco, ove tutto sembra assolutamente « sano ». Vedi mia Memoria: *Alcune esperienze* ecc., *per guarire gli agrumi attaccati dal mal di gomma.* Palermo, pag. 2 e 3.

È invece a queste ultime che, per quanto possa sembrare difficile bisogna tentare di risalire, fa d'uopo cercare di non essere più costretti di andare a tentoni, e cessare di affidarsi unicamente ai mezzi empirici, i quali finora a ben poco condussero. Incaricato dal Ministero d'Agricoltura di occuparmi di tale malanno, fu con questi intendimenti che mi misi all'opera, e ne incominciai lo studio col porre a me stesso le seguenti domande:

Come muore la pianta? quali sono gli organi, quali le sostanze, quali gli elementi istiologici che dapprima si guastano e disorganizzano? quale la natura delle alterazioni, l'epoca in cui cominciano, l'ordine ed il modo loro di procedere? in una parola come avviene patologicamente questa disorganizzazione così profonda e violenta che sospende e toglie la vita a piante per loro natura tanto piene di vigore e di forza che poche possono reggere al loro paragone? Ed una volta studiate e constatate le alterazioni e la loro natura, quali possono essere le cause vere od almeno probabili che le producono?

Coi lavori di Karsten, Wiegand, Frank, Sorauer, Prilleur, non poca luce, al certo, fu fatta intorno alla malattia della gomma dei vegetali; oggidì è noto il modo come tale sostanza si forma in diverse piante, ma è egli provato che negli agrumi le cose procedano in maniera del tutto identica a quella che si avverte nei peschi, nei mandorli, nei ciliegi ecc.; alberi sui quali di preferenza tali indagini vennero intraprese? Io non credo si possa, per ora almeno, affermarlo con sicurezza.

Nei ciliegi, peschi ecc. la *gommosi* (nome con cui si designa detta malattia) è dovuta a soverchio accumulamento di sostanza plastica in parti della pianta ove non trova sfogo sufficiente a normale organizzazione, ed a contemporaneo eccesso d'acqua nei tessuti corrispondenti, per cui ha luogo da prima precaria formazione di tessuto speciale e patologico, e poi susseguente disorganizzazione di questo e formazione in mezzo ai tessuti normali di ammassi di sostanza amorfa e pseudo-fluida che uscendo attraverso la corteccia a contatto dell'atmosfera ci fornisce la così detta gomma.

Nella compagine degli alberi di agrumi io ho constatato invero alterazioni e fenomeni simili ai sopra descritti e spesso su larga scala, la qual cosa in realtà addimostra che per un lato ci dobbiamo trovare in condizioni analoghe a quelle dei peschi, ciliegi ecc.; ma dall'altro lato se si considera il processo, l'andamento generale del morbo, manifestansi tali differenze, da rendere il giudizio molto dubbio e da mostrare la necessità ancora di ulteriori e più accurate ricerche.

Non è facile infatti darsi conto del perchè la *gommosi* nei peschi, ciliegi ecc. debba avere per così dire un procedimento quasi regolare, in modo che la sua apparizione è connessa a condizioni specialissime e per così dire costanti di clima, di coltura, di natura di terreno, di età, di piaghe e tagli mal fatti sui tronchi ecc., del come cagioni ad essi danni relativamente lievi e sempre limitati a quelle determinate condizioni, e negli agrumi invece il mal di gomma non segua regola di sorta.

Gli agrumeti che prima perirono in Sicilia furono in generale quelli ove le irrigazioni erano più abbondanti, ma non va dimenticato che quelli pure in cui l'acqua scarseggiava non si salvarono, e che non furono risparmiati nemmeno i giardini a secco, cioè quelli ove mancava addirittura l'acqua d'irrigazione; in questi il male fece solo minor danno o procedette più lentamente.

A Messina gli agrumi si riproducevano per talee, e sulle prime si volle vedere in tale pratica la causa della strage menatà dal male in quella provincia, ma nelle altre parti dell'isola ove gli alberi si moltiplicavano per seme, più tardi il morbo sviluppossi egualmente, e per tal modo da non lasciare ivi pure in alcuni agrumeti un sol albero vivo o sano. Si è pure parlato della natura del suolo, della giacitura, della esposizione, della coltura, dei concimi ecc.; ma alla lunga tutto fu contraddetto, e gli agrumi in terreni compatti o leggeri, esposti a mezzogiorno od a mezzanotte, in piano od in collina, molto o poco coltivati e concimati, tutti furono attaccati ed in molti luoghi tutti distrutti.

Inoltre come spiegarsi perchè il mal di gomma si abbia dovuto sviluppare così ad un tratto, quasi repentinamente e ad epoca fissa per così dire (anno 1862 per la Sicilia), mentre la *gommosi* ordinaria nei peschi, ecc. ed anco negli agrumi (questi pure sono alberi che hanno sempre sofferto la gomma, ma la gomma ordinaria o sporadica) è malattia antica forse quanto le specie stesse, e tale che non uccide o uccide solamente qua e là qualche albero posto in cattive condizioni, e mai fu morbo da svilupparsi addirittura sopra migliaia e migliaia di piante sino allora floridissime, poste in condizioni agrariamente eccellenti e molto varie, ed in paesi lontanissimi? Come rendersi ragione, colle alterazioni dovute alla semplice *gommosi* e colle cause solite che la producono, del perchè agrumeti posti nella stessa contrada ed in condizioni simili di terreno, di clima, di coltura ecc. siano fortemente travagliati dal male, mentre altri vicini o contigui non lo siano punto o ben poco, anzi, come qualche volta di uno stesso agrumeto appartenente al medesimo proprietario, sopra terreno di eguale natura, sottoposto alle stesse cure, una parte si ammali e muoia, e l'altra divisa solo da semplice sentiero o da altro simile ostacolo, rimanga sana, o si ammali solo molto più tardi?

E poi, perchè il male si è propagato da paese a paese incominciando per es. in Sicilia da Messina, estendendosi indi in poco tempo in tutte le provincie dell'isola; perchè quando in un giardino un albero si ammala, raramente i vicini restano sani, ma si formano per lo più specie di centri d'infezione da cui il male direbbesi quasi che irradiasse, centri che possonsi constatare anco più tardi alle larghe piazze, benchè non sempre regolari, che veggonsi negli agrumeti ammorbati, ma non ancora del tutto distrutti? L'andamento del male, in poche parole, è tale che non corrisponde al procedimento ordinario della *gommosi* solita e sporadica, e che anco astraendo dalle esperienze colle quali molti hanno creduto dimostrare direttamente la sua contagiosità, si corre involontariamente col pensiero al sospetto che si abbia a fare con qualche parassita microscopico, animale o vegetale, finora sfuggito all'osservazione.

È così che, contemporaneamente allo studio istiologico di tutti gli organi della pianta ammalata in paragone di quelli della pianta sana, intrapresi una minuziosa ricerca per vedere se fosse stato possibile scoprire esseri estranei e parassitici.

Da questo lavoro non per anco compiuto perchè molte ed urgenti occupazioni mi costrinsero sempre ad interromperlo, tolgo ora quanto riguarda una nuova crittogama che rinvenni quasi costantemente sulle radici e sui tronchi dei limoni affetti di mal di gomma. Le osservazioni ed indagini che faccio seguire non sono complete: e se mi decido a pubblicarle dopo qualche anno che dormivano sul mio tavolino, è

solo perchè avendo abbandonato la Sicilia mi veggo allontanata la probabilità di poterle fra breve riprendere, e perchè non è forse male che siano note a coloro che in seguito si dedicheranno allo studio di tale malattia, non fosse altro, per dimostrare con certezza (certezza che ora manca malgrado le molte affermazioni in contrario) che di parassitismo non è punto questione.

Il fungo di cui vado a tener parola lo trovai da prima sopra alberi di limone ammalati in diversi agrumeti (Salvatore Nicastro, Spagna ecc.) di Siracusa, di poi lo rinvenni sopra radici e pezzi di fusto raccolti a Catania, e più tardi sulle stesse parti di alberi di limone ammorbati di gomma dei giardini dei dintorni di Palermo (agrumeto del cav. Luigi Siciliano a Ficcarazzelli, agrumeto del conte Tasca a Camastra ecc.); e del resto a quanto afferma il prof. Alfonso Spagna (a cui questi studî eran noti) nella seconda edizione del suo *Trattato della coltivazione degli agrumi* (1); altri ripeterono queste mie osservazioni ottenendo identico risultato.

È un fungo non solo microscopico, ma minutissimo, che si sviluppa con una rapidità prodigiosa, come sarà manifesto per quanto verrà più sotto esposto.

Eccone la descrizione.

Consta di un micellio cilindrico, bianco, incolore (fig. 1, 3, 5, 6, 13), qualche volta molto sviluppato e ramificato (sino ramificazioni di 3° ordine) con diramazioni ora opposte, ora alterne (fig. 6) e diviso da diaframmi. Il micellio ha grande tendenza ad anastomizzarsi, tanto se giovane, come può vedersi nella fig. 24, quanto se già adulto ed in pieno sviluppo. Nelle anastomosi in principio possonsi scorgere le pareti trasversali, che più tardi vengono assorbite e scompaiono interamente. Il micellio è generalmente pieno di plasma che si colora in giallo per l'azione di soluzione di iodo in ioduro di potassio; spesso presentansi nel plasma vacuole.

Dal micellio nascono cellule a riproduzione pure bianche ed incolori, di forma allungata e leggermente conica alle estremità, o fusiforme (fig. 4), più o meno incurvate, che dividonsi per lo più per mezzo di tre diaframmi, o pareti trasversali, in 4 scompartimenti o cellule figlie pressochè uguali (*a* in fig. 3) fra loro, e che possonsi considerare come altrettante spore. Qualchevolta nella cellula madre non si formano diaframmi (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, ecc. in fig. 4), oppure invece di tre ne sorgono 1, 2, 4, 5 e persino 7 (rari).

Queste cellule conidiiche piene comunemente di protoplasma finamente granulare, si sviluppano o direttamente alla estremità di portaspore semplici, cilindrici, o leggermente conici (*a*, in fig. 1, 2, 13), oppure sorgono sopra specie di sterigmi più o meno raggruppati, corti, di forma conica irregolare, ed adunchi come vedesi in (*b* fig. 3). Le dimensioni di queste cellule conidiiche sono varie come vedesi in fig. 4, e tanto le piccole che le grandi, tanto quelle con nessuno od un solo diaframma, come quelle con 2, 3, 4 . . . 7 diaframmi posseggono la facoltà di germinare (fig. 29, 7, 8, 9, 10, 11, 12). Le spore o cellule figlie mai si separano, e germinano stando attaccate in serie fusiformi come se costituissero una sola spora. Generalmente la germinazione ha luogo colla formazione di un solo o di due budelli od otricelli cilindrici, ialini e più o meno sottili, che escono da una o da ambe le cellule figlie

(1) Pag. 470.

terminali; cellule figlie intermedie a me non fu mai dato di vederne germinare, come trovò per es. Schacht nel *Fusisporium solani* [1]; il contenuto del fuso però nella germinazione passa per intero, cioè compreso quello delle spore intermedie, nei budelli terminali senza che le pareti intermedie vengano primieramente sciolte e quindi per azione diosmotica.

Una sol volta mi venne fatto di trovare un fuso nel quale una delle cellule terminali era da un lato leggermente staccata dalle rimanenti (fig. 9), il che dimostra come le pareti di separazione delle cellule figlie debbano constare veramente di due lamelle.

Questi otricelli possono divenire lunghissimi senza ramificarsi, mentre qualche volta si ramificano a breve distanza dalla spora madre, e spesso danno anco luogo ad organi di riproduzione, od almeno a cellule che tali sembrano, come si vedrà più sotto, di forma diversa dei sopra descritti.

Questo micellio si interna nei tessuti corticali, nel cambio, ed anco nei raggi midollari delle parti di tronco affette dal mal di gomma.

L'asta o ramo micellico che si prepara a produrre conidii, generalmente si ingrossa alla estremità libera e superiore, assumendo forma leggermente clavata, indi alla parte inferiore del rigonfiamento si sviluppa una parete trasversale, che lo separa dal suo basidio, e quando è maturo si stacca e cade. E mentre una cellula conidiica matura, l'estremità sottostante del supporto comincia a gonfiare alla sua volta e prepara una nuova spora come vedesi nella fig. 1 e 2. Rarissimamente a me fu dato trovare cellule conidiiche ancora attaccate al micellio in cui si potessero scorgere già i diaframmi trasversali. Sembra, e dico sembra, perchè oggidì non ho più materiale da sottoporre all'osservazione per accertarmene, che queste pareti trasversali si possano formare anche dopo che la spora si è staccata dal micellio. Nella germinazione delle spore, qualche volta invece di uno sorgono due budelli direttamente dalle cellule terminali come vedesi in fig. 29.

Oltre i conidii sopra descritti, si formano dallo stesso micellio altre cellule speciali sulla cui natura e sulla cui funzione non potei acquistare un'assoluta certezza. Sono cellule sferiche, incolori, a superficie liscia (x in fig. 5, 10, 12, 13, 27 ecc.) che nascono alla estremità di aste o basidii cilindrici, e qualche volta anco direttamente sulle diramazioni principali del micellio, le quali sferucce posseggono parete propria, e contengono generalmente altri corpicini rotondi, bianchicci, piccolissimi, in numero vario (ne contai sino 15) che rifrangono fortemente la luce e nei quali non è possibile distinguere parete di sorta.

Il processo di formazione di queste sferucce x non è molto dissimile da quello dei conidii. L'asta o ramo destinato a produrle, comincia coll'empirsi di abbondante protoplasma, che richiama dalle parti contigue del micellio, o dalle spore stesse germinanti, poichè qualche volta si formano subito sugli otricelli di germinazione (x in fig. 10). Poi l'estremità libera del rametto si gonfia, e si ingrossa, formando una specie di piccolo bottone rotondo o leggermente oblungo, e quando questo è alquanto

[1] Schacht H., *Bericht an das Königliche Landes - Oeconomie - Collegium über die Kartoffelpflanze und deren Krankheiten.* Berlin, Tavola X.

cresciuto sorge una parete trasversale alla base del rigonfiamento, il quale per tal modo diviene una cellula a sè, e distinta dal suo supporto.

Da principio questi rigonfiamenti sono pieni semplicemente di protoplasma uniforme, che più tardi si intorbida, diviene finamente granulare (*z* in fig. 13), poi a poco a poco sembra dividersi per dar luogo alla formazione dei corpicini rotondi o granelli che costituiscono il contenuto delle sferucce mature.

Formatasi una sferuccia *x*, l'estremità dell'asta supporto comincia a gonfiarsi di nuovo, formando sotto di essa da prima una specie di calice (fig. 20, 22), che poi sviluppasi in sfera con processo simile al descritto; e mentre la nuova ed inferiore si forma, la vecchia e superiore si stacca e cade. Altre volte invece il bottoncino sino da principio prende forma leggermente oblunga, e quando ha raggiunto certo grado di sviluppo, una nuova parete trasversale si organizza verso la sua metà, in senso più o meno normale all'asse dell'asta supporto, e la cellula si divide in due (fig. 13, 14, 27 ecc.), ma esternamente, sul principio, la parete rimane liscia e continua e solo più tardi si forma un'insenatura, e le due cellule prendono forma pseudo-sferica e distinta. Intanto sull'estremità del supporto si ripete la formazione di una nuova sfera la quale alla sua volta si divide, e se le prime non sono cadute come qualche volta avviene, puossi avere una serie di 4 sferucce attaccate in fila l'una sopra l'altra, il cui raggruppamento però spesso ricorda il loro modo gemino di formazione come vedesi abbastanza chiaramente nella fig. 18. Il caso rappresentato nella fig. 21 unico fra migliaia e migliaia osservati, accenna inoltre alla possibilità di potersi avere due serie separate di cellule sferiche sullo stesso supporto.

Le aste che portano le sferucce sorgono in generale verso il mezzo delle cellule nelle quali pei diaframmi rimane diviso il micellio (*h* fig. 13) e non ad una delle estremità come ordinariamente vedesi avvenire per quelle destinate a produrre i conidii fusiformi. Però qualche volta trovasi che una stessa asta supporto si divide in due, ed una diramazione produce conidii fusiformi, e l'altra sferucce, come scorgesi nella fig. 5; il che dimostra come la differenza sopra accennata fra le diramazioni del micellio che producono conidii fusiformi e quelle che producono sferucce, soffra eccezioni.

Le sfere *x* allorchè si staccano sono perfettamente rotonde, ed avviene di frequente di trovarle a migliaia già completamente vuote (fig. 14 e 15). Ora accanto ad esse ed in mezzo all'ammasso formato da loro, dal micellio ecc. ho trovato spesso molti corpicini liberi, rotondi, incolori, piccolissimi, fortemente rifrangenti la luce, alla grandezza ed all'aspetto identici ai granelli contenuti nelle sferucce (*x*), come vedesi nella fig. 16; ed accanto a questi, altri corpicini rotondi, simili ma leggermente ingranditi e germinanti. Queste sferettine o sporucce germinano pure e caccian fuori od un solo budello (*d, c, e* fig. 17) oppure due budellini in direzione opposta, (*f, g* fig. 17) i quali qualche volta divengono lunghissimi, e dividonsi ben presto per mezzo di pareti trasversali; sventuratamente non mi fu dato seguire la germinazione di tali sporule o granelli in tutto il loro sviluppo per vedere se veramente avessero riprodotte le forme del fungo primitivo. Ho trattato diverse volte le sfere *x* contenenti i granellini con etere, con alcool assoluto, e con miscuglio d'alcool ed etere, entro vetri d'orologio, od in tubetto d'assaggio per $^1/_4$ d'ora, per $^1/_2$ ora ed anco

per più di un' ora, ma non avvertii mai alcun cambiamento; i granellini non si sciolsero. Altrettanto si ottenne trattando nello stesso modo i granellini liberi, isolati e fuori delle sferucce, solo in questo caso sembrò che, sotto l'azione dell'alcool assoluto, alla lunga subissero un leggero raggrinzamento.

D'altra parte debbo confessare che mai mi fu dato di sorprendere al microscopio le sferucce nell'atto del loro vuotamento, nemmeno di scoprire nelle sferucce vuote (x) alcuna apertura, come pure, che mi è avvenuto una volta di trovare diverse di queste sferucce staccate ed ancor piene di plasma finamente granulare, ma non diviso in granelli, che germinavano direttamente; diverse delle quali anzi erano riunite a due a due come vedesi nella fig. 28.

Ora per quanto sia difficile giudicare con certezza di oggetti di una minutezza così esagerata, pure dall'esposto sembrerebbe che queste sferucce si dovessero considerare come una specie di sporangi, similmente a quanto avviene nelle Peronosporee, benchè nelle sporule contenute nei sporangi del nostro fungo non abbia potuto vedere ciglia di sorta, nè alcun movimento autonomo, per cui non si possono, come nelle Peronosporee, avere per zoosporangi ed i corpicini rotondi in essi contenuti per zoospore. Il potere questi supposti sporangi certe volte germinare direttamente senza dar luogo alla formazione delle sporule interne, non costituirebbe alcuna anomalia, perchè qualcosa di simile avviene anco cogli sporangi delle Peronosporee.

Le cellule fusiformi o conidiiche più grandi misurano da $0^{mm},0264$ a $0^{mm},0274$ di lunghezza, e da $0^{mm},0024$ a $0^{mm},0028$ di diametro massimo. Le cellule sferiche od i supposti sporangi più grandi hanno un diametro che oscilla fra $0^{mm},0048$ a $0^{mm},006$.

Il miceto di cui ci occupiamo si riproduce sulle parti dei limoni attaccati dal mal di gomma, sempre nel modo sopra descritto, almeno a me non fu mai dato di trovare altri organi di fruttificazione. Così pure da coltivazioni artificiali sopra acqua, soluzione di zucchero, fette di patate ecc. più volte ripetute, non ottenni che le sferucce ed i conidii fusiformi di cui sopra.

La forma dei conidii, il loro modo di formazione e di germinazione accennano ad un fungo più complesso, ad un ascomiceto, di cui però pel momento non è noto che una parte del suo ciclo di sviluppo. È quindi un fungo imperfetto di cui, come per molti altri, rimane a cercare le vere forme di fruttificazione onde venire definitivamente classificato.

Così come è, la forma dei suoi conidii lo pone fra i *Fusisporii,* e lo designo quindi col nome di

Fusisporium Limoni, Briosi.

Rimarrebbe ora a sapere con sicurezza qual parte spetti a questo miceto nella malattia di cui ci occupiamo. Deve esso aver posto fra le cause che determinano il morbo, oppure essere considerato come semplice effetto, come un fungo saprofita attirato in luogo dallo stato di decomposizione in cui si trovano i tessuti ammalati? Ed in questo ultimo caso, la sua presenza sarebbe del tutto indifferente, o contribuirebbe essa pure ad aumentare ed estendere la disorganizzazione già per altre cause incominciata?

Io sono costretto di lasciare ad ulteriori ricerche la risposta definitiva a queste

importantantissime domande non avendo osservazioni sufficienti a decidere. Trovai i micellii sopra ed anco entro i tessuti corticali dei tronchi attaccati, ma invero in quelle parti già ammorbate, ed ove il tessuto benchè conservasse le proprie forme non poteva affermarsi con certezza che fosse perfettamente sano. Che però la sua presenza debba accelerare la disorganizzazione dei tessuti e contribuire ad estendere il male, non credo vi sia dubbio alcuno.

Nella malattia delle patate come è noto, un Fusisporio, il *Fusisporium Solani Martius,* trovasi pure quasi costantemente negli organi affetti, ma quivi l'illustre prof. A. de Bary in un bellissimo lavoro (1) tolse ogni dubbio, e dimostrò che il morbo era invece dovuto alla presenza di un altro fungo, alla *Peronospora infestans* e che il *Fusisporium* nulla aveva a fare colla causa prima del male, benchè contribuisse fortemente ad aumentare la decomposizione dei tessuti (vedi anche Schacht, opera citata).

Tolgo da ultimo alle mie note alcune altre osservazioni ed esperienze che riguardano lo stesso fungo.

Sopra un pezzetto di corteccia di $0^{m},0005$ di lato, il microscopio mostra migliaia e migliaia di conidii.

Conidii immersi interamente nell'acqua germinano egualmente come quelli tenuti in aria umida sotto campana di vetro.

Seminati conidii sopra soluzione di zucchero, si ebbero micellii relativamente grossissimi ma le stesse forme di sporule sopra descritte.

Alla temperatura di $+ 25°$ C le spore conidiiche fusiformi incominciano a germinare dopo 2 ore, indifferentemente le grandi e le piccole, quelle con una o più pareti trasversali, e quelle senza. Dopo 3 ore alla detta temperatura (sopra acqua) se ne trovarono germinate circa $^1/_{20}$ del numero totale, però altre volte molto meno.

Seminate spore sopra porta-oggetti e messo questo fra due grandi vetri da orologio con acqua nell'inferiore ed il tutto entro cassetta di latta perfettamente chiusa ed oscura, trovato alla mattina susseguente, le spore germinate.

Esposti pezzi di radice infetti all'aria asciutta, alla temperatura ordinaria (da $+ 25$ a $+ 28°$ C) per essiccarli, ed osservati dopo 24 ore, si trovò circa $^1/_{20}$ delle spore alterate, cioè col protoplasma contratto e staccato dalle pareti delle cellule, e le rimanenti in buono stato. Messo a germinare le une e le altre, dopo 12 ore, molte delle intatte furono trovate in via di germinazione, delle altre, nessuna. Altre volte ripetuto lo stesso sperimento, e non riuscito; le spore esposte all'aria asciutta per più di 20 ore germinarono di poi discretamente: esigono forse maggior grado di essiccamento?

Spore prese da uno stesso preparato, seminate in parte sopra acqua pura, ed in parte sopra acqua di calce satura e limpida, dopo 24 ore le prime si mostravano germinanti a migliaia, mentre delle seconde nemmeno una era germinata, malgrado avessero conservato il loro aspetto primitivo e normale.

Spore prese dalla stessa coltivazione e seminate, porzione in acqua pura e porzione sopra leggerissima soluzione di ammoniaca, dopo 16 ore, le prime erano in pieno sviluppo di germinazione, delle ultime invece nessuna aveva germinato.

(1) *Die gegenwärtig herschende Kartoffel Krankheit, ihre Ursache und ihre Verhütung.* Leipzig, 1861.

Di spore seminate sopra acqua contenente il 6 % di acido solforico del commercio, dopo 24 ore, nessuna germinazione.

Sopra acqua con 8 ‰ di acido solforico, idem.

Sopra debolissima soluzione di solfato di rame, idem.

Sopra soluzione di solfato di zinco a 3 ‰, dopo 24 ore trovate alcune spore germinanti di aspetto però irregolare. Dopo 3 giorni dette spore erano allo stato di prima, cioè non si erano sviluppate ulteriormente.

Sopra soluzione con 6 ‰ di solfato di zinco dopo 48 ore alcune spore incominciarono a germinare, ma non seguitarono.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

FIG. 1 e 2. Porta conidii e conidii in via di formazione, ingrandimento 650D. circa.
» 3. Porta conidii con sterigmi, ing. 650D. circa.
» 4. Conidii di diversa forma e dimensione, ing. 650D. circa.
» 5. Micellio con asta diramata, in cui uno dei rami porta un conidio, l' altro un supposto sporangio, ing. 650D. circa.
» » Micellio con portaspore opposti, ing. 650D. circa.
» 7, 8, 9, 11, 27. Fusi conidiici con uno, con più, o senza pareti trasversali, ing. 650D. circa eccettuato quello della fig. 9 che è visto a circa 1300D.
« 13. Micellio che porta conidii e supposti sporangi.
» 10 e 12. Conidii germinanti che producono supposti sporangi (*x*), ing. 650D. circa.
» 14, 18, 19, 20, 21, 22, 23. Supposti sporangi e loro supporti per dimostrare il vario modo di formazione, ing. 650D. circa, eccettuato la 21 che è 1300D. circa.
» 15. Supposti sporangi vuoti e staccati, ing. 650D. circa.
» 16. Sferucce o sporule dei supposti sporangi, ing. 650D. circa.
» 17. Idem che germinano, ing. 650D. circa.
» 26. Fusi conidiici i cui otricelli si anastomizzano, ing. 650D. circa.
» 30 e 31. Fusi coniidici di forma anormale(?), ing. 1300D. circa.
» 24. Porta supposti sporangi ramificati, 650D.
» 28. Supposti sporangi che germinano direttamente, ing. 650D. circa.
» 29. Fuso conidiico con 3 budelli di germinazione, ing. 650D.

Sulla diabase peridotifera di Mosso nel Biellese.

Nota del Socio ALFONSO COSSA

letta nella seduta del 3 marzo 1878.

Ho riassunto in questa Nota i risultati dello studio mineralogico e chimico che intrapresi intorno alla diabase peridotifera di Mosso, che mi venne fatta conoscere dal comm. Quintino Sella. Questa roccia è importante così per la presenza del peritodo associato ai componenti abituali della diabase, come per il pleocroismo molto spiccato dell'augite che essa contiene. D'altra parte credo che finora non fu pubblicato alcun lavoro chimico sulla composizione delle diabasi del Piemonte. Relativamente alle condizioni di giacitura della diabase e ad un fenomeno di particolare risonanza di cui essa è dotata, pubblico testualmente le seguenti notizie che mi furono cortesemente comunicate dal comm. Sella.

« Questa roccia si trova nel comune di Valle inferiore Mosso nella borgata *Bogge*, in un tratto non molto esteso limitato in alto da detta borgata, in basso dal torrente *Strona*, ed in direzione di questo dai torrentelli *Caranzana* a monte, e *Tolera* a valle. Essa è in massi rotondati di diametro che può giungere fino a circa un metro. La superficie loro è rugosa, in apparenza quasi corrosa. Il colore è nero traente all'azzurro cupo, cosicchè nel dialetto del luogo si dicono pietre *biove* (bleu). È notevolissima la loro durezza e tenacità. Si lavorano bene, e si possono nettamente spaccare. Sono singolarmente sonore, od a meglio dire, nella percossa col martello si sente un suono non senza analogia con quello che si ottiene battendo sull'incudine.

« I massi in discorso sono erratici sulla superficie del suolo, od a poca profondità, e quelli sono meglio conservati di questi, la cui parte esterna è più facile a rompersi ».

La diabase peridotifera di Mosso a primo aspetto sembra una diorite. Un occhio esercitato vi riscontra l'olivina, ma non si può acquistare un criterio sicuro sulla natura dei minerali che la compongono senza il soccorso dell'osservazione microscopica.

Questa roccia ha una tessitura cristallina a piccoli elementi. La sua frattura è scagliosa a superficie irregolare. Non presenta alcun indizio di decomposizione, e l'osservazione microscopica non vi ha riscontrato la presenza di carbonato calcare, di ossido ferrico, di materie terrose amorfe che sono solitamente indizio e conseguenza

della degradazione delle roccie. — Cinque esperienze eseguite per determinare la densità della roccia diedero i risultati seguenti:

con grammi	1.710	di roccia	2,973	a + 9° C
»	2.194	»	2,958	»
»	1.988	»	2,932	»
»	1.817	»	2,940	»
»	1.689	»	2,968	»

La concordanza di questi risultati ottenuti con frammenti staccati da diverse parti di un masso che pesava parecchi chilogrammi, dimostra che i minerali che la compongono sono distribuiti omogeneamente in tutta la massa della roccia. — L'osservazione microscopica e l'analisi chimica provarono che nella composizione della roccia prendono parte i minerali seguenti: un feldispato triclino e l'augite che predominano sugli altri componenti; l'olivina, la mica nera magnesifera, la magnetite contenente traccie di ferro titanato, qualche raro cristallo di orniblenda, l'apatite in microliti rinchiusi così nel feldispato come nell'augite. La roccia contiene inoltre in quantità assai piccola ed irregolarmente distribuiti dei cristalli di pirite e di calcopirite.

Nella diabase di Mosso manca affatto la clorite che da qualche scrittore di petrografia viene considerata come uno dei componenti essenziali delle diabasi, ed invece, secondo il Rosenbusch, è appena un prodotto della loro decomposizione.

Il feldispato triclino, che è l'elemento mineralogico che predomina nella roccia, si presenta nelle osservazioni microscopiche in cristalli nei quali la forma allungata prevale a quella tabulare. Le strie di geminazione caratteristiche di questo minerale occupano senza interruzione tutta l'estensione dei cristalli; solamente in qualche raro individuo, la metà di un cristallo geminato appare semplice, mentre nell'altra è manifesta la struttura polisintetica. Non si osservano nel feldispato traccie di decomposizione posteriore alla sua deposizione. Invece contrariamente a quanto si rilevò nelle diabasi finora studiate, questo minerale è ricchissimo di interposizioni che consistono specialmente in cristalli piccoli ma ben distinti di apatite, ed in corpuscoli neri, costituiti molto probabilmente da magnetite, disposti quasi sempre in serie parallele alle linee di geminazione.

Trattando una sezione sottile della roccia con acido cloridrico concentrato, il feldispato resiste affatto all'azione dell'acido mentre si disciolgono completamente i cristalli di apatite, e quasi per intero i corpuscoli neri ritenuti per magnetite. Mettendo dopo questo trattamento sul porta-oggetti qualche goccia di una soluzione nitrica di molibdato ammonico, si vedono formarsi sotto al microscopio dei cristallini ottaedrici e cubo-ottaedrici di fosmolibdato ammonico che si disciolgono completamente quanto si bagnano con ammoniaca.

L'augite non è in cristalli ben determinati, ma piuttosto in frammenti che empiono le lacune lasciate dal vario modo con cui sono intrecciati i cristalli di feldispato che formano l'orditura della roccia. Pertanto si può ritenere che la deposizione dell'augite è posteriore a quella del feldispato.

Spesso occorre di osservare che diversi granuli di augite quantunque tra loro separati dal feldispato triclino, sono tra loro orientati in maniera da far sembrare che essi appartengano ad uno stesso individuo cristallino. Ciò che rende veramente interessante la diabase di Mosso è l'intensità del pleocroismo di cui è dotata l'augite. Questo pleocroismo è orientato in modo che sono rossi i raggi che vibrano nella direzione dell'ortodiagonale, e di un colore verde pallido quelli che vibrano nella direzione dei due assi di elasticità compresi nel piano di simmetria. Fa notare il Rosenbusch che questo pleocroismo frequente nell'augite delle trachiti e delle andesiti è assai raro nei pirosseni delle roccie più antiche.

L'augite contiene interposti dei microliti di apatite e dei granuli irregolari di magnetite; come il feldispato essa non presenta traccie di decomposizione.

L'olivina è in granuli cristallini compenetrati più frequentemente nell'augite che nel feldispato. Non manifesta alcun indizio di passaggio al serpentino.

Nulla di interessante si rileva nei pochi cristalli di mica magnesifera ed in quelli ancora più rari di orniblenda.

A motivo della struttura microcristallina della roccia è cosa assai difficile il separare meccanicamente i minerali che la compongono. Senza usare istrumenti di ferro, ridussi in polvere minutissima alcuni frammenti della roccia e separai ripetutamente nella polvere ottenuta la parte attirabile dalla calamita, la quale ammonta presso a poco all'uno per cento della roccia. Osservata però al microscopio questa polvere risultò non pura a segno da poterne eseguire un'analisi, i cui risultati potessero darci una idea precisa della composizione della magnetite. Immersi ripetutamente la polvere in una soluzione di solfato di rame per osservare se in essa contenevasi traccie di ferro allo stato metallico; il risultato fu negativo. Questa osservazione non dovrebbe mai ammettersi nello studio delle roccie per non correre il pericolo di lasciar sfuggire il ferro nativo, il quale, oltrechè nei basalti e nelle doleriti, può riscontrarsi anche nelle roccie dioritiche, nei serpentini ed in generale nelle pietre verdi. Riducendo in polvere finissima dei cristalli di magnetite fu osservato che essi qualche volta contengono un nucleo di ferro metallico, e ciò accade non raramente nelle roccie nelle quali alla magnetite è associata l'olivina.

La diabase di Mosso ridotta in polvere e trattata con acido cloridrico concentrato si decompone facilmente in parte con separazione di silice fioccosa, proveniente dalla decomposizione dell'olivina. Nei saggi che ho eseguito per conoscere la proporzione delle sostanze decomposte dall'acido, trattai il residuo insolubile con una soluzione bollente di carbonato sodico per esportare la silice isolata per l'azione dell'acido. La roccia così cimentata perde in media il 25 per cento del proprio peso, e questa perdita è prodotta dalla scomposizione completa della olivina, della magnetite, dell'apatite e dalla decomposizione parziale dell'augite. Per giudicare approssimativamente della proporzione di olivina contenuta nella roccia ho determinato la quantità di magnesia che si trovava nella parte della roccia solubile nell'acido cloridrico. Nella soluzione acida ottenuta con grammi 3,485 di diabase ho ottenuto grammi 0,1517 di ossido magnesiaco, quantità corrispondente a 4,35 per cento della quantità di roccia impiegata. Ritenendo ora che questa quantità di magnesia derivi se non in tutto almeno in massima parte dall'olivina, si viene a conchiudere che questo minerale

entra a comporre la diabase di Mosso nella proporzione di circa il dieci per cento. Si può pure acquistare un'idea approssimativa della quantità e del modo con cui l'olivina è disseminata nella roccia trattandone delle sezioni sottili con dell'acido cloridrico, il quale, come osservasi nel preparato che presento all'Accademia, lascia un deposito opaco bianco di silice gelatinosa nei punti che erano occupati dai cristalli d'olivina.

La diabase di Mosso riscaldata in tubo chiuso emette una piccolissima quantità d'acqua, altra prova della nessuna alterazione avvenuta nella roccia. Infatti la diabase di Mosso calcinata perde appena 0,45 per cento del proprio peso (media di tre osservazioni 0,46; 0,44; 0,45). La quantità d'acqua è certamente ancor minore di quella indicata da questa cifra, giacchè per la calcinazione contemporaneamente allo svilupparsi dell'acqua verificasi un aumento di peso prodotto dalla sovrossidazione del ferro che trovasi nella roccia per circa tre quarti allo stato di ossido ferroso.

Dai saggi qualitativi risulta che la diabase di Mosso contiene le sostanze seguenti: Acido silicico, allumina, ossido ferroso, ossido ferrico, calce, magnesia, soda, potassa, acido fosforico e traccie non determinate di acido titanico, ossido di manganese, di nichelio, di rame e di zolfo. Coll'analisi spettrale non potei rilevare indizio di litina, che mai non mancano nelle altre roccie feldispatiche del Biellese finora analizzate, e che trovasi in quantità relativamente grande nel melafiro di questa stessa regione.

Ho eseguito ripetutamente l'analisi quantitativa, determinandone sempre direttamente i componenti e mai per differenza. Nella separazione dell'ossido di ferro dall'allumina mi valsi del metodo di Rose. Ecco i risultati:

Anidride silicica	48.18
Anidride fosforica	0.37
Anidrite titanica	traccie
Allumina	18.86
Ossido ferroso	6.22
Ossido ferrico	2.27
Ossidi di manganese, di nichelio e di rame	traccie
Calce	9.95
Magnesia	8.46
Soda	3.88
Potassa	1.23
Perdita per calcinazione	0.45
	99.87

Il professore Rosenbusch al quale ho inviato un campione della diabase di Mosso confermò la diagnosi che io ne aveva fatto, e mi fece osservare che questa roccia presentava molta analogia con un'eufotide d'Ivrea che io gli aveva inviato lo scorso anno [1] e di cui egli descrisse brevemente la struttura microscopica alla pag. 466 della sua opera; *Die mikroskopische Physiographie der massigen Gesteine.*

(1) Ho tolto la roccia inviata al prof. Rosenbusch da una bella collezione di pietre verdi d'Ivrea donatami dal collega prof. Gastaldi.

Nella roccia d'Ivrea l'augite è sostituita dal diallaggio, ma petrograficamente Rosenbusch non fa alcuna distinzione tra i due minerali. Lo stesso professore ebbe la cortesia di comunicarmi la seguente analisi chimica ancora inedita della eufotide d'Ivrea.

Composizione della eufotide d'Ivrea.

Anidride silicica	56.457
Anidride titanica	traccie
Allumina	20.188
Ossido ferrico	4.360
Ossido ferroso	5.002
Ossido di manganese	traccie
Calce	6.586
Magnesia	2.665
Potassa	1.000
Soda	2.951
Acqua	1.610
Anidride fosforica	2.420
	101.021

Raffrontando questa analisi con quella della diabase di Mosso si osservano delle differenze notevoli, specialmente nella quantità di silice e di magnesia, provenienti molto probabilmente dalla mancanza dell'olivina nella eufotide d'Ivrea.

Cannocchiale pensile per la misura degli angoli verticali ed orizzontali.

Memoria del Socio PAOLO di S. ROBERT

letta nella seduta del 3 marzo 1878.

Lo scopo che mi sono proposto nell'imaginare lo strumento (Tav. I. Figura d'insieme), che mi prendo la libertà di presentare alla R. Accademia de' Lincei, è il seguente:

Dato un cannocchiale da campagna, che abbia una croce di fili al foco dell'oculare, munirlo degli organi occorrenti per misurare con esso le distanze angolari al zenit, e gli angoli intorno alla verticale.

Imaginiamo che il cannocchiale sia sospeso ad un asse orizzontale, perpendicolare all'asse del cannocchiale, mediante una staffa, che porta un anello col nonio, entro al quale il tubo del cannocchiale sia scorrevole, nel modo che è indicato dalla figura 1.

Si disponga dapprima l'asse del cannocchiale orizzontalmente, dirigendolo verso una mira lontana allo stesso livello; e si segni, in questa posizione, uno zero sul tubo scorrevole, di contro allo zero del nonio. Partendo da questo zero, si segnino di poi lungo il tubo le divisioni del metro.

Facendo scorrere il tubo del cannocchiale nel suo anello di una certa quantità, segnata sul tubo, il sistema formato dal cannocchiale e dalla staffa girerà intorno all'asse orizzontale, e l'asse del cannocchiale s'inclinerà all'orizzonte di un angolo la cui tangente sarà data dal numero delle divisioni scorse dal cannocchiale.

In fatti sieno O (fig. 2) la projezione verticale dell'asse di rotazione, OB l'asse della staffa, ADCB l'asse del cannocchiale, che forma coll'orizzonte l'angolo α, A il centro di gravità del cannocchiale di peso P, G il centro di gravità della staffa di peso Q.

Essendo i due pesi P e Q in equilibrio intorno all'asse O, dovrà essere

$$\overline{\mathrm{AD}} \times P = \overline{\mathrm{DC}} \times Q,$$

e perciò

$$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{DC}} \times \frac{Q}{P}.$$

Osservando che

$$\overline{\mathrm{DC}} = \overline{\mathrm{EG}} = \overline{\mathrm{OG}} \operatorname{tang} \alpha,$$

si avrà

$$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{OG}} \times \frac{Q}{P} \operatorname{tang} \alpha.$$

Ora la quantità di cui si è fatto scorrere il cannocchiale è uguale a

$$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AD}} + \overline{\mathrm{DB}};$$

e poichè

$$\overline{\mathrm{DB}} = \overline{\mathrm{OB}} \operatorname{tang} \alpha,$$

si avrà

$$\overline{AB} = \left(\overline{OG} \times \frac{Q}{P} + \overline{OB}\right) \operatorname{tang} \alpha .$$

Le quantità $\overline{OG}$, $\overline{OB}$, P, Q sono costanti in uno stesso strumento, così che si può fare

$$\overline{OG} \times \frac{Q}{P} + \overline{OB} = k ,$$

essendo k una costante da determinarsi, o *a priori*, misurando le quantità $\overline{OG}$, $\overline{OB}$, P, Q, o *a posteriori*, misurando con un altro mezzo l'angolo α, corrispondente a un valore noto di $\overline{AB}$.

Ordinariamente non si ha neppur bisogno di conoscere k, trovandosi esso fattor comune nell'equazione finale.

L'espressione ottenuta

$$\overline{AB} = k \operatorname{tang} \alpha$$

mostra che la quantità scorsa dal cannocchiale è proporzionale alla tangente dell'angolo d'inclinazione del suo asse.

Il sistema adunque formato dal cannocchiale e dalla staffa somministra gli angoli che l'asse del cannocchiale fa coll'orizzonte.

È da notare che nello stesso tubo scorrevole nell'anello della staffa può adattarsi qualsivoglia cannocchiale, mediante sei viti, come è indicato nella fig. 3.

Ad ottenere la rotazione del cannocchiale, s'inserisce l'asse di rotazione fra due punte, l'una di contro all'altra, nella stessa guisa onde nel tornio si fa girare su di sè il corpo da tornire.

Ove non si abbia bisogno che di misurare gli angoli verticali, le due punte, attorno le quali si muove il cannocchiale, possono formar parte di un sostegno rappresentato nella fig. 4, il quale si fissa avvitandolo a uno stipite di una finestra, ad un albero, ecc., o sopra un bastone.

Quando occorra inoltre di tener conto degli angoli orizzontali, le punte intorno cui gira il cannocchiale formano parte di un sostegno (fig. 5) che può rotare attorno ad un asse verticale.

Per misurare gli angoli di rotazione descritti, si potrebbe far uso di un cerchio orizzontale diviso in gradi e frazioni di grado, come ne'teodoliti. Ho preferito un altro artifizio, cioè quello di far comparire all'occhio dell'osservatore il numero de'gradi percorsi, senza aver bisogno di leggere le divisioni del quadrante.

Ad un tal effetto l'asse verticale è munito inferiormente di una ruota dentata divisa in 40 parti, la quale imbocca in una vite perpetua la cui testa è divisa in 100 parti (fig. 6). Ad ogni giro compiuto dalla vite, la ruota s'avanza d'un dente; ond'è che le divisioni della testa della vite corrispondono alla 4000^{esima} parte di una rivoluzione della ruota dentata, e quindi del cannocchiale intorno alla verticale. Se ne conchiude che ogni divisione della testa della vite corrisponde a un decimo di grado centesimale.

Per registrare il numero de'giri compiuti dalla vite, si adopera un contatore nel modo seguente. Sotto una lancetta fissa gira una mostra orizzontale (fig. 6 e 7) divisa in 10 parti, e montata sopra un asse che fa 4 giri ogni volta che l'asse della

ruota dentata fa un giro. La lancetta segna quindi sulla mostra sottoposta le decine de' gradi percorsi dal cannocchiale nella sua rotazione intorno alla verticale.

Un' altra lancetta è fissa sopra una seconda mostra orizzontale divisa in 4 parti, e montata sopra un asse che fa un giro mentre la mostra precedente delle decine fa 4 giri. Questa lancetta segna adunque le centinaia di gradi, ossia il numero dei quadranti percorsi.

Ciò posto, si vede che scrivendo successivamente: 1° il numero segnato sull'ultima mostra a sinistra; 2° il numero segnato sull'altra mostra delle decine; 3° il numero segnato sulla mostra verticale, fissata alla vite perpetua, si ottiene un numero di quattro cifre che rappresenta, in decimi di grado, l'angolo descritto nella rotazione del cannocchiale intorno alla verticale. Nella fig. 7 l'angolo segnato è di 368°, 2 centesimali.

Potendosi determinare in tal modo tanto gli angoli verticali quanto gli orizzontali, ne segue che il cannocchiale pensile si presta a tutte le operazioni nelle quali si adopera ordinariamente il teodolite.

Accennerò qui un'applicazione a cui intesi più particolarmente nell'ideare questo strumento.

Sia M la vetta d'una montagna inaccessibile di cui si vuol conoscere l'altezza (fig. 8). Si scelgano due punti O, N accessibili da cui si possa scorgere la vetta, ed i quali sieno visibili l'uno dall'altro.

Si misurino col cannocchiale pensile le distanze zenitali

$$\widehat{\mathrm{VON}} = \alpha, \quad \widehat{\mathrm{VOM}} = \beta, \quad \widehat{\mathrm{RNM}} = \gamma,$$

e gli angoli orizzontali

$$\widehat{\mathrm{PQO}} = \varphi, \quad \widehat{\mathrm{POQ}} = \psi.$$

Di più, si misuri, per mezzo del barometro, la differenza di livello

$$\overline{\mathrm{NQ}} = h.$$

L'altezza

$$\overline{\mathrm{MP}} = \mathrm{H},$$

che si tratta di determinare sarà data da una delle formole seguenti:

$$\mathrm{H} = h \frac{\cot\beta \operatorname{sen}\varphi}{\cot\alpha \operatorname{sen}(\varphi + \psi)},$$

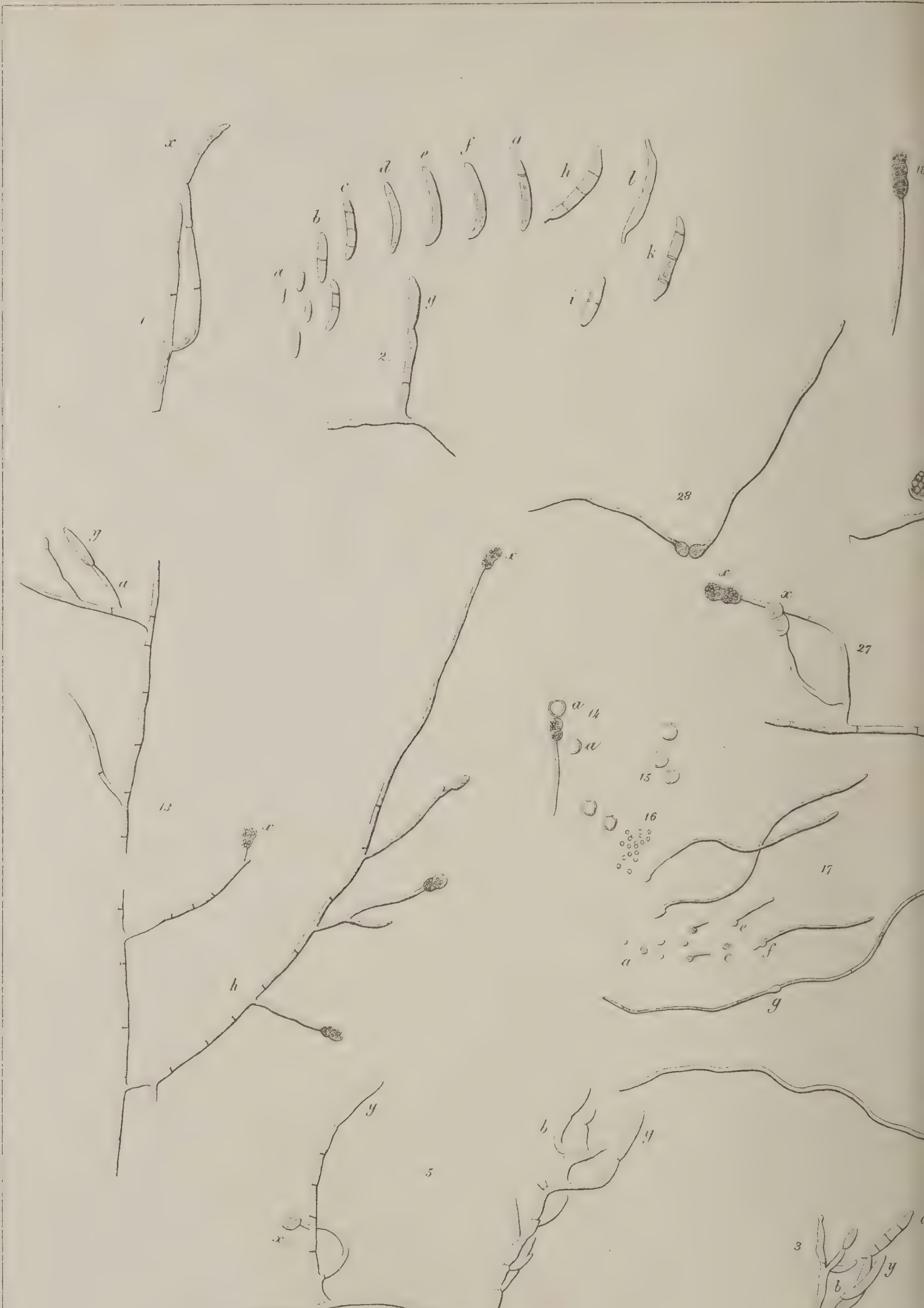
$$\mathrm{H} = h \left\{ 1 + \frac{\cot\gamma \operatorname{sen}\psi}{\cot\alpha \operatorname{sen}(\varphi + \psi)} \right\},$$

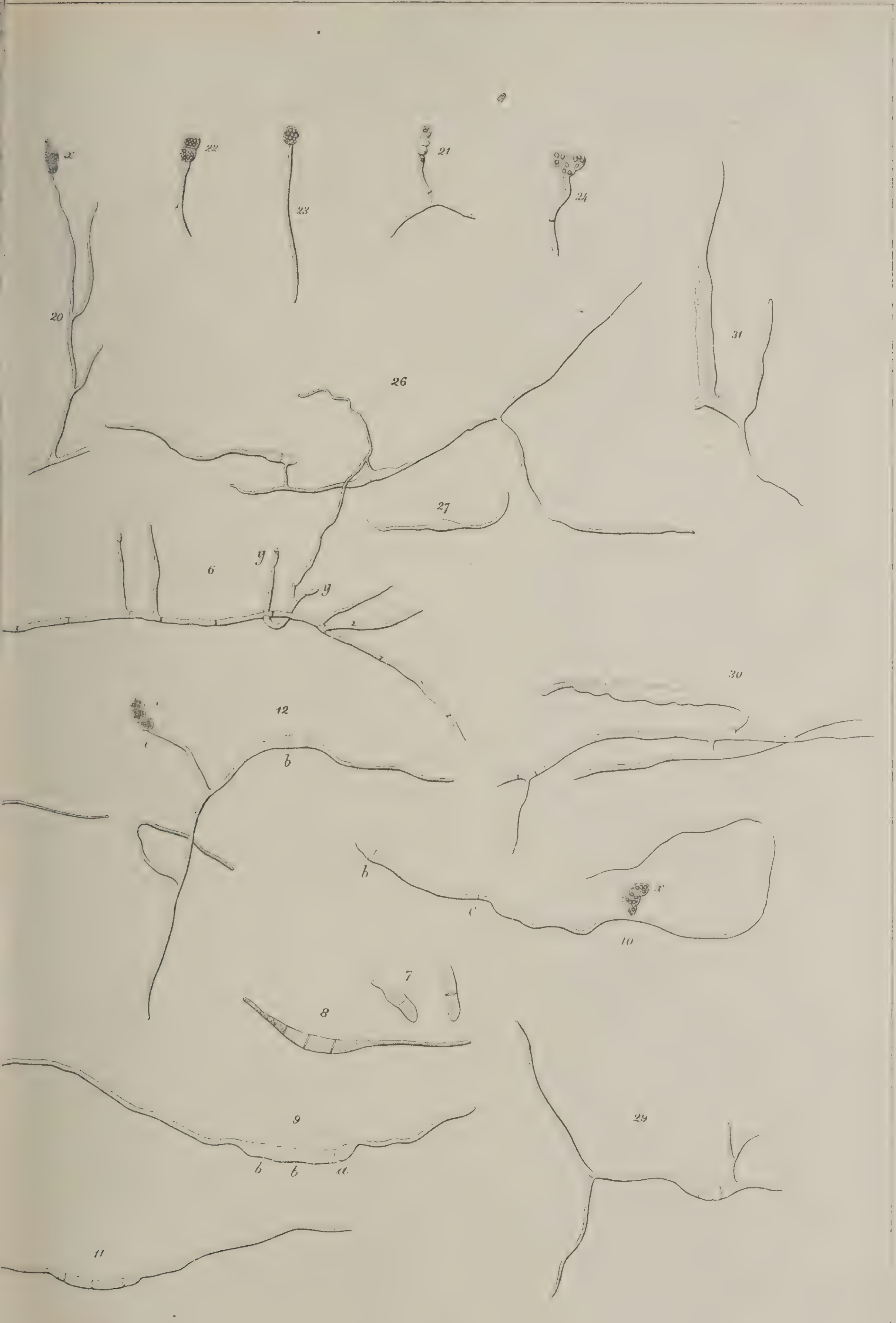
$$\mathrm{H} = h \frac{\cot\beta \operatorname{sen}\varphi}{\cot\beta \operatorname{sen}\varphi - \cot\gamma \operatorname{sen}\psi},$$

$$\mathrm{H} = h \frac{\cot\beta}{\cot\alpha} \cdot \frac{\cot\beta(\cot\alpha + \cot\gamma\cos\varphi) \pm \cot\gamma\sqrt{\cot^2\alpha + \cot^2\gamma + 2\cot\alpha\cot\gamma\cos\varphi - \cot^2\beta\operatorname{sen}^2\varphi}}{\cot^2\beta - \cot^2\gamma},$$

$$\mathrm{H} = h \frac{\cot\beta}{\cot\alpha} \cdot \frac{\cot\alpha\cot\beta - \cot^2\gamma\cos\psi \pm \cot\gamma\sqrt{\cot^2\alpha + \cot^2\beta - 2\cot\alpha\cot\beta\cos\psi - \cot^2\gamma\operatorname{sen}^2\psi}}{\cot^2\beta - \cot^2\gamma},$$

ciascuna delle quali è soltanto funzione di quattro de' cinque angoli $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi$.


28
27
14
15
16
17
13
5
3
2


20
22
23
21
24
31
26
27
6
y
y
30
12
b
b
c
x
10
7
8
9
b
b
a
29
11

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Notisi che questi cinque angoli non sono indipendenti fra loro, ma che sono legati dall'equazione di condizione

$$\cot\alpha \operatorname{sen}(\varphi + \psi) - \cot\beta \operatorname{sen}\varphi + \cot\gamma \operatorname{sen}\psi = 0$$

Veggansi, per maggiori particolari, le due Note che ho pubblicate nel periodico inglese: *The Alpine Journal*. Vol. VI p. 414, e Vol. VII p. 204.

Allorchè (fig. 9) i due punti O, N si trovano in uno stesso piano verticale col vertice M della montagna da misurare, si ha

$$\varphi = 0,\quad \psi = \pi,$$

e quindi

$$H = h\frac{\cot\beta}{\cot\alpha}\cdot\frac{\cot\alpha + \cot\gamma}{\cot\beta - \cot\gamma}.$$

È quasi sempre possibile di soddisfare alla condizione che i tre punti M, N, O, sieno compresi nello stesso piano verticale.

Ad un tal effetto, stabilito un segnale in fondo della valle, si cercherà, mediante un filo a piombo, percorrendo il pendìo della montagna, rimpetto alla vetta da misurare, un punto compreso nello stesso piano verticale che questo vertice ed il segnale inferiore.

In questo caso, tutti gli strumenti occorrenti per misurare una montagna inaccessibile si riducono al barometro, e ad un cannocchiale montato col nostro sistema.

Questo strumento sarà giudicato assai grossolano per avventura da taluno. È certo che la sua precisione è di gran lunga inferiore a quella che danno i grandi teodoliti che si fabbricano a'dì nostri. Ma tale come è può rendere servigî da non disprezzarsi ad un osservatore isolato. Sovente per correre dietro ad una precisione inutile si trascurano risultati preziosi che potrebbero bastare in certe circostanze.

Non credo inutile avvertire che molte volte, nella misura degli angoli, si aspetta da un teodolite una precisione che non può esser data dal suo cannocchiale. In fatti, l'ingrandimento che quest'ultimo somministra ordinariamente non corrisponde alla picciolezza delle ultime divisioni del circolo graduato. Se, per esempio, il circolo graduato dà l'approssimazione di un secondo sessagesimale, sarà d'uopo che il cannocchiale ingrandisca almeno sessanta volte l'oggetto, poichè quando un oggetto sottende un angolo di un minuto primo, la sua imagine sulla retina diventa così picciola da non produrre più verun effetto, almeno nella massima parte degli uomini (1). Badisi che questo è un limite inferiore, e che in campagna, guardando oggetti molto lontani si commettono errori che ascendono talvolta fino a quattro minuti primi e più. Onde che per rendere sensibile un angolo di un secondo occorrerebbe, nel cannocchiale del teodolite, un ingrandimento di dugentoquaranta volte.

I cannocchiali che per lo più si adoperano ne'teodoliti sono troppo deboli. Si direbbe che il loro uffizio debba restrignersi a quello di dirigere la visuale. Laddove il loro scopo dev'essere quello d'ingrandire gli angoli che gli oggetti lontani sottendono, in guisa da fare scoprire spazî che ad occhio nudo sarebbero insensibili.

(1) L'Arago, nella sua *Astronomie populaire*, t. 3, p. 430, ammette 60″ pel limite della visione distinta di un oggetto rotondo o quadrato, e 6″ per quello di un oggetto allungato.

Sul sistema usato pel rilevamento della Carta geologica d'Italia.

Nota dell' ingegnere F. GIORDANO
Ispettore delle Miniere
approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del 5 maggio 1878.

Ho l' onore di esporre all'Accademia un cenno sul sistema adottato dagli ingegneri del Corpo delle Miniere, sotto la direzione del Comitato geologico, pel lavoro da poco incominciato della Carta geologica d'Italia. La brevità imposta alle letture dalla strettezza del tempo mi tratterrà dallo estendermi come vorrebbe l'importante argomento, onde sarò breve attenendomi ai cenni più essenziali sull'indole del lavoro di cui si tratta.

Nel nostro rilevamento si cerca di collegare debitamente alla parte scientifica che si occupa sovratutto della relativa età delle varie formazioni o terreni, anche la parte pratica ossia industriale ed utilitaria. Ed è appunto sotto questo doppio punto di vista che presentasi fortunatamente in Italia, come in diversi altri paesi, lo studio della Carta geologica. Infatti in un bene inteso studio geologico oltre ai più elevati principî scientifici che si collegano all' origine e sviluppo del nostro globo e degli esseri viventi, devono ritrovarsi tutti gli elementi essenziali della produzione minerale ed agricola, come anche la base su cui assidere solidamente quelle tante opere pubbliche di vario genere, che sono mezzi indispensabili alla vita delle nazioni moderne, ma che pur troppo esigono dispendî fortissimi: grandissimi errori accompagnati da perdita di tempo e di danaro si espone a commettere l' ingegnere e l'amministratore che procede senza la previa cognizione del terreno su di cui deve far lavorare; simile in ciò al navigante che si avanzi senza precauzioni in un mare ignoto privo ancora di carta idrografica. Si è perciò che sovratutto nelle regioni ancora nuove i governi comunque nascenti e di pochi mezzi, fanno precedere alla popolazione colonizzatrice ed ai grandi lavori pubblici un piccolo esercito di topografi e di geologi (surveyors and geologists) spendendo somme di parecchie centinaia di migliaia di lire ogni anno per ottenere questo studio preparatorio del terreno su di cui poi si deve operare.

Da noi l' idea della Carta geologica generale fu in procinto di venire attuata sin dal principio del nuovo Regno, poichè allora un r. Decreto del 1861 ne ordinava la formazione mediante l'opera di ingegneri del r. Corpo delle Miniere e di riputati geologi a quelli aggregati. Ma poco dopo, mentre si era soltanto ai preparativi, subentrate idee di strettissima economia, venne sospeso ogni assegno di danaro e nulla

si fece. Solo molto più tardi, quando già era capitale Firenze, venne ripresa l'idea, e creato perciò un r. Comitato geologico a funzioni gratuite, per occuparsene, il quale però era lasciato quasi sfornito di mezzi. Tuttavia qualche avviamento fu allora dato, ed intanto nel 1870 incominciava la stampa d'un *Bollettino geologico* accompagnato da Memorie in grande formato di cui si hanno già parecchi volumi. Dopochè passò la capitale a Roma venne ivi pure trasferito l'Uffizio geologico, e con nuovo r. Decreto (del 1873) richiamandosi le antiche disposizioni del 1861, venne definitamente affidata l'opera al Corpo degli ingegneri delle Miniere, ossia ad un corpo stabilmente organizzato, come s'era dovuto fare in tanti altri paesi ove era omai necessità il lavorare con forze unite sotto unica direzione. Taccio qui delle nuove difficoltà incorse sia per avere qualche maggior fondo, che infine era soltanto di venticinque mila lire, sia per crearsi del buon personale, lottando in tutto con continue difficoltà amministrative. Ma infine dopo molto tempo perduto si potè, or fa circa un anno, dare principio all'opera in qualche punto.

Sopra una carta generale d'Italia nella scala di $\frac{1}{600,000}$, venne raccolto e condensato con non lieve pena e molte ricerche, quanto esisteva sinora di studî parziali, però più o meno rudimentarî, di diversi privati geologi. Debbo subito avvertire che questa carta, oltre all'essere in scala piccolissima, non può dirsi che un semplice abbozzo, e che inoltre vi sono, specialmente nel sud della penisola ed in Sicilia, molte lacune. Essa non è, ripeto, che un abbozzo come quello del pittore che in un quadro mette giù dapprima soltanto i grandi lineamenti; tuttavia un tale abbozzo potrà essere molto utile, perchè mostra all'intelligente della materia quanto venne già fatto od almeno tentato di fare, e servirà intanto di base per ideare e bene distribuire il grande lavoro di dettaglio al quale venne da ultimo posto mano.

Questo lavoro particolareggiato e definitivo, che costituirà la vera Carta geologica, doveva però, onde riuscire utile, venire elaborato sovra una mappa topografica di grande scala, non inferiore per es. al 50,000, possibilmente al 25,000, come si fa ora in Prussia, e per certi tratti più interessanti anche al 10,000 o circa come si usa in Inghilterra per certe zone del suo territorio industriale. Ma una difficoltà che pure s'incontra in Italia, era appunto la mancanza d'una mappa esatta, in scala uniforme e di sufficiente grandezza. Fortunatamente lo Stato Maggiore nostro, ora Istituto topografico militare, incominciava sin dal 1862 questo grande lavoro della mappa topografica d'Italia, adottando la scala del 50,000 con curve orizzontali di 10 in 10 metri. Ed è questa stessa scala, che dietro diverse considerazioni venne adottata per la Carta geologica, almeno per la pubblicazione della medesima.

La suddetta mappa topografica veniva però dapprima incominciata soltanto nelle provincie meridionali perchè più ne mancavano, e prima ad averla intiera fu la Sicilia che comprende più di 45 fogli con le dimensioni $0,50 \times 0,70$. Poi si passò alle Calabrie e ad altre provincie via via verso nord, e si giunse oggidì sin oltre gli Abbruzzi, con speranza di vederla fra non molti anni estesa a tutto il rimanente della penisola.

Posto che della Sicilia si aveva questa mappa al 50,000, l'Uffizio del Comitato geologico, appena dopo tante strettezze ebbe disponibile qualche maggiore fondo ed alcuni ingegneri operatori, decise di incominciare ivi stesso il rilevamento geologico,

prendendo per primo campo di azione la zona solfifera in cui sono le numerose miniere di solfo, una delle principali ricchezze dell' isola, poichè così si collegava appunto l' interesse ed utile scientifico all' industriale. L' annua produzione infatti ne è da più anni di 200,000 tonnellate, del valore di 25 milioni, procuranti lavoro tra scavo, fusione e trasporti a più di 35,000 lavoranti : ma simile industria presenta pure non poche difficoltà che la geologia può giovare a rimuovere o diminuire. La zona solfifera si estende con varia ricchezza da Bivona e Girgenti ad Adernò e Rammacca, cioè su più di 12 dei fogli della suaccennata carta , ed ha il suo centro in Caltanisetta. Questa città centrale è pure la sede dell' Uffizio minerario, il quale cura la sorveglianza e la statistica di tutte le miniere dell' isola e dirige la Scuola dei capiminatori ivi da più anni stabilita. Ed è agli ingegneri addetti a quest' uffizio , di cui taluni sono specialmente geologi, che venne affidato il lavoro. Nella scorsa campagna vennero già rilevati diversi fogli; essi sono quelli detti di Caltanisetta, Girgenti, Piazza, Palma e Licata. Ma qui debbo subito avvertire come per uno studio di tal fatta che non solo interessa la scienza ma l' industria, come ne darò tosto un' idea, la scala ordinaria del 50,000 non è sufficiente e vi occorre almeno quella doppia, cioè del 25,000. Non avendola noi ora per la Sicilia, si usò il rimedio di procurarsela mediante ingrandimento artificiale col processo foto-litografico. Allora ognuno dei fogli al 50,000 ne dà 4 al 25,000 che sono quelli che si forniscono ai nostri geologi pei loro rilevamenti in campagna. I particolari del rilevamento al 25,000 vengono dipoi riportati sui fogli al 50,000 e se ne ha così con sufficiente precisione la Carta geologica in questa scala del 50,000, quella cioè che si deve poi pubblicare. Cadun foglio di campagna è sottoscritto dagli ingegneri che lo rilevarono, ciò che ne impegna l' onore e la responsabilità. Noto qui i nomi degli ingegneri Baldacci, Mazzetti e Travaglia che lavorano sotto la direzione dell' ingegnere Toso il capo dell' Ufficio minerario, senza però dimenticare che molti studî preliminari devonsi all' ingegnere Mottura pure residente in Sicilia.

A simili carte vanno annesse delle accuratissime raccolte di campioni di roccie e conchiglie fossili, oltre poi ad una estesa descrizione di tutte le formazioni con le sostanze utili che contengono (e che qui sono specialmente il solfo, il salgemma ed il gesso), la quantità e temperatura delle sorgive, la relazione fra la natura dei terreni e li prodotti vegetativi ed agricoli, ed ogni altro particolare fisico che può essere utile.

La scala di colori adottata venne stabilita in modo da distinguere e far spiccare nel miglior modo e senza trascendere in troppe teorie le varie speciali formazioni geologiche, come il mostra la leggenda annessa. Abbiamo, per esempio, colorato in bistro il terreno Eocenico o Terziario inferiore, terreno generalmente sterile di sostanze utili e che serve di base al Terziario medio detto Miocene. Questo i nostri geologi dividono in due piani, cioè l' inferiore distinto con color cenere scuro, contenente argille marnose col salgemma, ed il superiore distinto con color giallo-ranciato, il quale contiene appunto il calcare solfifero, in cui sono aperte tutte le miniere. Questo è sormontato dai gessi (color paglierino), e questi poi dai calcari marnosi detti *trubi* (color roseo). Ogni terreno importante è poi ancora suddiviso in piani minori più particolareggiati. — E così il terreno solfifero venne suddiviso ancora

dai nostri geologi in non meno di 4 piani secondo la loro diversa natura i quali hanno tutti lo stesso color ranciato ma sono distinti con tratteggiatura diversa ([1]). I banchi solfiferi stessi dove affiorano sono indicati da un tratto rosso molto forte. E non è senza molto studio pratico che si giunse a stabilire tutte queste suddivisioni con i colori e segni che devono distinguerli. Le sezioni o profili geologici indicati su di un foglio annesso corrispondono alle linee bianche segnate sulla mappa; tali sezioni mostrano meglio quanto sia stato tormentato e contorto dagli antichi movimenti della crosta terrestre questo terreno solfifero e quindi a quali difficoltà va spesso soggetta la escavazione delle miniere più profonde che nei banchi di esso devono aprirsi. Ora è chiaro che quando tutta la zona solfifera sarà stata così minutamente e con tale geometrica esattezza rilevata, avremo una vera anatomia di questo gran giacimento solfifero, che ci permetterà di calcolare esattamente la totale quantità di solfo ancora esistente nelle viscere della Sicilia e disponibile nei venturi anni al commercio. Sarà questo dirò così un inventario geologico utilissimo, simile a quello ordinato anni sono dal Governo inglese ed eseguito da quell' Ufficio geologico pel suo carbon fossile; studio memorabile la cui pubblicazione riuscì poi fortunatamente a calmare l' apprensione prima eccitata da inesatti apprezzamenti.

Sopra al Miocene viene il Pliocene o Terziario superiore detto anche da noi subappennino, al quale fanno poi ancora seguito i depositi alluviali di varie epoche. Il detto Pliocene è colorato in violaceo (e parte in bleu) per la sua parte inferiore che è di marne azzurrine, ed in verde per la parte superiore, tanto estesa e caratteristica, che è di sabbie gialle alternanti pure con banchi argillosi. Mentre le prime sono assai favorevoli talora a sostenere la vegetazione ed a fornire sorgive, i secondi, come in genere i terreni molto argillosi, sono assai sterili ed inoltre si sfacelano all' azione delle acque. Di simili banchi argillosi e frananti si trovano pur troppo anche in una parte del terreno miocenico, quello che contiene lo solfo, ed anzi ve ne sono di pessima qualità. Cosicchè se questo terreno porta con sè la ricchezza solfifera tiene pure in certe sue zone la rovina. E chiamo senza scrupolo con tal nome quelle terribili frane che tanto ostacolo posero e pongono all' estensione delle ferrovie in Sicilia, e che furono e sono causa di tanti guai i quali trascorsero persino nel campo della nostra interna politica. Le linee di Montedoro, di Vallelunga, delle Imere ed altre cadono più o meno in terreni di tal genere, e se gli anzicennati molteplici ostacoli non avessero tanto ritardato l'Uffizio geologico ed impeditolo di fare prima i fogli geologici di Santa Caterina e di Ciminna ove cadono quelle linee, alcune gravi illusioni e precipitate misure non avrebbero avuto luogo, ed innanzi alla inesorabilità dei fatti fisici ben constatati non avrebbero forse nemmeno avuto campo di sorgere delle appassionate opinioni. Ora si va pur mettendo mano a rilevare esattamente quelle zone così difficili, ed anzi alcuno degli ingegneri nostri deve tosto colà recarsi a rilevarne le difficoltà al semplice lume della scienza geologica pratica.

Mi rincresce non aver ora tempo a toccare, giacchè siamo in Sicilia, di alcuni altri lavori speciali che vi si fanno, come per es. un bell' Etna in rilievo con la

([1]) Essi sono i seguenti: 1° gessi; 2° calcare solfifero; 3° calcare lacustre con noduli silicei; 4° tripoli con resti di pesci e di insetti.

colorazione distinta di tutte le eruzioni avvenute dai tempi più remoti ad oggi, ed altro studio che ci fu richiesto sullo stretto di Messina per vedervi la possibilità o meno di un passaggio economico sottomarino. Il risultato, il dico in due parole, sarebbe negativo essendovi tali difficoltà da sconsigliare, almeno per ora, simile opera.

I descritti esempî di Sicilia spero abbiano già data un' idea di quale positiva utilità pratica possa essere una esatta Carta geologica; ma vi sono altre località in Italia che presentano casi analoghi. Citerò qui solo la catena delle Alpi apuane o carraresi, fra Toscana e Liguria, tanto ricca di marmi che vengono anche smaltiti in tutte le parti del mondo per un valore annuo, in tempi prosperi, di molti milioni. Anche qui però vi sono ora delle difficoltà, ed occorrerebbe uno studio esatto come quello della zona solfifera di Sicilia, un' anatomia di quei monti marmiferi per valutarne le risorse ancora latenti e progettare nuovi ed economici mezzi di escavazione e trasporto. Qui non si aveva però alcuna buona carta: ma fortuna volle che il Ministero della Guerra, debitamente ufficiato dal Comitato geologico, ordinasse testè all' Istituto topografico di rilevare subito quella catena, e ciò che più monta, alla desiderata scala del 25,000; cosicchè avuta tale mappa si potrà quivi intraprendere un lavoro esatto e proficuo alla scienza ed all' industria.

Ora vengo finalmente ad un altro lavoro o saggio, venuto testè di Sardegna, il quale è una carta geologica con la distinzione delle varie roccie e delle miniere di una parte della regione sud-ovest dell'isola dove trovansi le più importanti miniere di piombo argentifero, di zinco, di ferro e di altri metalli nonchè dei banchi di lignite che ivi trovansi nel terreno eocenico. Vi è tra l'altre la ricca miniera piombifera di Monteponi, ancora proprietà del Governo, stata erroneamente affittata nel 1850 ad una società per soli trent'anni, ciò che insieme all'imperfetta conoscenza di certe condizioni geologiche di quella regione fu ed è ancora causa di assai gravi inconvenienti. In questa parte della carta manca la zona delle miniere del nord dove sono quelle di Montevecchio, Gennamari ed altre, e ciò perchè la premura di finire una parte almeno per mandarla all'Esposizione di Parigi fece pel momento ritardare il rimanente: ma la totalità verrà fra non molto compiuta. Questo lavoro che è più tecnico forse che quel di Sicilia, è opera degli ingegneri delle miniere del distretto di Sardegna la cui sede è in Iglesias, ove è pure una scuola mineraria condotta dagli ingegneri medesimi che sono il sig. Testore come capo e Zoppi, Lambert, Deferrari e gli aiutanti Fossen e Lentini. E qui si aveva anche la singolare difficoltà della mancanza assoluta di carta topografica, circostanza comune ancora a tutta la Sardegna; mentre poi lo studio stesso doveva eseguirvisi in scala molto grande, per esempio al 10,000, che fu infatti la scala prescelta. Gli ingegneri dovettero quindi fare anzitutto essi stessi il rilevamento topografico profittando di loro studî e dei piani delle concessioni di miniere forniti loro dalle compagnie. Un foglio abbraccia la parte sin' ora rilevata che è quella tra Iglesias, Flumini ed il mare, un altro due sezioni l' una nord-sud, l'altra est-ovest. Lo scopo di questo lavoro è, come dissi, piuttosto tecnico e nell'interesse dell' avvenire delle miniere, poichè oltre allo studio geologico delle medesime vi è qui una grave questione di idrografia sotterranea riguardante le acque, le quali mentre erano nulle nei livelli superiori, divennero ora

invece copiosissime in profondità e quasi omai insuperabili con le macchine. La citata miniera di Monteponi, per esempio, mentre avrebbe dovuto aprire una profonda galleria di scolo per liberarsene, credette invece far più presto (stretta a ciò in parte dalla prossima scadenza del suo affitto) impiantando grandi pompe mosse dal vapore col dispendio di 2 milioni. Ma ora a malgrado di averne elevata la forza a più di 1,000 cavalli, l'acqua è troppa e non si vince, onde la minaccia di sospensione del lavoro se il Governo non si decide presto ad un nuovo contratto d'alienazione che permetta di intraprendere quella grande galleria di scolo. Ed inconvenienti di tal natura sono a temersi anche per altre vicine miniere, mentre uno studio geologico preliminare di questo genere eseguito in tempo, avrebbe forse potuto indurre e Governo e Società a migliori e più giuste idee. Ecco ora un cenno sul lavoro stesso. La carta distingue anzitutto, come dissi, le formazioni di epoca diversa, che sono la granitica e la siluriana, antichissima sede dei filoni metalliferi, ed i lembi di terziario eocenico con banchi di lignite bene utilizzata alle macchine delle miniere stesse. La formazione siluriana è poi costituita in grandissima parte da due generi di roccie che conveniva distinguere in questa carta, cioè calcari subcristallini in grandi banchi od in ammassi stratiformi o lenticolari (segnati in bigio), e scisti argillosi filladici (segnati in rosso pallido) intercalati a quelle masse calcaree. Gli affioramenti ed i lavori delle varie miniere di piombo, zinco, ferro ed altro vi sono esattamente indicati. Bene esaminando si vede per es. che quasi tutte le miniere metallifere stanno nella parte bigia ossia nei calcari, e talune al loro contatto cogli scisti; e ciò già può dare agli intelligenti un criterio utile sia per spiegare la genesi probabile di quei minerali, sia pel loro rintracciamento nei lavori profondi dell'avvenire.

Quanto alle acque sotterranee, risulta, e sovratutto dalle sezioni annesse, che le medesime trovansi soltanto nelle grandi masse calcaree sempre più o meno fessurate e permeabili, formanti come enormi spugne e vi costituiscono in quasi tutta la regione un vasto lago sotterraneo che si mantiene ad un dato livello di circa 70 metri sul mare. I lembi scistosi intercalati essendo impermeabili, separano talora l'una dall'altra certe parti di simile lago sotterraneo, le quali così vi possono avere talora dei livelli alquanto diversi. Questi dati ci fornisce ora finalmente il lavoro esatto dei nostri ingegneri, ed altri assai ve ne sarebbero da rilevare, cui per brevità debbo tralasciare, concludendo però che simile studio ci fornirà ora dati preziosissimi per la sicurezza e l'economia dell'avvenire di queste miniere e contro i pericoli che le minacciano.

Qui finirò: ma spero che quanto ho finora esposto intorno alla futura nostra Carta geologica abbia dato un'idea del sistema di rilevamento geometricamente esatto, scientifico ed industriale ad un tempo, che venne adottato. Un tale sistema gioverà molto a risolvere certe questioni teoriche intorno alle quali sono ancora così discordi le opinioni dei geologi, perchè metterà in sodo i fatti positivi dalla cui giudiziosa interpretazione deve scaturire la vera soluzione. Una carta così fatta avrà il pregio di adattarsi facilmente a qualunque variazione la scienza fosse col tempo indotta ad accettare nella classificazione e nella cronologia dei terreni, perchè tali variazioni non potranno mai affettare la natura dei terreni stessi, i loro contatti nè l'ordine della loro reciproca posizione. Sarà tutt'al più questione di nomi e di

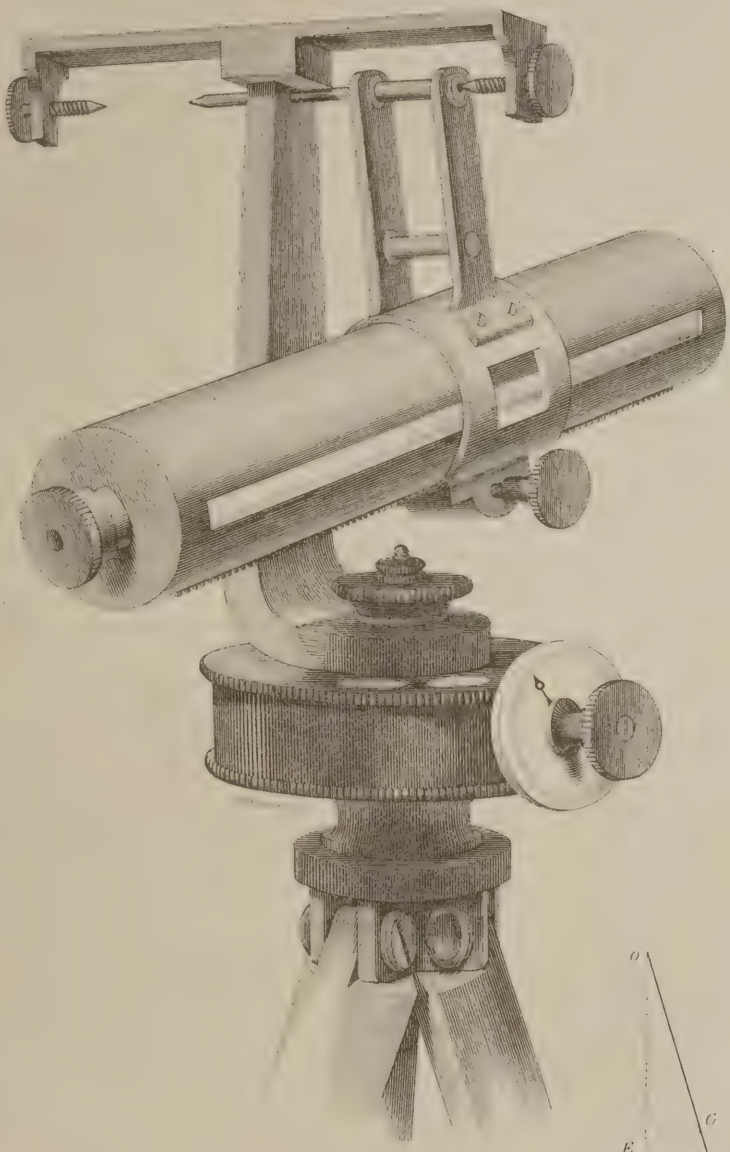
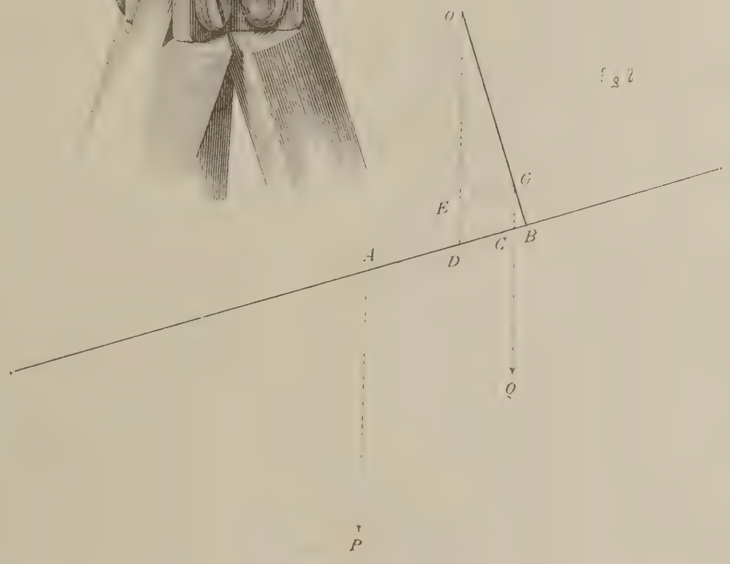


Fig 2



Ma tetli Roma

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Fig. 2

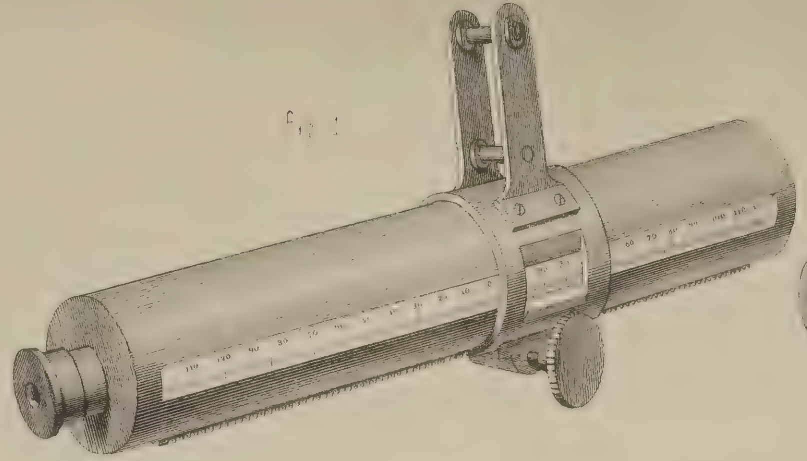


Fig. 3

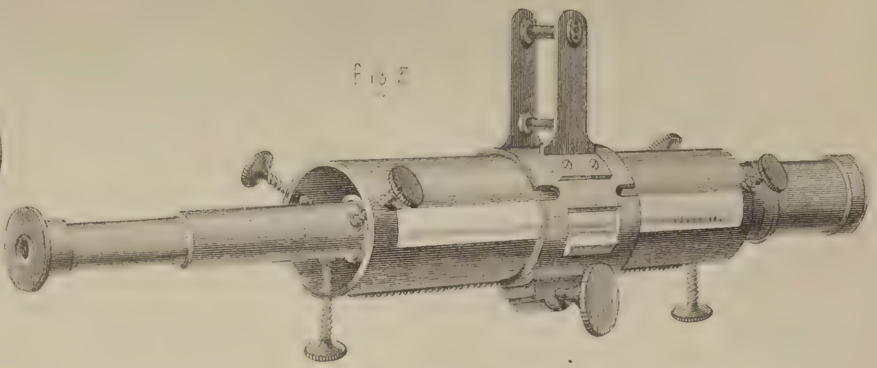


Fig. 4

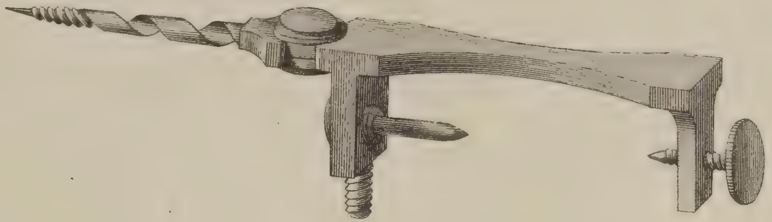
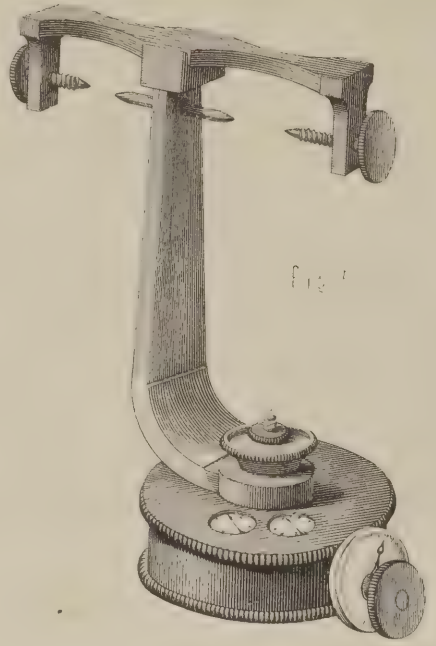


Fig. 1



Lit. Martelli Roma

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

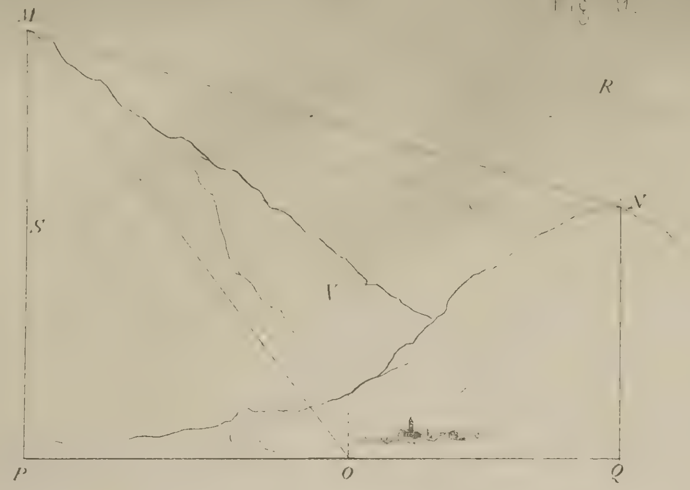


Fig. 9.

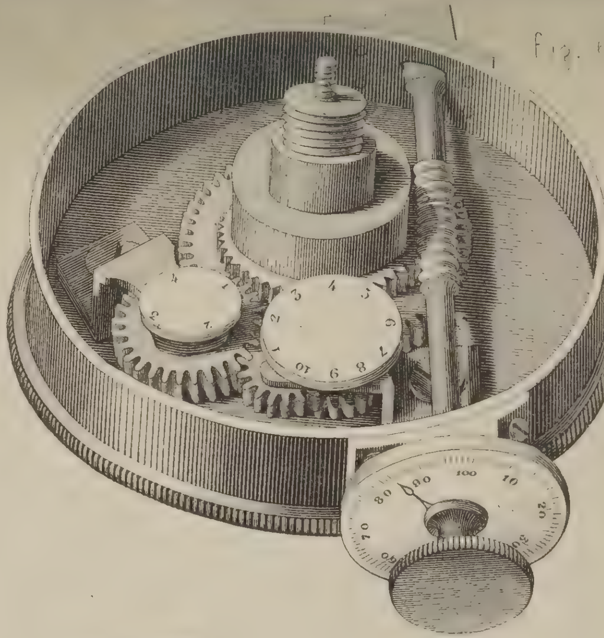


Fig. 6.

Fig. 8.

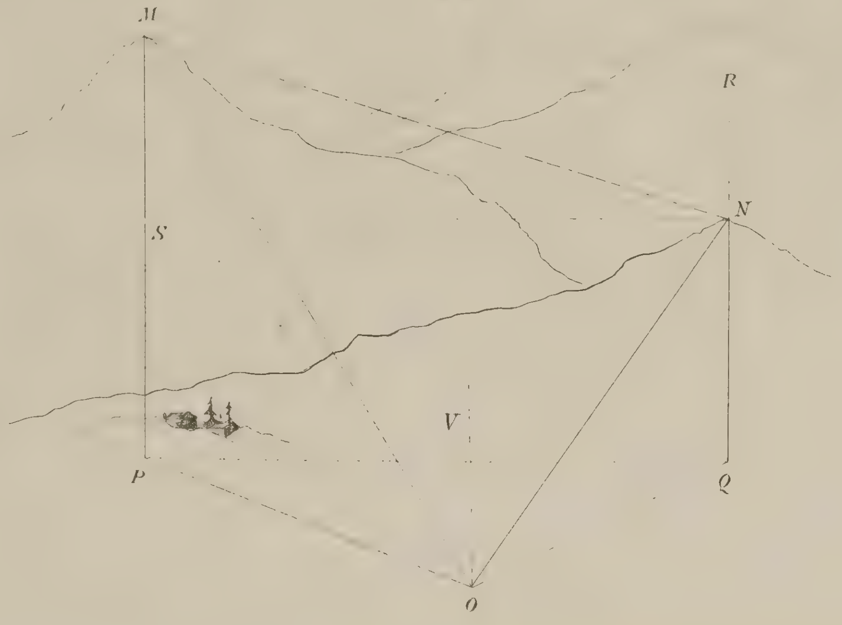
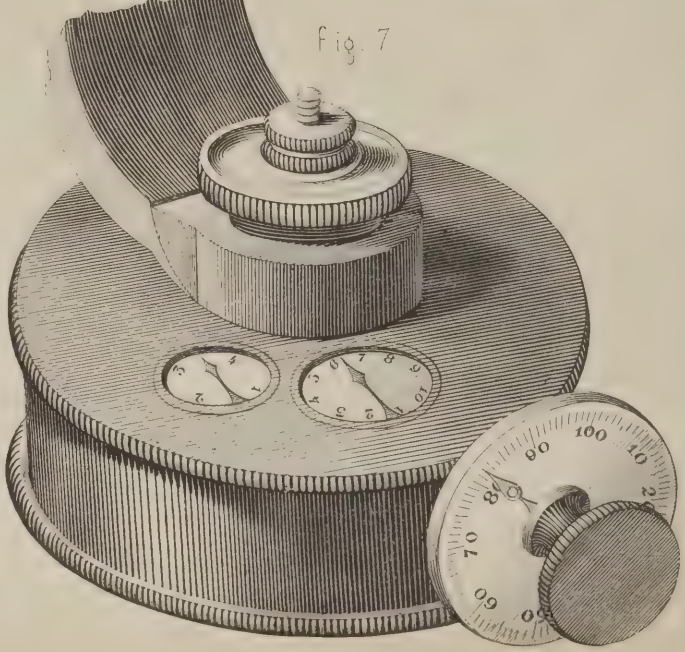


Fig. 7.



Lit. Martelli Roma

raggruppamenti diversi, ma la parte geognostica fatta una volta colle suindicate norme non perderà mai del suo valore.

Dovrei aggiungere che tal sistema è praticato eziandio con la massima economia; e quindi qualora il Comitato possa disporre dello stretto occorrente pel suo bilancio annuo, ed abbia fra non molto un locale un po' migliore dell'attuale per le sue collezioni ed un laboratorio chimico pei suoi studî, cose che ancora gli mancano, potrà con una somma annua relativamente ad altre nazioni molto piccola, giungere presto ed economicamente al compimento della intera Carta. E questa Carta col citato corredo di raccolte, di analisi e di dati tecnici sarà, come dimostrammo, quasi l'inventario delle forze produttive del paese, mentre nel tempo stesso gli potrà servire di guida pel miglior modo di svilupparle evitandone lo spreco, e conseguendone (ciò che è tanto essenziale per noi) il massimo effetto utile.

Teorica dei Soffioni boraciferi della Toscana.

Memoria del prof. EMILIO BECHI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia

nella seduta del 5 maggio 1878.

Hypotheses non fingo.
NEWTON.

I Soffioni boraciferi della Toscana furono sempre oggetto di studio d'illustri scienziati; imperciocchè la contemplazione di sì alto e importante fenomeno destava vaghezza di conoscerne la causa, e di darne giusta spiegazione. Ma nel volere con troppa fidanza spiegare il fenomeno con speculazioni teoriche, non cimentate alla fede dell'esperienza, vennero a creare un numero d'ipotesi, le quali aveano ingannevole sembianza di vero. Per la qual cosa essendo oramai da molti illustri personaggi, molto sopra questa materia discorso, ed essendo note le ingegnose ipotesi in diversi tempi da essi mandate fuori, non accade che io entri in lunga dicerìa, e solo ne dirò quel tanto che occorre per dimostrare la fallacia di esse.

Non voglio però che alcuno creda aver io presunzione di farmi censore indiscreto delle altrui dotte fatiche, o dispensatore di disinganni con sottigliezze di disputa; imperciocchè è solo mio intendimento far conoscere una scoperta da me fatta, la quale dà compimento agli studî dell'acido borico, nel tempo stesso che ci fornisce la vera spiegazione dell'origine dei Soffioni boraciferi.

È ben nota l'ingegnosa ipotesi, che messe fuori l'illustre Dumas. Supponeva il celebre scienziato che in una certa profondità della terra si trovasse una massa di solfuro di boro, la quale per il contatto dell'acqua desse origine all'acido borico e al solfuro idrico, che si trova nei Soffioni.

Tale ipotesi veniva accettata dal Payen, il quale non trovando acido borico nei bollenti vapori dei Soffioni, ammetteva pure col Ridolfi, che le pareti dei condotti dei Soffioni fossero rivestite di tale acido, onde l'acqua dei lagoni cadendovi per il proprio peso, e venendo ributtata fuori dai vapori, sciogliesse nello strisciamento una certa quantità di acido borico. Ma svanì tale ipotesi allorchè lo Schmidt trovava nelle acque condensate dei bollenti vapori acido borico, comecchè in piccolissima dose.

Il sig. Bolley immaginò che la formazione dell'acido borico movesse dalla reazione del cloruro di ammonio sul borato di soda: per la qual cosa ammetteva che si trovasse nelle viscere della terra uno strato di borato di soda e di cloruro di

ammonio: il che non era molto probabile, non essendovi alcun fatto che accertasse l'esistenza di tali materie a una certa profondità. Ma

> Veramente più volte appaion cose,
> Che danno a dubitar falsa matera,
> Per le vere cagion che son nascose.

Perciò volli sottoporre tale ipotesi al cimento dell'esperienza: ed avendo fatto un Soffione artificiale, lo mandai con giusto impeto sopra un miscuglio, formato di borace e di sale ammoniaco. Ma nell'acqua, dove passavano i bollenti vapori, oltre all'acido borico, grandissima era la quantità di sali ammoniacali che si scioglievano: le quali materie non si trovano davvero in tali proporzioni, esaminando sottilmente le acque dei Soffioni.

Il Wagner, e quindi io stesso per rendermi ragione dell'ammoniaca che si forma nell'acqua dei lagoni, supponevamo l'esistenza dell'azoturo di boro: ma io era il primo a mettere innanzi l'idea, che l'acqueo vapore provenisse da più profonda regione, e che solo nel suo cammino incontrasse lo strato boracigeno (1).

Tuttavia vedendo che l'ipotesi dell'azoturo di boro non era sostenuta da alcun fatto, io supponeva che lo strato boracigeno fosse di borato di calce, da che il sig. Durval ne trovava di continuo attraversando il terreno con la trivella (2).

Di fatti facendo passare sul borato di calce, vapore acqueo, gasse solfidrico, anidride carbonica, e un po' d'aria atmosferica, io otteneva acido borico, e solfato di ammoniaca: e nel tempo stesso con altra esperienza vedeva come il solfato di ferro, il solfato di soda, e il solfato di magnesia, potevano essere in parte portati via dai bollenti vapori: le quali materie tutte per appunto si trovano nei lagoni di Travale.

Questo fatto avendo levati que'primi velami di falsità, mi faceva scorgere un'apparenza di vero; se non che io non poteva chiamarla verità manifesta, rimanendo sempre una ipotesi l'esistenza del borato di calce, comecchè trovato in pezzetti nel terreno superficiale.

Stavano in questi termini le cose, quando comparve una Memoria assai importante, e di molto merito del sig. Dieulafait, nella quale conferma, che nell'acqua del mare trovasi acido borico; e venendo quindi a parlare dei lagoni della Toscana, ammette il terreno di essi nella regione salifera, e scende a queste conclusioni, le quali riporterò, come a modo e a verso sono state fedelmente tradotte dall'egregio professore D'Achiardi.

1. « La sorgente dell'acido borico in Toscana è situata in una formazione relativamente moderna, la formazione terziaria; la parte di questa formazione attraversata dai Soffioni corrisponde esattamente all'orizzonte salifero di questa divisione. L'acido borico vi esiste bello e formato come borato di magnesia; la sua origine è un caso particolare di un fenomeno del tutto generale, l'evaporazione spontanea degli antichi mari.

2. « I fenomeni vulcanici che in Toscana sono collegati all'uscita dell'acido

(1) Ved. Bechi, *Sui borati che naturalmente s'incontrano nei Soffioni della Toscana.*

(2) Ved. Bechi, *I Soffioni boraciferi di Travale.*

borico, e ai quali si è attribuito esclusivamente fin ora la formazione di questa sostanza, non hanno in vece alcun che di comune assolutamente con essa sotto questo aspetto. L'ufficio dei fenomeni vulcanici è puramente meccanico; si limita a fornire calore. Questo calore scalda e svapora l'acqua impregnante i terreni; l'acqua e il cloruro di magnesio sono decomposti; si forma dell'acido cloridrico che mette in libertà l'acido borico, che viene incessantemente trasportato dal vapore acqueo. L'acido cloridrico a sua volta non ha assolutamente nulla di vulcanico nella sua origine. Lo stesso precisamente è del vapore acqueo; l'acqua dei lagoni non è altro che acqua atmosferica.

3. « In conclusione l'acido borico e le sostanze che l'accompagnano in Toscana e nei giacimenti analoghi sono (ad eccezione dell'acido carbonico) prodotti esclusivamente sedimentarî, il modo di formazione ci è rivelato in tutte le più minute particolarità dallo studio delle acque madri delle saline. Conviene dunque d'ora in poi respingere in modo assoluto ogni idea d'eruzione, d'emissione geyseriana, di reazione violenta esercitantesi sopra sostanze rare o di composizione eccezionale; in una parola tutto ciò che in qualunque siasi modo si colleghi ai fenomeni vulcanici ».

Su la Memoria del sig. Dieulafait scrisse giuste, dotte ed importanti osservazioni il prof. D'Achiardi: di modo che chiaro apparisce che le nuove idee, e i lunghi studî del sig. Dieulafait non approdano a una giusta spiegazione dei Soffioni boraciferi della Toscana.

Intanto la questione sull'origine dell'acido borico rimaneva sempre la stessa; e a me scottava molto il vedere un fenomeno di tanta importanza, che nasce in terra italiana, che porta tanta ricchezza all'Italia, non fosse ancora spiegato da un italiano, e si vagasse sempre nel campo delle ipotesi. E specialmente a me stava a cuore, che in diversi tempi m'ero dato attorno ai Soffioni, ed avevo o scoperti o analizzati tutti i minerali boraciferi.

Ripresi dunque lo studio dei Soffioni, e mi messi all'opera con tutto l'ardore: e quali sieno i risultamenti avuti verrò adesso via via dimostrando.

L'ingegnosa ipotesi fatta dal sig. Dieulafait, dell'origine dell'acido borico, il quale dovrebbe muovere dalla boracite, lasciata dalle acque di antichi mari, mi dette motivo di fare una prima sperienza per vedere specialmente la facilità della scomposizione di essa boracite. Feci così: Presa della carnallite e della boracite di Stassfurt, le messi in un tubo adattato, e scaldate a modo e a verso, vi feci passare vapore acqueo a guisa di Soffione, aggiungendovi ancora l'acido carbonico e il gasse solfidrico. Nell'acqua del vaso, che formava il piccolo lagone, e dove l'acqua gorgogliava per i bollenti vapori del Soffione artificiale, in breve tempo si sciolse grandissima quantità di acido cloridrico, e buona dose di acido borico. Chiaro dunque apparisce la perfetta scomposizione della boracite, e la formazione dell'acido borico, mediante il bollente vapore; il che, a dir vero, non mai pensai di rivocare in dubbio, anche prima dello sperimento. Ma il mio fine era quello, come ho già detto, di vedere la rapidità con la quale si scomponeva la boracite: giacchè rispetto all'acido cloridrico, che in gran quantità già supponevo doversi formare, si poteva credere scomporsi col calcario, che abbondantemente trovasi nel terreno dei Soffioni, onde si originasse la più parte dell'anidride carbonica. Ma lasciando da parte tutte le congetture che si possono fare, e

ristringendomi ai fatti, dirò, che per via di tale sperienza potei conoscere, che se l'acido borico dei Soffioni si originasse dalla boracite, tenendo conto della facilità di sua scomposizione, se ne dovrebbe trovare nei vapori almeno dieci volte più di quello che si trova presentemente.

Ma anche il borato di calce, di cui avevo supposto l'esistenza nelle viscere della terra, lascia assai facilmente sfumar via l'acido borico. Di fatti avendo cimentato la bechilite nello stesso modo della boracite col Soffione artificiale, mi venne via una quantità di acido borico molto maggiore di quello che incontrasi nei Soffioni boraciferi.

Tali osservazioni, che sembrano a prima giunta così semplici, e di sì poco momento, erano per me di gran valore: imperocchè bisognava, a parer mio, in sì delicato studio osservare tutto con tutta diligenza, ed usare tutta la perspicacia per ben discernere il vero dal falso: di modo che feci un gran numero di altre sperienze, che tralascio di raccontare per isfuggire lunghezza, le quali mi confermavano sempre più non doversi attribuire l'origine dell'acido borico al borato di calce, e molto meno al borato di magnesia. Intanto le prove che incominciai sui borosilicati mi davano ragione di credere che meglio corrispondevano a ciò che vedesi nei Soffioni; poichè scomponendosi adagio adagio davano quella giusta dose di acido borico, che per appunto trovasi nei bollenti vapori dei Soffioni, la quale è così piccola da farne dubitare la sua esistenza a chi non li esamina sottilmente.

Confermandomi però sempre nel mio proposito di non voler dar fede a speculazioni teoriche, ma soltanto a quello che mi avessero dato i fatti, mi messi in testa di non lambiccarmi il cervello con nuove ipotesi, e di ricercare la roccia boracigena, la quale doveva trovarsi. E benchè verso le rocce, dove sbucano i Soffioni, aguzzassi le ciglia

Come il vecchio sartor fa nella cruna,

per vedere, se nei burroni scoscesi, e nelle più profonde trapanazioni, apparisse qualche traccia di boracite, o di altro minerale simile, non mi fu possibile trovarlo: onde tengo fermissima opinione che nel terreno di sedimento dei Soffioni non ci sia boracite per deposito di antichi mari, e non vi sia nè pure altro minerale importante, che dia origine all'acido borico.

Le rocce ofiolitiche, molto sparse in tutta l'Italia, formano nel littorale maremmano una serie di gruppi con una certa regolare successione; onde essa serie fu nominata catena ofiolitica del littorale. Tali rocce hanno forma e caratteri eruttivi, e sono ben distinte dalle rocce di sedimento, da cui emergono in grandissime masse a guisa d'isole, formando montagne a foggia di cupole. Non c'è dubbio che non sieno posteriori alla formazione dell'eocene: e le compenetrazioni, gli sconvolgimenti, le perturbazioni, le trasformazioni, o come meglio piace dire i metamorfismi, indotti nei terreni circostanti, ci danno l'idea d'esser venute fuori con fenomeni grandiosi e sotterranei, comecchè eruttate in diverse epoche. La più antica di tali rocce è il serpentino diallagico, di colore verde cupo, nella cui pasta sono qua e là sparse molte laminette scure di diallagio. L'altra roccia di più moderna formazione, differente anche per il colore, soventi volte traversa il serpentino antico, o comparisce in vicinanza di esso: onde la distinzione che se ne fece in serpentini antichi, e in serpentini

moderni. Ricordo a bello studio questa divisione principale, e passo sotto silenzio qualsiasi descrizione intorno le diverse rocce serpentinose, che costituiscono la serie antica e moderna, come quelle che furono studiate, descritte e illustrate, specialmente dai professori Savi e Meneghini.

È noto come i Soffioni si trovino disposti sopra una linea, che corre parallelamente all'asse della catena ofiolitica; e, comecchè appariscano in rocce eoceniche, mioceniche e plioceniche, trovansi sempre in vicinanza delle grandi e potenti masse dei serpentini. Il che dà a credere fermamente avere l'eruzione dei bollenti vapori un'intima attinenza con tali rocce plutoniche, i quali apronsi il cammino dagli strati di sedimento, quando non trovano più facile uscita dalle rocce eruttive ([1]).

Tornato a studiare i lagoni, e confermandomi ogni giorno più nell'idea della loro attenenza, e della strettissima connessione con le rocce eruttive, pensai di ricercare sottilmente, se da esse rocce prendesse origine l'acido borico, comecchè nessuno avesse mai supposto, non che pensato, all'esistenza del boro tra i componenti del serpentino. Gli è vero che negli anni passati trovai cristallini di datolite nella calcosina di Montecatini ([2]); ma come possa essere avvenuta tal formazione; come possa per appunto trovarsi la datolite in quella borsa del minerale cuprifero, dirò quanto occorre a suo luogo.

Presi dunque il serpentino, che trovasi all'ottavo piano della miniera di Montecatini, ed esaminatolo accuratamente, trovai che conteneva *boro*. Cimentai allora le rocce del settimo, sesto, quinto, quarto e terzo piano di essa miniera, ed in tutte queste rocce trovai egualmente *boro*. Presi allora il serpentino di antica eruzione, ed in tal roccia pure trovai *boro*: di modo che potei conoscere come vi esisteva più boro in un chilogrammo di serpentino moderno, che in 10,000 chilogrammi di acqua marina. Così che ardisco dire, che soltanto il serpentino della miniera di Montecatini, avuto riguardo alla massa che costituisce il monte di Caporciano, formerebbe da sè solo una richissima miniera di acido borico. Secondo le mie ricerche sembra che l'acido borico nella roccia serpentinosa vi sia in istato di borosilicato di magnesia.

Ma prima di andare più avanti col mio ragionamento, reputo necessario il richiamare alla memoria un fatto da me notato fin dal 1862 ([3]), cioè l'esistenza della materia organica nei gabbri rossi, e come essa materia contenga una quantità di azoto, di 0,10 millesimi, o in quel torno, il quale nella distillazione della roccia si trasforma in ammoniaca. Oltre a ciò debbo ricordare, che i serpentini sogliono contenere masse e noccioli di solfuri di rame e di ferro: ed aggiungerò ancora che quei serpentini, i quali sembrano affatto affatto sterili, e non vi si vede sostanza metallica, ad occhio nudo, contengono qualche venuzza, o qualche granellino, specialmente di pirite.

Richiamate alla memoria tali cose, che io reputava necessario il ricordare per fermare a suo tempo su di esse l'attenzione, passo adesso a descrivere un'esperienza, che tengo per importantissima.

([1]) Ved. Bechi, *Étude sur la formation des Soffioni boracifères, et sur une nouvelle méthode pratiquée en Toscane, pour en extraire l'acide borique.* Bullet. de la Sociét. de l'ind. minéral. Tom. III, p. 330.

([2]) Ved. Bechi, loc. cit. *Étude sur la formation des Soffioni* ecc.

([3]) Ved. Bechi, *Sulla formazione dell'ammoniaca nell'arrostitura dei minerali,* ecc.

Un grossotto tubo di ferro battuto, che aveva all'estremità le sue giunture a vite, fu riempito con pezzetti della roccia serpentinosa, presa all'ottavo piano della miniera di Montecatini. Su questa roccia non si scorgeva a occhio nudo alcuna grana di minerale di rame, e l'analisi vi trovava soltanto del solfuro di ferro. Il tubo lo messi sopra un fornello a gasse, il quale poteva riscaldarlo a trecento gradi, o in quel torno. Da una parte entrava un getto di vapore con giusta proporzione di acido carbonico; mentre dall'altra usciva il bollente vapore, il quale, per via di un lungo tubo, attraversava l'acqua di una vasca. Il tutto era in giuste proporzioni: di modo che si poteva dire un perfetto lagone in piccolo.

Il bollente vapore usciva dall'acqua, agitandola vivamente, come fanno per appunto i Soffioni; e l'aria tutta all'intorno era compresa dal puzzo di gassi solfurei, misto a un non so che di pizzicante, che ben riconosce all'odore chi dei lagoni ha qualche pratica: onde pareva di esser presso al lago di Monterotondo, tanto era l'aria puzzolente. L'acqua in breve tempo divenne bianchiccia per zolfo sospeso. Dopo 36 ore di tale agitazione, la feci sfumare con dolce calore, e nella residenza salina trovai principalmente acido borico con la sua materia organica, col suo sale ammoniacale, ecc. di modo che pareva che avessi svaporato una tazza di acqua di un Soffione del lago di Monterotondo.

Debbo notare, che seguitando il vapore per diversi giorni, continuò a venir fuori tanto il gasse solfidrico, quanto un pocolino d'acido borico. Intanto credo affatto inutile il raccontare che tale esperienza fu spesseggiata con altre rocce serpentinose e con modi diversi, ma sempre con eguali risultamenti.

Or chi ha senno, vedrà andare in fumo tutte le ingegnose ipotesi immaginate sin qui in su l'origine dell'acido borico, e comparire la sua spiegazione nitida, chiara e splendida.

Essa può riepilogarsi così:

I serpentini della catena ofiolitica della Toscana contengono il boro nei loro elementi. Da una certa profondità di queste rocce erompono bollenti vapori, i quali attraversandole, e in parte compenetrandole, sfumano via l'acido borico.

È noto come i serpentini contengono vene e noccioli di minerali solfurei, e specialmente di solfuro di ferro e di rame: onde il gasse solfureo idrico dei Soffioni è conseguenza manifesta dell'azione del vapore acqueo su i minerali solforati, specialmente di ferro e di rame. Parimente la materia azotata dei serpentini, scomponendosi per il calore dei caldissimi vapori, origina l'azoto, l'idrogeno, il metano e l'ammoniaca; le quali materie tutte in piccola dose trovansi nel miscuglio gassoso: ma essa materia azotata non è cagione del solfuro idrico, e nè pure di azione scomponente dei solfati, come qualche egregio scienziato aveva supposto.

Dirò in fine che rispetto alla maggior quantità di ammoniaca dei Soffioni di Travale, confermo la mia teorica, perchè fondata su i fatti, la quale già descrissi nella Memoria su i lagoni boraciferi di Travale.

I Soffioni erompono dai terreni dell'eocene, del miocene, o del pliocene, perchè tali terreni si trovano superiori ai serpentinosi, o perchè essi Soffioni trovano più facile uscita; ma non mai perchè in tali terreni di sedimento vi trovino l'acido borico bello e formato, o la boracite, o la bechilite; giacchè, se per caso s'incontra qualche

minerale boracifero, apparisce essere stato formato dalla reazione dei Soffioni su le rocce circostanti.

Il fenomeno dei Soffioni è affatto affatto collegato con le rocce eruttive serpentinose, che formano la catena ofiolitica della Toscana, ed in conseguenza si può dire esclusivamente plutoniano: per la qual cosa bisogna da ora in poi respingere ogni idea di prodotti provenienti da sedimenti.

Perchè intanto non resti alcun dubbio che l'acido borico dei lagoni possa originarsi da altra roccia fuori del serpentino, dirò, che avendo cimentato col Soffione artificiale il granito turmalinifero dell' isola del Giglio, e le turmaline dell' isola dell'Elba, non potei avere nell'acqua della vaschetta acido borico in soluzione, comecchè lo sperimento fosse spesseggiato in diversi modi, e per diverso tempo.

Mi resta adesso di parlare di alcuni cristalli di datolite, trovati in una borsa, o geode, come ad alcuni piace dire, della calcosina di Montecatini. Questi cristalli furono da me analizzati, e vennero descritti dal prof. Meneghini in una lettera al prof. Dana.

Primo di tutto dirò, che la calcopirite di Montecatini contiene un po'di materia azotata, come il serpentino, ed anche qualche traccia di boro. Il che mostra una origine idroplutonica, come il serpentino che la impasta. È noto come essa calcopirite sia il principale minerale dei serpentini, e si trovi a noccioli, qualche volta di straordinarie dimensioni, involti nella pasta del filone, o ganga, la quale quasi sempre aderisce a guisa di pellicola al minerale. Spesse volte la calcopirite forma il nocciolo alla erubescite, alla calcosina ed al rame nativo: di modo che non è raro il caso di trovare nella medesima massa il passaggio a tutte queste specie di minerali, che si succedono a foggia di zone, e dove il rame nativo forma la parte esterna. Tale formazione è stata meravigliosamente bene descritta dai professori Meneghini e D'Achiardi: e attribuendo il rame nativo, la calcosina e l'erubescite a un processo di disolfurazione, il prof. Meneghini saviamente aggiunge, che la colorazione in rosso del gabbro, e la formazione di ossidi ferrici cristallini, sono effetti della scomparsa del ferro dalla calcopirite; comecchè non si sappia, se tale trasformazione fosse contemporanea, o posteriore alla comparsa del minerale nella giacitura presente. Io credo che sia contemporanea, da che la disolfurazione muove dalla stessa azione idrica, che ha portato fuori il minerale. Alcuni noccioli, o masse di calcopirite più libere, rimasero più direttamente investite dal vapore, il quale operò la disolfurazione incominciando dalla parte esterna [1]: quindi il borosilicato di magnesia incontrando la calcite, diede luogo alla formazione del borosilicato di calce. Per conferma-zione di questo vero messi dei pezzetti di calcopirite nel solito tubo, e avendovi fatto passare per diverso tempo il vapore con un po'd'acido carbonico, ricavai un minerale di calcosina, chiazzata di rame metallico, la quale passava all'erubescite, mentre nell'interno v'era ancora la calcopirite. Di fatti la parte superiore era composta così: 64,75 di rame, 16,46 di zolfo, e 18,79 di ossido ferrico: mentre nello strato subito sottoposto, la più parte del ferro non era in istato di ossido, ma unito allo zolfo;

[1] I noccioli di calcopirite, investiti dal solo calore in mezzo a un ganga fusa, possono concentrare nell'interno l'erubescite: il che ho veduto avvenire artificialmente.

di modo che, non facendo conto dell'ossido ferrico, il rimanente conteneva gli elementi che costituiscono la calcosina e l'erubescite.

Sicchè per raccorre il tutto in poche parole, dico, che la scoperta del boro nei serpentini; la virtù che hanno i vapori acquei di portarlo via sotto forma di acido borico, quando investono tali rocce; la materia azotata contenuta nelle rocce eruttive, la quale si scompone per i bollenti vapori; la formazione del solfuro idrico, mediante il vapore sopra i solfuri metallici, specialmente su quelli che in universale incontransi nei serpentini; mi sembra che bastino a rovesciare tutte le ipotesi fatte sull'origine dell'acido borico, e delle materie che lo accompagnano, e compiano gli studî intorno ai Soffioni. Intanto nuove indagini su le rocce ofiolitiche potranno dare maggior contezza della nuova teorica dei Soffioni, e

> Forse che ancor con più solerti studî
> Poi ridurrò questo lavor perfetto.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Le travature reticolari a membri caricati.

Memoria dell' ing. CARLO SAVIOTTI

professore di statica grafica nella R. Scuola d' applicazione per gl' ingegneri in Roma,

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia

nella seduta del 5 maggio 1878.

1. In altra mia Memoria ([1]) ho esposto una teoria meccanica delle figure reciproche, quali si presentano nelle travature reticolari caricate soltanto ai nodi, coi rispettivi diagrammi delle forze. Due problemi sono ivi risoluti. Il primo consiste nel trovare le forze che devono agire ai nodi di una travatura perchè i suoi membri soffrano tensioni e pressioni determinate. Esso si presenta in pratica nella verifica della stabilità di una travatura già esistente. Dalle sezioni dei membri si deducono le tensioni e pressioni che possono sopportare e si passa a verificare se i carichi cui è effettivamente assoggettata la travatura ne compromettono o no la stabilità. La soluzione di questo problema non esige restrizione di sorta quanto alla complicazione della travatura. Essa può constare di n nodi e della totalità dei segmenti rettilinei (membri) che li congiungono in tutti i modi possibili. In ogni caso è sempre costruibile un diagramma corrispondente delle forze. Basta percorrere la travatura passando (una sola volta) per tutti i suoi nodi in un ordine arbitrario; i membri percorsi formano il *contorno* della travatura; tutti gli altri riescono membri *diagonali.* Costruendo successivamente i poligoni relativi ai varî nodi in modo che per ciascuno i *due* segmenti corrispondenti ai membri del contorno riescano esteriori e perciò riescano sempre intermedî i segmenti corrispondenti ai membri diagonali, i segmenti di chiusa di tutti questi poligoni aperti sono equipollenti alle forze esterne richieste e vengono a formare un sol poligono chiuso i cui lati si succedono precisamente come i nodi secondo l'ordine già stabilito. Variando l' ordine di successione dei nodi ossia il modo con cui si percorre la travatura, varia in corrispondenza anche il diagramma delle forze. È da notare che in questo diagramma possono riuscir ripetuti i *segmenti diagonali* e che allora la travatura e il suo diagramma non sono più figure reciproche quali si ottengono dalla projezione di due poliedri reciproci formati con elementi reciproci di un sistema polare nello spazio e quali furono esposte dal professore Cremona.

Il secondo dei problemi risoluti per le travature reticolari, già noto, epperò

([1]) *Sopra alcuni punti di statica grafica.* Atti della Reale Accademia dei Lincei, 1876-77.

trattato soltanto per alcuni casi singolari, è quello che si presenta nella compilazione dei progetti di costruzioni nuove e consiste nel trovare le tensioni e pressioni cui vanno soggetti i membri di una travatura quando ne sia dato lo schema e il sistema delle forze esterne in equilibrio applicate a' suoi nodi. Questo problema si risolve semprechè la travatura non sia a membri sovrabbondanti, cioè soddisfaccia alla relazione: $m = 2n - 3$ dove: m è il numero dei membri ed n quello dei nodi (1). Fra la serie innumerevole di travature che soddisfanno a tale relazione ve n' ha talune, per le quali il metodo solo dei nodi non è sufficiente ed esige il concorso dei metodi ausiliarî delle sezioni (Culmann) o dei momenti statici (Ritter). Il prof. Cremona ha completato il metodo dei nodi o geometrico trovando la soluzione geometrica per questi casi singolari. Tale soluzione è fondata sul teorema seguente (2): Se un poligono di n lati si deforma in modo che tutti i suoi lati passino per altrettanti punti fissi situati in linea retta (e per l'attuale applicazione una tal retta è quella all' infinito del piano) mentre $n-1$ vertici scorrano su rette fisse, anche l' ultimo vertice ed il punto di concorso di due lati non consecutivi qualsivogliano descriveranno linee rette. Nella fig. 1 è rappresentata una travatura per la quale si possono determinare direttamente gli sforzi 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ 6′ (3). Per proseguire a determinare i successivi 7′ 8′ 9′,....... si potrebbe fare una sezione fra le forze esterne d ed e. Si traccino invece 7′ 8′ 9′ 13′ indefiniti; si attribuisca ad uno qualunque di questi segmenti per es. a 7′ una lunghezza arbitraria come primo tentativo; sia A_1 il suo termine; si costruisca il poligono A_1 B_1 C_1 D_1, i cui lati siano ordinatamente paralleli ad 8, 12, 14, 10, ed i cui vertici A_1 ossia (8′ 10′); B_1 ossia (8′ 12′); D_1 ossia (14′ 10′) cadano ordinatamente sopra 7′, 9′, 11′; il vertice C_1 ossia (12′ 14′) cadrà sopra una retta C_1 C_2, di cui si determina un secondo punto C_2, facendo un secondo tentativo, cioè terminando il segmento 7′ ad un altro punto A_2 e costruendo il poligono A_2 B_2 C_2 D_2. Dovendo il vertice (12′ 14′) cadere sopra 13′ sarà C un tal punto. Così si determinano 7′ 8′ 12′ 14′ 10′ 11′ 9′ 13′. In luogo di 7′ fissiamo la lunghezza di 13′; ne sia C_3 il termine; il tentativo risulta allora D_2 C_3 B_1 A_1 D_1. I lati C_3 D_2 e A_1 D_1 s' intersecano in C_0, la retta C C_0 che risolve il problema, può essere tracciata senza che occorra un secondo tentativo. Infatti essa è la linea d'azione della risultante delle forze aventi per linee d' azione i segmenti indefiniti 7′ 9′ 13′ ed il cui poligono è dato nei membri della travatura 7, 9, 13. Il poligono costruito è un poligono funicolare relativo ai raggi 10, 8, 12, 14, projettanti quello delle forze. Il segmento di chiusa ne è (6, 11) (13, 14) a cui è dunque parallela la retta C_0 C. Per proseguire nella costruzione del diagramma, in luogo di far due sezioni una fra le forze esterne h e k e l'altra fra le due e ed f, si traccino invece tutti i segmenti indefiniti di cui è data un'origine; cioè: 23′, 15′, 17′, 19′, 27′, 29′. (Per ragione di simmetria del diagramma non si prosegue oltre). Si limiti per es. il segmento 23′ (come primo tentativo) in E_1 e si costruisca il poligono E_1 F_1 G_1 H_1 K_1 L_1 M_1 N_1.

(1) Levy, *La statique graphique* pag. 32.

(2) Cremona, *Geom. projet.* pag. 57.

(3) Con lettere e numeri si denominano le linee d' azione delle forze e colle medesime lettere o coi medesimi numeri ma accentati i segmenti rappresentanti le grandezze di tali forze.

i cui lati siano paralleli a 12, 16, 18, 20, 24, 26, 28, 30, ed i cui vertici siano ordinatamente sopra 23′, 15′, 17′, 19′, 21′, 25′, 27′. Il vertice N_1 cadrà sopra una retta $N_1 N_2$, di cui si determina un secondo punto N_2 facendo un altro tentativo $E_2 F_2 G_2 H_2 K_2 L_2 M_2 N_2$. La retta $N_1 N_2$ incontra 29′ in N che fornisce la soluzione unica N E F G H K L M.

Di una speciale importanza si presenta questo metodo del prof. Cremona nel calcolo di certe travature ideate dal prof. G. B. Favero; travature le quali soddisfano alla relazione $m = 2n - 3$, ma per le quali io non saprei come applicare il metodo delle sezioni o dei momenti, giacchè ogni retta segante lo schema della travatura taglia o tre membri concorrenti o quattro non concorrenti almeno. Stabilito un ordine di successione dei nodi 1, 2 $(d\,f)$ 3, 4 $(g\,k)$ 5, 6 $(n\,q)$ (fig. 2) e formato il poligono delle forze esterne (in equilibrio) seguendo lo stesso ordine, pe' suoi vertici si conducano indefiniti i segmenti corrispondenti ai membri del contorno della travatura $a\,c\,d\,f\,h\,k\,m\,p\,q$; poscia se ne fissi uno qualunque ad arbitrio in lunghezza per es. d' e si proceda nella costruzione del diagramma osservando che rispetto all'ordine assunto riescono membri diagonali nella travatura $b\,e\,g\,l\,n\,r$ e che perciò essi soltanto vengono ripetuti in posizione distinta. Nel fare il tentativo si potrà procedere per es. nel modo seguente: segnare A B C D e poi determinare E F G H K L M N D. Il vertice N dovrebbe cadere sopra q'. Con un secondo tentativo si determina un punto analogo N′: e la retta N N′ incontra q' nel punto che fornisce la soluzione.

Oltre alle travature *chiuse* si sono considerate nella mia citata Memoria anche le travature *aperte*, i cui diagrammi del resto non presentano grande singolarità. In esse come nelle chiuse, i membri non sono cimentati che per trazione o compressione semplice e ogni membro è sempre limitato a' suoi due nodi.

2. Nella pratica si presentano altre travature reticolari, le quali sono caricate sui nodi non soltanto, ma anche sui membri, alcuni dei quali possono inoltre essere prolungati al di là dei rispettivi nodi. Siano due membri a e b (fig. 3) vincolati a cerniera in A e C e tra di loro in B. Il primo sia caricato di una forza 1 e il secondo di due forze 2 e 3. Si connettano queste tre forze con un poligono funicolare, di cui il primo lato passi per A, il secondo per B e l'ultimo per C. Perciò si faccia un tentativo tirando $A L_0$ ad arbitrio indi $L_0 B M_0$; e nel poligono delle forze i due raggi paralleli che individuano un polo P_0; allora si tiri $M_0 N_0$ parallelo al raggio P_0 (2′ 3′) e in fine $R N_0$ parallelo al raggio ultimo nel poligono delle forze. Non passando questo ultimo lato per C si osservi che tutti gli altri poligoni funicolari che si costruirebbero in modo analogo, avrebbero gli ultimi e penultimi lati costantemente passanti per R ed S sopra A B; onde tirato C R quale ultimo lato, indi N M S come penultimo, coi due raggi paralleli s'individua nel poligono delle forze il polo P. Allora il lato M B L sarà parallelo al raggio P (2′ 1′) e L A parallelo al primo raggio. Le reazioni dei vincoli saranno A L, L B uguale ed opposta a M B e C N; i segmenti relativi sono i raggi paralleli nel poligono delle forze.

Or si supponga mossa la forza intermedia 2 finchè si trovi applicata al nodo B (fig. 4). Volendo connettere le tre forze 1, 2, 3 con un poligono funicolare il cui primo lato A L passi per A, i due intermedî per B e l'ultimo per C non s'avrà

che da ripetere la precedente costruzione, avvertendo che in questo caso riescono coincidenti i tre punti B, M, S (fig. 3); ma ancora gli ultimi lati di tutti i poligoni funicolari che si possono costruire come tentativi passeranno per R sopra A B. Nella figura 4 è indicato un tentativo e la soluzione voluta A L B N C. Le reazioni in B non sono più uguali ed opposte per l'intervento della forza 2. Supponiamo materiali e resistenti i lati di questo poligono funicolare, essi formeranno una travatura poligonale, che serve da nesso rigido delle forze date, precisamente come i due membri a e b. I due membri a e b compressi ed inflessi possono adunque essere surrogati dalle due paia a_1 e a_2; b_1 e b_2 semplicemente compressi. Se immaginiamo rovesciato il senso delle forze ai due membri a e b inflessi e tesi potranno essere sostituiti a_1 e a_2; b_1 e b_2 semplicemente tesi. Allorquando dei due membri inflessi a e b uno è teso e l'altro compresso (fig. 5), quello inflesso e teso potrà essere surrogato dai due a_1 e a_2 semplicemente tesi; e quello inflesso e compresso dai due b_1 e b_2 semplicemente compressi. Nelle fig. 6 e 7 sono indicate le reali disposizioni relative a questi due casi. Si sono esagerate le dimensioni delle caviglie nonchè gli agi fra esse e gli occhi rispettivi per rendere più evidente il collegamento. I punti geometrici di contatto vennero segnati con dei piccoli circoletti. Per disegnare queste figure si osservi che i punti o nodi A, B, C nella fig. 5 sono i centri delle caviglie e che i punti geometrici di contatto degli occhi di a colle caviglie A e B devono essere gli stessi punti di contatto delle caviglie cogli occhi dei membri a_1 e a_2; vale a dire che tanto i centri degli occhi di a come di a_1 e a_2 devono trovarsi sopra a_1 e a_2.

La congiungente i punti di contatto o d'appoggio di a colle caviglie A e B deve essere l'asse geometrico di a e non già A B della fig. 5 che sarebbe l'asse soltanto nel caso in cui a non fosse assoggettato ad alcuna forza trasversale. Importa di rilevare che il membro a il quale si appoggia alle caviglie nei due punti determinati nel modo sopradetto è in equilibrio sotto l'azione della forza 1 e delle due reazioni che si sviluppano nei punti d'appoggio aventi per linea d'azione gli assi dei membri a_1 e a_2; reazioni che si trovano già determinate in grandezza nei primi due raggi del poligono delle forze; sicchè se pel polo P (fig. 5) guidiamo la parallela alla congiungente i due punti d'appoggio di a (asse di a) e che in pratica si potrà ritenere come sensibilmente parallela ad A B della fig. 5, projettandovi sopra il segmento 1', si ottiene in Q P il segmento della tensione di a per la parte compresa fra A e il punto d'applicazione della forza 1; ed in T P il segmento della tensione per la parte fra la forza 1 e l'estremo B. I segmenti Q Q' e T T' misurano le reazioni normali ad a che oppongono le due caviglie. Con ciò si hanno tutti gli elementi per calcolare il membro a alla flessione composta. Lo stesso è da ripetersi pel membro b. Se le forze hanno una direzione comune e di più uno dei membri per es. b (fig. 8) ha pure questa direzione, coincidono le linee di 2, 3 e l'asse di b, il quale resiste alla compressione semplice misurata da una componente di 1 e dalla forza 2 per la parte fra B e il punto d'applicazione della forza 3; e alla somma della componente di 1, di 2 e di 3 per la parte inferiore. La reazione della caviglia A ha la direzione di 1, ed il nodo a_1 1 a_2 cade all'infinito. Il polo P cade nel segmento 1' e lo divide in due parti che sono i segmenti delle reazioni a_1 e a_2 degli appoggi A e B. Il membro a resta soggetto a trazione misurata dal segmento P Q per la parte

compresa fra la forza 1 e l'appoggio B; resta poi soggetto per l'altra parte a compressione misurata dal segmento PT. Se dei due membri *a* e *b* uno soltanto è caricato (fig. 9) la determinazione delle reazioni degli appoggi resta alquanto semplificata. Essendo scarico il membro *a* esso non può resistere che a trazione e compressione semplice, sicchè il primo raggio è parallelo ad *a*; fatto un tentativo BN_0 ad arbitrio con che resta determinato un polo P_0, si tiri N_0R parallelo all'ultimo raggio e allora tirato CR e il raggio parallelo resta individuato il polo voluto P; BN sarà parallelo a P (2′ 3′). La caviglia B è in equilibrio sotto l'azione di a, b_1 e 2. Più semplice di tutti è il caso in cui oltre ad un membro *a* sia anche scarico il nodo B. La reazione in B agisce secondo *a*: onde la reazione di C passa per il punto (3, *a*) (fig. 10).

3. La determinazione delle azioni longitudinali e normali in una travatura composta di due soli membri, serve di base per il calcolo analogo delle ordinarie travature reticolari caricate ai nodi e ai membri. Basta infatti (completato il sistema delle forze esterne) incominciare dal trovare tali azioni per due membri, nel cui nodo comune sia applicata una forza conosciuta: per es. nello schema rappresentato dalla fig. 11, note le reazioni degli appoggi, si potranno trovare tali azioni per il paio di membri *a*, *b* oppure *f*, *g*; indi pel paio *c*, *d* giacchè restano conosciute le forze applicate al loro nodo comune: poscia pel paio *e*, *f* oppure *e*, *g*; rimane un membro in fine, perchè il loro numero $m = 2n - 3$ per le travature chiuse è sempre dispari; quest'ultimo membro serve di verifica come nel calcolo delle travature caricate ai soli nodi. Inutile il dire che si potrebbe compiere il calcolo con tanti poligoni separati come si è visto sopra per un sol paio di membri; ma ciò condurrebbe ad occupare troppo spazio, ed a maggior perdita di tempo per la ripetizione dei segmenti, ciò che darebbe anche luogo ad inesattezze. Sono queste del resto le ragioni, che rendono sommamente pregevoli i *diagrammi delle forze*, in luogo dei poligoni separati relativi ai varî nodi nel calcolo delle travature reticolari caricate soltanto ai nodi.

Sostituendo in una travatura di *n* membri caricati ad ogni membro inflesso e teso o compresso due altri semplicemente tesi o compressi come indica lo schizzo della fig. 11 si ottiene una travatura reticolare di 2 *n* membri caricata soltanto ai nodi. Una simile travatura ammette *sempre* un diagramma. *Dunque le travature caricate anche ai membri ammettono un diagramma delle forze.* Ben s'intende che è il diagramma relativo alle azioni sui nodi della travatura; si è visto come si deducono tosto per ogni membro le azioni: longitudinale e normale. Giova osservare che i diagrammi di queste travature presentano dei segmenti ripetuti; con tutto ciò si mantiene ancora preferibile la costruzione di un diagramma anche con molti segmenti ripetuti alla costruzione di tanti poligoni separati. Ecco qualche esempio.

Nella figura 12 è rappresentata una travatura caricata ai membri *a* e *c* dalle forze 1 e 2, 4 e 5, che s'intenderanno sostituite dalle loro risultanti; gli altri membri *b*, *e*, *d* siano caricati d'una forza unica, che potrà rappresentare anche il peso proprio. Sono caricati anche i due nodi (*ac*) e (*ed*). Trovate le reazioni degli appoggi, si è formato il poligono delle forze nell'ordine 1′ 2′ 3′ 4′ .... 10′ 11′; poscia si sono considerati i due membri *a* ed *e*. Mediante un tentativo si è determinato il poligono funicolare $a_2\, a_1\, e_2\, e_1$ ossia si è sostituito il membro *a* coi due a_1 e a_2 e il membro *e* coi due e_1 ed e_2. Il poligono delle forze esterne è: 10′ 11′ 1′ 2′, il polo relativo

è P_1. Tirata per P_1 la parallela ad a e projettativi sopra i segmenti 1′ e 2′ si sono ottenute nei segmenti R′R e T′T le misure delle reazioni normali degli appoggi di a; nel segmento P_1 T l'azione longitudinale in a dal termine superiore fino alla forza 2; in P_1 S pel tratto compreso fra le forze 1 e 2: e in P_1 R per la parte inferiore al disotto della forza 1. Analogamente si determinano le azioni in e. Considerando i due membri c e d con un tentativo si è determinato il poligono $c_1\, c_2\, d_1\, d_2$ e al poligono delle forze 4′ 5′ 6′ 7′ il polo P_2. Quanto al membro b considerato insieme con e darebbe il poligono delle forze (8′) (d'_2) 9′ 10′; il polo P_1 è già determinato da e'_1 ed e'_2; e così P_1 P_2 misura la tensione di b per la parte compresa fra il punto d'applicazione della forza 8 e il termine superiore; P_1 Q per la parte inferiore.

La fig. 13 porge un altro esempio di travature a membri caricati; mancano le forze ai nodi (b d) e (d g); le risultanti delle forze applicate ai membri a ed f coincidono rispettivamente con 2 e 6. Si è formato il poligono delle forze coll'ordine 1′ 2′ ..... 13′ 14′. Poscia si è trovato il polo P_1 relativo al poligono funicolare $a_2\, a_1\, b_1\, b_2$. P_1Q è l'azione longitudinale in a per la parte compresa fra l'appoggio inferiore e 1; P_1R fra 1 e 2; P_1S fra 2 e 3; P_1T fra 3 e 4. Considerati i due membri d e c, 11′ (b'_2) (12′) ne è il poligono delle forze relativo. In P_2 se ne trova il polo. Pei due membri e e g si ha il poligono delle forze 9′ (d'_2) (10′) e si trova il polo P_3 che è anche polo relativo ai due membri f e g aventi per poligono delle forze 5′ 6′ 7′ 8′ 9′. Siccome ogni membro a viene sostituito da due a_1 e a_2 così ogni triangolo nella travatura per es. $a\,b\,c$ resta sostituito da un esagono $a_2 a_1 b_1 b_2 c_2 c_1$, a cui corrisponde nel diagramma un polo P_1 nel quale concorrono i segmenti corrispondenti.

4. Allorquando il carico sopra un membro è assai piccolo rispetto all'azione longitudinale a cui va soggetto, le azioni sui nodi deviano pochissimo dall'asse del membro; ne segue che la determinazione del polo relativo riesce incerta per quanto si disegni con precisione. Ecco un altro modo per individuare i poli o vertici nel diagramma con precisione qualunque sia la grandezza dei carichi. Debbasi determinare il polo P_1 (fig. 13). Si projettino i termini del segmento di tutto il carico di a cioè 1′+2′+3′ da un punto qualunque U di a'. Ciò equivale a decomporre il segmento a'_1 in due altri Q′U e UP_1 ed il segmento a'_2 nei due P_1U ed UT′. Le linee d'azione di UP′ e P′U uguali ed apposti coincidono coll'asse del membro a; segue che le linee d'azione delle altre due componenti s'intersecano sopra la linea d'azione del carico risultante 1+2+3. Dunque se si congiunge un punto qualunque della linea d'azione del carico coi termini del membro a cui è applicato e nel poligono delle forze si tirano i due raggi paralleli pei termini del segmento di esso carico, il punto d'incontro U cade sempre sopra il segmento a_1 che passa per P_1. Così congiunto anche un punto qualunque della 13 coi termini del membro b: e per gli estremi di 13′ condotti i due raggi paralleli essi s'intersecano in L su b'; sicchè se si trovano U e L e per essi si conducono a' e b' s'individua il polo P_1. In modo analogo si possono determinare gli altri poli. Per verifica deve poi riuscire bene come nella figura il poligono funicolare $a_2\, a_1\, b_1\, b_2$ relativo al polo P_1. Sarà questo il metodo da seguire in pratica. Restando il nodo ($a_1\, a_2$) al disopra di a, ciò vuol dire che a è compresso; riuscendo il nodo ($b_1\, b_2$) al disotto di b ciò vuol dire che b è

teso. Con questo criterio semplicissimo si riconosce tosto a colpo d'occhio quali sono in una travatura i membri tesi e quali compressi.

5. Si è supposto negli esempî precedenti che ogni membro fosse limitato fra i suoi due nodi. Ma nella pratica si presentano numerosi esempî di travature con alcuni membri prolungati oltre i rispettivi nodi. Questi membri prolungati non modificano peraltro in alcun modo la soluzione generale del problema di trovare le azioni sui nodi della travatura nel modo visto precedentemente. Siano (fig. 14) a e b due membri vincolati come nelle figure 4 e 5, ma prolungati oltre il loro nodo comune. Si osservi che potrebbero essere prolungati invece dalla parte opposta e anche da tutte e due le parti in modo che i due nodi per ciascun membro riescano intermedî. Per trovare le reazioni delle caviglie si è fatto un tentativo come per le figure 4 e 5 e si è ottenuta la voluta soluzione A D B E C che soltanto venne segnata nella figura 14. Si scorgono in essa gli assi dei membri a e b che passano pei punti d'appoggio dei membri stessi colle caviglie, i quali punti d'appoggio, messi in chiaro con dei circoletti, sono sopra gli assi $a_1 a_2 b_1 b_2$ passanti pei centri delle caviglie date di posizione. Un membro a può essere sostituito da due altri a_1 e a_2 e ciò è posto in evidenza nella figura 15. La forza 1 agisce sulle caviglie A e B nell'identico modo sia coll'intermediario del membro a, sia col mezzo dei due membri a_1 e a_2. Si noti peraltro che mentre pel caso in cui un membro è limitato fra i suoi nodi esso può essere sostituito da due altri o tutti e due tesi o tutti e due compressi; nel caso in cui il membro sia prolungato può essere surrogato da due altri limitati sì fra i rispettivi nodi, ma uno riesce teso e l'altro compresso. Inutile il dire che la risultante delle forze che sollecitano il membro si ammette che lo incontri sopra un suo prolungamento. Per conoscere le azioni esercitate sul membro a dalla forza 1 e dalle caviglie A e B si tiri nel poligono delle forze a' parallela all'asse di a pel polo P; vi si projettino sopra a'_1, a'_2 e 1'. La projezione di 1' misura la compressione per la parte compresa fra il punto d'applicazione di 1 e il punto d'appoggio della caviglia B; quivi vi si aggiunge l'azione longitudinale della caviglia misurata dalla projezione di a'_2 su a. La caviglia A sviluppa poi una reazione longitudinale misurata dalla projezione di a'_1 su a' uguale ed opposta alla somma delle due precedenti. L'azione normale di 1 è data dalla projezione di 1' su n'_2 e quella della caviglia A da n'_1; la loro somma è uguale ed opposta all'azione normale n'_2 della caviglia B.

Nella fig. 16 è rappresentata una gru girevole; essa presenta due membri prolungati a e k; il primo da una sol parte, il secondo da tutte e due le parti. Il carico 1, la cui grandezza è data dal segmento segnato dalla sua linea d'azione è sospeso ad una carrucola mobile. Un capo della catena è fissato al membro a e l'altro alla colonna k, a cui è attaccato il rotismo per la manovra. La catena è rinviata con due carrucole fisse alla sommità di a e al nodo (a d). S'intende che i membri a b d c sono doppî. Si è supposto ogni membro caricato del peso proprio e per ottenerlo con sufficiente approssimazione bisogna fare un primo calcolo della gru dal quale si deduce il peso de' suoi membri Le forze sollecitanti sono 2, 3, 4, 5, 6, 7 dovute alla tensione della catena che si ritenne metà del carico 1; i pesi proprî dei membri 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e le reazioni s e t dei due supporti che

guidano i perni della colonna; si sono determinate s e t componendo tutti i pesi dei membri 8, 9, ... 16 col carico 1. La y ne rappresenta la risultante rovesciata di senso, sicchè è risultante di s e t. Si è supposto che la reazione al perno superiore fosse applicata al terzo inferiore della lunghezza del perno stesso. Parimenti per la componente orizzontale di S; si è poi supposta l'azione di s secondo l'asse di k ripartita uniformemente sul grano del supporto; sicchè la s passa pel punto dove l'asse di k è incontrato dall'orizzontale elevata al terzo inferiore dell'altezza del perno. Prima d'incominciare la costruzione del diagramma si è trovata la risultante r delle forze 2, 3, 4, 8 sollecitanti il membro a; la risultante x delle due forze 5, 6 al nodo $(a\ d)$ e la risultante z delle forze t, s, 11, 7 sollecitanti la colonna k. Tutte le costruzioni relative sono state ommesse nella figura. Si è formato il poligono delle forze scegliendo l'ordine r' 16' 14' 13' 12' z' 10' 9' 15' x'. Seguendo la regola posta al n. 4 si sono tracciate a' e b' e si è individuato il polo P_1, onde anche le linee a_1, $a_2 = -b_2$ e b_1. Si sono considerati poscia i due membri k e g pei quali si è trovato il polo P_2 e le linee $k_1, k_2 = -g_2$ e g_1. In seguito i due membri e ed h pei quali si sono trovati il polo P_3 e le linee h_2, h_1, e_2, e_1. Infine si sono considerati i due membri c e d a cui corrispondono il polo P_4 e le linee d_2, d_1, c_2, c_1. Il membro rimasto f ha fornito la verifica della costruzione. Nel diagramma sono anche segnati i segmenti delle azioni normali e longitudinali che soffrono i varî membri della gru; e con ciò tutto è noto per una calcolazione esatta delle dimensioni di ogni suo membro.

6. Ogni caviglia qualunque sia il numero dei membri che rilega si suol fare di sezione costante; e questa sezione va calcolata al taglio in base alla maggiore delle azioni che soffre la caviglia. Queste azioni nelle travature reticolari caricate soltanto ai nodi hanno per linee d'azione gli assi dei membri e per misure le tensioni o pressioni dei membri stessi. Nelle travature a membri caricati bisogna far astrazione dei membri reali e sostituirli con quelli ideali semplicemente tesi e compressi, ossia colle loro azioni sulle caviglie, le cui sezioni si calcolano in base a tali azioni determinate con un diagramma secondo il procedimento esposto, ricadendo così ancora nel caso delle travature caricate soltanto ai nodi. Così concludendo: Le travature reticolari caricate soltanto ai nodi non sono che un caso particolare di quelle caricate anche ai membri; ma dopo quanto si è visto, il calcolo di queste si riduce a quello delle prime; ottenendo dai diagrammi non soltanto le azioni lungitudinali, ma anche le normali pel calcolo esatto dei membri alla flessione composta.

7. Nelle travature precedentemente considerate tutti i collegamenti si sono supposti a giunti cilindrici ossia fatti con caviglie alle quali devonsi intendere applicate quelle forze che si trovano collocate ai nodi, condizione questa alla quale non si soddisfa sempre in pratica. Ogni caviglia essendo in equilibrio sotto l'azione della forza esterna che vi è direttamente applicata e delle azioni che riceve dai membri che vi si congiungono, si trova adunque nelle condizioni di un membro qualunque della travatura e come tale è da riguardarsi. Si potrà denominare *membro di collegamento.*

Oltre ai collegamenti a giunti cilindrici si possono applicare anche quelli a giunti *piani*. Un membro prismatico soggetto ad un'azione longitudinale e che si

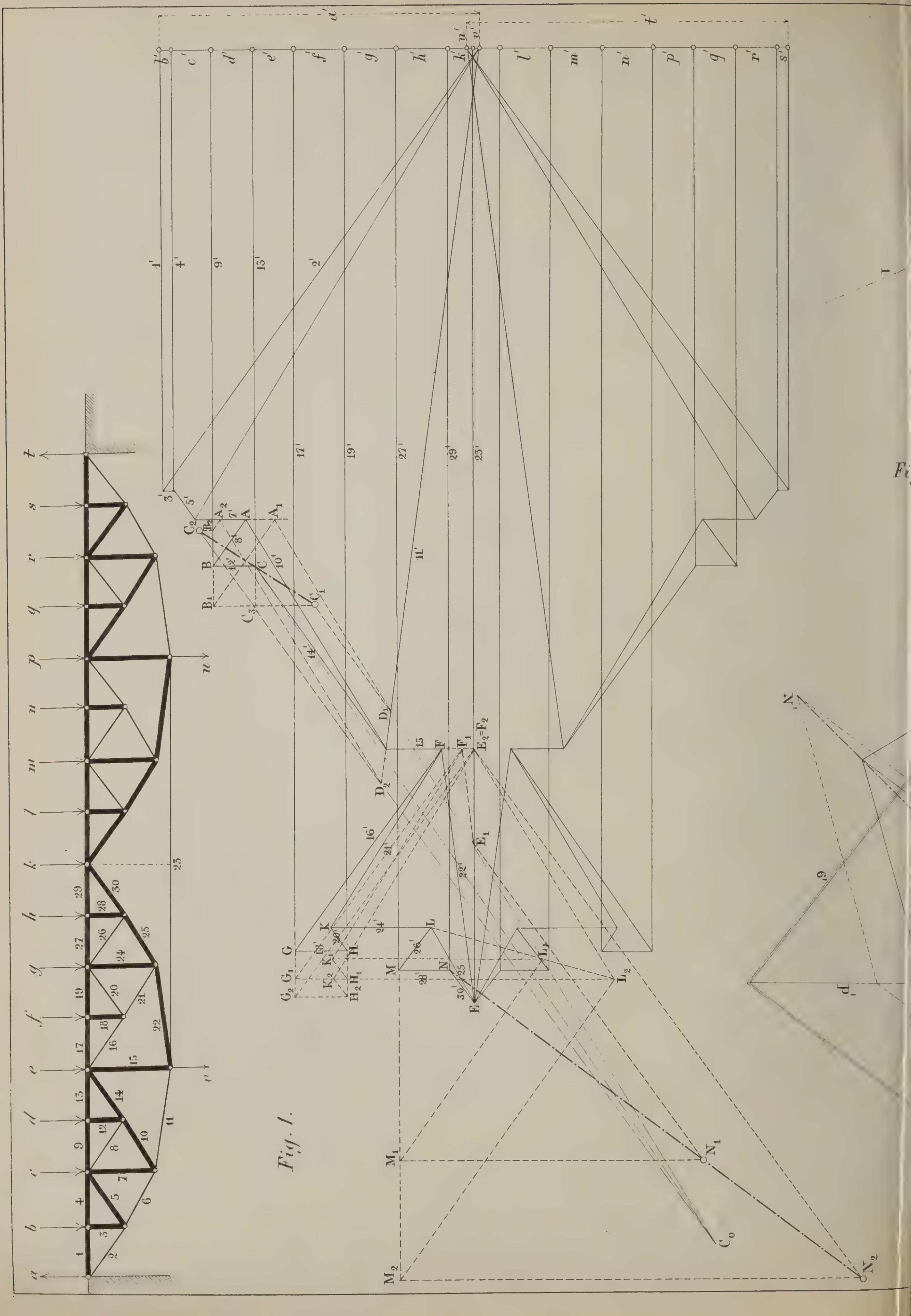
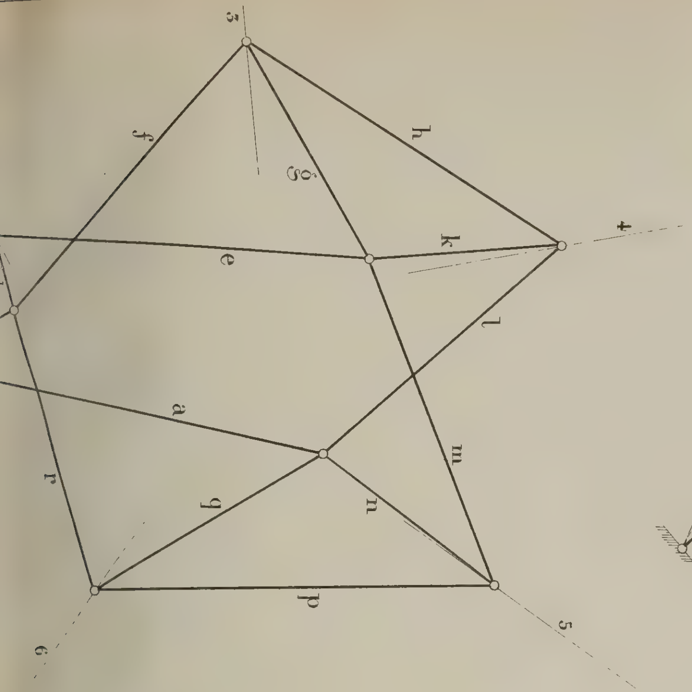
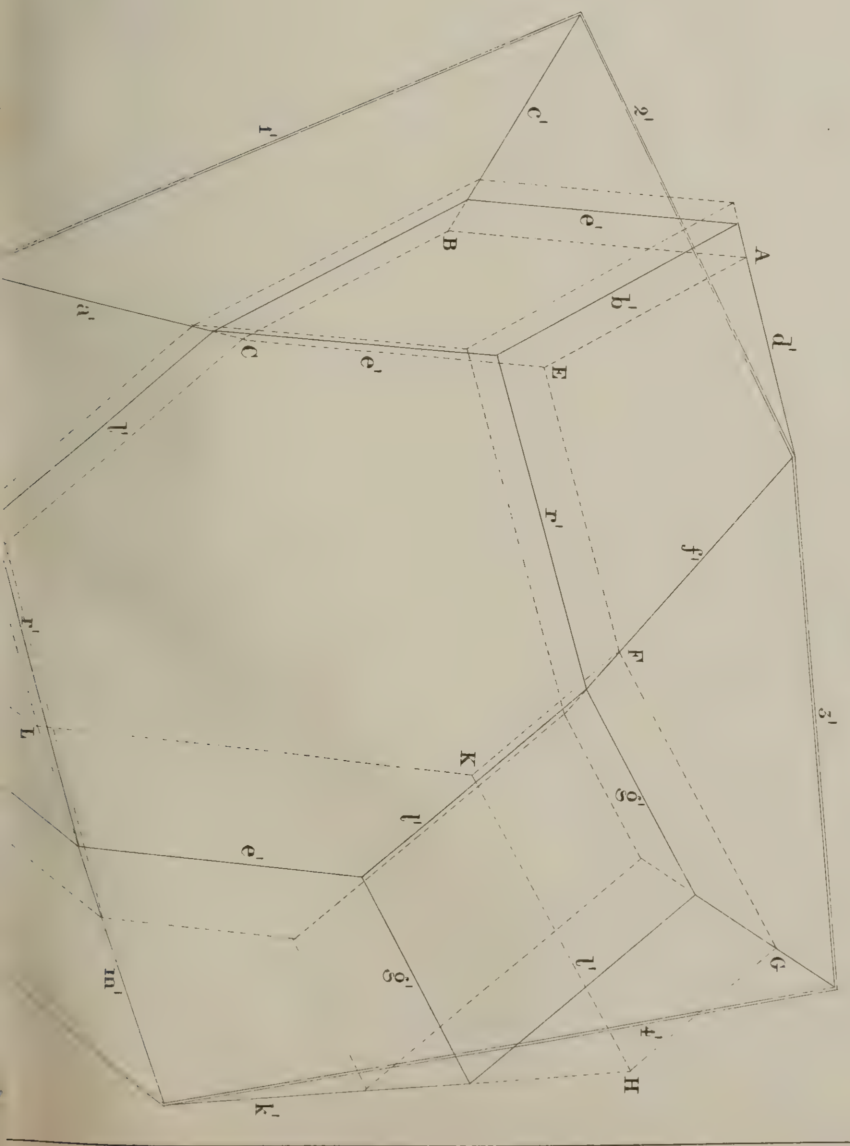


Fig. 1.





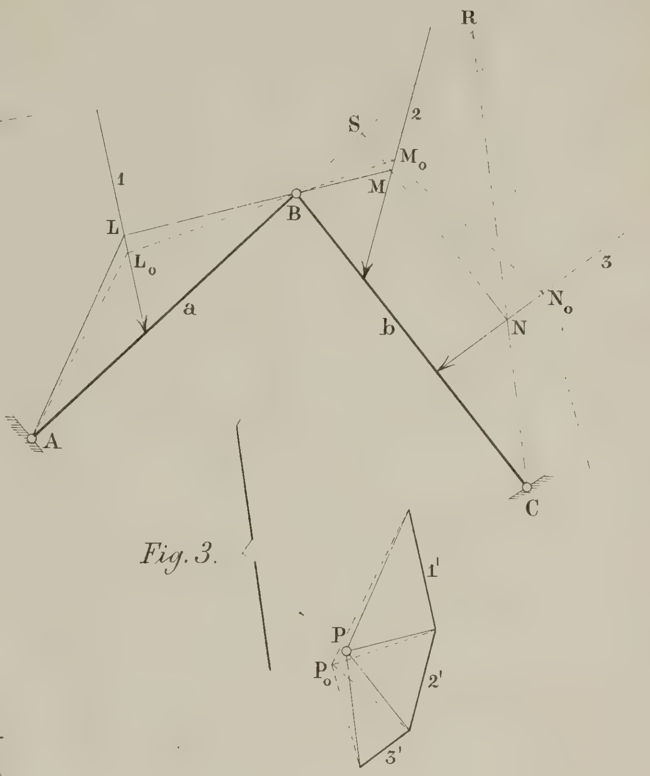


Fig. 3.

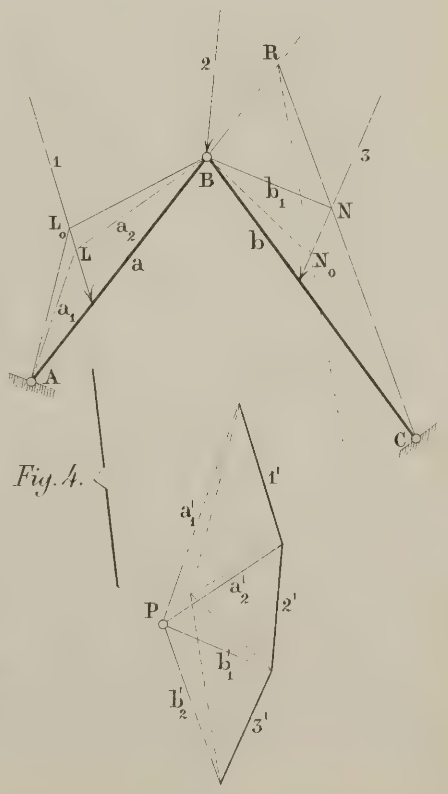


Fig. 4.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

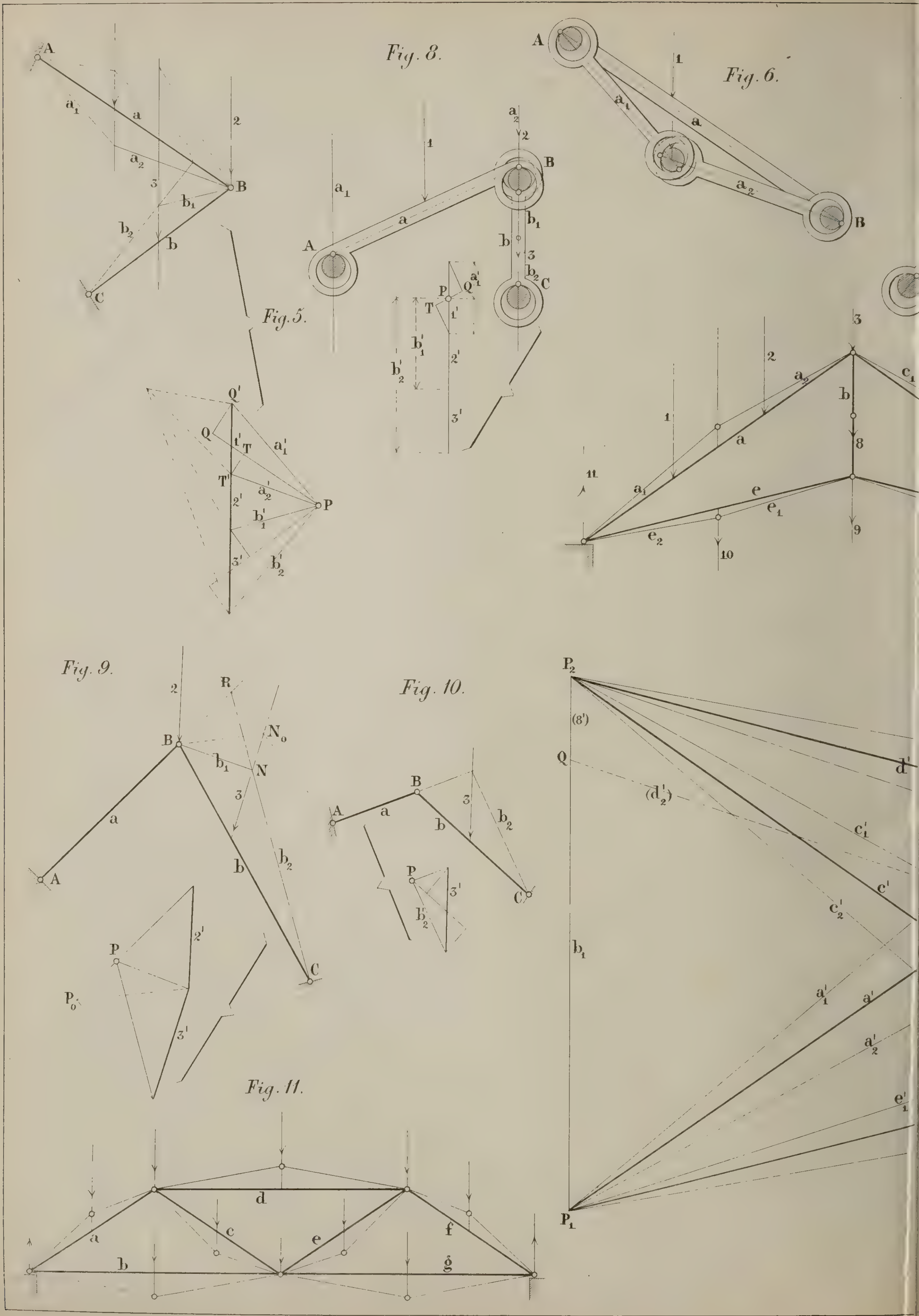


Fig. 5. Fig. 8. Fig. 6. Fig. 9. Fig. 10. Fig. 11.

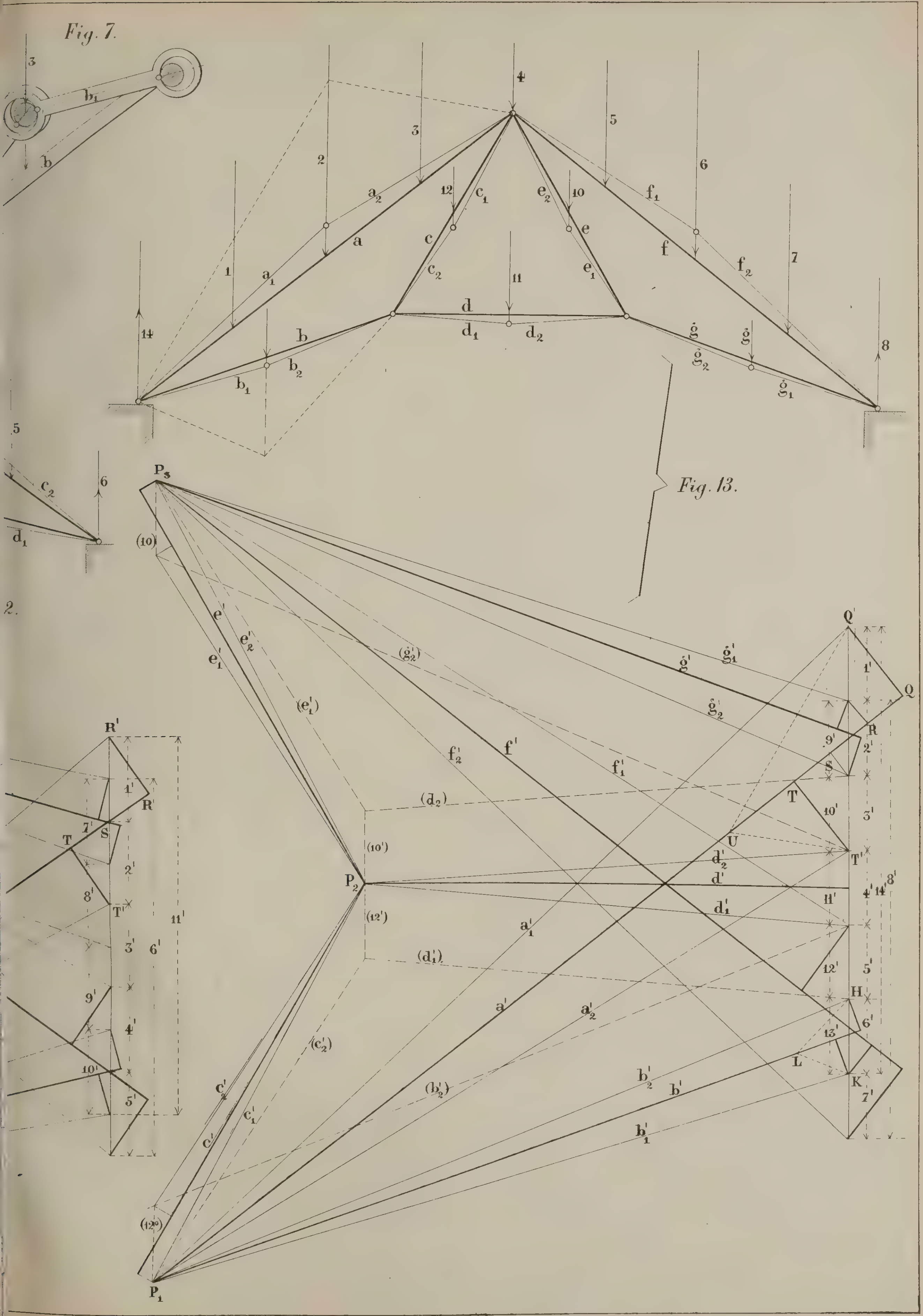


Fig. 7.

Fig. 13.

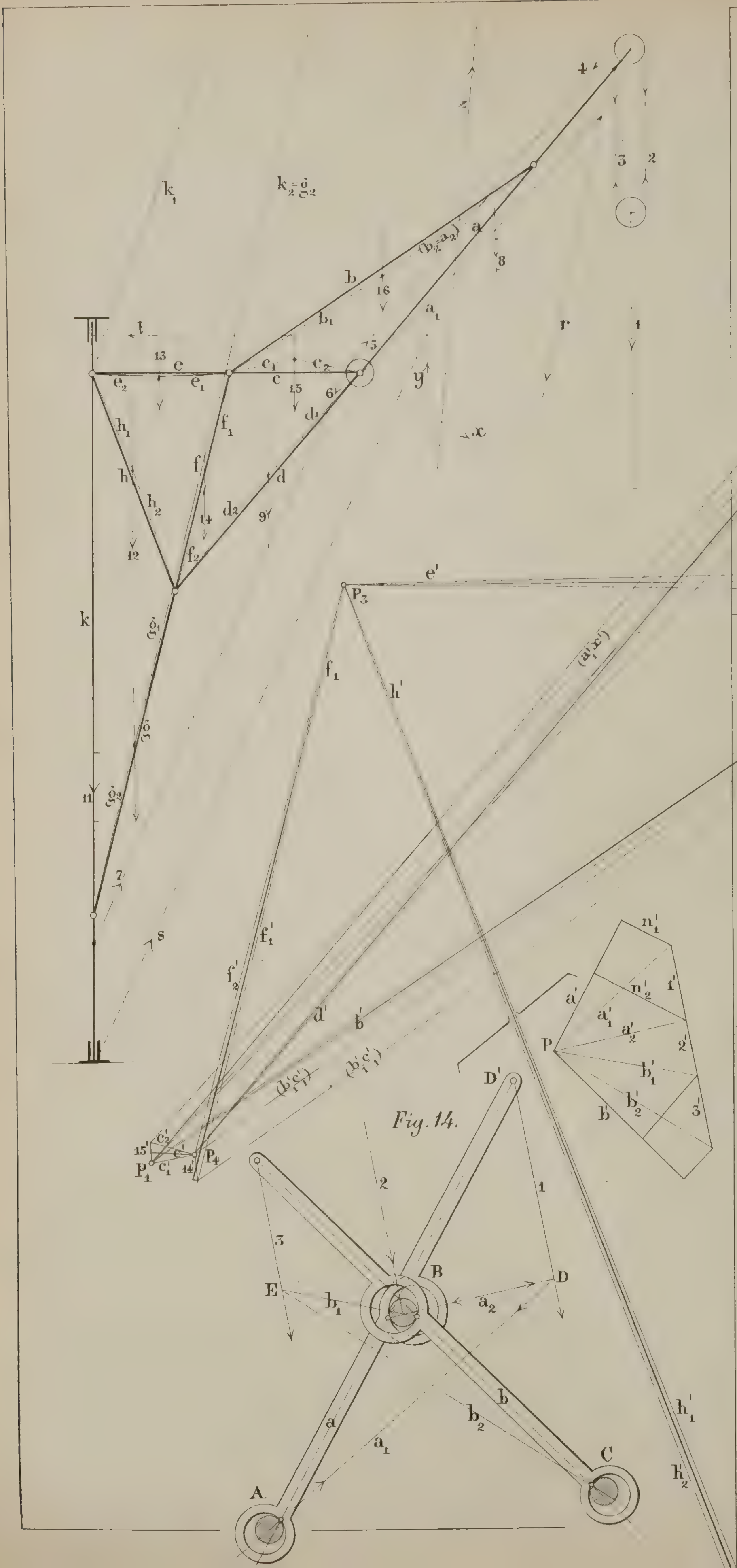


Fig. 14.

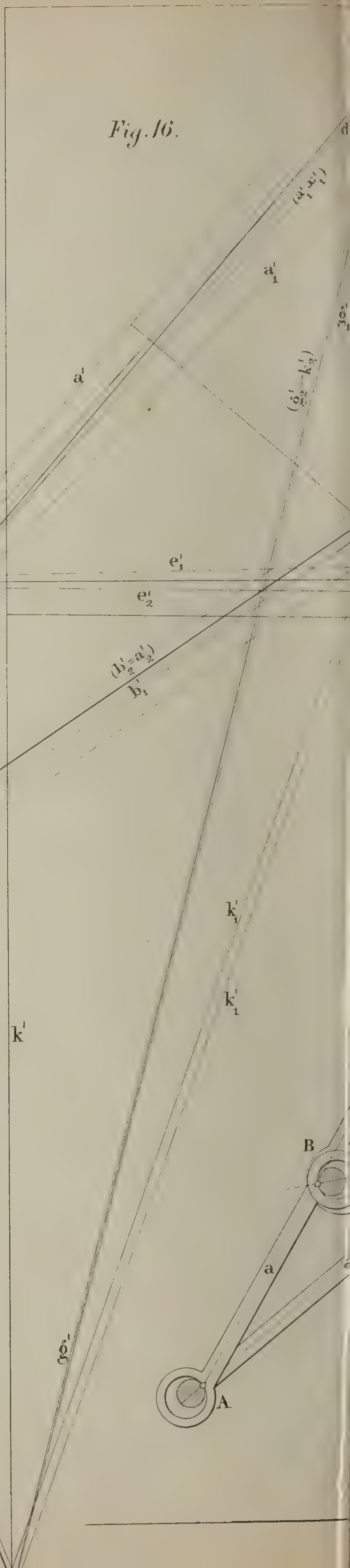


Fig. 16.

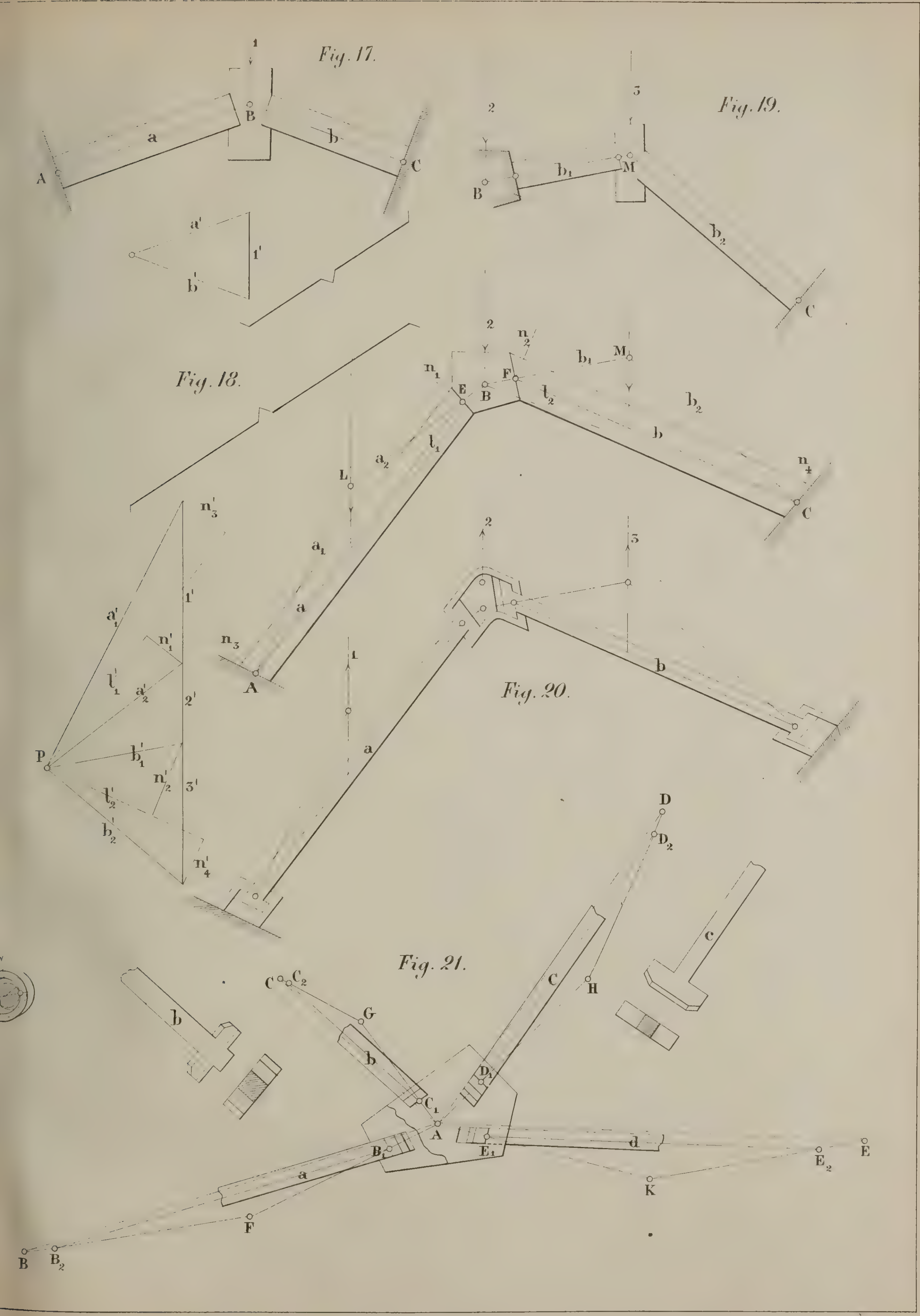


Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.

appoggia ad un corpo fisso per mezzo di un giunto piano, non subisce scorrimento al giunto finatantochè il piano di questo non comprenda un angolo almeno uguale a quello d'attrito colla normale all'asse del membro ossia alla linea d'azione della forza che lo sollecita. Pure in pratica, trattandosi di costruzioni statiche e dove è da cercarsi sempre la maggiore stabilità, si devono tenere i giunti *normali* alle linee d'azione delle forze sollecitanti i membri. Ciò posto siano due membri a e b (fig. 17) appoggiati a due piani fissi ed al cui nodo comune sia applicata una forza 1. La figura mostra in qual modo è da farsi il collegamento. In sostituzione della caviglia abbiamo qui un membro di collegamento prismatico, a cui per es. nelle capriate in legno si dà il nome di *monaco* ed in quelle metalliche il nome di *scatola* che è ordinariamente in ghisa; talora si impiegano due *piastre* di ghisa o di ferro. Or debbansi determinare i giunti piani nel caso che i due membri a e b siano soggetti a flessione. Siano A, B, C (fig. 18) i nodi, ossia quei punti che nel caso dei collegamenti a caviglie rappresentano i centri delle caviglie stesse. La forza 2 è applicata al nodo B ossia al membro di collegamento; le forze 1 e 3 sono le risultanti di quelle che sollecitano i due membri a e b. Fatto un tentativo come per la fig. 4, si trova il poligono funicolare o delle reazioni ALBMC. Per la massima stabilità le superficie d'appoggio dovranno essere normali a tali reazioni. Così si sono segnate le superficie di giunto in A e C e anche al membro di collegamento segnando i giunti normali alle linee LB e MB per due punti E ed F fissati ad arbitrio su tali linee. AE e FC sono allora gli assi dei due membri a e b. Il membro di collegamento B è in equilibrio sotto l'azione delle forze 2, a_2, b_1 oppure di 2 e delle componenti normali e longitudinali n_1 l_1 di a_2 e n_2 l_2 di b_1. Un membro per es. b inflesso e compresso può essere sostituito da due altri b_1 e b_2 semplicemente compressi aventi per assi CM e MF ed un membro di collegamento in M come mostra la fig. 19. Rovesciando il senso delle forze per modo che i due membri riescano inflessi e tesi i collegamenti vanno modificati per es. come sono indicati schematicamente nella figura 20. Se al nodo comune B non fosse applicata alcuna forza esterna le azioni dovute ai membri a e b sarebbero uguali e contrarie (vedi la fig. 3) e allora il membro di collegamento ha i due giunti paralleli i quali possono ridursi infinitamente vicini, ossia può essere soppresso tutto il membro, appoggiando direttamente a contro b con un giunto normale alle loro mutue azioni uguali ed opposte.

La disposizione nei collegamenti a caviglie rimane inalterata sia che si tratti di membri tesi, sia di membri compressi. Nei collegamenti a giunti piani il membro di collegamento che presenta una forma semplice allorquando i due membri che vi si appoggiano sono compressi (fig. 17, 18) diventa alquanto complicato quando questi due membri sono tesi. Per tal motivo in pratica, mentre sono applicabili i giunti piani pei membri compressi, sono in generale preferibili i giunti a caviglie pei membri tesi. Nella fig. 20 si è pur voluto mostrare un collegamento di più membri a, b, c, d, di cui uno b è compresso, fatto con due piastre e a giunti piani. Siano B C D E i nodi ai quali terminano i membri stessi. Si segnino se già non sono obbligati i baricentri delle loro faccie di testa in B_2 C_2 D_2 E_2 sopra le linee di reazione BF, CG, DH, KE. Si fissino quindi i punti analoghi B_1 C_1 D_1 E_1 al nodo A. Saranno B_1 B_2, C_1 C_2, D_1 D_2, E_1 E_2 gli assi dei membri a, b, c, d. Le due piastre parallele sono

rilegate ad invariabile distanza; si vedono in figura i giunti normali alle rispettive linee di reazione. Ogni membro è terminato a T e ogni ala del T è impegnata con una piastra. Accanto ai due membri *b* e *c* si vedono ripetuti i membri stessi con altra vista per maggior chiarezza. Inutile il dire che questo collegamento potrebbe essere fatto con giunti cilindrici; le piastre permettono allora di terminare ogni membro con un semplice occhio, ciò che in molti casi riesce più conveniente che non l'impiego di una sol caviglia col centro in A, ma che esige dei membri terminati a forchetta.

Sperienze fisiotossicologiche sulla delfina.
Nota del Socio A. MORIGGIA,
letta nella seduta del 5 maggio 1878.

Quantunque non sieno nuove, benchè scarse, negli annali della nostra scienza, le sperimentazioni sopra sì potente veleno, pure non ho creduto opera del tutto perduta, controllare le poche che si conoscono, e cercare di rendere ragione di alcuni risultati discordi, che ne danno gli autori, col praticare le medesime sopra più larga scala, in condizioni diverse, e completarle da certe parti non ancora tentate, per potere e dalle conosciute, e dalle nuove, ritrarne un quadro sintomatologico, che meno imperfettamente possa prestarsi alle applicazioni fisiopatologiche e di medicina legale.

Le sperienze furono numerose, e vennero praticate in cani, porcellini d'India, conigli, uccelli e rane, ma più specialmente sopra questi ultimi animali, come quelli, che meglio e più a lungo permettono l'analisi della sintomatologia del veleno, in grazia particolarmente della funzione respiratoria pronunciata della loro pelle, e d'un certo grado d'indipendenza delle manifestazioni del loro sistema nervoso dagli sconcerti recati nel circolo sanguigno e nella respirazione: oltrechè le rane sogliono pur essere prescelte in medicina legale nelle perizie per avvelenamento, a cagione delle minime dosi di veleno, che il chimico in simili congiunture può mettere a disposizione delle sperienze pel fisiologo.

Le rane usate (*esculenta*) erano sempre recate di fresco al laboratorio, mezzane di grandezza, e femmine la massima parte. La rana legata assai lassamente sul patibolo alle quattro estremità, era sempre tenuta inumidita: il cuore ne venne sempre osservato a nudo. La temperatura del nostro laboratorio, in cui si sperimentava, oscillò tra 19° e 21° C.

La delfina venne in generale usata in acqua *leggerissimamente* acida per acetico, (l'acetico per sè anche in piccola dose offende): il titolo della soluzione del veleno è stato di 4 millig. per 1 cent. cub. d'acqua acidula: la soluzione venne adoperata ora per bocca o per via endermica, e talora per le due vie: sotto pelle la dose fu da $\frac{1}{10}$ di c. c. a 2 c. c: l'iniezione si facea al sommo delle coscie, di tutte e due se molta la soluzione usata, di una sola, se poca. Nell'esposizione per brevità chiamerò (riferendomi specialmente alle rane) *piccole dosi* di veleno, le quantità di soluzione del veleno da $\frac{1}{10}$ a $\frac{3}{10}$ di c. c.; *dose mezzana* da $\frac{3}{10}$ a $\frac{5}{10}$; *dose forte* oltre il $\frac{1}{2}$ c. c. a 2 c. c.

Anche per gli altri animali l'iniezione sottocutanea si praticava in punti molto limitati, ma numerosi, se occorrea, servendosi pure di soluzioni più forti di veleno.

Io non trascriverò dal diario, in cui per diligente cura del dottore assistente Battistini stanno registrate le singole sperienze, che i risultati generali e più saglienti: non dimenticando però all'occorrenza anche certi dettagli, quando posson tornare di particolare vantaggio.

1. *Azione locale del veleno.*

La delfina agisce irritando piuttosto fortemente la pelle, la mucosa, i muscoli, con cui venga in contatto, arrossando distintamente queste parti per maggior afflusso di sangue.

2. *Assorbimento del veleno: sua dose mortale.*

L'assorbimento si effettuava più rapido per la endermica, che per la via alimentare, quantunque l'area sottocutanea assorbente fosse piuttosto limitata nelle nostre sperienze, come si accennò nelle generalità: con la dose di gramma 0,0004 sotto pelle, le rane sopravivono diverse ore: con 0,0008, da 1^h a 2^h: con 0,002, 1^h: con 0,003, 45′: con 0,006, 35′. Queste dosi mortali del veleno vanno, s'intende, accettate con una certa larghezza, ben conoscendosi quanti fattori possono farle oscillare in più o meno.

In generale la rapidità della morte [1] si tiene in una certa proporzione colla dose del veleno, ma non tutto affatto, stante il potere molto irritante della materia velenosa, specialmente a dose elevata, sulla parte con cui viene in contatto. Sulla rapidità della morte delle rane ha discreto influsso la temperatura dell'ambiente: il freddo intenso (+ 5° C.) la ritarda: il caldo (+ 39° a 40° C.) l'accelera: l'influenza è notabile specialmente sulla sensibilità e molto meno sul cuore e sul respiro: il caldo però accelera meno la morte di quanto la ritardi il freddo.

Non ho cercato l'effetto della temperatura sopra gli altri animali.

I porcellini d'India ed i conigli sopportano per bocca dosi di veleno maggiore che per via ipodermica, ed in proporzione, maggiore che i carnivori, come ebbi a rilevare per le capre, in cui, come già pubblicai, la tolleranza per gli alcaloidi nelle vie digestive è ancora molto più spinta.

Per conigli mezzani di grandezza occorrono per bocca da 6 a 7 centigramma del veleno per condurli a morte in pochi minuti primi (2 a 10), mentre sotto la pelle bastano 2 a 3 centig.

I porcellini, piuttosto piccoli, muoiono in 10′ a 15′ con 5 millig. sotto la pelle: od in diverse ore con 2 centig. per bocca.

Un cane lupetto di mezzana grandezza, a cui, dopo amministrati 10 centig. per bocca, si era legato il muso, morì in pochi minuti, avendone prima rigettata una certa

[1] Non è sempre cosa facile il dire quando è morta la rana: io la ritengo per tale nel caso concreto, quando ha perduto la sensibilità ed i moti spontanei e riflessi ed il cuore si muove molto debolmente e raramente, non avendone mai veduta alcuna giunta a tal fase ristabilirsi ancora, qualunque fosse la dose del veleno.

porzione per vomito, per cui da questo lato non posso stabilire il minimum necessario per la via gastroenterica [1]: in un cane lupetto piccolo bastarono 4 centig. sotto pelle per addurre la morte in 10′.

Quando le dosi del veleno sono copiose, ma non tornano mortali, gli animali e specialmente i cani, si ristabiliscono molto presto: i cani anche nella stessa giornata dello sperimento: i conigli dopo 15^h o 30^h.

3. *Decolorazione della pelle.*

Le rane sotto l'azione del veleno mostrano abbastanza rapidamente più sbiadite le macchie nerastre della loro pelle e specialmente quelle ai lati del ventre: nel valutare questi cambiamenti di colore, naturalmente si è tenuto presente l'influsso, che sopra esso dispiega la luce per sè, come pure certe gradazioni di prosciugamento della pelle.

4. *Esaltamento della sensibilità e motilità.*

Tanto a piccole dosi, che a maggiori, sotto pelle, e per bocca, ma specialmente sotto cute, sorge dapprima negli animali un periodo di esaltata motilità e sensibilità cutanea, manifestandosi de'moti generali non tetanici, ma vivaci, ripetuti abbastanza sovente, spontanei o sotto leggerissima eccitazione meccanica della pelle: un cane veniva eccitato dal solo posarsi di mosche sul pelo.

Il periodo di esaltamento riesce assai assai breve nelle dosi forti del veleno e più prolungato nelle dosi mezzane e piccole.

5. *Depressione ed abolizione dell'eccitabilità dei nervi sensomotori, e dell'irritabilità muscolare.*

Nelle rane la sensibilità della pelle agli stimoli meccanici (pinzettature) è la prima ad essere abbassata e quindi spenta, cominciando dalle estremità inferiori, quindi in senso ascendente fino al muso ed all'occhio, dove per ultimo viene a cessare.

Compagna alla diminuzione e cessazione della sensibilità va la motilità: i moti riflessi si spengono pure dal basso all'alto nell'animale secondo il comportamento della sensibilità: più a lungo di questa però si mantiene la motilità, tanto che quando ancora residua della sensibilità al muso, irritando tal parte si possono destare moti riflessi anche nelle gambe, che per sè stimolate non rispondono: i moti però appaiono molto men forti: cessati del tutto i moti riflessi provocati, l'animale può mostrare ancora de'movimenti cosidetti spontanei, deboli per lo più ed anche incoordinati e disarmonici.

(1) In altri cani, a cui amministrai il veleno per bocca in modi diversi, non mi riuscì mai a produrre la morte, poichè essi lo rigettavano più o men tardi secondo il modo di porgerlo: così, tra gli altri, un cane, al quale si era data della polvere di delfina involta in fette di carne, dopo 3^h, la rigettò senza che punto fosse attaccata dal sugo gastrico; si presentava d'un color rosso vivo e contenente quasi tutta la delfina: la poca delfina assorbita spiegava le sofferenze patite in tal periodo di tempo: al luogo del sugo gastrico, non era stato segregato che del muco, almeno certo in quantità soverchiante l'azione del sugo gastrico.

L'eccitabilità dei nervi motori e del midollo spinale direttamente per sè, e delle radici anteriori spinali suol durare ancora da 5′ a 30′ dopo la morte, secondo specialmente la dose del veleno. L'irritabilità muscolare, messa in opera per mezzo dell'ammoniaca, si trova conservata ancora più in là dell'eccitabilità de' nervi motori.

Per contro negli animali a sangue caldo e specialmente nei cani trovai, che la prima ad estinguersi è la motilità delle estremità inferiori e quindi della coda e solo da ultimo la sensibilità, tanto che viene un periodo in cui irritando le estremità inferiori distese, l'animale grida e fa moti colla parte anteriore del tronco, ma non ritira le estremità state stimolate, esse giacciono floscie: qualche volta però l'animale riesce ancora a muoverle spontaneamente, ma debolmente: nelle convulsioni poi, che finiscono tosto nella morte, allora si vedono anche le estremità inferiori distendersi attivamente.

Sotto l'azione del veleno si osservano nelle rane (in altri animali non si cercò) in tutti i muscoli del corpo, ma specialmente nella regione mascellare inferiore e nelle estremità posteriori, massime in corrispondenza dei punti dove ha luogo l'iniezione del veleno, dei saltellamenti muscolari (sussulti), ora limitati ad una regione, ora quasi generali, forti o deboli, frequenti o rari, quando provocati per stimolazione della pelle e quando spontanei: questi sono gli ultimi a svanire, tantochè ancora qua e là se ne scorgono, benchè la sensibilità sia già spenta dovunque e sieno persino cessati i moti volontarî, di cui più sopra si scrisse: però in tale periodo questi moti sussultorî si addimostrano più limitati e deboli: messi a scoperto i muscoli, se ne rimarcano alcuni fasci invasi da contrazioni fibrillari, rapidamente alternantisi col riposo di altri fascicoli.

Queste contrazioni fibrillari muscolari costituiscono un segno abbastanza importante del veleno: esse appaiono quasi sempre specialmente nelle dosi men forti di delfina, ed in ambiente piuttosto caldo, avendo l'avvertenza però, che già un certo grado di calore per sè stesso vale a svilupparle (così le trovai senza veleno, sperimentando da + 39° a + 41° C).

Le rane a + 5° C. conservano molto più a lungo la loro sensibilità nell'avvelenamento, che da + 39° a + 41° C.

Legando in rane l'arteria femorale, e praticando l'iniezione all'altra coscia, si trova che ambedue le gambe perdono ugualmente i loro moti riflessi, per cui la lesione indotta dal veleno si realizza essenzialmente nel midollo spinale, e come si vedrà in seguito, nell'allungato. Da quanto si è esposto in questo articolo, si scorge che la trasmissibilità mentre è già spenta nel senso dal basso all'alto nel midollo spinale, ancora può sussistere nella direzione inversa cioè dall'alto al basso (nelle rane).

6. *Intelligenza e pupilla.*

In porcellini trovai l'occhio farsi sporgente e traballare: la vista e l'udito verificai, massime nelle dosi non rapidamente mortali, nei cani mantenersi sensibilmente inalterati fino all'ultimo momento, come pure l'intelligenza: sul principio l'animale grida, si dibatte, corre, morde la catena: poi seguita il periodo di avvilimento: l'animale si abbandona: par che dorma, ma un nonnulla lo risveglia.

Benchè in buona parte convinto ancor io di quanto affermano parecchi, tra cui ultimamente Albertoni e Lussana F. [1], non doversi contare gran che sul risultato della pupilla negli avvelenamenti (eccetto i veleni midriasici e miotici per eccellenza), pure dirò quanto di meglio ho osservato al proposito: con dosi piccole di veleno essa appare nella maggioranza de'casi, dilatata, e ristretta per lo più nelle dosi forti: evvi tendenza a ristringersi in ambiente piuttosto caldo: in un uccello agonizzante per forte dose di delfina ne trovai una ristretta e l'altra larga, benchè (s'intende) uguale la luce: talora appaiono alternative di allargamenti e ristringimenti.

7. *Respirazione polmonare.*

Dapprima si ha un periodo di esaltamento dimostrato da frequenza maggiore negli atti respiratorî, il qual periodo si protrae più o meno secondo la dose del veleno: nelle forti dosi di delfina nelle rane il respiro cessa quasi istantaneamente: nelle mezzane, dopo qualche minuto: nelle deboli, dopo alcune ore.

Se la rana è supina sul patibolo, il respiro cessa prima: più tardi se è libera, o sospesa per aria: dal lato della respirazione non si osserva un influsso rimarchevole della temperatura dell'ambiente.

Anche negli animali a sangue caldo dopo l'affanno di respiro, sottentra una respirazione rara e superficiale, come indica l'ago nel diaframma.

8. *Cuore.*

Nelle rane dopo il periodo più o meno breve (sempre però assai breve) di esaltata frequenza cardiaca, presto succede una diminuzione numerica di battiti: la forza e la mole del cuore scema più o meno rapidamente e più o meno forte secondo la dose del veleno e la rapidità di assorbimento: il cuore talora si trova ridotto ad $\frac{1}{3}$ dal volume primitivamente offerto nella diastole, ed in proporzione nella sistole: nella sistole sovente sembra, che non si svuoti il ventricolo, che d'una porzione di sangue.

Nelle forti dosi di delfina, specialmente se la temperatura dell'ambiente sia elevata (25° a 41° C.), in breve le diastoli ventricolari sogliono presentarsi assai espanse e prolungate da durare talora molti secondi (30″ a 70″: le sistoli non pigliano più di 3″ a 5″).

Quando l'animale muore tardi (piccole dosi) e specialmente in ambiente freddo, si mostrano abbastanza regolate nella loro durata le sistoli e le diastoli.

A dosi elevate di veleno ed a temperatura 25° a 41° C. il cuore nella rana in ultimo nella massima generalità de'casi, si ferma in diastole espansa.

Negli animali a sangue caldo il cuore si riscontra fermato sempre in diastole, qualunque sia la dose del veleno: in conigli osservai anche pel cuore fermo in diastole delle contrazioni fibrillari vivaci a modo delle già notate pei muscoli volontarî.

A temperature ordinarie (12° a 21° C.) e specialmente a + 5° C. e con dosi piccole di delfina assai sovente arriva di veder fermato il cuore della rana in sistole del ventricolo.

[1] P. Albertoni e F. Lussana, *Sul criterio fisiologico nelle perizie medico-legali*, 1874.

Dei due fattori però (dose di veleno e temperatura elevata) che tendono in generale a fermare il cuore in diastole espansa, trovai produrre l'effetto con maggior costanza la dose che la temperatura: ciò torna utile a conoscersi per ispiegare specialmente i risultati diversi segnati a proposito di questo sintomo importante dagli autori.

Ancora ultimamente in un famoso processo di avvelenamento per delfina, i miei egregi colleghi Ciaccio e Vella ed io, che per ragioni d'ufficio ebbimo a praticare diverse sperienze sulle rane, ci trovammo, per quanto riguarda l'arresto del cuore in diastole o sistole, con risultati diversi alla mano, che mi pare potersi spiegare tenendo conto delle due condizioni sopracitate.

Sebbene la potenza della temperatura in genere fosse da presumersi in animali cosidetti a sangue freddo come le rane, pure giustizia vuole, che io dichiari pubblicamente essere stati i predetti professori Ciaccio e Vella, che dapprima a voce con me e dappoi per iscritto ([1]) richiamarono l'attenzione dello sperimentatore sull'influenza della temperatura a produrre l'arresto del cuore in diastole nell'avvelenamento per delfina: l'osservazione torna tanto più importante perchè può aver larga applicazione per quanto si riflette ad altri veleni.

Sperimentando però ulteriormente, son persuaso, che i medesimi professori troveranno pure l'influsso da me sopra notato della dose del veleno e della conseguente rapidità della morte dell'animale.

Le varie modificazioni notate nel cuore sono da riferire ad azione di soverchio CO^2, o del veleno diretta sull'innervazione del cuore, o ad effetto sulla circolazione sanguigna periferica, od infine a diverse di queste cagioni? ([2]) La vaso-paralisi sanguigna o la vaso-costrizione non debbono certo esser estranee alla riduzione di frequenza, mole e forza del cuore, come nella produzione delle sue grandi diastoli, secondo c'insegna tra l'altre, l'esperienza di Goltz sulla vaso-paralisi riflessa addominale.

A meglio decifrare l'azione del veleno sul cuore, in un coniglio si misero allo scoperto i due vaghi al collo, poi s'iniettò sotto la pelle un po' di delfina, e nell'istante medesimo dell'iniezione si tagliarono i due vaghi: l'animale morì in circa 20′: il cuore si trovò in diastole piuttosto espansa con sangue nerastro.

9. *Sangue.*

Il colore del sangue nelle rane si tramuta presto in rosso scuro: nelle parti figurate non trovasi alterazione rivelabile col microscopio: in ambiente a temperatura elevata, il sangue traspare dal cuore ancora più fortemente oscurato e più rapidamente negli animali a sangue caldo trovai pure il sangue rendersi nerastro anche nel ventricolo cardiaco sinistro: il sangue diventa anche meno coagulabile per sè.

([1]) I professori Ciaccio e Vella osservarono arrestarsi sempre il cuor di rana in diastole alla temperatura di 35° a 40° C., come si legge a pag. 38 dell'opuscolo del prof. F. Selmi, *Sulle ptomaine* ecc. Bologna, 1878.

([2]) L'azione del veleno sul tessuto stesso del cuore pare che non debba esser molto notevole, almeno se si misura dal modo di comportarsi dell'irritabilità dei muscoli volontari.

10. *Fatti diversi attinenti specialmente alle vie gastroenteriche.*

Il veleno, precipuamente dato per bocca, aumenta la saliva ed il muco: gli animali (cani, conigli, porcellini) danno dalla bocca abbondanza di bava (muco-saliva): nello stomaco si riscontra buona copia di muco, di cui una parte ripetibile da deglutizione, che si rinnova abbastanza ravvicinata nell'avvelenamento.

Il liquido stomacale tende a perdere la sua reazione acida, anche quando vi sta presente la carne e per lungo tempo come si scrisse, e per di più si mostra impotente sulla carne (cani).

Nei cani il veleno produce con grandissima facilità il vomito ripetuto specialmente nei casi che esso sia esibito per bocca: i cani vomitano anche preso il veleno sotto la pelle: nei conigli e nei porcellini si hanno vomiturizioni ripetute, dando il veleno anche sotto pelle.

Amministrando il veleno per bocca, gli animali aprono sovente la bocca: i porcellini ed i conigli fanno per di più de'moti come di masticazione.

Le rane non aprono la bocca, che quando sono libere o sospese per aria: legate supine sul patibolo non lo fanno.

I porcellini specialmente qualche volta mostrano tanta sete da bere la propria orina, poichè gli animali in generale orinano durante l'avvelenamento, non ripetutamente però.

La defecazione talora manca e quando sopravviene, lo che è specialmente col veleno dato per bocca ed a piccola dose, non si ripete che una o due volte: le feccie non sono liquide.

Pigliato il veleno per bocca o sotto pelle, si hanno moti intestinali eccellenti (massime nei conigli) forti, estesi, duraturi, indipendenti fino ad un certo punto dall'azione dell'aria: nelle cagne e nelle coniglie gravide si osservano dei moti assai energici e protratti dell'utero gravido, a modo che per le intestina, ma ancora più gagliardi.

Il veleno esce dall'organismo specialmente per la orina: non si nota influsso rimarchevole del veleno sulla temperatura del corpo (le orecchie per es. nel coniglio dapprima si riscaldano: in seguito vanno raffreddandosi): nè si osserva particolare modificazione nel tempo della rigidità cadaverica: poche però sono state le osservazioni praticate intorno a questi ultimi fatti.

11. *Autopsia.*

Si riscontrano iniezioni vascolari nelle parti in cui il veleno è venuto dapprima in contatto (pelle, vie gastroenteriche): mucosità nello stomaco: del cuore già si disse: i polmoni talora leggermente ingòrgati di sangue: il cervello ed il midollo spinale non offrono gran che di particolare: il midollo allungato pare più iniettato. Nelle rane in generale i fenomeni d'iniezione vascolare variano secondo l'arresto del cuore in diastole o sistole.

Per quanto riguarda la successione dei sintomi più saglienti, si può dire che nella rana dapprima vi ha attacco del respiro polmonare, quindi del cuore, e poscia della sensibilità cutanea e motilità a cominciare dalle estremità inferiori salendo al

muso, essendo i moti riflessi i primi a mancare, poi i volontarî, e da ultimo le contrazioni fibrillari: l'eccitabilità dei nervi motori per sè, e l'irritabilità muscolare sono le ultime a scomparire: il cuore rimane fermato per lo più in diastole, ma talvolta in sistole, con influenza marcata da questo lato per la dose del veleno e per la temperatura dell'ambiente.

Negli animali a sangue caldo l'offesa del respiro e del cuore procedono sensibilmente parallele: la motilità è la prima a spegnersi, e dappoi la sensibilità nell'ordine e nel senso indicato nel presente lavoro: il cuore sempre s'arresta in diastole.

Per quanto riguarda gli effetti della delfina nell'uomo non molto se ne conosce: usata un tempo come sedativa delle convulsioni e dei dolori, oggidì raramente vien messa in opera a scopo terapeutico.

Nel *Trattato di materia medica e terapeutica* del prof. A. Cantani (Milano, 1869) nel vol. II a pag. 256-61 si legge essere stata la delfina somministrata internamente da 5 a 10 milligramma per volta, e due a tre volte al giorno, producendo grande salivazione senza attaccare il cervello ed i sensi, se non al sopravvenire dell' asfissia: essa importa pure anestesia della pelle: nelle dosi non forti, adduce vomito e diarrea.

Nel *Trattato elementare di materia medica e terapeutica* del prof. Carlo von Schroff (1ª traduzione italiana del prof. Semmola, Napoli, 1874) a pag. 688 è scritto, che la delfina sia stata amministrata alla stessa dose, che la veratrina (alla quale Dragendorff la paragona per gli effetti): Schroff fece sperienze sull'uomo con dose di veleno da gramma 0,006 a 0,01: si ebbe bruciore alle labbra, alla lingua, saliva, nausea, rutti, diminuzione di frequenza nel polso.

Turnbull suole prescriverne dosi molto più elevate; e gli stessi Trousseau e Pidoux (*Trattato di terapeutica e di materia medica*, 3ª ediz. italiana pel dott. Pepere, 1864) nel vol. II (arte di formulare) a pag. 153 danno la seguente ricettazione: delfina gramma 1, alcool rettificato gramma 8, da prendersene una a venti goccie al giorno: e poi a pag. 74 del vol. II dicono darsi essa nella dose da 15 a 20 centig. al giorno.

Cayrade (Journal de l'anat. et de la physiol. publié par Robin, 1869, pag. 325) dice che i sali di delfina nell' uomo si potrebbero somministrare progressivamente cominciando da 1 millig. al giorno: e questo consiglio mi pare certamente il migliore da seguire, stante la potenza del veleno, e la molto varia sua purezza e forza, secondo diverse circostanze.

Sulla identità degli acidi usnico e carbonusnico.

Nota di E. PATERNÒ

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 16 giugno 1878.

Annunziando al XII Congresso degli scienziati italiani, riunitosi a Palermo nell'agosto del 1875, i primi risultati delle mie ricerche sull'acido usnico manifestai il dubbio che le due sostanze indicate coi nomi di acido betausnico o cladonico e di acido carbonusnico, altro non fossero che acido usnico, e che le piccole differenze osservate in talune delle loro proprietà dovessero attribuirsi ad un diverso stato di purezza (¹). Nella Memoria sull'acido usnico che in seguito presentavo a questa illustre Accademia (²) non ho creduto di dovere insistere su questo argomento, che del resto era per me di una importanza affatto secondaria, per la ragione principalmente che, non avendomi potuto procurare i licheni dai quali l'acido cladonico e l'acido carbonusnico erano stati ottenuti, non volevo complicare maggiormente la quistione con supposizioni più o meno fondate. Però le esperienze che quasi contemporaneamente a me pubblicava sull'acido usnico il dott. H. Salkowski, con risultati diversi dai miei, e la interpretazione che in seguito egli mi comunicava privatamente ed accennava nel *Jahresbericht* pel 1875, p. 610, nel rendere conto di tali esperienze, che cioè l'acido sul quale egli aveva operato fosse probabilmente l'acido carbonusnico e non il vero acido usnico, aggiungevano nuova importanza alla quistione cennata e rendevano necessarie esperienze decisive sul proposito. Occupato da altre ricerche, inceppato dalla difficoltà di procurarmi il così detto acido carbonusnico di sicura provenienza, ed impegnato col Salkowski di lasciargli libero lo studio dell'acido carbonusnico qualora esso fosse stato veramente un acido nuovo diverso dall'usnico, non ho creduto di dovere intraprendere questo studio; ma un incidente sorto nel frattempo ha richiamato nuovamente la mia attenzione su questa controversia e mi ha spinto a risolverla; voglio parlare della pubblicazione del prof. O. Hesse sui principî che si estraggono dai licheni, pubblicazione nella quale questo chimico non solo insiste sulla diversità degli acidi usnico e carbonusnico, ma crede di più di fornirne la prova sperimentale e sicura (³).

Prima però di esaminare il lavoro dell'Hesse e di esporre i risultati delle mie esperienze non credo inutile di accennar brevemente la storia dei tre acidi di cui mi sono sopra occupato.

(¹) Gazzetta chimica tom. V p. 349.
(²) Vedi pure Gazzetta chimica tom. VI p. 113.
(³) Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft tom. X p. 1324.

Come è noto l'acido usnico fu scoperto nel 1843 da Knop ([1]) in diversi licheni delle specie Usnea, Parmelia, Evernia, Cladonia, Lecanora; quasi contemporaneamente Rocheleder ed Heldt ([2]) osservavano la presenza dello stesso corpo, senza però studiarlo attentamente, nella *Cladonia rangiferina* e nell'*Usnea barbata* Fries. Dopo alcuni anni Stenhouse ([3]) rinveniva l'acido usnico nell'*Evernia prunastri* e studiava quello estratto dalla *Cladonia rangiferina* e dall'*Usnea florida,* osservando che per la distillazione secca dell'acido usnico grezzo si formava una nuova sostanza alla quale dava il nome di betaorcina.

La storia dell'acido usnico procedeva fin qui senza apparente difficoltà, quando due nuove pubblicazioni venivano a circondarla di una certa confusione. Da un lato nel 1861 O. Hesse ([4]) osservava che l'acido estratto dalla *Cladonia rangiferina* si fondeva a 175° e non verso 200° e lo considerava perciò come isomero dell' acido usnico di Knop, chiamandolo betausnico, e dall'altro lato lo stesso chimico nel 1866 ([5]) esaminando l'*Usnea barbata* Hoffm. vi rinveniva *una nuova sostanza cristallina gialla, tanto simile all'acido usnico, che facilmente si poteva prendere per quello,* ma che ne differiva un poco nella composizione e nel punto di fusione, situato qualche grado più basso (195°,4 invece di 200° circa) e che chiamava *acido carbonusnico* assegnandogli la formola $C_{19}H_{16}O_8$; la formola allora generalmente ammessa per l'acido usnico essendo $C_{18}H_{18}O_7$. La esistenza del primo di questi due acidi, cioè del betausnico, veniva confermata nel 1870 dallo Stenhouse, il quale inoltre correggendo quanto aveva precedentemente annunziato, mostrava che la betaorcina non era un derivato dell'acido usnico, ma bensì dell'acido estratto dalla *Cladonia rangiferina,* pel quale proponeva di sostituire al nome di acido betausnico quello di acido cladonico. Per continuare ad ammettere la esistenza del secondo, dell'acido carbonusnico, si credette un argomento la differenza dei risultati ottenuti da me e dal Salkowski cogli acidi estratti dalla *Zeora sordida* e dall'*Usnea barbata* Fries (*florida* Hoffm.), senza tener presente che la supposizione che l'acido del Salkowski fosse acido carbonusnico veniva a contraddire sino ad un certo punto le esperienze istesse di questo chimico, il quale dalle analisi dei sali di potassio, sodio, bario e stronzio del suo acido otteneva per l'equivalente di esso numeri compresi tra 329,7 e 347,1, mentre che per l'acido carbonusnico con la formola $C_{19}H_{16}O_8$ si richiede 372.

A tutto quanto precede si aggiunse infine la pubblicazione ultima dell' Hesse, il quale preoccupato dai dubbî più volte da me sollevati sulla esistenza dell' acido carbonusnico ha sottoposto a nuovo esame l'acido estratto dall'*Usnea barbata* Hoffm. confermando i suoi precedenti risultati. Egli continua ad ammettere la esistenza di un acido $C_{19}H_{16}O_8$, accordando che nell'*Usnea barbata* Hoffm. sia forse mischiato ad un poco di acido usnico; il suo principale argomento è tratto dai risultati analitici ottenuti col sale potassio, sebbene la media delle due combustioni fatte sui prodotti ch'egli giudica più puri gli abbia dato:

Carbonio	61,72
Idrogeno	4,42

([1]) Jahresbericht anno 1824, p. 376. — ([2]) Id. anno 1824, p. 385. — ([3]) Id. anno 1847-1848, p. 759. — ([4]) Id. anno 1861, p. 697. — ([5]) Annalen tom. CXXXVII p. 241.

richiedendo la formola $C_{19}H_{16}O_8$:

Carbonio 61,29
Idrogeno . . . . . 4,30.

In quanto al sale potassico dell'acido estratto dall'*Usnea barbata* Hoffm. l'Hesse ha trovato che esso può cristallizzare con diversa quantità di acqua; quello che si depone dall'alcool a 93 per cento è in prismi piatti gialli e contiene per cento 4,09 di acqua e 9,46 di potassio; quello che cristallizza dall'alcool diluito si presenta invece in belle fogliuzze giallo-pallide e contiene 14,48 di acqua e 8,27 di potassio per cento. Risultati questi che accordandosi abbastanza bene con la formola $C_{19}H_{15}KO_8 + H_2O$ (che richiede: acqua 4,20 e potassio 9,15 per 100) e $C_{19}H_{15}KO_8 + 3H_2O$ (che richiede: acqua 11,63 e potassio 8,47) sono per l'Hesse la più splendida conferma della esistenza dell'acido carbonusnico e della formola che egli gli ha attribuito.

In vero l'Hesse volendo dimostrare la diversità dell' acido estratto dall'*Usnea barbata* Hoffm. con l'acido usnico, invece di fondarsi sulle analisi che, per la difficoltà di combustione di queste sostanze, hanno spesso un valore problematico, e di studiare il sale potassico non ancora abbastanza definito per l'acido usnico, avrebbe potuto ripetere qualcuna delle importanti trasformazioni che io avevo scoperto per l'acido usnico dalla *Zeora sordida*; un risultato in questa via sarebbe stato più decisivo ed avrebbe subito troncato la quistione. Ma non avendo egli fatto un tale esame di confronto ho creduto necessario di ricorrerci io, e non possedendo dell'acido estratto dall' *Usnea barbata* per sottoporlo alle stesse trasformazioni a cui avevo sottoposto l'acido usnico, ho dovuto contentarmi di preparare il sale potassico del mio acido e compararlo a quello dell'acido carbonusnico, il primo ed il solo composto definito che finora l'Hesse abbia descritto, e pel quale soltanto mi era quindi permesso un esame comparativo.

Ho preso pertanto una cinquantina di grammi di acido usnico dalla *Zeora sordida*, di quello stesso dal quale ho preparato la decarbousneina, l'acido pirousnico ed altri composti egualmente definiti, e lo ho fatto bollire con acqua e bicarbonato potassico, in tal quantità che rimanesse un poco di acido usnico indisciolto. La soluzione filtrata ancora bollente era di color giallo bruno e pel raffreddamento si rapprese in una poltiglia di fogliuzze giallo-pallide, che lavate con acqua fredda e disseccate all'aria, perdettero per lo scaldamento a 110° il 12,23 per 100 d'acqua. Tutta la quantità del sale ottenuto fu divisa in due parti; una fu ricristallizzata dall'alcool a 91 per 100, l'altra dall'alcool a 50 per 100. Il sale che si depone dall'alcool concentrato si presenta in prismi gialli ed ha dato all'analisi i risultati seguenti:

gr. 3,8925 di sale perdettero per lo scaldamento a 110° in una corrente di aria secca gr. 0,1685 di acqua;

gr. 0,3845 di sale disseccato fornirono gr. 0,085 di solfato potassio.

Da questi risultati si calcola:

Acqua . . . . 4,32 per 100
Potassio nel sale secco 9,91
Potassio calcolato pel sale idrato. 9,48.

L'altra porzione del sale cristallizzata dall'alcool diluito si presenta in belle fogliuzze di color giallo-pallido, che all'analisi diedero:

gr. 2,827 di sale scaldato a 110° in una corrente di aria secca perdettero gr. 0,353 di acqua;

gr. 0,2332 del sale secco fornirono gr. 0,0512 di solfato potassico.

Cioè in 100 parti di:

Acqua . . . . -	12,19
Potassio pel sale secco	9,84
Potassio calcolato pel sale idrato	8,64.

Come si vede questi risultati si accordano quasi perfettamente con quelli ottenuti dall'Hesse col sale potassico preparato con l'acido estratto dall' *Usnea barbata* Hoffm. sia per l'apparenza dei sali, sia per l'acqua di cristallizzazione, sia per la quantità di potassio che contengono.

Le esperienze precedenti dimostrano quindi la identità del sale potassico esaminato da Hesse col sale potassico dell'acido usnico dalla *Zeora sordida,* però i risultati analitici si accordano meglio con la formola $C_{19}H_{15}KO_8$ pel sale secco, che non con quello $C_{18}H_{15}KO_7$ corrispondenti alla formola $C_{18}H_{16}O_7$ da me ammessa per l'acido usnico. A prima vista potrebbe quindi dedursi o che l'acido da me esaminato fin ora non sia il vero acido usnico, ma bensì l'acido carbonusnico di Hesse, o che ammessa la identità delle due sostanze l'acido usnico non corrisponda alla formola $C_{18}H_{16}O_7$; come conseguenza di ciò ne verrebbe che tutte le trasformazioni da me esaminate per l'acido usnico non sono state bene interpretate; ma basta leggere la mia Memoria per convincersi che ciò non è probabile, perchè i risultati da me ottenuti sono troppo netti e perchè la formola da me attribuita all'acido pirousnico ha ricevuto una conferma nello esame del suo prodotto di distillazione secca e di altri derivati che ho studiato insieme al mio assistente dott. Pietro Spica, e che saranno fra breve descritti. Del resto i risultati analitici miei e dell'Hesse sono perfettamente di accordo con quelli ottenuti da Knop, e da altri chimici che hanno esaminato i sali dell'acido usnico, e tutti ricevono la loro migliore interpretazione ammettendo che l'acido usnico $C_{18}H_{16}O_7$ sia un'anidride e che perciò i suoi sali corrispondano alla formola $C_{18}H_{17}MO_8$ e non a quella $C_{18}H_{15}MO_7$.

Prendendo infatti come punto di partenza tale formola per il sale potassico triidrato $C_{18}H_{17}KO_8 + 3H_2O$ si ha:

	Teoria	Esperienza	
		Paternò	Hesse
Acqua.	11,82	12,19	11,49
Potassio.	8,59	8,64	8,97.

E pel sale monoidrato $C_{18}H_{17}KO_8 + H_2O$:

	Teoria	Esperienza	
		Paternò	Hesse
Acqua	4,30	4,32	4,07 4,46
Potassio	9,33	9,48	9,46.

Pel sale anidro $C_{18}H_{17}KO_8$ infine la teoria richiede:

Potassio 9,75 per 100

mentre la esperienza mi ha dato:

9,91 e 9,84.

Knop sino dal 1843 aveva ottenuto risultati simili; infatti egli aveva trovato che l'usnato potassico disseccato conteneva 11,05 per 100 di *potassa*, ossia 9,16 di potassio; risultato che si accorda meglio con la formola $C_{18}H_{17}KO_8$ che con quella $C_{18}H_{15}KO_7$, la quale richiede 10,20 di potassio per 100.

Dell'usnato sodico sono state pubblicate due analisi da Stenhouse. Egli ottenne

Sodio 6,18 e 6,30 per 100

mentre la teoria per la formola $C_{18}H_{17}KO_8$ richiede:

Sodio 5,73

e per la formola $C_{18}H_{15}KO_7$:

Sodio 6,55.

Per il sale di rame Knop ha ottenuto il 10,20 per 100 di ossido, ossia

Rame 8,13

mentre la teoria per la formola $(C_{18}H_{17}O_8)_2Cu$ richiede:

Rame 7,97

e per la formola $(C_{18}H_{15}O_7)_2Cu$:

Rame 8,41.

Da quanto precede si vede quindi chiaramente che non solo le analisi del sale potassico fatte da me e da Hesse conducono ad ammettere che l'acido usnico sia un'anidride, ma che le analisi fatte da Knop e da altri confermano lo stesso modo di vedere.

Che poi l'acido usnico sia un'anidride risulta da altri fatti e da altre considerazioni e la natura anidridica dell'acido usnico era già stata da me implicitamente ammessa quando, per interpretare la formazione della decarbousneina e dell'acido pirousnico, scrivevo le due equazioni:

$$C_{18}H_{16}O_7 + 2H_2O = CO_2 + C_2H_4O + C_{15}H_{16}O_5$$
$$C_{18}H_{16}O_7 + 3H_2O = CO_2 + C_2H_4O_2 + C_3H_6O + C_{12}H_{12}O_5.$$

Infatti in queste equazioni si ammette che la eliminazione di CO_2 dall'acido usnico sia accompagnata dallo assorbimento degli elementi di una molecola di acqua, mentre ciò non sarebbe necessario qualora nell'acido usnico il CO_2 si trovasse sotto forma di CO.OH, come nella trasformazione dell'acido benzoico in benzina, dell'acido salicilico in fenol, dell'acido orsellico in orcina ecc.

Stabilito con le esperienze precedenti che l'acido carbonusnico di Hesse è identico all'acido usnico, si avrebbe potuto non volendo essere troppo rigorosi inferirne ancora la identità dell'acido usnico con l'acido esaminato dal Salkowski; ma tenuto presente che l'acido carbonusnico di Hesse proviene dall'*Usnea barbata* Hoffm. e l'acido di Salkowski dall'*Usnea florida* Hoffm. ho creduto necessario per togliere di mezzo qualsiasi dubbio di fare delle apposite esperienze rivolte a risolvere anche tale quistione. Mi sono perciò avvalso di un campione di acido usnico dall'*Usnea barbata* Fries (*florida* Hoffm.) che debbo alla estrema cortesia del dott. Salkowski, e che apparteneva all'acido studiato da questo chimico.

La piccola quantità di prodotto (meno di 2 grammi) non mi permise un esame comparativo completo, pur tuttavia credo decisivi i risultati ottenuti.

Ho preso una metà dell'acido del Salkowski e lo ho fatto bollire con alcool ed una goccia di anilina; il punto di fusione dei prodotti ottenuti, che ho cercato di frazionare alla meglio, non lascia dubbio che si erano formati i due composti che fornisce l'acido usnico con l'anilina, l'uno fusibile a 142°, l'altro a 170. Dal miscuglio di questi composti per l'azione dell'acido cloridrico ho rigenerato l'acido usnico e dopo averlo ben lavato lo ho riscaldato con alcool a 150° in tubo chiuso, come ho descritto nella mia Memoria per la preparazione della decarbousneina. Ho così ottenuto una piccola quantità di sostanza che esaminata al microscopio ha l'apparenza caratteristica della decarbousneina; ne possiede inoltre il punto di fusione e l'azione riduttrice sui sali di argento.

Queste esperienze per se stesse già abbastanza concludenti ebbero infine una splendida conferma nello esame cristallografico comparativo che il prof. G. Strüver dell'Università di Roma si compiaque di fare con l'altra metà rimastami dell'acido usnico del Salkowski e con un campione di acido usnico dalla *Zeora sordida*, avendoli l'illustre professore trovati cristallograficamente identici.

Da tutto quanto precede io mi credo quindi autorizzato a dedurre senza il menomo dubbio:

1° Che l'acido estratto da Hesse dall'*Usnea barbata* Hoffm. e quello estratto da Salkowski dall'*Usnea barbata* Fries (*florida* Hoffm.) sono acido usnico, identico a quello da me studiato ed estratto dalla *Zeora sordida*.

2° Che l'acido usnico è un'anidride e che i suoi sali monometallici corrispondono alla formola $C_{18}H_{17}M'O_8$.

Ed ora non mi resta che a manifestare il desiderio che l'Hesse ed il Salkowski ripetano le mie esperienze sull'acido usnico, per vedere se sono o pur no nel vero.

Non posso intanto terminare questa Nota senza dichiarare che mi riesce difficile di accettare l'opinione di Hesse che l'acido contenuto nella *Lecanora atra* insieme all'*acido atranorico* sia dell'acido cladonico e non dell'acido usnico; anche ammesso il caso che queste due sostanze siano realmente diverse, le esperienze mie e di Oglialoro mi pare meritino più fede di qualsiasi parere non fondato sopra fatti.

Se io avessi maggior facilità a giudicare le esperienze altrui senza accompagnare il giudizio con fatti da me osservati, non sarei lontano dal pensare che l'*acido usnetico* $C_9H_{10}O_3$ che l'Hesse ha recentemente scoperto nelle acque madri alcooliche da cui si depone l'acido usnico estratto dall'*Usnea barbata*, possa essere nient'altro che la decarbousneina da me scoperta ed ottenuta per l'azione dell'alcool sopra l'acido usnico. Infatti l'acido usnetico si fonde a 172° (non corretto) e contiene in 100 parti:

Carbonio 65,08
Idrogeno 6,38

e la decarbousneina si fonde a 175° e richiede:

Carbonio 65,21
Idrogeno . . . . . 5,78.

Altri punti di contatto si osservano nei caratteri fisici e chimici delle due sostanze.

Sopra alcuni derivati della santonina.

Memoria di S. CANNIZZARO e L. VALENTE

letta nella seduta del 7 aprile 1878.

Dovendo il prof. Struever pubblicare lo studio cristallografico da lui fatto sopra alcuni derivati della santonina ottenuti da me colla cooperazione del dottor Valente, occorre che io li descriva.

Lo farò per ora a questo sol fine.

La santonina $C^{15}H^{18}O^{3}$ coll'aggiunta degli elementi dell'acqua fa, oltre l'acido fotosantonico bibasico (1), quattro acidi monobasici isomeri $C^{15}H^{20}O^{4}$: cioè il santoninico, il santonico, il metasantonico, ed il parasantonico.

L'acido santoninico scoverto da Hesse (2) è il primo ed immediato prodotto dell'azione delle basi sulla santonina, e si distingue dagli altri tre isomeri principalmente per la facoltà con cui si ritrasforma in santonina. E forse perciò non siamo riesciti a prepararne il cloruro corrispondente, nè gli eteri composti.

L'acido santonico studiato da me e da Sestini (3) è il prodotto dell'azione prolungata delle basi energiche sui santoninati. Di questo acido, oltre il sale sodico, baritico e quello argentico (4), sono stati già descritti: 1. il cloruro corrispondente $C^{15}H^{19}O^{3}Cl$ fusibile a 170°-171°, ottenuto dall' azione tanto del cloruro acetilico quanto del cloruro fosforoso sull'acido santonico (5); 2. il joduro $C^{15}H^{19}O^{3}I$ fusibile a 136° ed il bromuro $C^{15}H^{19}O^{3}Br$ fusibile a 145°,5 ottenuti scaldando l'acido santonico sciolto nel cloroformio col joduro o col bromuro di fosforo (6); 3. i santonati metilico ed etilico, fusibile il primo a 86°-86°,5, il secondo a 94°-95°, ottenuti tanto per l'azione dell'acido cloridrico sopra una soluzione dell' acido santonico nel corrispondente alcool, o del cloruro santonico sull'alcool, quanto per l'azione dei joduri dei radicali alcoolici sui santonati (7).

L' acido santonico allo stato di sale sodico mutasi per l' azione dello idrogeno

(1) Sestini, *Sull'acido fotosantonico*. Gazzetta chimica. Tom. VI (1876) pag. 357. — Atti della R. Accademia dei Lincei. Serie 2a vol. II (1874) Transunti pag. XLI.

(2) Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft. Tom. VI (1873) pag. 1280.

(3) S. Cannizzaro e F. Sestini, *Ricerche sulla santonina*. Gazzetta chimica italiana (1873). Tomo III pag. 241. — (4) Idem pag. 245. — (5) Atti della R. Acc. dei Lincei. Serie 3a vol. I (1876) Transunti pag. 26. Id. pag. 27. — (6) Id. id. pag. 28. — (7) Id. id. pag. 28.

nascente in acido idrosantonico $C^{15}H^{22}O^{4}$ [1]; il cui sale di argento dà l'acido metasantonico, già descritto [2]. L'acido metasantonico è stato ora da noi ottenuto direttamente dal santonico, scaldando quest'ultimo alla temperatura di 290°. Il miglior modo di prepararlo è il seguente. — Si scalda l'acido santonico in una storta connessa ad un recipiente nel quale si fa il vuoto sia colla macchina pneumatica sia colla tromba di Bunsen; sotto la pressione tra 52 e 43 millimetri l'acido comincia a distillare tra 295° e 300°.

Il primo distillato è bianco e si solidifica immediatamente; prolungando la distillazione incomincia a passare colorato ed il punto di ebollizione si innalza. Conviene fermare a questo punto la distillazione.

Si scioglie tanto il distillato quanto il prodotto rimasto nella storta in una soluzione acquosa di carbonato sodico, si agita con etere per estrarre un po' di materia vischiosa formatasi; dalla soluzione alcalina con acido cloridrico si precipita l'acido metasantonico che si cristallizza poi nell'etere. Tanto per la forma cristallina, quanto per tutti gli altri caratteri, e per quelli dei derivati si mostra identico all'acido metasantonico ottenuto dall'acido idrosantonico. Si ottiene anche l'acido metasantonico dall'azione di una soluzione alcalina sopra un isomero della santonina fusibile a 127° da noi per ora detto santonide, e che descriverò più sotto.

Abbiamo preparato il cloruro e l'etere metilico dell'acido metasantonico al fine sopratutto di compararli ai corrispondenti derivati degli altri due acidi isomeri; cioè del santonico e del parasantonico.

Il cloruro metasantonico si ottiene in modo simile a quello santonico, cioè per l'azione tanto del cloruro acetilico quanto del cloruro fosforoso sull'acido.

In un tubo chiuso si scaldò a bagno maria per più ore 4 grammi di acido metasantonico e 5 di cloruro acetilico. Al liquido colorato un po' in giallognolo si aggiunse acqua fredda. La materia bianca che così si precipitò si raccolse sopra un filtro, si lavò con acqua freddissima sollecitamente e si seccò nel vuoto. Si cristallizzò quindi nell'etere anidro, da cui si ottenne in aghetti bianchi.

Si scaldò per circa 3 ore in un pallone connesso come un refrigerante a ricadere 4 gr. di acido metasantonico e 60 gr. di cloruro fosforoso. Si aggiunse acqua fredda e la materia precipitata si raccolse, lavò, seccò e cristallizzò come nella preparazione precedente.

Il cloruro metasantonico $C^{15}H^{19}O^{3}Cl$ preparato nell'uno o nell'altro modo è una sostanza bianca cristallina, la quale fonde a 139°, è discretamente solubile nell'etere da cui cristallizza per lento svaporamento. Coll'acqua calda si scompone in acido cloridrico ed in acido metasantonico.

Ha dato all'analisi i risultati seguenti:

I. gr. 0, 3135 di sostanza diedero col metodo di Carius gr. 0, 1557 di cloruro di argento, cioè 12,28 % di cloro.

II. gr. 0, 3546 di sostanza diedero gr. 0, 1798 di cloruro argentico, cioè 12, 54 % di cloro.

(1) Atti della R. Acc. dei Lincei. Serie 2ª vol. II pag. 592, vol. III parte Iª pag. 49, vol. III parte IIª pag. 363. — Gazzetta chimica italiana. Vol. VI (1876) pag. 341.

(2) Gazzetta chimica italiana. Vol. VI pag. 345.

III. gr. 0, 2795 di sostanza bruciata con cromato piombico diedero gr. 0, 2001 di acqua e gr. 0, 6517 di acido carbonico.

Da questi dati ricavando la composizione centesimale e comparandola con quella dedotta dalla formola si ha:

	III	II	I	Calcolo	
Carbonio	63,59	—	—	C^{15}	63,71
Idrogeno	7,95	—	—	H^{19}	6,65
Cloro	—	12,54	12,28	Cl	12,21
Ossigeno	—	—	—	O^{3}	17,43
					100,00

Il metasantonato metilico $C^{15}H^{19},CH^{3},O^{4}$ è stato preparato facendo passare una corrente di acido cloridrico in una soluzione bollente di acido metasantonico nell'alcool metilico, distillando poi una parte di questo alcool, aggiungendo acqua, seccando il precipitato e cristallizzandolo o nell'etere per svaporamento o nell'alcool metilico per raffreddamento. Si ottiene così in grossi cristalli lucenti ed incolori, fonde tra 101°,½ e 102°½.

Ha dato all'analisi i seguenti risultati:

Materia $0^{gr},3744$
CO^{2} $0^{gr},9462$
$H^{2}O$ $0^{gr},2675$

Deducendo la composizione centesimale e comparandola con quella calcolata si ha:

	Esperienza	Calcolo	
Carbonio.	68,92	C^{16}	69,06
Idrogeno.	7,90	H^{22}	7,91
Ossigeno.	—	O^{4}	23,03
			100,00

Il quarto acido isomero recentemente da noi scoverto al quale do il nome di acido parasantonico è stato ottenuto trattando con una soluzione bollente di soda caustica un altro isomero della santonina fusibile a 110° detto *parasantonide*, proveniente anch'esso dall'acido santonico come si vedrà nel seguito di questa Memoria.

Dalla soluzione alcalina si precipita il nuovo acido coll' acido cloridrico, e si cristallizza o nell'acqua o nell'etere.

Questo acido si ottiene altresì sciogliendo il parasantonide a caldo in una soluzione acquosa diluita di acido cloridrico; cristallizza per raffreddamento in parte; il resto si estrae dalle acque madri o svaporandole a dolce calore, o agitandole coll'etere.

L'acido parasantonico è una bella sostanza bianca cristallizzata, moderatamente solubile nell'etere, discretamente solubile nell'acqua, assai più a caldo che a freddo; dalla soluzione acquosa satura a caldo si separa per raffreddamento in grossi cristalli; dalla soluzione eterea per lento svaporamento in piccoli cristalli ben definiti.

È un acido energico, che agisce sulla tintura di laccamuffa, e scompone i carbonati alcalini anche a freddo.

I sali sono in generale solubilissimi nell'acqua ed anche nell'alcool, come quelli del santonico e del metasantonico; è perciò difficile ottenerli cristallizzati. Il sale sodico però si separa dalla soluzione acquosa in laminette micacee aggiungendovi una soluzione concentrata di soda caustica.

Il sale baritico è stato preparato per l'analisi nel modo seguente.

Si è trattata una soluzione acquosa bollente di acido con carbonato baritico in eccesso; si è filtrata e svaporata nel vuoto. Il sale rimasto in aghetti finissimi si lava con alcool ed etere che scioglie un po' di materia gialla che vi aderisce; si secca poi prima nel vuoto e poi a 130°.

Gr. 0, 4340 di questo sale hanno dato gr. 0, 1521 di solfato baritico cioè 20,60% di bario.

Il calcolo per la formula $Ba\langle {C^{15}H^{19}O^4 \atop C^{15}H^{19}O^4}$ richiede 20,66% di bario.

La combustione dell'acido ha dato i risultati seguenti:

	I	II	III
Materia	$0^{gr},3496$	$0^{gr},3770$	$0^{gr},3618$
CO^2	$0^{gr},8742$	$0^{gr},9442$	$0^{gr},9036$
H^2O	$0^{gr},2390$	$0^{gr},2572$	$0^{gr},2500$

Dai quali dati dedotta la composizione decimale, e comparata con quella calcolata si ha:

	Esperienza			Calcolo	
	I	II	III		
Carbonio	68,19	68,30	68,12	C^{15}	68,18
Idrogeno	7,59	7,58	7,67	H^{20}	7,57
				O^4	24,25
					100,00

L'acido parasantonico trattato col cloruro di acetile, colla anidride acetica e col cloruro fosforoso dà il parasantonide $C^{15}H^{18}O^3$ fusibile a 110°, da cui provenne.

Il parasantonato metilico $C^{15}H^{19},CH^3,O^4$ si ottiene facendo passare una corrente di gas acido cloridrico nella soluzione bollente di acido parasantonico nell'alcool metilico: col raffreddamento cristallizza in prismi duri. Si lava con alcool metilico e si ricristallizza sciogliendolo a caldo nello stesso alcool.

È una sostanza bianca poco solubile a freddo nell'alcool e nell'etere; fonde tra 183° - 184°. Colla soluzione acquosa o alcoolica di potassa o barite si comporta come gli eteri composti. Ha dato all'analisi elementare i seguenti risultati:

Materia	$0^{gr},3650$
CO^2	$0^{gr},9214$
H^2O	$0^{gr},2619$

Da questi dati deducendo la composizione centesimale e comparandola con quella calcolata si ha:

	Esperienza	Calcolo	
Carbonio	68,84	C^{16}	69,065
Idrogeno	7,97	H^{22}	7,913
		O^4	23,022
			100,000

Il parasantonato etilico $C^{15}H^{19},C^2H^5,O^4$ si ottiene facendo passare una corrente di gas acido cloridrico nella soluzione alcoolica bollente di acido parasantonico, raffreddandosi la quale cristallizza in aghetti bianchissimi. Basta lavarlo con poco alcool freddo e ricristallizzarlo nell'etere per averlo purissimo.

È una sostanza bianca che fonde a 172°; poco solubile nell'etere, solubile nell'alcool più a caldo che a freddo; un poco solubile nell'acqua bollente, da cui per raffreddamento cristallizza in aghetti.

Colle soluzioni alcaline si scinde come tutti gli eteri composti.

All'analisi ha dato i risultati seguenti:

Materia	$0^{gr},3602$
CO^2	$0^{gr},9205$
H^2O	$0^{gr},2669$

Deducendo la composizione centesimale e comparandola con quella calcolata si ha:

Esperienza		Calcolo	
Carbonio	69,72	C^{17}	69,860
Idrogeno	8,23	H^{24}	8,219
		O^4	21,921
			100,000

I quattro acidi isomeri differiscono non solo per la forma cristallina, la solubilità e tutti gli altri caratteri fisici, ma altresì per i caratteri dei loro corrispondenti derivati e per il modo di comportarsi coi reattivi. Lasciando in disparte l'acido santoninico, che si distingue nettamente dagli altri tre per la facilità con cui si muta in santonina, e per non dare perciò altri derivati; le principali differenze tra gli altri tre acidi possono riassumersi così.

Il cloruro acetilico ed il cloruro fosforoso trasformano l'acido parasantonico nella anidride corrispondente parasantonide $C^{15}H^{18}O^3$; trasformano invece gli altri due acidi santonico e metasantonico nei cloruri corrispondenti $C^{15}H^{19}O^3Cl$. I due cloruri però differiscono l'uno dall'altro sì per la forma cristallina come per il punto di fusione, fondendo quello santonico a 170°-171° e quello metasantonico a 139°.

I sali metilici dei tre acidi differiscono, oltre che nella forma cristallina, tanto nel punto di fusione che possono in pratica servire come il miglior mezzo per distinguere l'uno dall'altro i tre acidi. Difatto:

il Santonato metilico	fonde	a	86°
Metasantonato	»	»	102°
Parasantonato	»	»	183°.

Notevole è il fatto che il parasantonato metilico fonde a temperatura superiore dell'etilico, mentre che nei santonati avviene il contrario; in tutti e due i casi l'etere metilico per il punto di fusione si allontana più dall'acido che il corrispondente composto etilico; il qual fatto avrà forse qualche relazione con l'altro osservato dal prof. Struever: cioè che il santonato etilico è isomorfo coll'acido santonico, e il santonato metilico no.

Descriverò ora brevemente le due sostanze isomere della santonina accennate sopra.

L'una di esse fusibile a 127°-127°½ sarà detta per ora *santonide;* l'altra fusibile a 110°-110°½ *parasantonide* per le relazioni che ha coll'acido parasantonico. La

prima si ottiene bollendo per più ore una soluzione di acido santonico nell'acido acetico glaciale, distillando poi l'acido acetico sinchè la temperatura del residuo si innalzi a 180°; col raffreddamento si ottiene una massa vischiosa color d'ambra. Agitandola con etere e soluzione acquosa di carbonato sodico; decantando l'etere, e svaporandolo cristallizza la santonide, la quale poi si depura con successive cristallizzazioni nell'etere.

La santonide che così si prepara è sempre una piccola frazione dell'acido santonico adoperato che nella massima parte rimane inalterato e si scioglie nella soluzione acquosa di carbonato sodico.

La parasantonide si prepara scaldando come nella preparazione della santonide, la soluzione di acido santonico nell'acido acetico glaciale, distillando quest'ultimo, spingendo però il riscaldamento sino alla temperatura di 260°, alla quale dalla massa fusa si sviluppano bollicine di vapore. Questa massa raffreddata si condensa in una materia resinosa da cui si estrae l'acido santonico inalterato da un lato e la parasantonide formatasi dall'altro, agitandola con soluzione acquosa di carbonato sodico che scioglie l'acido e con etere che scioglie la parasantonide, la quale si ottiene svaporando l'etere e si depura cristallizzandola più volte nell'etere.

Le due sostanze isomere differiscono l'una dall'altra non solo per il punto di fusione, la forma cristallina ed il potere rotatorio (¹), ma altresì perchè trattate con una soluzione alcalina bollente non danno il sale dello stesso acido; la santonide dà il metasantonato e la parasantonide il parasantonato.

Questa trasformazione e l'analisi elementare dimostrano che le due sostanze sono tutte e due isomere della santonina. L'analisi elementare ha dato infatti i seguenti risultati:

	Santonide fusibile 127°,5.				Parasantonide fus. a 110°.	
	I	II	III	IV	V	VI
Sostanza	$0^{gr},2967$	$0^{gr},3248$	$0^{gr},3486$	$0^{gr},3722$	$0^{gr},3975$	$0^{gr},3352$
CO^2	$0^{gr},7944$	$0^{gr},8676$	$0^{gr},9425$	$0^{gr},9947$	$1^{gr},0651$	$0^{gr},8988$
H^2O	$0^{gr},1985$	$0^{gr},2187$	$0^{gr},2348$	$0^{gr},2485$	$0^{gr},2655$	$0^{gr},2252$

Deducendo da questi dati la composizione centesimale e comparandola con quella dedotta dalla formula comune $C^{15}H^{18}O^3$ si ha:

	I	II	III	IV	V	VI	Calcolo
Carbonio...	73.02	72,85	73,73	72,89	73,08	73,13	C^{15} 73,17
Idrogeno...	7,43	7,48	7,48	7,41	7,42	7,46	H^{18} 7,31
							O^3 19,52
							100,00

Sì la santonide che la parasantonide trattate con anidride acetica o col cloruro fosforoso rimangono inalterate.

Descriverò ora un'altra sostanza che è per l'acido idrosantonico ciò che la parasantonide è per l'acido parasantonico, cioè l'idrosantonide $C^{15}H^{20}O^3$. Nella mia Memoria sull'acido idrosantonico (²) ho già descritto due sostanze ottenute per l'azione

(¹) Sono tutte e due levogire, la santonide ha potere rotatorio più energico della parasantonide.

(²) Gazzetta chimica italiana. Vol. VI (1876) p. 341. — Atti dell'Accademia dei Lincei. Serie 2ª vol. III pag. 363.

del cloruro di acetile o del cloruro di benzoile sull'acido idrosantonico, ed ho dimostrato che esse erano i derivati acetilico e benzoilico di una anidride dell'acido idrosantonico che non avea ancora ottenuto e che chiamai sin d'allora idrosantonide. Ora noi siamo riesciti ad ottenere questa sostanza con un metodo simile a quello che ci diede la parasantonide coll'acido parasantonico; cioè bollendo per qualche tempo l'acido idrosantonico con acido acetico glaciale, distillando poi l'eccesso di di questo ultimo sinchè il liquido si colora notevolmente, ed agitando il residuo con soluzione acquosa di carbonato sodico che scioglie l'acido idrosantonico inalterato, e con etere che scioglie l'idrosantonide formatasi. Svaporando l'etere, e cristallizzando frazionatamente il residuo si ottiene l'idrosantonide pura. Con questo metodo se ne ottiene una piccola quantità. Se ne ottenne una maggior quantità circa un quinto dell'acido idrosantonico impiegato scaldando quest'ultimo in tubo chiuso per quattro ore a 140°-150° con il quadruplo peso di acido acetico glaciale, distillando poi quest'ultimo sotto piccola pressione, e trattando il residuo con soluzione acquosa di carbonato alcalino ed etere; svaporando la soluzione, e ricristallizzando il prodotto. Si ottiene anche, spesso mischiato al prodotto acetilico, ponendo l'acido idrosantonico in contatto della anidride acetica, e distillando parte di quest'ultima a bagno maria sotto debole pressione, trattando il residuo con carbonato alcalino ed etere, come nelle preparazioni precedenti.

L'idrosantonide è una sostanza cristallizzata che fonde tra 155°-156°; solubile nell'etere. Scaldata con anidride acetica e cloruro di acetile dà il derivato acetilico acetilidrosantonide già descritto nella Memoria citata. Col tricloruro fosforoso diede una materia oleosa che non riescimmo a depurare. Colla soluzione alcoolica di potassa e soda si trasforma rapidamente in idrosantonato.

L'idrosantonide sottoposta all'analisi ha dato i seguenti risultati:

	I	II	III	IV
Materia	$0^{gr},2605$	$0^{gr},2689$	$0^{gr},2684$	$0^{gr},3040$
CO^2	$0^{gr},6889$	$0^{gr},7199$	$0^{gr},7095$	$0^{gr},8119$
H^2O	$0^{gr},1865$	$0^{gr},1992$	$0^{gr},1982$	$0^{gr},2241$

Da questi dati ricavando la composizione centesimale e comparandola con quella calcolata per la formula $C^{15}H^{20}O^3$, si ha

	Esperienza				Calcolo
	I	II	III	IV	
Carbonio . . .	72,12	72,81	72,90	72,83	C^{15} 72,58
Idrogeno . . .	7,95	8,05	8,20	8,01	H^{20} 8,06
					O^3 19,36
					100,00

Istituto chimico dell'Università di Roma.

S. Cannizzaro

Sopra due altri isomeri della santonina.

Nota di S. CANNIZZARO e CARNELUTTI

letta nella seduta del 7 aprile 1878.

In una Memoria pubblicata nel 1874 ([1]) io descrissi col nome di metasantonina una sostanza fusibile tra 160° e 160°,5, che ha la medesima composizione della santonina e probabilmente il medesimo peso molecolare, ottenuta nello stesso tempo che un idrocarburo dall'azione prolungata di una soluzione di acido jodidrico in presenza del fosforo rosso sull'acido santonico. Avvertii allora che questa sostanza veniva mischiata ad un'altra più fusibile, che non giunsi a separare.

Io ora insieme al dottor Carnelutti siamo riesciti a separare le due sostanze nel modo seguente.

Dopo aver fatto bollire lungo tempo l'acido santonico con acido jodidrico bollente a 127° e fosforo rosso sinchè non si forma più idrocarburo oleoso, distillando questo col vapor d'acqua, concentrando la soluzione acida separata per filtrazione dal fosforo, e saturandola con carbonato sodico si separa una materia solida che è il miscuglio dei due isomeri della santonina. Questo prodotto grezzo si cristallizza prima nell'acqua, in cui si scioglie molto a caldo e pochissimo a freddo, si secca nel vuoto, si scioglie nell'etere e si lascia cristallizzare per lento svaporamento. Il residuo contiene due specie di cristalli; gli uni aghi lunghi flessibili, gli altri cristalli più grossi e duri. — Si separano meccanicamente gli uni dagli altri, e separati si tornano a cristallizzare nell'etere più volte e scegliere. Così dagli aghi flessibili si ottiene pure la metasantonina fusibile a 160°,5 e già descritta nella Memoria sopra citata, e dai prismi duri un'altra sostanza isomera la quale fonde a 136°.

Le due sostanze differiscono l'una dall'altra non solo per il punto di fusione ma altresì per la forma cristallina (come si vedrà nella Memoria seguente del prof. Struever), e per alcuni derivati.

Hanno tutte e due eguale potere rotatorio a destra.

Tutte e due sono sostanze stabilissime. Si sciolgono negli acidi concentrati senza alterarsi, anche nell'acido nitrico.

L'anidride acetica, il cloruro di acetile, ed il cloruro di fosforó non li altera sensibilmente. Hanno dato all'analisi i seguenti risultati:

	Metasantonina fusibile a 160°,5.	Isomere fusibile a 136°.	
	I	II	III
Materia	0^{gr},3064	0^{gr},3465	0^{gr},3512
CO^2	0^{gr},8201	0^{gr},9285	0^{gr},9442
H^2O	0^{gr},2076	0^{gr},2332	0^{gr},2338

([1]) Gazzetta chimica italiana. Tomo IV (1874) pag. 452.

Deducendo la composizione centesimale e comparandola con quella calcolata si ha:

	Esperienza			Calcolo	
	I	II	III	C^{15}	73,18
Carbonio....	72,99	73,32	73,08	H^{18}	7,32
Idrogeno....	7,52	7,47	7,40	O^{3}	19,50
					100,00

Tutte e due le metasantonine danno col bromo prodotti di sostituzione che saranno descritti più tardi.

Il prodotto monobromurato $C^{15}H^{17}BrO^{3}$ della metasantonina fusibile a 160°,5 cristallizza in aghi setacei e fonde a 212°; quello della metasantonina fusibile a 130° si presenta in piccoli cristallini e fonde a 114°.

Sulla forma cristallina di alcuni derivati della santonina.

(2ª serie)

Memoria del Socio GIOVANNI STRÜVER

letta nella seduta del 7 aprile 1878.

---

1. Cloruro santonico. $C_{15}\ H_{19}\ O_3\ Cl$ (1).

Sistema trimetrico.

$a:b:c::1:0.9533:1.1536$.

Forme osservate: (001) (010) (110) (101) (011) (111) fig. 1.

Combinazioni osservate: (010) (111) (110) fig. 3; (111)(001)(101)(011)(110)(010) fig. 2 ecc.

A. *Cristalli della combinazione* fig. 2.

Angoli	Calcolati	Trovati	n (2)
111:001	59° 7′	59° 8′	8
111:010	51° 36′	—	—
111:100	57° 25′	—	—
111:110	30° 53′	30° 52′	8
111:101	38° 24′	38° 21′.5	1
111:011	32° 35′	—	—
001:011	50° 26′	50° 29′	6
001:101	49° 5′	49° 5′ *	7
110:010	43° 38′	43° 38′ *	4

Formula ottica $\underset{+}{b}\ a\ c$.

Piano degli assi ottici parallelo ad (100).

Bissettrice acuta positiva normale a (001).

Dispersione $\rho > v$.

Angolo apparente (nell'olio) degli assi ottici rossi 72° 5′.

. . . . azzurri 71° 35′.

(1) Vedi questi Atti, 3ª serie vol. I, transunti del mese di dicembre 1876, pag. 26 e 27. — L. Valente, *Azione del cloruro d'acetile sull'acido santonico.* — S. Cannizzaro e L. Valente, *Sul cloruro santonico.*

(2) n, indica il numero degli spigoli omologhi sui quali fu misurato ciascun angolo.

B. *Cristalli della combinazione* fig. 3.

Angoli	Calcolati	Trovati	n	Limiti
110:010	43° 38′	43° 40′	26	42° 26′— 44° 44′
111:010	51° 36′	51° 39′	21	50° 52′ 30″— 52° 7′
110:111	30° 53′	30° 47′	22	30° 36′ 40″— 30° 55′ 15″

I caratteri ottici sono perfettamente identici a quelli degli altri cristalli.

Gli angoli omologhi variano grandemente non solo da un cristallo all'altro, ma anche sopra un medesimo individuo, talchè si dovettero istituire numerose misure per dimostrare l' identità della loro forma con quella dei cristalli della 1ª preparazione. Notevole è il fatto che i cristalli in questione mostrano una decisa tendenza a passare, geometricamente, al sistema monoclino, essendo piano di simmetria (001). Questa tendenza si svela sovrattutto nei valori degli angoli 010:$\bar{1}$10 e 010:110.

Su cinque cristalli si trovò

	1.	2.	3.	4.	5.		
010:$\bar{1}$10	44°15′	44°4′	44°23′40″	44°44′	44°41′	0$\bar{1}$0:1$\bar{1}$0	43°34′
010:110	42°46′45″	42°59′45″	42°37′	42°26′	42°39′	0$\bar{1}$0:$\bar{1}\bar{1}$0	43°34′.5
differenza	*1°28′15″	1° 4′15″	1°46′40″	2°18′	2°2′		

La stessa variabilità però della differenza, come il fatto che nel quinto cristallo i due angoli differiscono soltanto da un lato, mentre sono uguali dall'altra parte del cristallo, ci fanno dubitare del carattere monoclino. La perfetta concordanza poi coi cristalli ad A, la quale si ottiene nella ipotesi trimetrica, e le proprietà ottiche, mettono fuori di dubbio che i cristalli della 2ª preparazione sono identici a quelli della prima, benchè presentino una combinazione essenzialmente diversa.

Mi sembra difficile di dare una soddisfacente spiegazione del fatto sovraccennato, della strana tendenza cioè che hanno i nostri cristalli ad assumere, esternamente, la simmetria del tipo monoclino. A prima vista, si sarebbe tentati di ammettere una azione del fondo del cristallizzatoio, ma questa ipotesi non regge, poichè i cristalli si formarono appoggiati sul piano 010 che è piano di simmetria. Essi dovrebbero adunque svelare una differenza nel senso [010], non già nella direzione [100] che era parallela al fondo del vaso in cui ebbe luogo la cristallizzazione.

2. Bromuro santonico. $C_{15}\,H_{19}\,O_3\,Br$ [1].

Sistema triclino.

$a:b:c::1:0.9663914:1.1605412.$

$\xi = 77°47'28''$; $\eta = 97°1'5''$; $\zeta = 95°26'31''.5.$

(¹) Vedi questi Atti, 3ª serie vol. I, transunti del mese di dicembre 1876, pag. 28. — S. Cannizzaro e G. Carnelutti, *Sul joduro e sul bromuro corrispondenti all'acido santonico.*

Forme semplici osservate: (111) (11$\bar{1}$) (111) (1$\bar{1}\bar{1}$) (010) fig. 5.
Combinazioni osservate: (111)(11$\bar{1}$)(1$\bar{1}$1)(1$\bar{1}\bar{1}$)(010) fig.4; (111)(1$\bar{1}$1)($\bar{1}$11)($\bar{1}\bar{1}$1).

Angoli	Calcolati	Misurati
001:010	101° 40′ 19″.5	
001:100	83° 58′ 30″	
010:100	85° 55′ 16″	
111:100	46° 7′ 48″.4	
111:010	55° 52′ 56″.5	
111:001	62° 47′ 7″.8	
111:11$\bar{1}$	60° 33′ 30″	60° 33′ 30″ *
111:1$\bar{1}$1	73° 48′ 52″	73° 48′
1$\bar{1}$1:1$\bar{1}\bar{1}$	63° 38′ 15″	63° 38′ 15″ *
1$\bar{1}\bar{1}$:11$\bar{1}$	79° 28′ 45″	79° 28′ 45″ *
111:1$\bar{1}\bar{1}$	101° 40′	101° 40′ *
1$\bar{1}$1:11$\bar{1}$	112° 35′ 30″	112° 35′ 30″ *

Gli angoli che servirono per il calcolo delle sovra indicate costanti furono misurati tutti su di un cristallo perfettissimo, ma anche tutte le buone misure istituite sovra altri cristalli vanno assai bene di accordo con quelli presi per fondamentali, come si rileva dai valori che seguono.

Cristallo 2°

Angoli	Trovati	Calcolati
111:1$\bar{1}\bar{1}$	101° 40′	101° 40′
111:$\bar{1}$11	78° 21′	78° 20′
111:11$\bar{1}$	60° 32′ 30″	60° 33′ 30″

Cristallo 3°

Angoli	Trovati	Calcolati
1$\bar{1}$1:11$\bar{1}$	112° 40′ 30″	112° 35′ 30″

Essendo i due angoli η e ζ approssimativamente uguali, si potrebbe, a prima vista, supporre che i cristalli derivino dal sistema monoclino e che le differenze tra gli angoli cennati dipendano da irregolarità accidentali. In questa ipotesi, due delle sezioni ottiche principali dovrebbero essere, una parallela, l'altra normale allo spigolo [111, 1$\bar{1}\bar{1}$]. Le misure istituite allo stauroscopio invece dimostrano che questa condizione non è soddisfatta, poichè le direzioni di estinzione massima formano angoli di circa 8° collo spigolo [111, 1$\bar{1}\bar{1}$] e la normale ad esso. I cristalli spettano adunque con certezza al sistema triclino. Non si potè determinare l'orientazione degli assi di elasticità ottica, essendochè i cristalli che erano a mia disposizione, non permisero, a motivo dell' ineguale loro sviluppo, un numero sufficiente di osservazioni stauroscopiche.

3. Cloruro metasantonico. $C_{15}\ H_{19}\ O_3\ Cl$ (¹).

Sistema trimetrico.

$a:b:c::1:1.07187:0.87602$.

Forme osservate: (100) (011) (110) (120) fig. 7; combinazione osservata id. (fig. 6).

Angoli	Trovati medie	Trovati limiti	n	Calcolati
110:120	18° 18′	17° 19′—19° 17′	2	18° 48′
100:120 *	61° 48′ 45″	61° 43′.5—61° 53′.5	4	61° 48′ 45″
011:0$\bar{1}$1 *	78° 31′	—	1	78° 31′

Formula ottica $b\ a\ \underset{+}{c}$.

Piano degli assi ottici parallelo ad (100).

Bissettrice acuta positiva normale a (001).

Dispersione $\rho > v$.

Sopra una lastrina normale alla bissettrice acuta si trovò l'angolo apparente (nell'olio) degli assi ottici rossi 71° 45′.

. . . . verdi 71° 23′.

Paragonando il cloruro metasantonico al cloruro santonico, si scorge grande analogia nelle proprietà ottiche e, dal lato geometrico, nella zona [100]. Di fatti, abbiamo in ambedue le sostanze la formula ottica $b\ a\ \underset{+}{c}$, debole dispersione $\rho > v$, l'angolo apparente (nell'olio) degli assi ottici rossi 72° 5′ risp.ᵗᵉ 71° 45′.

Dall'altra parte, il rapporto dei parametri fondamentali $a:b:c$ fu trovato:

nel cloruro santonico 1:0.9533 :1.1536

nel cloruro metasantonico 1:1.07187:0.87602.

Questi rapporti possono scriversi anche nel seguente modo:

cloruro santonico 1.04899:1:1.21011

cloruro metasantonico 1.14153:1.22357:1

o cambiando i due assi b e c nel cloruro metasantonico:

1.04899:1:1.21011

e 1.14153:1:1.22357.

Così facendo, i due assi b e c rimangono, con grande approssimazione, identici nelle due sostanze, mentre l'asse a differisce in esse assai più notevolmente. L'analogia ottica però andrebbe perduta, poichè la formula ottica nel cloruro metasantonico diventerebbe $b\ \underset{+}{c}\ a$, rimanendo $b\ a\ \underset{+}{c}$ nel cloruro santonico. Non vi può essere adunque il menomo dubbio sulla diversità dei due cloruri.

Lo studio cristallografico dei cloruri santonico e metasantonico, e del bromuro santonico, fu intrapreso nella intenzione di vedere quali cambiamenti subiscono le

(¹) Vedi Cannizzaro, Memoria precedente.

forme cristalline degli acidi santonico e metasantonico sostituendo nelle loro molecole Cl o Br ad HO. Altra volta (¹) trovai

nell'acido santonico	: sist. trim. ;	$a:b:c::1:0.4578\ :0.6594$	; $b\ c\ \underline{a}$;	$\rho < v$
» » metasantonico	: » ;	$1:0.7673\ :0.9606$	; $b\ a\ \underset{+}{\bar{c}}$;	$\rho < v$.

Da quanto precede, si ricava

cloruro santonico	: sist. trim. ;	$a:b:c::1:0.9533\ :1.1536$	; $b\ a\ \underset{+}{c}$;	$\rho > v$
bromuro santonico	: » tricl. ;	$1:0.9664\ :1.1605$	;	
cloruro metasantonico	: » trim. ;	$1:1.07187:0.87602$	; $b\ a\ \underset{+}{c}$;	$\rho > v$.

Volendo paragonare queste costanti fra di loro, s'incontra anzitutto una grave difficoltà nel fatto che sino ad ora la costituzione chimica della santonina e dei suoi derivati è quasi interamente ignota. Onde è che il confronto manca, per così dire, di base certa ed indiscutibile. Difatti, visto il grande numero di isomeri possibili, non si è perfettamente sicuri se, a modo d'esempio, i cloruri o bromuri, ottenuti dagli acidi santonico e metasantonico, corrispondono realmente a questi anzichè ad acidi isomeri. E qui basti ricordare che il Cannizzaro, volendo dall' acido idrosantonico, ottenuto dal santonico, ripristinare quest'ultimo, ebbe invece l'acido metasantonico.

Alla difficoltà accennata se ne aggiunge un'altra. Noi sappiamo bensì che le proprietà ottiche di un cristallo presentano il medesimo grado di simmetria della forma geometrica esterna, ma ci resta ancora ignoto quali relazioni passino tra la grandezza relativa dei parametri e quella degli assi di elasticità ottica. Laonde è almeno difficile e prematuro di fondare il confronto di due sostanze, cristallizzate nel medesimo sistema, sulle loro proprietà ottiche, benchè queste, in unione ai parametri, siano di grande aiuto per la distinzione dei corpi spettanti ad un medesimo tipo cristallino.

Non ci rimangono adunque, come base di paragone per i cristalli appartenenti ad un medesimo sistema, che i rapporti dei parametri fondamentali. Non v' ha cristallografo che non sappia quanto arbitrario possa riuscire un tale confronto. Infatti, non ponendo alcun limite alla grandezza degli indici, si possono derivare, geometricamente, da una medesima forma primitiva i cristalli di tutte le sostanze comprese nel medesimo tipo cristallino, conservando pur sempre la legge della razionalità degli indici, e rendendo le differenze tra esperienza e teoria minori di qualunque quantità data.

Ciò posto, nel confrontare le forme cristalline di due sostanze chimicamente derivate l'una dall'altra, allo scopo di trovare le relazioni che possono aver luogo fra di esse, conviene di limitare la grandezza degli indici ai numeri interi più piccoli; altrimenti si rischia di fare un semplice giuoco di cifre e di tirare delle conclusioni che mancano di ogni fondamento serio.

Dopo queste considerazioni esaminiamo i rapporti parametrici sopra indicati, cominciando dall'acido metasantonico e dal suo cloruro. Scrivendo il rapporto caratteristico del cloruro metasantonico nel modo che segue : $a:b:c :: 0.93295:1:0.81728$, di leggieri si scorge l'analogia che vi ha tra il rapporto $a:b$ del cloruro e quello $c:a$ dell'acido metasantonico; l'angolo $100:110 = 43°$ del cloruro corrisponderebbe, in questa ipotesi, all'angolo $001:101 = 43°\ 51'$ dell'acido. Ma questo ravvicinamento

(¹) Vedi questi Atti, ser. 2ª vol. III p. 368.

perde molto del suo valore, considerando che si trova una analogia anche maggiore tra l'acido metasantonico e il cloruro santonico. Infatti, nel cloruro santonico il rapporto $a:b$ è $= 1:0.9533$, mentre nell'acido metasantonico abbiamo $a:c = 1:0.9606$. I cristalli delle due ultime sostanze possono adunque orientarsi in modo da avere una zona quasi perfettamente identica. In questo caso, l'angolo $110:010 = 43° 38'$ del cloruro santonico corrisponderebbe all'angolo $101:001 = 43° 51'$ dell'acido metasantonico. Si aggiunga ancora che, volendo, si possono ravvicinare le forme dei due cloruri in discorso anche a quella dell'acido santonico. Basta raddoppiare l'asse b dell'acido santonico per avere i rapporti:

acido santonico	$a:b::1:0.9156$
cloruro santonico	$a:b::1:0.9533$
acido metasantonico	$b:a::1:0.9606$
cloruro metasantonico	$a:c::1:0.93295$.

Da queste cifre risulterebbe, tra l'acido santonico e il cloruro metasantonico da una parte, e tra l'acido metasantonico e il cloruro santonico dall'altra, una maggiore analogia di quella che esiste tra ciascun acido e il cloruro corrispondente. Pare adunque che non si debba, per ora, attribuire troppo valore a queste analogie. Ma, il problema si fa anche più complicato considerando il bromuro santonico, ottenuto dall'acido santonico con metodo affatto analogo a quello che servì per la preparazione del cloruro santonico. Mentre *a priori* si sarebbero ritenuti isomorfi il cloruro e il bromuro, l'esperienza dimostra che il cloruro è trimetrico, il bromuro invece triclino, benchè rimanga quasi identico il rapporto dei parametri fondamentali nei cristalli delle due sostanze.

I fatti sopra esposti, se non ad altro, serviranno a renderci cauti nel generalizzare le leggi morfotropiche parziali fondate su piccolissimo numero di osservazioni. Nessuno vorrà certamente negare che vi sia una relazione tra le forme cristalline di due sostanze derivate l'una dall'altra per la sostituzione di un elemento o gruppo di elementi ad un altro; e sarà sempre merito del Groth di aver richiamato l'attenzione dei cristallografi sulla importanza delle ricerche morfotropiche. Ma, dall'altra parte, non possiamo nasconderci che il numero dei fatti sui quali sono basate le leggi morfotropiche sino ad ora enunciate, è così esiguo da far nascere il dubbio se veramente siano da considerarsi come leggi anche solo parziali. Può darsi benissimo che la sostituzione, per es., del cloro all' idrogeno porti seco, in un certo numero di casi, il passaggio dal sistema trimetrico al monoclino, colla conservazione quasi completa di una zona, ma sino a che non sarà dimostrato lo stesso fatto in un grande numero di casi, non si potrà ritenere come bene stabilita l'accennata legge parziale. Anzi, egli è più che probabile, che questa legge non è costante, poichè il cambiamento della forma cristallina deve dipendere non solo dalla natura degli elementi che si sostituiscono, ma altresì dalla natura più o meno complessa della molecula, nella quale ha luogo la sostituzione. Possiamo, infatti, immaginarci di leggieri che l'effetto della sostituzione del cloro all' idrogeno in una molecula semplice sia maggiore che in una molecula più complessa, e così via dicendo. Nel seguito di questo lavoro dimostrerò anche sperimentalmente che i fenomeni morfotropici dipendono in parte dalla natura della molecula in cui si sostituisce un elemento o gruppo ad un altro.

4. Santonato etilico. $C_{15}H_{19}O_4, C_2H_5$ (1).

Sistema trimetrico.

$a:b:c::1:0.4515698:0.6633383$.

Forme osservate: (100) (110) (101) (201) (011) (111) fig. 8; combinazione osservata id. fig. 9.

La forma (111) sembra emiedrica a facce inclinate.

Angoli	Calcolati	Trovati	n
100:101	56° 26′ 32″	56° 36′ 30″	4
100:201	37° 0′ 27″.5	36° 56′ 52″	9
101:201	19° 26′ 4″.5	19° 25′	3
201:$\bar{1}$01	86° 32′ 58″.5	86° 33′ 50″	3
100:110	65° 41′ 51″	65° 41′ 51″	9

Frattura eminentemente vitrea; sfaldatura non osservata.

Formula ottica $b\ a\ \underset{+}{c}$.

Piano degli assi ottici parallelo ad (100).

Bissettrice acuta positiva normale a (001).

Dispersione $\rho > v$.

Una lamina normale alla bissettrice acuta, osservata nell'olio, diede:

per l'angolo degli assi ottici rossi 67°
. . . . verdi 64° 45′
. . . . azzurri 62° 30′.

Una lamina normale alla bissettrice ottusa, osservata nell'olio, diede:

per l'angolo degli assi ottici rossi 123° 38′
. . . . verdi 125° 23′
. . . . azzurri 127° 42′.

Da questi dati si calcola:

l'angolo vero degli assi ottici rossi 64° 6′
. . . . verdi 62° 8′
. . . . azzurri 60° 2′.

Sopra un prisma naturale parallelo a *b*, formato dalle facce 110 e 1$\bar{1}$0 e ad angolo rifrangente di 48° 56′, furono determinati gli indici di rifrazione minimo e medio, per i quali si trovò:

	γ	β
rosso	1.5288	1.5334
verde	1.5349	1.5385
azzurro	1.5391	1.5418.

(1) Vedi Cannizzaro, Memoria precedente.

Dai valori ottenuti sulla prima lamina e da β si ha:

per l'angolo vero degli assi ottici rossi 63° 20′
. . . . verdi 61° 14′
. . . . azzurri 59° 14′.

Paragonando il santonato etilico all'acido santonico, si scorge di leggieri che le due sostanze sono isomorfe. Difatti, abbiamo:

per l'acido santonico $a:b:c::1:0.4578:0.6594$
per il santonato etilico $::1:0.4516:0.6633$.

La sostituzione di C_2H_5 ad H, non porta adunque, nel nostro caso, alcuna modificazione di sistema, nè altera sensibilmente il rapporto dei parametri.

Più notevole assai è l'influenza che la sostituzione di C_2H_5 ad H esercita sulle proprietà ottiche. È vero che il piano degli assi ottici rimane a posto, ma gli indici di rifrazione minima e massima s'invertono, e la dispersione cambia di senso. Abbiamo, infatti,

	formula ottica	dispersione
acido santonico	$b\ c\ a$	$\rho < v$
santonato etilico	$b\ a\ \overset{-}{\underset{+}{c}}$	$\rho > v$.

Notiamo ancora che, mentre nell'acido santonico si osserva distinta sfaldatura secondo le facce di (101), questa manca nei cristalli di santonato etilico.

5. Santonato metilico. $C_{15}H_{19}O_4, CH_3$ (1).

Sistema trimetrico.

$a:b:c::1:0.50097:0.92782$.

Forme osservate: (100) (101) (102) (111) (122) (011) fig. 11.

Combinazioni osservate: (100) (101) (102) (111) (122) fig. 10 e (100) (101) (102) (111) (122) (011).

I cristalli misurati provengono da due preparazioni diverse.

1ª *preparazione* (3 cristalli)

$a:b:c::1:0.50007:0.92741$.

Angoli	Trovati		n	Calcolati	Differenze esp. — calcolo
	medie	limiti			
100:111	66° 9′ 9″	65° 53′.5 — 66° 26′.5	7	66° 14′ 34″	— 5′ 25″
122:$\bar{1}$11	36° 11′ 45″	36° 7′.5 — 36° 17′.5	4	36° 10′ 3″	1′ 42″
122:111	11° 17′ 37″.5	11° 7′ — 11° 28′	4	11° 20′ 43″	— 3′ 5″.5
100:101	47° 13′ 10″	46° 31′.5 — 47° 51′	6	47° 9′ 25″	3′ 45″
100:122	77° 24′ 45″	77° 20′ — 77° 29′.5	2	77° 35′ 18″	— 10′ 33″
111:$\bar{1}$1$\bar{1}$	72° 33′ 30″	———	1	72° 39′ 43″	— 6′ 13″
111:101	53° 47′ 45″	53° 43′.5 — 53° 52′	2	53° 40′ 9″	7′ 36″
111:$\bar{1}$11	47° 26′ 30″	———	1	47° 30′ 51″	— 4′ 21″

(1) Vedi Cannizzaro, Memoria precedente.

2ª *preparazione* (1 cristallo)

$a:b.c::1:0.4976:0.92638.$

Angoli	Trovati		n	Calcolati	Differenze esp. — calcolo
	medie	limiti			
111:11$\bar{1}$	51° 10′ 45″	51° 9′ 20″—51° 12′ 10″	2	51° 21′ 56″	—11′ 11″
111:101	53° 42′ 55″	53° 42′ 50″—53° 43′	2	53° 47′ 17″	— 4′ 22″
111:011	23° 43′ 30″	23° 39′ 50″—23° 47′ 10″	2	23° 40′ 15″	3′ 15″
111:$\bar{1}$1$\bar{1}$	72° 28′ 20″	——	1	72° 25′ 26″	2′ 54″
122:111	11° 6′	——	1	11° 18′ 29″.5	—12′ 29″.5
122:$\bar{1}$11	36° 14′ 10″	——	1	36° 2′ 1″	12′ 9″
102:$\bar{1}$02	49° 22′ 20″	——	1	49° 42′ 22″	—20′ 2″
101:102	17° 53′ 25″	17° 34′ —18° 12′ 50″	2	17° 57′ 30″	— 4′ 5″

Combinando tutte le misure istituite sui cristalli della 1ª e 2ª preparazione, si ha il rapporto sopra indicato

$$a:b:c::1:0.50097:0.92782$$

e il seguente paragone tra esperienza e calcolo.

Angoli	Trovati (medie)	n	Calcolati	Differenze esp. — calcolo
100:111	66° 9′ 9″	7	66° 12′ 41″	— 3′ 32″
111:011	23° 43′ 30″	2	23° 47′ 19″	— 3′ 49″
111:11$\bar{1}$	51° 10′ 45″	2	51° 32′ 17″	—21′ 32″
111:101	53° 45′ 20″	4	53° 37′ 35″	7′ 45″
111:$\bar{1}$1$\bar{1}$	72° 30′ 55″	2	72° 44′ 50″	—13′ 55″
122:111	11° 15′ 18″	5	11° 21′ 32″	— 6′ 14″
122:$\bar{1}$11	36° 12′ 14″	5	36° 22′ 34″	—10′ 20″
102:$\bar{1}$02	49° 22′ 20″	1	49° 46′ 27″	—24′ 7″
101:102	17° 53′ 25″	2	17° 58′ 7″	— 4′ 42″
100:101	47° 13′ 10″	6	47° 8′ 39″	4′ 31″
100:122	77° 24′ 45″	2	77° 34′ 13″	— 9′ 28″
111:$\bar{1}$11	47° 26′ 30″	1	47° 34′ 38″.5	— 8′ 8″.5

I cristalli del santonato metilico presentano perfetta e facile sfaldatura in lamine sottilissime e pieghevoli, secondo (100). Questo fatto, unitamente al preponderante

sviluppo di una delle due zone [111, 122] e [11$\bar{1}$, 12$\bar{2}$], rendono talvolta i cristalli della sostanza in discorso estremamente simili a quelli del gesso.

Formula ottica *b c a*.

Piano degli assi ottici parallelo a (100).

Bissettrice acuta negativa normale a (001).

Dispersione $\rho < v$.

Sopra una lamina normale alla bissettrice acuta si trovò:

		nell'olio	nell'aria
l'angolo degli assi ottici	rossi	77° 55′	134° 12′
. . . .	verdi	78° 45′	139° 6′
. . . .	azzurri	79° 38′	—

Sopra una lamina normale alla bissettrice ottusa si trovò:

		nell'olio
l'angolo degli assi ottici	rossi	111° 52′
. . . .	verdi	110° 29′
. . . .	azzurri	109° 25′.

L'angolo vero degli assi ottici si deduce:

per il colore	rosso	74° 24′
. . . . .	verde	75° 21′
. . . . .	azzurro	76° 14′.

L' indice di rifrazione medio β si trova:

per il	rosso	1.5236
. .	verde	1.5331 .

A priori, si sarebbe supposto tra il santonato metilico e l'acido santonico un isomorfismo analogo a quello che si verifica tra il santonato etilico e l'acido santonico. L'esperienza però dimostra che, per la sostituzione di CH_3 ad H, si ha, nel nostro caso, un cambiamento essenziale nel rapporto dei parametri fondamentali e nella sfaldatura, benchè rimanga inalterato il sistema ossia il grado di simmetria dei cristalli.

6. Acido metasantonico. $C_{15} H_{20} O_4$

(ottenuto dall'acido santonico scaldato in CO^2 a 290°) (1).

Benchè io abbia dato altra volta (V. questi Atti, ser. 2a vol. III) le costanti cristallografiche e le proprietà ottiche dell'acido metasantonico, credo di dover comunicare i resultati ottenuti sovra questi nuovi cristalli: 1° per dimostrare la loro identità cogli altri che il Cannizzaro ebbe dall'acido idrosantonico, 2° perchè permisero misure più numerose e più esatte, 3° perchè mettono anche meglio in evidenza l'emiedria a facce inclinate della sostanza.

Le costanti trimetriche altra volta trovate sono:

$a:b:c::1:0.7673:0.9606$.

I nuovi cristalli diedero le costanti (dedotte da tutte le misure)

$a:b:c::1:0.7668363:0.9596911$, le quali s'avvicinano molto alle prime, essendo la differenza per $b = 0.0005$ circa, per $c = 0.0009$. Sulla identità dei cristalli ottenuti con metodi diversi, non vi può adunque essere il menomo dubbio

(1) Vedi Cannizzaro, Memoria precedente.

Le forme osservate sui nuovi cristalli sono $\varkappa$(111) $\varkappa$($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$) (110) (101) (102) (011) (100).

L'emiedria a facce inclinate è resa evidente, o per la sola esistenza del tetraedro $\varkappa$(111), o per il maggior sviluppo di $\varkappa$(111) a confronto di $\varkappa$($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$) (vedi fig. 12), nonchè per l'aspetto fisico diverso delle facce spettanti alle due forme emiedriche.

Il quadro che segue, riassume le osservazioni istituite su 46 spigoli distribuiti quasi uniformemente su tutti gli ottanti di 2 cristalli.

Angoli	Trovati			Calcolati	Differenze
	medie	n	limiti		esp. — calc.
110:1$\bar{1}$0	105° 1′ 30″	10	104° 18′ — 105° 42′	105° 2′ 7″	— 37″
101:$\bar{1}$01	87° 37′	7	87° 28′ — 87° 45′ 30″	87° 37′ 27″	— 27″
110:101	65° 5′ 30″	19	64° 52′ 30″ — 65° 17′ 30″	65° 5′ 6″	+ 24″
110:111	32° 22′ 40″	6	32° 10′ 30″ — 32° 29′ 30″	32° 23′ 11″	— 31″
101:111	42° 6′	4	42° 1′ — 42° 10′	42° 4′ 32″	+ 88″

7. Metasantonato metilico. $C_{15} H_{19} O_4, CH_3$ (¹).

Sistema monoclino.

$a:b:c::0.7359654:1:0.5694736.$

$\eta = 118° 0' 20''.$

Forme osservate (100) (001) (110) (10$\bar{1}$) fig. 13.

Combinazione id. fig. 14.

Angoli	Trovati			Calcolati	Differenze
	medie	n	limiti		esp. — calc.
001:100	61° 59′ 40″ *	3	61° 47′ — 62° 19′	61° 59′ 40″	—
100:10$\bar{1}$	70° 59′ 15″ *	4	70° 53′ 30″ — 71° 4′	70° 59′ 15″	—
100:110	33° 1′ 15″ *	8	32° 55′ — 33° 8′	33° 0′ 54″.5	+ 20″.5
110:$\bar{1}$10	114° *	3	113° 45′ 30″ — 114° 13′ 30″	113° 58′ 11″	+ 109″
10$\bar{1}$:00$\bar{1}$	47° 1′ 30″	1	———	47° 1′ 5″	+ 25″
110:001	66° 48′ 27″	3	66° 37′ — 66° 58′ 20″	66° 48′ 46″	— 19″

Sfaldatura perfetta parallela ad (10$\bar{1}$).

Piani degli assi ottici normali a (010).

La bissettrice normale a (010) è positiva, con dispersione rotatoria (incrociata).

L'angolo per gli assi rossi (nell'olio) fu trovato di 96° 45′.

Le bissettrici parallele al piano 010 sono negative e fanno un angolo di circa 30° colla normale ad 100 e di 32° circa colla normale a 001 (luce bianca); dispersione

(¹) Vedi Cannizzaro, Memoria precedente.

orizzontale. L'angolo apparente degli assi ottici rossi fu trovato (nell'olio) = 96° 30'. Vista la piccola differenza tra le due osservazioni, rimane indeciso, quale è la bissettrice acuta, od in altri termini, gli assi ottici sono quasi ad angolo retto fra di loro (89° 53' e 90° 7'). Paragonando la forma del metasantonato metilico a quella dell'acido metasantonico si nota anzitutto che le due sostanze non sono isomorfe, come non lo sono l'acido santonico e il santonato metilico; ma, mentre in quest' ultimo caso le due sostanze, diverse per la sola sostituzione di CH_3 ad H, rimangono almeno nello stesso sistema trimetrico, l'acido metasantonico, per la medesima sostituzione, passa dal sistema trimetrico a quello monoclino. Dal confronto del rapporto $a:b$ nell'acido metasantonico e nel suo etere metilico parrebbe, a prima vista, che una zona si conservasse almeno approssimativamente nonostante il cambiamento di sistema, ad analogia di ciò che accade per la sostituzione del cloro ad HO in alcune sostanze della serie aromatica, ma questa analogia non è che apparente, essendo l'angolo corrispondente nell'acido metasantonico = 105° 2', nel suo sale metilico invece = 113° 58'.

8. Parasantonide. $C_{15}\,H_{18}\,O_3$
(punto di fusione 110°) [1].

Sistema trimetrico.

$a:b:c::1:1.232091:1.186876$.

Forme osservate: (001) (110) (201) (011) (021) (221) (111) (223) fig. 21.

Combinazione osservata id. fig. 22.

Angoli	Trovati medie	Trovati limiti	n	Calcolati	Differenze esp. — calc.
001:223	45° 30' 35"	45° 27' — 45° 34' 10"	2	45° 32' 28"	— 1' 53"
223:111	11° 12' 30"	11° 9' — 11° 16'	2	11° 15' 59"	— 3' 29"
111:221	15° 3' 25"	14° 56' 30" — 15° 6' 20"	4	15° 4' 47"	— 1' 22"
111:110	33° 16' 40"	33° 15' 10" — 33° 19'	3	33° 11' 33"	5' 7"
221:110	18° 8' 23"	18° 4' 10" — 18° 12'	3	18° 6' 46"	1' 37"
001:111	56° 44' 37"	56° 41' 10" — 56° 49' 30"	6	56° 48' 27"	— 3' 50"
221:11$\bar{1}$	51° 36' 30"	inc. ——	1	51° 18' 19"	18' 11"
001:011 *	43° 55' 45"	43° 47' 20" — 44° 8' 30"	4	43° 55' 45"	—
011:021	18° 34' 45"	18° 25' — 18° 39' 50"	4	18° 38' 22"	— 3' 37"
021:02$\bar{1}$	54° 57' 50"	54° 55' 50" — 54° 59' 50"	2	54° 51' 46"	6' 4"
001:201 *	67° 9' 20"	67° 6' 10" — 67° 12'	6	67° 9' 20"	—

Sfaldatura non osservata.

Formula ottica $b\,c\,a$.

Piano degli assi ottici parallelo ad (100).

[1] Vedi Cannizzaro, Memoria precedente.

Bissettrice acuta negativa normale a (001).
Dispersione debole $\rho > v$.
Sopra una lamina normale alla bissettrice acuta si trovò:

	nell'aria	nell'olio
l'angolo degli assi ottici rossi	59° 25′	40° 30′
. . . . azzurri		39° 30′.

9. Acido parasantonico. $C_{15}H_{20}O_4$ [1].

Sistema trimetrico.
$a:b:c$: : 1:2.34022:1.01870.
Forme osservate: (100) (010) (001) (110) (120) (011) $\varkappa$ $(12\bar{2})$ fig. 15 e 16.

Angoli	Calcolati	Trovati	n	Limiti
011:0$\bar{1}$1	47° 2′ 50″	47° 4′ 8″	5	46° 55′ — 47° 8′ 30″
011:010	66° 28′ 35″	66° 29′	8	66° 21′ 30″ — 66° 41′
100:110	23° 8′ 15″	23° 4′ 33″	11	22° 49′ 30″ — 23° 18′
110:010	66° 51′ 45″	66° 48′ 0″	6	66° 21′ 40″ — 67° 19′
110:120	17° 22′ 49″	17° 11′	3	17° 7′ — 17° 15′

Sfaldatura perfettissima parallela ad 100.
Formula ottica $b\ c\ \bar{a}$.
Piano degli assi ottici parallelo ad 100.
Bissettrice acuta negativa normale a 001.
Dispersione debolissima $\rho > v$.
Sopra una lamina normale alla bissettrice acuta si trovò nell'olio:

l'angolo degli assi ottici rossi = 94° 35′
. . . . azzurri = 94° 23′.

Sopra una lamina normale alla bissettrice ottusa si trovò nell'olio:

l'angolo degli assi ottici rossi = 98° 36′
. . . . azzurri = 98° 46′.

Da questi dati si deduce:

l'angolo vero degli assi ottici rossi = 88° 13′
. . . . azzurri = 88° 3′.

Confrontando l'acido parasantonico colla parasantonide non pare vi sia un semplice nesso tra le loro forme cristalline. È vero che dal lato ottico v' ha grande analogia, e che, raddoppiando l'asse b della parasantonide, si avrebbero i rapporti

$a:b:c$: : 1:2.464182:1.186876 per la parasantonide
e 1:2.34022 :1.01870 per l'acido parasantonico,

ma le differenze che rimangono, sono ancora molto notevoli per tutte le zone principali, locchè, in unione al carattere essenzialmente diverso delle combinazioni delle due sostanze, se non altro, rende oscure le relazioni che vi possono essere. Spero di

(1) Vedi Cannizzaro, Memoria precedente.

potere tornare sulla questione, quando il Cannizzaro avrà potuto studiare più dettagliatamente gli altri isomeri della santonina che descrive nel lavoro precedente, e il cui studio cristallografico-ottico segue qui sotto.

Riguardo ai cristalli dell'acido parasantonico mi sia permesso di aggiungere una osservazione. I primi cristalli che il Cannizzaro mi consegnò, non mostrarono che la combinazione di un prisma a sezione romba (011), ad angolo di 66° 30′ circa, colla pinakoide (100) secondo la quale vi ha perfettissima sfaldatura. I caratteri ottici, in unione all'angolo indicato ed alla sfaldatura, mettono fuor di dubbio l'identità di questi cristalli cogli altri avuti più tardi. Non presentando i cristalli in discorso un numero sufficiente di facce per dedurre le costanti cristallografiche, li ridisciolsi più volte nell'etere nella speranza di veder comparire qualche altra faccia, ma invano: i cristalli tornavano sempre i medesimi. Quando ebbi poi gli altri cristalli più ricchi di facce, ottenuti con un metodo alquanto diverso, volli sottoporli alla medesima esperienza. Anche questi risultarono sempre i medesimi, per quante volte si ridisciogliessero.

L'etere che servì per sciogliere i cristalli delle due preparazioni, fu preso dalla stessa boccetta, i cristallizzatoi furono posti uno accanto all'altro, dunque nel medesimo ambiente, e sottoposti alle stesse piccole variazioni di temperatura, alle stesse scosse leggiere inevitabili, in una parola, i cristalli delle due preparazioni si formarono sempre in condizioni identiche. Si direbbe quasi che il carattere delle combinazioni sia già stabilmente impresso alla sostanza dal metodo di preparazione, ovvero che i cristalli, fino ad un certo punto, si risentano della loro vita anteriore. Feci analoghe osservazioni sull'acido metasantonico, ottenuto dal Cannizzaro con metodi diversi, e sul cloruro santonico sopra descritto, sempre con identici risultati. Benchè mi sembri difficile che altri non abbia fatto simili osservazioni, ho creduto bene di richiamare l'attenzione dei cristallografi sul fatto sovraccennato che mi propongo di studiare più dettagliatamente ed anche sovra altre sostanze.

10. Parasantonato etilico. $C_{15}H_{19}O_4 . C_2H_5$ [1].

Sistema trimetrico.

$a:b:c::1:1.59562:2.71171$.

Forme osservate: (001) (101) (011) (012) fig. 17.

Combinazione id. fig. 18.

Le facce della zona [100] sono fortemente striate nel senso della zona medesima.

Angoli	Calcolati	Trovati	n	Limiti
101:10$\bar{1}$	40° 29′ 6″	40° 24′ 25″	2	40° 22′ 40″ — 40° 26′ 10″
101:001	69° 45′ 27″	69° 43′ 55″	3	69° 41′ 50″ — 69° 45′ 20″
001:011	59° 31′ 36″	59° 31′ 35″	3	59° 27′ 30″ — 59° 34′ 15″
011:01$\bar{1}$	60° 56′ 48″	60° 56′ 45″	2	60° 56′ 30″ — 60° 57′
001:012	40° 21′ 21″	40° 21′	1	——

[1] Vedi Cannizzaro, Memoria precedente.

Sfaldatura parallela a (001).
Formula ottica $b\ \bar{c}\ a$.
Piano degli assi ottici parallelo ad 100.
Bissettrice acuta negativa normale a 001.
Dispersione $\rho < v$ energica.
Angolo apparente (nell'aria) degli assi ottici rossi = 35° 35′
. . . . azzurri = 44° 15′.

11. Parasantonato metilico. $C_{15} H_{19} O_4, CH_3$ (1).

Sistema trimetrico.
$a:b:c::1:1.6582:2.56707$.

Forme osservate: (001) (101) (012) fig. 19. Vi ha probabilmente anche (011), ma il simbolo non potè essere determinato con sufficiente approssimazione, essendo le facce della zona [100] fortemente striate nel senso della zona medesima.

Combinazione id. fig. 20.

Angoli	Calcolati	Trovati	n	Limiti
101 : 10$\bar{1}$	42° 34′	42° 34′	1	——
101 : 001	68° 43′	68° 43′	2	68° 42′ — 68° 43′
012 : 0$\bar{1}$2	75° 29′	75° 29′	2	75° 37′ — 75° 21′

Sfaldatura parallela a (001).
Formula ottica $b\ \bar{c}\ a$.
Piano degli assi ottici parallelo ad 100.
Bissettrice acuta negativa normale a 001.
Dispersione $\rho < v$ energica.
Angolo apparente (nell'aria) degli assi ottici rossi = 58° 25′
. . . . azzurri = 64° 5′.

Paragonando fra di loro l'acido parasantonico e i suoi due eteri etilico e metilico, si scorge di leggieri che i due eteri sono fra di loro approssimativamente isomorfi, con sfaldatura identica e proprietà ottiche molto analoghe, mentre non si potrebbe stabilire un isomorfismo tra i due eteri e l'acido dal quale derivano, senza fare delle ipotesi poco ammissibili.

Sono ora tre gli acidi isomeri del santonico che si poterono studiare dal lato cristallografico unitamente a qualche loro etere. Ricordando brevemente i fatti sovraindicati abbiamo trovato che:

1. il santonato etilico è isomorfo coll'acido santonico, il santonato metilico non lo è, ma rimane trimetrico, come il suo acido;

2. il metasantonato metilico non è isomorfo coll'acido metasantonico, ma salta dal sistema trimetrico al monoclino;

3. i parasantonati etilico e metilico sono isomorfi fra di loro, ma non coll'acido da cui derivano.

(1) Vedi Cannizzaro, Memoria precedente.

Questi resultati dimostrano anzitutto ad evidenza che i fenomeni morfotropici dipendono non solo dalla natura degli elementi o gruppi di elementi che si sostituiscono, ma altresì dalla natura della molecula nella quale si fa la sostituzione. Per vedere più chiaro nella apparente confusione che ci presenta il caso che discutiamo, occorrerebbe anzitutto di conoscere la costituzione chimica dei tre acidi e di avere poi per ciascuno di essi una serie di acidi analogamente costituiti coi loro rispettivi eteri, tutti cristallizzati.

Pare pur troppo lontano il tempo in cui la cristallografia avrà a sua disposizione il materiale necessario per condurre a dovere le ricerche morfotropiche.

12. Idrosantonide. $C_{15}\,H_{20}\,O_3$

(anidride dell'acido idrosantonico)

punto di fusione 155° (1).

Sistema trimetrico, emiedrico a facce inclinate?

$a:b:c::1:0.84082:0.61144$.

Forme osservate: (010) (110) (101) $\varkappa(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ fig. 23; combinazioni osservate: (010) (110) (101) fig. 24 e (010) (110) (101) $\varkappa(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ fig. 25.

Angoli	Trovati	Limiti	n	Calcolati
110:010	40° 3′ 24″	39° 53′ 10″ — 40° 14′ 40″	8	40° 3′ 27″.5
110:1$\bar{1}$0	99° 52′ 50″	99° 42′ 30″ — 100° 3′ 10″	4	99° 53′ 5″
101:10$\bar{1}$	117° 9′ 6″	116° 57′ 35″ — 117° 22′ 50″	4	117° 6′ 47″.5
101:$\bar{1}$01	62° 55′ 30″	62° 53′ 25″ — 62° 56′ 10″	4	62° 53′ 12″.5

Formula ottica $b\ \underset{+}{a}\ c$.

Piano degli assi ottici parallelo ad (100).

Bissettrice acuta positiva normale a (001).

Dispersione $\rho > v$.

Sopra una lamina normale alla bissettrice acuta fu trovato:

		nell'aria	nell'olio
l'angolo degli assi ottici rossi		93° 43′	59° 18′
. . . .	azzurri	92° 1′	58° 13′.

Una lamina normale alla bissettrice ottusa diede:

per l'angolo degli assi ottici rossi	138°
. . . . azzurri	139° 10′.

Da questi dati si calcola:

l'angolo vero degli assi ottici rossi	55° 50′
. . . . azzurri	54° 52′
l'indice di rifrazione medio per il colore rosso	= 1.5585
. . . . azzurro	= 1.5616.

(1) Vedi Cannizzaro, Memoria precedente.

Altra volta (vedi questi Atti, t. III ser. 2ª 1876) trovai per l'acido idrosantonico: sist. trim. $a:b:c::1:0.6432:0.3775$, formula ottiva $b\ \overset{+}{a}\ c$, disp. $\rho > v$, angolo apparente (nell'olio) degli assi ottici rossi = 64° 49′, verdi = 63° 28′, azzurri = 62° 43′.

Paragonando l'acido idrosantonico colla idrosantonide, si vede la grande analogia delle proprietà ottiche delle due sostanze, come nel caso dell'acido parasantonico e della parasantonide; i rapporti parametrici cambiano ancora, ma volendo sacrificare l'eguale orientazione ottica, si potrebbe mettere di accordo la zona [010] della idrosantonide colla zona [001] dell'acido idrosantonico. Però il valore di tali ravvicinamenti è, per ora almeno, assai problematico.

13. Isomero della santonina. $C_{15}H_{18}O_3$
(punto di fusione 160° 5) [1].

Sistema trimetrico, emiedrico a facce inclinate.

$a:b:c::1:2.0480:3.0535$.

Forme osservate: (001) (101) (011) (103) (023) $\varkappa(\bar{1}2\bar{1})$ (021) fig. 26.

Combinazione osservata id. fig. 27.

Angoli	Calcolati	Trovati	n
001:101	71° 52′	71° 52′ *	15
001:011	56° 9′	56° 9′ *	14
001:103	45° 30′.5	45° 46′.5	1
001:023	44° 49′.5	44° 53′	2
011:021	15° 19′	15° 19′.5	2
021:02$\bar{1}$	37° 4′	37° 1′	1

Sfaldatura perfettissima, in lamine sottili e pieghevoli, parallela a (001).

Formula ottica $b\ a\ \overset{+}{c}$.

Bissettrice acuta positiva normale a (001).

Piano degli assi ottici parallelo ad (100).

Doppia rifrazione molto energica.

Dispersione $\rho < v$.

Angolo degli assi ottici rossi (nell'olio) = 115° 40′ (media di 4 lamine)

. . . . azzurri (id.) = 116° 10′ (id.).

14. Isomero della santonina. $C_{15}H_{18}O_3$
(punto di fusione 127°) [2].

Sistema trimetrico.

$a:b:c::1:1.532775:1.676153$.

Forme osservate: (001) (010) (110) (011) (101) (111) fig. 28.

Combinazione osservata id. fig. 29.

(1) Vedi Cannizzaro, Memoria precedente. — (2) Id.

	Angoli	Trovati medie	Trovati limiti	n	Calcolati	Differenze esp. — calc.
1ª preparazione	001:101*	59° 10′ 46″	58° 48′ 40″ — 59° 35′	16	59° 10′ 46″	—
	001:011*	47° 33′ 30″	47° 28′ 50″ — 47° 39′ 30″	12	47° 33′ 30″	—
	010:111	60° 49′ 6″	60° 45′ 50″ — 60° 53′	7	60° 44′ 21″	4′ 45″
	101:111	29° 13′ 33″	29° 7′ — 29° 19′	7	29° 15′ 39″	— 2′ 6″
	011:111	48° 34′ 40″	——	1	48° 31′ 16″	3′ 24″
	110:010	56° 59′ 27″.5	56° 56′ 40″ — 57° 2′ 30″	4	56° 52′ 45″	6′ 42″.5
2ª preparazione	010:111	60° 43′ 22″.5	60° 42′ 10″ — 60° 44′ 35″	2	60° 44′ 21″	— 0′ 58″.5
	010:110	56° 54′ 40″	——	1	56° 52′ 45″	1′ 55″
	010:011	42° 23′ 45″	——	1	42° 26′ 30″	2′ 45″
	011:111	48° 31′ 37″	48° 28′ 40″ — 48° 33′ 20″	3	48° 31′ 16″	0′ 21″
	111:110	26° 32′	26° 29′ 50″ — 26° 33′	4	26° 32′ 59″	— 0′ 59″

Sfaldatura perfettissima secondo (010).
Formula ottica $b\, a\, \overset{+}{c}$.
Piano degli assi ottici parallelo ad (100).
Bissettrice acuta positiva normale a (001).
Dispersione $\rho < v$.
Sopra una lamina normale alla bissettrice acuta fu trovato:
l'angolo apparente (nell'olio) degli assi ottici rossi = 70° 38′
. . . . azzurri = 72° 19′.
Una lamina normale alla bissettrice ottusa diede:
l'angolo apparente (nell'olio) degli assi ottici rossi = 121° 50′
. . . . azzurri = 120° 46′.
Da questi dati si calcola:
l'angolo vero degli assi ottici rossi = 67° 1′
. . . . azzurri = 68° 20′.

15. Isomero della santonina. $C_{15} H_{18} O_3$

(punto di fusione 136°) (¹).

Sistema monoclino.
$\beta = 66° 23' 45''$, $a:b:c::1:1.24223023:1.17645412$.

(¹) Vedi Cannizzaro, Memoria precedente.

Queste costanti furono dedotte dalle seguenti misure istituite sovra un cristallo perfettissimo:

$100:001 = 66° 23' 45''$	media di 4 misure	66° 24'		
	prese su spigoli diversi	24'		
		20'.5		
		26'.5		
$100:11\bar{1} = 58° 24' 45''$	media di 4 misure	58° 22'.5		
	prese su spigoli diversi	26'		
		25'		
		26'		
$001:11\bar{1} = 110° 55'$	media di 8 misure	110° 58'	110° 57'.5	
	prese su spigoli diversi	58'.5	49'.5	
		56'	57'.5	
		47'.5	55'.5.	

Forme osservate: (100) (001) (110) (120) $(11\bar{1})$ $(12\bar{2})$ $(10\bar{1})$ fig. 30.

Combinazione osservata id. fig. 31 e 32.

Il quadro che segue, riassume le osservazioni istituite su 4 cristalli, 2 della prima preparazione, 2 della seconda preparazione.

Angoli	Trovati								Calcolati	Differ…
	1ª preparazione			2ª preparazione			medie totali	n		esp.—…
	medie	n	limiti	medie	n	limiti				
100 : 110	36°29'	1	—	36°24'52''.5	4	36°19' — 36°30'	36°25'42''	5	36°24'52''	0'50
110 : 120	19°28'	1	—	19°24'45''	4	19°20'.5— 19°29'.5	19°25'24''	5	19°27'18''.4	—1'54
$120 : \bar{1}20$	—	—	—	68°13'52''.5	4	68° 7'.5— 68°23'.5	68°13'52''.5	4	68°15'39''.2	—1'46
100 : 120	55°58'	4	55°53'— 56° 4'	55°53'15''	6	55°46'.5— 55°59'	55°55' 9''	10	55°52'10''.4	2'58
100 : 001	66°24'	4	66°16'— 66°29'	66°24'11''	8	66°20'.5— 66°26'.5	66°24' 7''	12	66°23'45''	0'22
$001 : 11\bar{1}$	110°54'15''	2	110°44'.5 —111°4'	110°55'	8	110°47'.5— 110°58'.5	110°54'51''	10	110°55'	—0' [illegible]
$100 : 11\bar{1}$	58°27'	2	58°15'.5— 58°38'.5	58°24'45''	4	58°22'.5— 58°26'	58°25'30''	6	58°24'45''	0'45
001 : 110	71° 6'30''	2	70°59'— 71°14'	71°13'	2	71° 9'.5— 71°16'.5	71° 9'45''	4	71°12' 7''	—3'22
$11\bar{1} : 12\bar{2}$	23°18'	1	—	23° 3'	2	23° 2'.5— 23° 3'.5	23° 8'	3	23° 7'23''.4	0'3
$001 : \bar{1}22$	—	—	—	53°17'	1	—	53°17'	1	53°11'31''.3	5'2
$100 : \bar{1}22$	98°31'	1	—	98°35'15''	2	98°33'.5— 98°37'	98°33'50''	3	98°27'51''.6	5'5
$110 : 11\bar{1}$	39°49'30''	2	39°34'— 40° 5'	39°43'30''	2	39°41' — 39°46'	39°46'30''	4	39°42'53''	3'3
$\bar{1}22 : \bar{1}20$	—	—	—	49°41'	1	—	49°41'	1	49°47'28''.1	—6'2
001 : 120	—	—	—	76°58'40''	3	76°58'.5— 76°59'	76°58'40''	3	77° 1' 0''.6	—2'2
$110 : 12\bar{2}$	—	—	—	58°25'15''	1	—	58°25'15''	1	58°31'13''.5	5'5
$\bar{1}22 : 12\bar{2}$	—	—	—	94°12'30''	1	—	94°12'30''	1	94°17'31''	—5'
$11\bar{1} : \bar{1}11$	108° 5'20''	3	107°57'—108°14'	108°13' 7''.5	4	108°10'.5—108°16'	108° 9'47''	7	108°17'19''.2	—7'3

Tenendo conto sovrattutto degli angoli che si poterono misurare sovra un maggior numero di spigoli omologhi e con maggiore certezza, l'accordo tra esperienza e calcolo è assai soddisfacente, talchè non tornerebbe di molto vantaggio l'applicazione del metodo dei minimi quadrati per correggere le sovra indicate costanti. E lo stesso accordo, ed anche maggiore, si ottiene, paragonando i valori calcolati con quelli trovati sul cristallo che servì per la determinazione delle costanti. Degli 80 angoli misurati, 43 spettano a quest' ultimo cristallo.

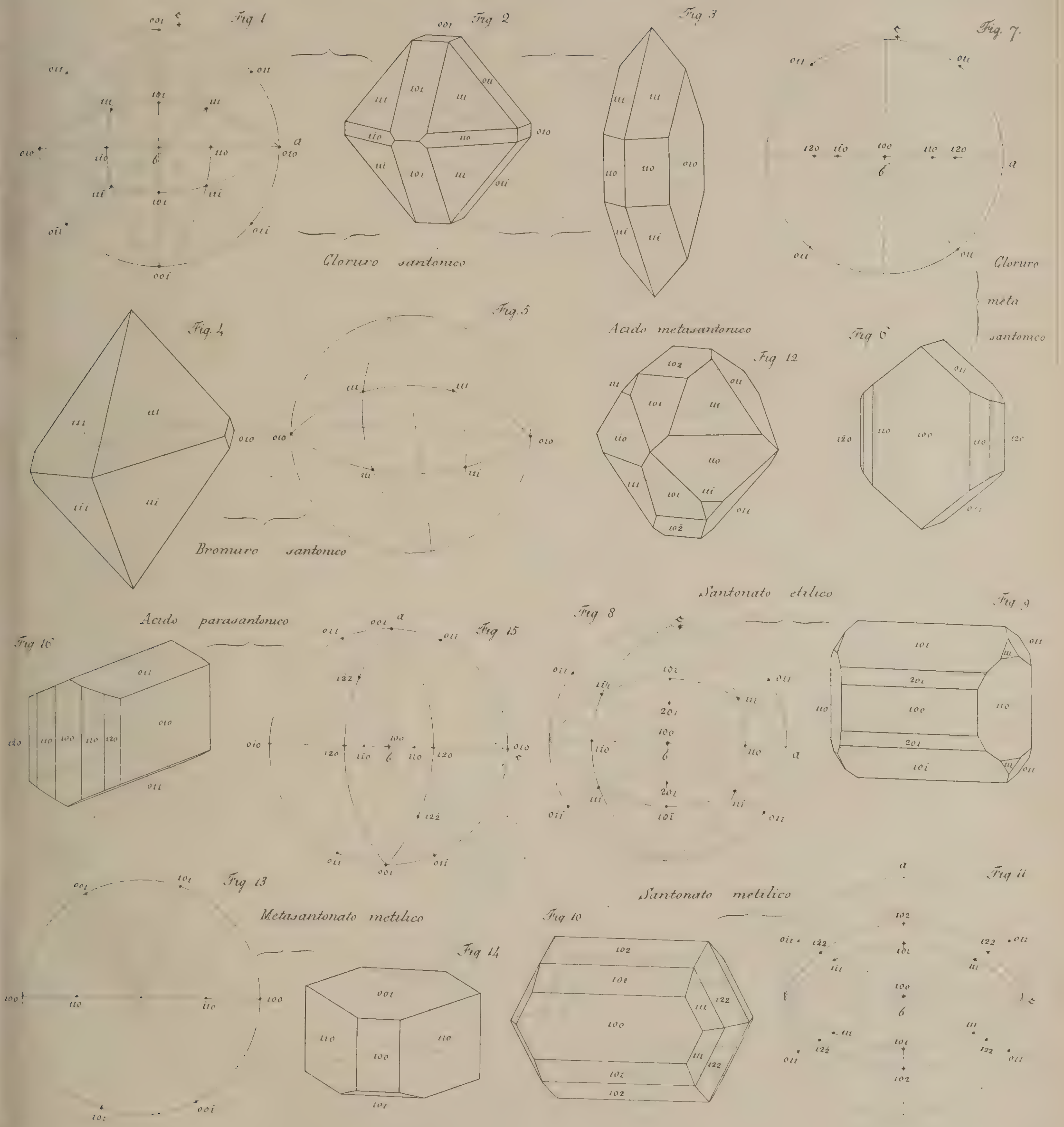
Nel senso dell'asse *b*, normale al piano di simmetria, si svela costantemente un singolare emimorfismo. Infatti, mentre le facce dei prismi verticali a destra, cioè 110, $\bar{1}10$, 120, $\bar{1}20$, sono assai lucenti e danno riflessi nettissimi, le facce a sinistra, $1\bar{1}0$, $\bar{1}\bar{1}0$, $1\bar{2}0$, $\bar{1}\bar{2}0$, sono appannate o di aspetto sericeo colle fibre dirette nel senso [001] e non riflettono affatto o assai meno bene. A ciò si aggiunge sovente, se non sempre, il disuguale sviluppo delle facce, raffigurato al n. 32 della tavola.

La sfaldatura è perfetta secondo (001).

Le proprietà ottiche sono assai interessanti. Le lamine parallele a (001) mostrano la figura d'interferenza, spostata alquanto verso la faccia 100 anteriore. Il piano degli assi ottici rossi e verdi è parallelo a (010) ossia compreso nel piano di simmetria, il piano degli assi azzurri invece è normale al piano di simmetria. La bissettrice acuta negativa fa un angolo di 4°30′ circa verso l'asse $+c$, con una normale a (001). Riguardo all'angolo degli assi ottici, si notano leggiere differenze da un cristallo all'altro.

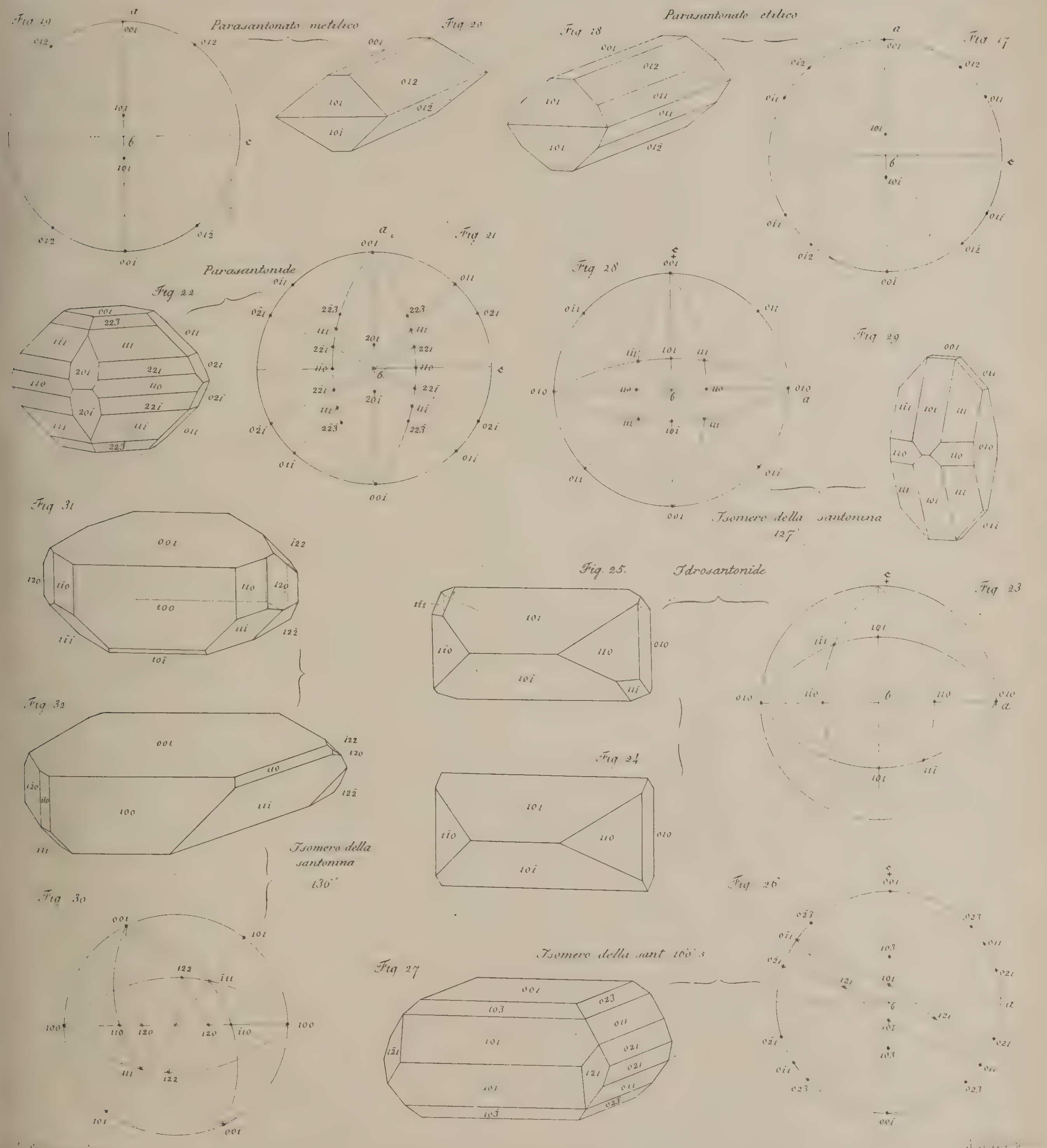
	1° X^{llo}		2° X^{llo} (12°)	3° X^{llo} (12°)
	11°C	45°C		
assi rossi	5°	7°	6°40′	5°45′
— verdi	quasi 0°		4°45′	4°1′
— azzurri	4°30′		2°37′	3°15′.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS



G. Strüver — Derivati della Santonina. 2.ª serie

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS



G. Strüver Derivati della Santonina 2ª serie

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Misure della componente orizzontale del magnetismo terrestre eseguite in alcune località dei dintorni di Roma.

Nota di F. KELLER

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 2 giugno 1878.

La cognizione della componente orizzontale del magnetismo terrestre è di sommo interesse non solo per la fisica terrestre, bensì anche per la fisica sperimentale, principalmente quando si tratti di misure assolute delle correnti elettriche. Dopo aver fatto varie misure di questa forza nella stazione magnetica di s. Pietro in Vincoli, mi sono proposto di estendere queste misure anche ai dintorni di Roma, avendo principalmente per iscopo di tracciare le curve di uguale intensità orizzontale. Volendo dare principio a queste misure, mi sono deciso di determinare questa componente in varî punti del meridiano di Roma, o almeno non molto distante dal medesimo, onde poter studiare il modo in cui varia questa forza colla latitudine e di dedurre il valore numerico della sua variazione per ogni minuto primo.

Mentre espongo nella presente Nota i risultati ai quali sono arrivato, credo innanzi tutto necessario di descrivere con qualche dettaglio il metodo che ho seguìto, onde poter giudicare sull'esattezza dei valori ottenuti. Tale metodo è quello di Hansteen, il quale consiste essenzialmente nell'osservare il tempo di oscillazione di una sbarra magnetica nelle diverse località, ove si vuole determinare la componente orizzontale; i valori reciproci dei quadrati di questi tempi danno la misura della forza in proposito. Però questo metodo è soggetto a gravi errori, quando non si operi colle debite precauzioni, perchè esso suppone implicitamente, che l'intensità magnetica della sbarra rimanga rigorosamente costante durante tutto il tempo delle osservazioni, il che non si verifica per verun magnete. Le variazioni della intensità dei magneti sono di due specie: una è dovuta ai cangiamenti di temperatura; col crescere del calore diminuisce la sua intensità, mentre accade l'opposto per temperature decrescenti. In secondo luogo poi si verifica quasi in tutti i magneti un continuo indebolimento col tempo, e di queste variazioni non è facile tenere conto per intervalli di lunga durata.

L'errore che viene prodotto dalle prime variazioni si può determinare con una esattezza più o meno grande, misurando il coefficiente termico della sbarra, vale a dire il decremento della sua intensità per un grado di temperatura rapportato sulla intensità totale. Non è qui il luogo di trattare dei diversi metodi, che vengono usati per la misura di questo coefficiente; un'eccellente Memoria di Wild sopra questo argomento si trova nel Bullettino dell'Accademia di Pietroburgo. L'autore espone con molta chiarezza i diversi metodi, paragonandoli fra loro, specialmente sotto il punto di vista della loro esattezza.

La sbarra della quale mi sono servito nelle mie escursioni magnetiche è di forma parallelepipeda, avente il peso di grammi 44 e la lunghezza di cent. 10. Con

questa medesima sbarra ho fatto prima del maggio 1877 varie misure della componente orizzontale assoluta nella stazione magnetica a s. Pietro in Vincoli (1). La sua intensità magnetica espressa in unità di Gauss viene data dal numero 5154100.

Per la misura del suo coefficiente termico ho messo in pratica il metodo delle deflessioni colle modificazioni di Lamont (2); da molte determinazioni che ho fatto prendendo per temperature estreme zero e 40° risulta che questo coefficiente abbia assai prossimamente il valore di 0,001. È da notarsi, che la vera difficoltà nell'apprezzare l'effetto della temperatura sulla sbarra non consiste già, generalmente parlando, nella poca esattezza del suo coefficiente termico; una difficoltà molto maggiore è invece quella di non conoscere con precisione la temperatura della medesima. Quest'ultima difficoltà è, in parità di circostanza, tanto maggiore quanto sono più rapide le variazioni di temperatura. Il migliore metodo per conoscere la temperatura della sbarra sarebbe quello di forarla in mezzo e di introdurre in questo foro il bulbo del termometro; ma essendo ciò impossibile nel caso nostro, conviene collocare il termometro medesimo più vicino che è possibile alla sbarra oscillante. Lloyd per evitare questa difficoltà propone di costruire una sbarra di ottone di dimensioni uguali alla sbarra magnetica e di introdurre il termometro in un foro praticato nel suo punto di mezzo. Ponendo questa sbarra in prossimità della magnetica in oscillazione, si può sperare che la temperatura indicata dal termometro si trovi assai vicina a quella del magnete. Rimane però qui da osservare che la distanza troppo piccola delle due sbarre possa produrre delle correnti d'induzione nella sbarra di ottone, le quali smorzano le oscillazioni del magnete, circostanza assai nociva alle osservazioni delle oscillazioni. Ponendo poi la sbarra di ottone in una distanza alquanto maggiore è da dubitare se ambedue posseggano realmente la medesima temperatura.

Nelle mie ricerche mi sono servito di una cassa di oscillazione di legno molto piccola, fornita di un treppiede; il filo di sospensione ha 90 centimetri di lunghezza: questo filo rimane durante il viaggio continuamente attaccato alla sbarra in modo che non possa cader dubbio sull'influenza della torsione, la quale, prescindendo dalle piccole variazioni causate dall'umidità, deve conservare un valore costante. Il termometro si trova col suo bulbo nella cassetta ed assai vicino al centro della sbarra oscillante. In tutti i siti ove ho fatto le osservazioni magnetiche, e questi sono in numero di quattro, cioè Todi, Narni, Fiano e Porto d'Anzio, cercai un locale a temperatura meno variabile che fosse possibile e distante dalla parte abitata del paese. Le variazioni della temperatura riuscivano in questi luoghi abbastanza piccole.

Giunto al sito di osservazione ho sempre usato la precauzione di aspettare almeno un'ora di tempo prima di incominciare le osservazioni, dando così alla sbarra magnetica collocata nella cassetta aperta il tempo necessario per prendere la temperatura dell'ambiente. Non è facile precisare il grado di esattezza a cui si giunge in questo modo, essendo il coefficiente termico della sbarra circa 0,001; un grado di incertezza nella temperatura produce un errore di 0,001 nell'intensità magnetica terrestre. Credo poter concludere da alcune osservazioni preliminari, nelle quali posi il termometro

(1) Veggasi Transunti dell'Accademia dei Lincei 3 giugno 1877.
(2) *Handbuch des Erdmagnetismus*, pag. 125.

alternativamente in contatto colla sbarra e poi a piccola distanza dalla medesima, che l'incertezza delle sue indicazioni non superi nel caso nostro il mezzo grado; a questo corrisponderebbe un errore nella componente orizzontale di $\frac{1}{2000}$.

Per iscansare la seconda delle due cause di errore di sopra accennate, cioè l'indebolimento lento, continuo della sbarra magnetica, ho procurato di ridurre la durata di ciascuna escursione al suo minimo, osservando il tempo di oscillazione della sbarra immediatamente prima della partenza e poi una seconda volta appena ritornato in Roma. Il medio di queste due determinazioni fu adottato come il vero tempo di oscillazione corrispondente alla stazione di Roma. Ciascuna delle stazioni Fiano, Narni e Porto d'Anzio ho visitato due volte; Todi una sola volta. Tutto il tempo impiegato per le escursioni di Fiano era di ore 14, per Narni e Porto d'Anzio circa un giorno e 15 ore, per Todi tre giorni e 14 ore. Ognuno vedrà che in tempi così brevi, l'indebolimento della sbarra non si può fare sentire in un modo sensibile, e ammettendo anche che il medesimo abbia luogo realmente, le ripetute osservazioni in Roma debbono in grandissima parte elidere il suo effetto. Osservo ancora che la sbarra in proposito fu temperata e magnetizzata nel dicembre 1876, e per rendere la sua intensità meno variabile che fosse possibile, si praticò il metodo dei riscaldamenti e raffreddamenti, usato già da altri, esponendola alternativamente alle temperature zero e 40°. Tale operazione è stata ripetuta quaranta volte. Posso assicurare che in veruna delle escursioni si manifestò un deciso indebolimento, ben inteso sempre dopo applicata la correzione necessaria della temperatura; da questo lato non è quindi da temere verun errore sensibile.

Devo finalmente ricordare che un'altra sorgente di errore si trova nel cronometro con cui viene misurato il tempo delle oscillazioni, e questo mostra realmente nel caso nostro qualche irregolarità nel suo andamento, principalmente nell'estate, ma molto meno nei mesi freddi e per tale fine ho anche tralasciato di fare delle misure dopo la fine di aprile. Il risultato delle misure è contenuto nel seguente quadro:

Stazione magnetica	Epoca della misura	Longitudine da Parigi	Latitudine	Diff. fra le lat. della Stazione e Roma	Magnetite contenuta nel soprassuolo	Differenza delle temper. medie.	Valore della componente orizzontale $= X$	Variazione per 1' di latit. $= \mu$
Porto d'Anzio	1 e 2 Marzo	10°18',5	41°27'	—26',5	Tracce	+ 3°,5	1,0084	0,000317
	20-21 Apr.					+ 2°	1,0096	362
Roma . . .		10° 9',5	41°53',5		0,0086		1,0000	
Fiano. . . .	23 Marzo	10°17'	42°10'	+16',5	0,0017	+ 0°,6	0,9933	406
	6 Aprile					+ 3°,5	0,9942	351
Narni	14-15 Gen.	10° 11'	42°29',2	+35',7	0,0003	— 3°,4	0,9878	342
	13-16 Ap.					+ 1°,3	0,9876	348
Todi	13-16 Ap.	10° 4'	42°46'2	+52',7	Tracce	— 0°,7	0,9819	343

Questo quadro ha bisogno di qualche spiegazione. La colonna: «Epoca delle misure» indica i giorni del principio e della fine della rispettiva escursione. La colonna: «Differenze delle temperature medie» si riferisce alle temperature medie di tutte le oscillazioni osservate nella stazione di cui si tratta ed in quella di Roma. Credo opportuno di dare queste differenze perchè da esse dipende la correzione da applicarsi per causa delle temperature, ed esse danno così un'idea dell'influenza che potrebbe esercitare una determinazione alquanto erronea del coefficiente termico della sbarra. Questo coefficiente è assai prossimamente $= 0,001$; ora ammettendo anche che l'errore del medesimo ammonti a un decimo del suo proprio valore (lo che è secondo ogni credere superiore al vero) allora ogni grado nelle differenze medie porterebbe nel valore finale della componente orizzontale un errore di 0,0001, e siccome la massima differenza di temperatura uguaglia a 3°,5 così si vede che il massimo errore prodotto nel valore di X sarebbe di circa 0,0003. Da ciò si rileva, che l'errore commesso nella misura del coefficiente termico della sbarra porta un'incertezza abbastanza piccola nel valore della componente orizzontale.

La colonna intitolata: «Magnetite contenuta nel soprassuolo» si riferisce alla quantità di questo minerale rinvenuto nell'unità di peso del terreno formante il soprassuolo del luogo ove furono fatte le osservazioni. Potendo questo minerale possibilmente esercitare qualche influenza sulla componente orizzontale, ho creduto opportuno di fare delle ricerche in proposito. Devo aggiungere, che mi sono servito, per maggior brevità di linguaggio, della parola magnetite per indicare indistintamente tutte le particelle, che ho potuto estrarre dalla terra mediante il magnete. Inoltre è da notarsi, che osservando le particelle estratte col microscopio, ho qualche volta veduto che alcune di esse non consistono di una massa omogenea, bensì formano un insieme di cristalli impastati in un minerale di colore biancastro. La vera dose di magnetite è quindi in questi casi un poco minore di quella indicata di sopra.

Quanto spetta finalmente alla posizione topografica delle stazioni è necessario di descriverle con qualche dettaglio, anche per dare ad altri la possibilità di verificare i valori ottenuti.

Porto d'Anzio. Il punto ove furono fatte le osservazioni è una grotta sulla spiaggia del mare a un di presso a distanze uguali fra Porto d'Anzio e Nettuno. Questa grotta rivolta colla sua entrata verso il mare è di una forma molto regolare, però senza essere rivestita di opere di muratura o di stucco. Le rocce che compongono la costa sono il macco, cioè una arenaria calcarea, e questa roccia si estende in distanza considerevole entro terra. La medesima non è totalmente priva di magnetite, però i cristalli di questo minerale sono assai rari e soltanto riconoscibili col microscopio; faccio poi notare che poco al di là di Nettuno avvi un piccolo banco di questo minerale del quale fa menzione il signor Ludwig ([1]). Ma questo deposito oltre di essere di estensione assai ristretta non può aver veruna influenza sulle osservazioni magnetiche fatte nella grotta, atteso che la sua distanza è troppo grande, cioè due chilometri circa. Questa magnetite fu senza alcun dubbio portata dalla acque del rigagnolo che ivi sbocca nel mare, chiamato anticamente *Loricano* ed ora Fosso della Mola. Un deposito assai

([1]) Bulletin de la Société impériale des naturalistés de Moscou, année 1874 n. 1 pag. 70.

più grande di magnetite si trova presso Foceverde, ove sbocca il fiume Astura nel mare; questo punto dista 14 chilometri da Nettuno.

Fiano. Le osservazioni si fecero in una grotta naturale sulla destra del Tevere, circa due chilometri distante dal paese. Questo punto appellato *Mossa dei Barberi* facilmente si trova venendo da Passo di Corese; dopo aver passato il Tevere al Porto di Fiano la strada si biforca, il ramo destro conduce a Civitella ed il ramo sinistro a Fiano; la grotta è situata presso questo punto di biforcamento, pochi metri distante verso Fiano. La roccia in cui è escavata questa grotta è il travertino, il quale occupa qui una estensione considerevole di terreno. Il soprassuolo consiste di una terra, che è in grande parte vulcanica e contiene una piccola quantità di magnetite; la rena del torrente Gramiccia, che si trova nella distanza di cinque chilometri, contiene invece 0,027 di questo minerale (¹).

Narni. La stazione magnetica è una grotta escavata nel sasso vivo, di forma quasi cubica. Essa è situata circa tre chilometri da Narni, in prossimità immediata della strada corriera che conduce a Roma, circa 150 metri dopo aver passato il *Ponte Piccino.* A sinistra avvi un burrone; la grotta è situata a destra sulla pendice del monte, il quale consiste di roccia calcarea secondaria, coperta di un leggero strato vegatale, che contiene una quantità assai tenue di magnetite.

Todi. La città di Todi giace sopra una collina sulla sinistra del Tevere; il luogo ove furono eseguite le osservazioni è vicino al paese fuori la *Porta Amerina.* Prendendo la strada, che costeggia il paese, presto si giunge alla chiesa della Consolazione; dirimpetto a questa in alto sulla collina chiamata *la Rocca* veggonsi delle grotte assai vaste escavate per estrarne la ghiaia per le strade e una di queste ha servito di stazione magnetica. Tutta questa parte della collina consiste di ghiaia calcarea secondaria; i ciottoli di volume piuttosto grande sono cementati con una calcarea argillosa. La magnetite si trova qui in una così piccola quantità da non poter fare una determinazione numerica della medesima.

(¹) Il signor ingegnere Romolo Meli, assistente al gabinetto di Geologia della nostra Università, il quale ebbe la gentilezza di accompagnarmi in molte di queste mie escursioni, osservò in questa località un fatto abbastanza interessante per essere ricordato con qualche parola. Egli si esprime su questo proposito nel seguente modo: « Osservai nella vicinanza della grotta molte scheggie in pietra focaia sparse sul terreno vegetale, che mostrava essere di fresco rimosso, e ne raccolsi in brevissimo tempo una grande quantità. Le silici raccolte, sebbene tutte, nessuna eccettuata, presentino superficie di rottura chiaramente fatta per opera dell'uomo, pure non appartengono che a residui di lavorazioni. Solo fra tanti informi frammenti fu rinvenuto un pezzo di focaia rosso-bruna con macchie giallastre di figura quasi circolare, del diametro medio circa 49^{mm}, che può con molta probabilità riferirsi ad una pietra da fionda, insieme ad un frammento ben evidente di una punta di freccia in silice giallognola, che presenta un lavoro di minuta faccettatura. Essendo poi lo strato vegetale, in cui furono rinvenute le focaie scheggiate, privo di ciottoli di qualunque specie e giacendo sopra gli estesi e potenti depositi di travertino, che dalla attuale sponda destra del fiume quasi incontro al Passo di Corese arrivano sotto Fiano e si estendono fino a Scorano, è certo che queste focaie vennero portate dall'uomo e lavorate in quel luogo.

« La grande copia di selci scheggiate accenna ad un centro di lavorazione, mentre la prossimità della grotta fa supporre che essa possa aver servito di abitazione, e però credo che il praticarvi una qualche ricerca, potrebbe condurre a più interessanti scoperte per l'archeologia preistorica ».

Dopo questi schiarimenti della tavola riportata di sopra, veniamo all'oggetto principale della presente Nota, cioè alla determinazione della variazione μ della componente orizzontale corrispondente a 1′ di latitudine. Uno sguardo sopra questa tavola fa vedere che i valori di μ dedotti dalle diverse stazioni non differiscono di molto fra loro, soltanto una delle osservazioni di Fiano si allontana un poco di più. Le escursioni in questa stazione hanno durato un solo giorno ciascuna e non si poteva ivi fare che una sola osservazione verso mezzodì, mentre le relative osservazioni di Roma vennero fatte la mattina e la sera dello stesso giorno. Nei tre altri paesi, cioè Porto d'Anzio, Narni e Todi si fecero invece in ogni escursione due osservazioni, cioè la sera dell'arrivo e poi la mattina, mentre le rispettive osservazioni di Roma sono state eseguite quasi alle medesime ore. Quest'ultimo modo di osservare è senza dubbio preferibile tanto per le condizioni della temperatura, quanto per l'errore che ha origine nel periodo diurno del magnetismo terrestre.

Prendendo il medio di tutte le misure si ottiene

$$\mu = 0{,}000353,$$

ma per le ragioni or ora esposte sarà meglio di escludere le osservazioni di Fiano ed allora si avrà

$$\mu = 0{,}000343.$$

Prima di procedere avanti fa d'uopo rammentare che le quattro stazioni magnetiche non si trovano precisamente nel meridiano di Roma; la maggiore differenza pari a 9′ in longitudine ha luogo per Porto d'Anzio. Da ciò segue, che parlando in astratto non sarebbe permesso di dedurre il valore di μ nei diversi casi dividendo semplicemente la differenza delle forze per la relativa differenza delle latitudini, perchè in generale si deve ammettere che l'intensità della componente orizzontale varia anche colla longitudine. Ma essendo primieramente le variazioni di questa forza in senso del paralello molto minori di quelle lungo il meridiano, e trattandosi in secondo luogo di stazioni, che non si trovano molto distanti dal meridiano di Roma, possiamo senza tema di errore sensibile valerci di questo calcolo abbreviato. Applicando di fatti il metodo rigoroso si trova per μ un valore sensibilmente uguale a quello dato di sopra.

L'unità su cui si riferisce il valore di μ è la componente orizzontale di Roma. Volendo invece questa quantità esprimere in unità assolute di Gauss, mi servo delle mie misure fatte nell'anno passato a s. Pietro in Vincoli. Queste hanno dato per la componente orizzontale il valore

$$2{,}3047;$$

aumentando questo per 0,0022, cioè per accrescimento annuo di questa forza, si ottiene 2.3069. Basandosi sopra questo numero si avrà finalmente per μ il valore

$$0{,}00079.$$

Ottenuto così il valore medio di μ possiamo dedurre la componente orizzontale nelle quatto stazioni magnetiche e otteniamo

Porto d'Anzio	2,3278
Roma.	2,3069
Fiano.	2,2940
Narni.	2,2787
Todi	2.2653.

Terminata l'esposizione delle mie ricerche sulla componente orizzontale magnetica nei dintorni di Roma riferirò le misure di questa medesima forza fatte da altri.

Una di queste misure, che viene riportata dal *Repertorium* di Carl vol. 5 pag. 53, si riferisce a Treponti. Si aveva nell'anno 1850 in questa località la componente orizzontale espressa in unità di Gauss = 2,2718, mentre si verificò per Roma nella medesima epoca il valore = 2,2459.

Dividendo il primo numero pel secondo otteniamo 1,0115 e questo esprime la componente orizzontale di Treponti espressa in unità della forza di Roma.

Secchi fece nel 1859 delle misure della forza magnetica totale, le quali si trovano inserite nelle Memorie del Collegio romano anno 1857-59 pag. 209. Queste determinazioni eseguite col metodo di Lloyd hanno dato i seguenti valori:

Roma	1,0000
Norcia.	1,0017
Spoleto.	0,9916
S. Pastore.	0,9896.

Da questi numeri emergerebbe che la linea isodinamica di Roma passa fra Norcia e Spoleto, il che non è punto conforme all'andamento generale di queste curve. La circostanza poi che la forza di Norcia supera quella di Spoleto sarebbe ancora molto meno conciliabile con questo andamento.

Dai valori riportati, basandosi sulle inclinazioni misurate dal medesimo autore, si ottengono i seguenti valori della componente orizzontale, prendendo Roma per unità.

Norcia.	0,9773
Spoleto	0,9704
S. Pastore.	0,9774.

Non posso fare a meno di ricordare che s. Pastore si trova ad un di presso nel parallelo geografico di Roma e soltanto 21′ all'est; la corrispondente differenza delle componenti orizzontali sarebbe secondo Secchi = 0,0226. Questo numero è senza dubbio troppo grande, e di più è da notarsi che la componente orizzontale cresce in tutta l' Europa media andando verso est, mentre da queste misure seguirebbe il contrario.

Riporto in ultimo le due misure fatte da Secchi a Galloro nel 1859, la prima eseguita col metodo di Lloyd, la seconda con quelle di Hansteen. Queste due misure fornirono per la forza totale i valori

0,9904 e 1,0203,

e deducendo da questi la componente orizzontale si ottengono le quantità

0,9774 e 1,0101.

Siccome alcune delle stazioni scelte da Secchi distano considerevolmente dal meridiano di Roma, potrebbero i risultati ottenuti servire per determinare la variazione della componente orizzontale colla longitudine. Però la poca concordanza dei valori mi fece desistere dall'eseguire i relativi calcoli, dovendomi per ora contentare di aver assegnata la variazione di questa forza lungo il meridiano.

Nuove ricerche sulla Serie di Fourier.

Memoria del prof. G. ASCOLI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 7 aprile 1878.

I.

Elementi per una teorica delle funzioni di una variabile reale.

1. *Preliminari.*

1. Inserisco nel segmento ab un altro $a_1b_1 < ab$, in a_1b_1 un terzo $a_2b_2 < a_1b_1$, e così procedo indefinitamente, essendo $\lim_{n=\infty} a_n b_n = 0$.

Non esistono due punti assegnabili che fanno parte del tratto ab (¹) e di uno qualsivoglia degli intervalli $a_1 b_1$, $a_2 b_2$,... Poichè, nel caso contrario, $a_n b_n$ annullandosi con $\frac{1}{n}$, si potrebbe dare ad n un valore tale, chè a partire da esso il tratto $a_n b_n$ fosse minore della distanza di questi due punti.

Ciò posto, ammetto che, operando nel modo indicato, si tenda ad un punto, voglio dire con ciò, che nel tratto ab esiste uno ed un solo punto assegnabile che fa parte del segmento a_nb_n, quale si sia n. In taluni casi potrà esser facile l'assegnare il punto al quale si converge; se gli intervalli $a_1 b_1$, $a_2 b_2$,... avessero un punto a comune, ad es. il medio, si tenderebbe al medesimo.

2. Data una serie illimitata di punti P in un intervallo finito qualsivoglia, si può sempre determinare nel medesimo *almeno* un punto c tale, che nel tratto $\overline{c-\eta}\ \overline{c+\eta_1}$ ne cada un numero non assegnabile, per quanto sieno piccole le quantità η ed η_1. Se il punto c fosse in uno degli estremi del segmento considerato, una delle quantità η ed η_1 sarebbe nulla. Esso si dirà *punto limite* (²).

Ed invero, si divida il segmento dato in più parti eguali $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$; in una di queste *almeno* cadrà un numero illimitato di punti P. La si decomponga

(¹) Dico che un punto appartiene o fa parte del segmento ab, quando esso è nel suo interno od ai suoi limiti, dell' intervallo $\overline{a+0}\ b$, se cade tra a e b oppure sovra quest'ultimo.

(²) Vedi la Memoria del sig. Cantor: *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, inserita nel vol. V degli Annali di Matematica di Clebsch e Neumann, p. 131 e segte.

alla sua volta in un numero arbitrario di parti eguali, di cui una *almeno* conterrà un numero non assegnabile di elementi P. Così procedendo indefinitamente si tenderà, pel postulato ammesso or ora, ad un punto, che è un punto limite.

Una serie illimitata di punti P definisce la serie dei suoi punti limite P′, che dirò *derivata prima*, la quale, quando non consti di un numero assegnabile di elementi, dà pure origine ad una serie di punti limite P″, che si dirà derivata prima della serie P′ e *derivata seconda* della P. Si vede ora ciò che debba intendersi per *serie derivata dell' ordine r*.

Ecco alcuni esempî: se il sistema P fosse costituito da un punto qualsivoglia di ascissa razionale del segmento 01, la serie P′ conterrebbe un punto qualunque di esso tratto, e così pure ciascuna delle derivate P″, P‴, ... Se il sistema P contenesse il punto di ascissa $\frac{1}{s}$ $(s = 1, 2, ...)$, la serie P′ si ridurrebbe al punto 0.

Diremo che un sistema di punti forma un gruppo dell'ordine r, quando $P^{(r)}$ contiene un numero assegnabile di elementi; la seconda delle serie considerate è del primo ordine. Un punto qualsivoglia di un tratto contenente la origine e che ha per ascissa

$$\frac{1}{3^{s_1}} + \frac{1}{5^{s_2}} + \frac{1}{7^{s_3}} + \frac{1}{11^{s_4}},$$

gli interi s_1, s_2, s_3, s_4 variando da uno sino a $+\infty$, determina una serie del quarto ordine, di cui le derivate P′, P″, P‴ contengono rispettivamente un punto qualunque di ascissa

$$\frac{1}{3^{s_1}} + \frac{1}{5^{s_2}} + \frac{1}{7^{s_3}}, \quad \frac{1}{3^{s_1}} + \frac{1}{5^{s_3}} + \frac{1}{11^{s_4}}, \quad \frac{1}{3^{s_1}} + \frac{1}{7^{s_3}} + \frac{1}{11^{s_4}}, \quad \frac{1}{5^{s_2}} + \frac{1}{7^{s_3}} + \frac{1}{11^{s_4}};$$

$$\frac{1}{3^{s_1}} + \frac{1}{5^{s_2}}, \quad \frac{1}{3^{s_1}} + \frac{1}{7^{s_3}}, \quad \frac{1}{3^{s_1}} + \frac{1}{11^{s_4}}, \quad \frac{1}{5^{s_2}} + \frac{1}{7^{s_3}}, \quad \frac{1}{5^{s_2}} + \frac{1}{11^{s_4}}, \quad \frac{1}{7^{s_3}} + \frac{1}{11^{s_4}};$$

$$\frac{1}{3^{s_1}}, \quad \frac{1}{5^{s_2}}, \quad \frac{1}{7^{s_3}}, \quad \frac{1}{11^{s_4}},$$

mentre la $P^{(IV)}$ consta soltanto del punto 0.

È manifesto che, assegnato un gruppo d'ordine qualsivoglia in un intervallo qualsiasi, si potrà determinare in una parte scelta ad arbitrio nel medesimo un tratto entro il quale non cade verun punto del sistema dato.

3. Sia P una serie di punti dell'ordine r nel segmento ab. I punti della derivata $P^{(r)}$ decompongono l'intervallo dato in un numero assegnabile di parti $A_1^{(r)}$, $A_2^{(r)}$, ... Un tratto $'A_1^{(r)}$, che ha uno qualsivoglia dei suoi punti nell'interno di $A_1^{(r)}$ e tale, che la differenza $A_1^{(r)} - 'A_1^{(r)}$ sia di quella piccolezza che si vuole, contiene un numero limitato di punti della derivata $P^{(r-1)}$, i quali lo dividono in un numero determinato di intervalli $A_1^{(r-1)}$, $A_2^{(r-1)}$, ... Analoghe considerazioni si ponno fare rispetto a ciascuno degli altri segmenti $A_2^{(r)}$, $A_3^{(r)}$, ... L'intervallo $'A_1^{(r-1)}$, dedotto da $A_1^{(r-1)}$ come lo fu $'A_1^{(r)}$ da $A_1^{(r)}$, contiene un numero limitato di punti della derivata $P^{(r-2)}$, che lo scindono in un numero assegnabile di parti $A_1^{(r-2)}$, $A_2^{(r-2)}$, ... Procedendo nel modo indicato si otterrà un numero determinato di segmenti $'A_1^{(0)}$, $'A_2^{(0)}$, ..., ciascuno dei quali è scevro da punti P e la cui somma è arbitrariamente vicina ad ab.

Se supponiamo che ognuna delle differenze

$$A_1^{(0)} - 'A_1^{(0)}, \quad A_2^{(0)} - 'A_2^{(0)}, \ldots$$

si annulli, otteniamo i segmenti $A_1^{(0)}$, $A_2^{(0)}$, ... , ciascuno dei quali non contiene nel suo interno verun punto della serie $P^{(0)}$. I tratti $A_1^{(0)}$, $A_2^{(0)}$, ... aggruppati convenientemente danno origine agli altri $'A_1^{(1)}$, $'A_2^{(1)}$, ... , di cui ognuno ha un numero assegnabile di punti della serie $P^{(0)}$. Si facciano convergere questi ultimi ai corrispondenti $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$, ... Questi tratti combinati in modo opportuno fanno nascere gl' intervalli $'A_1^{(2)}$, $'A_2^{(2)}$, ... , che alla lor volta danno origine ai segmenti $A_1^{(2)}$, $A_2^{(2)}$.... Procedendo in tal guisa si ricompone il segmento dato.

4. Chiamerò serie continua di un segmento ab un aggregato tale di punti sul medesimo, che in un tratto qualsiasi si possa assegnarne uno, epperò quanti si vogliono. I punti di ascissa $\frac{p}{2q}$ dell'intervallo $\frac{1}{2}$ 1, p e q essendo primi tra loro, costituiscono una serie continua del segmento dato.

Una successione continua P_1 è compresa in un' altra P, quando un punto qualsivoglia della serie P_1 appartiene a P. La serie or ora considerata appartiene a quella determinata dai punti di ascissa commensurabile del tratto $\frac{1}{2}$ 1.

Una successione continua rimane tale togliendo dalla medesima un gruppo di ordine assegnabile.

2. *Sul concetto di funzione.*

1. Se le quantità y ed x dipendono tra loro per modo, che si possa assegnare una serie limitata od illimitata di valori della x, a ciascuno dei quali corrisponda uno ed un solo valore di y, si dirà che y è una funzione di x.

Riferendosi in un piano verticale a due assi ortogonali X, Y (X orizzontale), si potrà imaginare rappresentata la dipendenza della y dalla x nel solito modo. Se fissassi un numero determinato di punti sulla retta $y=0$ ed in ciascuno dei medesimi inalzassi una normale di lunghezza arbitraria, otterrei una funzione della x. Una serie i cui termini dipendono dalla x, la quale converge almeno per un valor particolare di quest' ultima, ci offre un altro esempio di funzione, come

$$\sum_1^n 1.2\ldots n x^n.$$

Il simbolo

$$\sum_1^{\frac{1}{x}} c_n$$

ha significato soltanto per valori di x della forma 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... , quando c_n rappresenti una grandezza per valori interi e positivi di n.

Riemann nella Memoria: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (1) dice:.... « betrachten wir die Reihe

$$a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots.$$

$$\tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots.$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\tfrac{1}{2} b_0 = A_0,\ a_1 \operatorname{sen} x + b_1 \cos x = A_1,\ a_2 \operatorname{sen} 2x + b_2 \cos 2x = A_2, \ldots$$

(1) Vedi Riemann, Mathematische Werke, p. 231.

setzen, die Reihe

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots$$

als gegeben. Wir bezeichnen diesen Ausdruck durch Ω und seinen Werth durch $f(x)$, so dass diese Function nur für diejenigen Werthe von x vorhanden ist, wo die Reihe convergirt ».

2. Nè queste parole soltanto accennano alla definizione data or ora; dopo il periodo riportato Riemann soggiunge (1): « Zur Convergenz einer Reihe ist nothwendig, dass ihre Glieder zuletzt unendlich klein werden. Wenn die Coefficienten a_n, b_n mit wachsendem n in's Unendliche abnehmen, so werden die Glieder der Reihe Ω für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein; andernfalls kann dies nur für besondere Werthe von x stattfinden ».

Ora, se si ammette che le parole besondere Werthe dicano che questi valori non riempiono mai un tratto continuo dell' asse X, l' ultima asserzione contiene il teorema:

Se per ciascun punto m particolare di un segmento comunque piccolo dell' asse X l'espressione

$$a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx$$

converge a zero con $\frac{1}{n}$, sarà:

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \qquad (n = \infty).$$

Questa proposizione fu dimostrata dal sig. Cantor (2); pare quindi che il mio modo di interpretare il periodo riportato sia esatto.

Riemann, per quanto osserva a pag. 230: «... es müssen daher zunaechst zur Darstellbarkeit nothwendige Bedingungen aufgesucht und aus diesen dann zur Darstellbarkeit hinreichende ausgewählt werden », cerca in prima le condizioni che necessariamente devono essere soddisfatte (3) « wenn eine nach dem Intervall 2π periodisch sich wiederholende Function $f(x)$ durch eine trigonometrische Reihe deren Glieder für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden darstellbar sein soll ». Dice in appresso: « Es bleibt nun noch der Fall zu untersuchen wo die Glieder der Reihe Ω für den Argumentwerth x zuletzt unendlich klein werden, ohne dass dies für jeden Argumentwerth stattfindet (4) ».

Ora, se non si accettasse la definizione di funzione data poco fa, la quale non porta di necessaria conseguenza la esistenza della medesima per un punto qualsivoglia di un tratto comunque piccolo delle asse X, sarebbero anzitutto superflue le parole « deren Glieder für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden », nè d' altra parte avrebbe significato il cercare le condizioni affinchè una funzione sia esprimibile per serie trigonometrica i coefficienti della quale non vanno a zero con

(1) Vedi l' o. c., p. 231.
(2) Vedi gli Annali di Matematica di Clebsch e Neumann, vol. IV p. 139.
(3) Vedi l' o. c., p. 237.
(4) Vedi p. 241.

$\frac{1}{n}$, in quanto il non ammettere soddisfatta questa condizione escluderebbe a priori la esprimibilità della $f(x)$ per serie della forma

$$\tfrac{1}{2}b_0 + \sum_1^n (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx).$$

3. *Funzioni finite e funzioni che non sono tali.*

1. Rappresentata graficamente una funzione che esiste in un numero illimitato di punti del tratto ab $(a<b)$, se si ponno tirare due rette parallele all'asse X che la comprendono, si dirà che essa è finita nel dato segmento; se non può soddisfarsi a questa condizione, che va in esso all'infinito.

La funzione sen$x$ è finita in un intervallo qualsivoglia, mentre l'altra $\frac{1}{x-c}$ non è tale in un segmento che contiene il punto c. È chiaro che una funzione può andare all'infinito in un solo verso o in amendue.

Detto c un punto interno ad ab e considerato l'intervallo $\overline{c-\eta}\ \overline{c+\eta}$, η essendo una quantità piccola quanto si vuole, potranno darsi due casi:

1° la $f(x)$ non esiste in questo tratto oppure esiste un numero limitato di volte, ed in allora il simbolo $f(c)$ ha significato;

2° si può assegnare un numero illimitato di punti nel medesimo in ciascuno dei quali ha luogo la dipendenza.

Nella prima ipotesi il problema di studiare il modo di comportarsi della $f(x)$ nel tratto $\overline{c-\eta}\ \overline{c+\eta}$ o non ha senso, oppure non offre alcun interesse riducendosi alla considerazione del valore $f(c)$; altrettanto non può dirsi nella seconda. In ciò che segue supporremmo sempre verificata l'ultima ipotesi quando studieremo il modo di comportarsi di una funzione nelle estreme vicinanze di un punto c.

Ciò posto, se la data funzione si mantiene finita nel tratto $\overline{c-\eta}\,\overline{c+\eta}$, diremo che è finita in c; se ciò non ha luogo, che va in esso all'infinito, o che in esso cresce oltre ogni limite, o anche che ha un infinito in c. È chiaro come si debba modificare questa definizione quando il punto c cade in uno degli estremi a o b. Se la $f(x)$ ha un infinito in un punto dell'intervallo ab, essa potrà crescere oltre ogni misura in un verso o in amendue in un segmento arbitrariamente piccolo che lo contiene.

Ha luogo il teorema:

Se la $f(x)$ non è finita nel tratto ab, si potrà assegnare almeno un punto in esso nel quale cresce oltre ogni misura.

Ed invero, si divida il segmento dato nelle parti eguali $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$; in una di queste *almeno* la $f(x)$ non è finita, sia essa a_s. Col tratto a_s si operi come con ab, e così di seguito indefinitamente; si tenderà in tal modo ad un punto c, nel quale la $f(x)$ non è finita.

È chiaro che la $f(x)$ può restar finita in uno dei due intervalli $\overline{c-\eta}\,c$, $c\,\overline{c+\eta}$ anche se ha un infinito in c, come la funzione che è eguale a sen$x$ nel segmento

ac ed a $\frac{1}{x-c}$ nel tratto $\overline{c+0\ b}$. Si può anche dire che l'ultima funzione cresce oltre ogni limite nel punto $\overline{c+0}$, mentre si mantiene finita nell'altro $\overline{c-0}$.

2. Giova distinguere gli infiniti in due specie: in isolati e non isolati.

Un infinito è isolato quando si può assegnare un intervallo $\overline{c-\eta\ c+\eta}$ tale, che in esso la funzione resti finita trascurando i valori assunti dalla medesima nel tratto $c-\eta_1\ c+\eta_1$, η_1 essendo minore di η e di quella piccolezza che si vuole, non isolato, se non può soddisfarsi a questa condizione; la funzione $\frac{1}{x}$ ha un infinito di prima specie nella origine, l'altra $\left(\text{sen}\,\frac{1}{x}\right)^{-1}$ uno di seconda.

Questa definizione va leggermente modificata se il punto c è in uno degli estremi di ab.

Dimostriamo ora il teorema:

Una funzione dotata di un infinito di seconda specie in c $(a \leq c \leq b)$ ha un numero illimitato di infiniti nel segmento ab.

Ed invero, supposto $a<c<b$, consideriamo il tratto $\overline{c-\eta_1\ c+\eta_1}$ $(0<\eta_1<\eta)$ tale, che in uno almeno dei segmenti $\overline{c-\eta\ c-\eta_1}$, $\overline{c+\eta_1\ c+\eta}$ la $f(x)$ non resti finita ed in cui cadrà, pel teorema che precede, almeno un infinito della $f(x)$. Quanto si è detto circa l'intervallo $\overline{c-\eta\ c+\eta}$ può ripetersi dell'altro $\overline{c-\eta_1\ c+\eta_1}$, e così di seguito indefinitamente; l'asserto è quindi dimostrato. Questo ragionamento va un po' modificato se il punto c cade in a o in b.

Di conseguenza, se la $f(x)$ ha un infinito non isolato nel punto c $(a<c<b)$, si può assegnare *almeno* in uno dei tratti $\overline{c-\eta\ c}$, $\overline{c+\eta\ c}$ una serie di infiniti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ tale, che sia $\lim_{n=\infty} \alpha_n = c$.

Gli infiniti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ potranno essere di necessità isolati oppure ciò non ha luogo; valga ad esempio del primo caso la funzione $\left(\text{sen}\,\frac{1}{x}\right)^{-1}$, del secondo l'altra $\left[\text{sen}\left(\text{sen}\,\frac{1}{x}\right)^{-1}\right]^{-1}$ per $x=0$.

Havvi anche il teorema:

Se la $f(x)$ ha un numero illimitato di infiniti di prima specie nell'intervallo ab, esso ha almeno un infinito non isolato nel medesimo.

Questa proposizione si dimostra col metodo delle successive divisioni.

Una funzione dei punti di un segmento ab può andare all'infinito in ciascun punto del medesimo; così la funzione

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_1^q{}_s \frac{1}{s} - \sum_1^q{}_s \frac{1}{q+s} + \sum_1^q{}_s \frac{1}{2q+s} - \ldots .$$

p e q essendo primi tra loro.

Per comprendere questo esempio si rammenti il teorema:

Se

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots \left(\lim_{n=\infty} u_n = 0\right),$$

$$u_1 > 0,\ u_2 > 0,\ u_3 > 0, \ldots,$$

posto

$$S = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots,$$

si ha:

$$S - S_n < u_{n+1},$$

astrazion fatta dal segno.

Si osservi anche che la serie $\sum_1^\infty s \frac{1}{s}$ diverge e che

$$\sum_1^q s \frac{1}{q+s} < q \frac{1}{q}$$

$$\text{»} \quad < 1.$$

Un esempio più semplice ci è offerto dalla funzione

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = q.$$

4. *Limite superiore ed inferiore dei valori assunti da una funzione finita $f(x)$ nel tratto ab.*

1. Sieno $y = A$ ed $y = B$ le equazioni di due rette che determinano una lista di piano nella quale cade la imagine della $f(x)$. Detto $\alpha\beta$ il segmento determinato dalle medesime sull'asse Y, decomponiamolo in m parti eguali e, tirate pei punti di divisione altrettante parallele all'asse X, diciamo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ le liste di piano in tal guisa ottenute procedendo dall'alto in basso. Ciò posto, sia a_t la prima lista nel verso indicato, nella quale cade, incluso il contorno, l'estremo di una ordinata almeno della $f(x)$. Con questa lista si operi come con quella determinata dalle rette $y = A$, $y = B$, e così di seguito indefinitamente; si tenderà in tal guisa ad una retta $y = L$.

La differenza

$$L - f(x)$$

non è negativa in nessun punto del tratto ab, mentre l'altra

$$L - \left(f(x) + \varepsilon\right)$$

lo è *almeno* in un punto, ε essendo una quantità positiva piccola quanto si vuole.

Infatti, se un punto della imagine della $f(x)$ cadesse al di sopra della retta $y = L$, si potrebbe assegnare col processo indicato una lista di piano superiormente alla linea $y = L$, nella quale esso si trova, la qual cosa non è possibile. La seconda parte della asserzione si dimostra in modo analogo.

Rispetto alla funzione $-f(x)$ si potrà assegnare una grandezza $-l$ tale, che la quantità

$$-l + f(x)$$

non sia negativa in verun punto del tratto ab, mentre l'altra

$$-l-\left(-f(x)+\varepsilon\right)$$

lo è *almeno* una volta.

La differenza

$$-f(x)+l$$

non è quindi mai positiva nell'intervallo, e l'altra

$$-f(x)+l+\varepsilon$$

lo è *almeno* in un punto.

La quantità L si dirà il limite superiore dei valori conseguiti dalla $f(x)$ nel tratto ab, l il limite inferiore, la differenza $L-l$ la oscillazione della $f(x)$ in ab.

È manifesto che le quantità L ed l non esistono se la $f(x)$ va all'infinito in ambo i versi, e che ne esiste una ogniqualvolta essa cresce oltre ogni limite in uno soltanto.

2. La $f(x)$ non raggiunge di necessità i valori L ed l: una funzione, definita nei punti di ascissa incommensurabile del tratto $0\,2$ mediante una semicirconferenza avente i suoi estremi nei punti $0\,2$ e sita sovra l'asse X, non raggiunge i valori limiti zero ed uno. La funzione che ha per imagine la intera semicirconferenza consegue i valori L ed l.

È notevole il teorema:

Si può sempre assegnare almeno un punto c in ab tale, che il limite superiore dei valori raggiunti dalla $f(x)$ in un tratto arbitrariamente piccolo che lo contiene sia L.

Il punto c può anche essere uno qualsivoglia dell'intervallo ab; la funzione $f\left(\frac{p}{q}\right)=-\frac{1}{q}$ nel segmento $\frac{1}{2}\,1$, p e q essendo primi tra loro, ha per limite superiore lo zero in una parte qualunque del tratto considerato, nè mai lo raggiunge.

Si può enunciare un teorema analogo al precedente rispetto al limite inferiore. I due punti dei quali si parla in questi teoremi non sono necessariamente distinti.

Queste proposizioni si dimostrano col metodo delle successive divisioni.

5. *Funzioni dotate di un numero limitato di massimi e minimi nel segmento ab.*

1. La funzione $f(x)$ si dice dotata di un numero limitato di massimi e minimi nel segmento ab, quando lo si può dividere in un numero assegnabile di parti, entro ciascuna delle quali la $f(x)$ non è crescente e decrescente; se non può soddisfarsi a questa condizione si dice che la $f(x)$ ha un numero illimitato di massimi e minimi nel tratto ab.

Per tutta chiarezza osservo che, se una funzione non è decrescente o crescente nel tratto $\overline{m+0\;\; n-0}$, non si ponno assegnare nel medesimo due punti x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ tali, che sia $f(x_1) \gtrless f(x_2)$ rispettivamente.

La funzione sen x è di prima specie in un tratto qualsivoglia dell' asse X, l'altra sen $\frac{1}{x}$ di seconda in un segmento contenente la origine.

2. Le funzioni dotate di un numero limitato di massimi e minimi hanno alcune proprietà che importa conoscere e delle quali ora ci occuperemo.

Circa alle medesime Riemann osserva [1]: « Es ist nicht schwer zu beweisen, dass der Werth einer Function f, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, stets, sowohl wenn der Argumentwerth abnehmend, als wenn er zunehmend gleich x wird, entweder festen Grenzwerthen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ sich nähern, oder unendlich gross werden müsse ».

Per dimostrare questa asserzione premetto il teorema:

Se

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots,$$

oppure

$$u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \ldots\ldots,$$

mentre la quantità u_n non cresce oltre ogni limite con n, sarà:

$$\lim_{n=\infty} u_n = \mathrm{L},$$

L essendo una grandezza assegnabile.

Questa proposizione è conseguenza delle ricerche del capitolo precedente.

Ciò posto, divido il segmento ab in un numero limitato di parti per modo, che in ciascuna delle medesime la $f(x)$ non sia crescente e decrescente. Scelgo poi un punto c nell' interno di una di esse e considero nel tratto $\overline{c+0}\ \overline{c+\eta}$ una serie di punti

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots \qquad \left(\lim_{n=\infty} \alpha_n = c\right)$$

tali, che i simboli

$$f(\alpha_1),\ f(\alpha_2),\ f(\alpha_3), \ldots$$

abbino significato.

Ora, se la $f(x)$ non è costante nel segmento $\overline{c+0}\ \overline{c+\eta}$, si ha

$$f(\alpha_1) \geq f(\alpha_2) \geq f(\alpha_3) \geq \ldots,$$

oppure

$$f(\alpha_1) \leq f(\alpha_2) \leq f(\alpha_3) \leq \ldots\ldots.$$

Supposto, per fissare le idee, che si verifichi il primo caso, sarà:

$$\lim_{n=\infty} f(\alpha_n) = \mathrm{M},$$

M essendo una quantità assegnabile.

Detta β_1, β_2, β_3, ... un'altra serie di punti dello stesso intervallo che soddisfa alle stesse condizioni della precedente, avremo:

$$\lim_{n=\infty} f(\beta_n) = \mathrm{M}_1.$$

[1] Vedi p. 223.

Le quantità M ed M_1 sono eguali; poichè, se fosse $M < M_1$, si potrebbe assegnare per n un valore n_1 in guisa, che

$$f(\alpha_{n_1}) < f(\beta_{s_1+t}) \quad (t = 1, 2, 3, \dots),$$

β_{s_1+1} essendo il primo punto β da $\overline{c+\eta}$ verso $\overline{c+0}$ del tratto $\alpha_{n_1}\ \overline{c+0}$, la qual cosa non può aver luogo per la fatta ipotesi.

Si avverte poi di leggieri che, data una quantità arbitraria σ, si possono tracciare due rette $y = M \pm \sigma$ tali, che la imagine della $f(x)$ cada per intero nel tratto $\overline{c+0}\ \overline{c+\eta_1}$ $(\eta_1 > 0)$ nella lista di piano limitata da esse. Infatti, se ciò non avesse luogo per quanto piccola fosse la quantità η_1, ossia, se io avvertissi che nel tratto $\overline{c+0}\ \overline{c+\eta_1}$ l'estremo di una ordinata, epperò di quante si vogliono, cade esternamente alla lista indicata, si potrebbe assegnare una serie di punti le cui ascisse $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ soddisfanno alle condizioni

$$\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 > \dots \left(\lim_{n=\infty} \gamma_n = \overline{c+0}\right),$$

essendo

$$\lim f(\gamma_n) \lesseqgtr M,$$

la qual cosa non potendo verificarsi, l'asserto è dimostrato.

È manifesto che una funzione della specie considerata non può avere che infiniti isolati.

2. Essendo $\overline{m+0}\ \overline{n-0}$ un tratto di ab in cui la $f(x)$ cresce sempre, è chiaro che la variabile indipendente x potrà considerarsi come funzione della y, la quale è sempre crescente nel verso positivo dell'asse Y, laonde:

Se y è una funzione tale della x, che il tratto ab si possa dividere in un numero limitato di parti, entro ciascuna delle quali essa è sempre crescente o decrescente, invertendo la dipendenza, si avrà un numero limitato di funzioni x della y, ciascuna sempre crescente o decrescente.

6. *Oscillazioni di una funzione per un valor particolare della variabile, ed ulteriori ricerche sulle funzioni dotate di un numero limitato di massimi e minimi.*

1. Il limite superiore $\theta_c(\eta_1)$ dei valori assunti nell'intervallo $\overline{c+0}\ \overline{c+\eta}$ da una funzione $f(x)$ finita in c è una funzione determinata per ciascun valore di $\eta_1 \leq \eta$, la quale non è crescente da $\overline{c+\eta}$ a $\overline{c+0}$. Se diciamo poi $\omega_c(\eta_1)$ il limite inferiore dei valori della $f(x)$ nello stesso intervallo, sarà $\omega_c(\eta_1)$ una funzione ad un valore in ciascun punto del medesimo, nè decrescente nel verso indicato.

Per le ricerche del capitolo che precede è manifesto che i simboli $\theta_c(+0)$, $\omega_c(+0)$ hanno significato. Si potrà quindi assegnare un tratto $\overline{c+0}\ \overline{c+\eta_{11}}$ nel quale la imagine della $f(x)$ è tutta compresa tra le rette $y = \omega_c(+0) - \sigma$ ed $y = \theta_c(+0) + \sigma$, σ essendo di quella piccolezza che si vuole.

Si dirà oscillazione della $f(x)$ a destra di c, o anche oscillazione laterale destra, la differenza $\theta_c(+0) - \omega_c(+0)$, e si indicherà

col simbolo $O_{\overline{c+0}}$; questa differenza non dipende dal valore $f(c)$, se pure esiste; la funzione sen $\frac{1}{x}$ ha una oscillazione eguale a due a destra della origine, essendo $\theta_0(+0)=1$, $\omega_0(+0)=-1$.

Nella ricerca fatta or ora è indifferente considerare o no il valore $f(c+\eta_1)$, se pure c' è, in altre parole, indicato con $W_c(\eta_1)$, $K_c(\eta_1)$ il limite superiore ed inferiore della $f(x)$ nel tratto $\overline{c+0}\ \overline{c+\eta_1-0}$, sarà:

$$\lim_{\eta_1=+0} W_c(\eta_1)=\theta_c(+0), \quad \lim_{\eta_1=+0} K_c(\eta_1)=\omega_c(+0).$$

Infatti, si ha

$$\theta_c(\eta_1)\geq W_c(\eta_1)\geq \theta_c(+0),$$
$$\omega_c(\eta_1)\leq K_c(\eta_1)\leq \omega_c(+0),$$

quale si sia η_1.

Analogamente si definisce la oscillazione $O_{\overline{c-0}}=\theta_c(-0)-\omega_c(-0)$ della $f(x)$ a sinistra di c.

Se $O_{\overline{c+0}}$ fosse zero la $f(x)$ tenderebbe ad un valore per $x=\overline{c+0}$, voglio dire con ciò, che, scelta ad arbitrio una serie di punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ $\left(\lim_{n=\infty} \alpha_n=\overline{c+0}\right)$, in ciascuno dei quali il simbolo $f(x)$ ha significato, si avrebbe:

$$\lim_{s=\infty} f(\alpha_s)=\theta_c(+0)=\omega_c(+0)=f(c+0).$$

2. Consideriamo ora la $f(x)$ nel tratto $\overline{c-\eta}\ \overline{c+\eta}$ e diciamo $\varphi_c(\eta)$ il suo limite superiore nel medesimo; $\varphi_c(\eta)$ è una funzione definita in un punto qualsivoglia del segmento $+0\,\eta$ scevra da infiniti massimi e minimi e che non va all'infinito. Il limite inferiore $\psi_c(\eta)$ della $f(x)$ nello stesso tratto ha proprietà analoghe a quelle della funzione $\varphi_c(\eta)$.

Diremo oscillazione della $f(x)$ nel punto c la differenza $\varphi_c(+0)-\psi_c(+0)$, che indicheremo con O_c.

Potrebbe essere $O_{\overline{c+0}}=O_{\overline{c-0}}$ e tuttavia $O_c>0$; la funzione $\sum_1^n \frac{\text{sen}\, nx}{n}$ ha le oscillazioni laterali nulle nell'origine mentre $O_0=\pi$; se però $O_c=0$, si ha:

$$O_{\overline{c+0}}=O_{\overline{c-0}}=O_c.$$

Detto $\rho_c(\eta_1, \eta)$ il limite superiore della $f(x)$ nel tratto $\overline{c-\eta_1}\ \overline{c+\eta}$ $(\eta_1 \gtrless \eta)$, sarà

$$\lim \rho_c(\eta_1, \eta)=\varphi_c(0),$$

quando si mandino a zero in modo arbitrario le quantità η_1 ed η. In questa ricerca è indifferente il tener calcolo o no dei valori $f(c-\eta_1)$, $f(c+\eta)$, se pure esistono. La quantità $\varphi_c(0)$ è eguale alla maggiore delle tre grandezze $f(c)$, $\theta_c(+0)$, $\theta_c(-0)$, l'altra $\psi_c(0)$ alla minore delle tre $f(c)$, $\omega_c(+0)$, $\omega_c(-0)$, quando il simbolo $f(c)$ abbia significato.

Se la data funzione avesse un infinito in c due dei simboli $\theta_c(+0)$, $\theta_c(-0)$, $\omega_c(+0)$, $\omega_c(-0)$, φ_c, ψ_c almeno non avrebbero significato.

3. Se la $f(x)$ fosse scevra da infiniti massimi e minimi e se ci limitassimo a considerare un tratto $\overline{m+0}\ \overline{n-0}$ nel quale non è crescente e decrescente, sarebbe per le ricerche del capitolo che precede:

$$O_{\overline{x+0}} = O_{\overline{x-0}} = 0 \qquad (m < x < n).$$

Quando la $f(x)$ sia finita nel segmento $\overline{m+0}\ \overline{n-0}$, sarà limitato il numero dei punti nei quali O_x è maggiore della quantità arbitraria $\sigma > 0$; questo numero però potrà crescere oltre ogni limite con $\frac{1}{\sigma}$. Ove poi la $f(x)$ non fosse finita nell'intervallo considerato, potrebbe essere senza fine il numero dei punti in ciascuno dei quali $O_x > \sigma$.

Il limite inferiore dei valori conseguiti dalla O_x in un tratto qualsivoglia del tutto interno all'intervallo $\overline{m+0}\ \overline{n-0}$ è eguale a zero, non possiamo però asserire che esso venga raggiunto, la qual cosa avrà luogo o no.

Il limite superiore della funzione O_x nel tratto $\overline{m+0}\ \overline{n-0}$ non è più grande di mod. $[f(n-0) - f(m+0)]$, quando la $f(x)$ sia in esso finita.

7. *Funzioni dotate di un numero illimitato di massimi e di minimi.*

1. Nella lista di piano determinata dalle due rette $y = \theta_x(+0) \pm \sigma$ $(a < x < b)$, σ essendo una grandezza arbitraria, si può sempre assegnare un punto della imagine della $f(x)$ la cui ascissa non eccede i limiti $\overline{x+0}\ \overline{x+\eta}$, per quanto sia piccola la quantità η; altrettanto si dica circa alle rette $y = \omega_x(+0) \pm \sigma$. Si ponno fare analoghe considerazioni rispetto alle quantità $\theta_x(-0)$, $\omega_x(-0)$, φ_x, ψ_x.

Pertanto, ognuno dei simboli

$$\theta_x(+0) - f(x),\ \omega_c(+0) - f(x),\ \theta_x(-0) - f(x)$$
$$\omega_x(-0) - f(x),\ \varphi_x - f(x), \qquad \psi_x - f(x)$$

rappresenta una grandezza in ogni punto c del tratto $\overline{a+0}\ \overline{b-0}$ in cui la $f(x)$ ha significato, quando essa esista tante volte quante si vuole in ciascuno degli intervalli $\overline{c-\eta}\ c$, $c\ \overline{c+\eta}$. Se la $f(x)$ è definita in una successione continua dell' intervallo ab, ciascuna di queste funzioni esiste in un punto qualsivoglia della medesima appartenente al segmento $\overline{a+0}\ \overline{b-0}$.

È chiaro che si potrà assegnare una serie di valori

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \dots \left(\lim_{n=\infty} \alpha_n = \overline{c+0}\right)$$

tali, che sia

$$\lim_{n=\infty} f(\alpha_n) = \theta_c(+0),$$

ed un' altra

$$\beta_2 > \beta_2 > \beta_3 > \dots \left(\lim_{n=\infty} \beta_n = \overline{c+0}\right)$$

in guisa, che si abbia

$$\lim_{n=\infty} f(\beta_n) = \omega_c(+0),$$

se la $f(x)$ esiste nel tratto $\overline{c+\theta}\ \overline{c+\eta}$; η essendo di quella piccolezza che si vuole.

Potrà darsi poi che si possa determinare una serie di punti

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\dots \left(\lim_{n=\infty} \delta_n = \overline{c+0}\right)$$

tali, che sia

$$\lim_{n=\infty} f(\delta_n) = \mathrm{C},$$

essendo C una quantità qualsivoglia compresa tra $\theta_c(+0)$ ed $\omega_c(+0)$; certo però che, scelta ad arbitrio la serie di punti

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\dots \left(\lim_{n=\infty} \gamma_n = \overline{c+0}\right),$$

nei quali il simbolo $f(\gamma_s)$ $(s=1, 2, 3, \dots)$ ha significato, la espressione $f(\gamma_n)$ oscillerà tra due grandezze A e B $(\mathrm{A} \geq \mathrm{B})$ non eccedenti i limiti $\theta_c(+0)$ ed $\omega_c(+0)$ all'annullarsi di $\frac{1}{n}$. Se consideriamo la funzione sen $\frac{1}{x}$ a destra dell'origine le quantità C, A, B potranno essere qualsivoglia, purchè non maggiori dell'unità, astrazion fatta dal segno.

2. Essendo $\overline{c+0}$ un infinito isolato di una funzione qualsivoglia giova studiare il modo di comportarsi della medesima nelle estreme vicinanze di esso punto.

I due simboli $\theta_c(\eta)$, $\omega_c(\eta)$ potranno esser scevri da significato, oppure lo sarà uno soltanto; si ha quindi una prima divisione dei rami infiniti, ad esempio le funzioni

$$\frac{1}{x-c}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x-c}, \qquad \frac{1}{x-c}\,\mathrm{sen}^2\,\frac{1}{x-c}.$$

Le funzioni che ammettono un limite inferiore o superiore nell'intervallo $\overline{c+0}$ $\overline{c+\eta}$ si ponno dividere in due classi, secondo che questo limite tende o no ad un valore all'annullarsi di η, come

$$\frac{1}{x-c}\,\mathrm{sen}^2\,\frac{1}{x-c} - (x-c), \quad \frac{1}{x}.$$

Le ultime, per le quali i due segni $\theta_c(+0)$, $\omega_c(+0)$ sono scevri da significato, laddove, per quanto sia piccola la quantità η, uno dei due simboli $\theta_c(\eta)$, $\omega_c(\eta)$ rappresenta una grandezza, si ponno dividere in due gruppi, secondo che hanno un numero illimitato o limitato di massimi e minimi per $x=\overline{c+0}$, ad es. le funzioni

$$\frac{1}{x-c} + \mathrm{sen}\,\frac{1}{(x-c)^2}, \quad \frac{1}{x-c} + \mathrm{sen}\,\frac{1}{x-c},$$

le cui derivate sono

$$-\frac{1}{(x-c)^2}\left(1 + \frac{2}{x-c}\cos\frac{1}{(x-c)^2}\right),$$

$$-\frac{1}{(x-c)^2}\left(1 + \cos\frac{1}{x-c}\right).$$

Per ultimo, le funzioni che vanno all'infinito non oscillando si ponno distinguere in due classi: apparterranno alla prima quelle che, astrazion fatta dal segno, sono sempre crescenti nel tratto $\overline{c+\eta}\ \overline{c+0}$ per quanto sia piccola la quantità η, all'altra quelle che non sono tali.

In tal modo abbiamo distinto gli infiniti isolati in cinque specie. È chiaro che una funzione scevra da infiniti massimi e minimi non potrà esser dotata che di infiniti delle due ultime specie.

Lo specchietto seguente compendia le cose dette or ora:

Infinito isolato

- I. I due simboli $\theta_c(\eta)$, $\omega_c(\eta)$ non hanno significato.
- Uno dei medesimi rappresenta una grandezza, sia esso $\omega_c(\eta)$.
  - II. Il segno $\omega_c(+0)$ ha significato,
  - non lo ha.
    - III. La $f(x)$ ha infiniti massimi e minimi per $x = \overline{c+0}$,
    - ciò non ha luogo.
      - IV. La $f(x)$ è sempre crescente per $x = \overline{c+0}$,
      - V. non è tale.

8. *Applicazione delle ricerche precedenti ad una classe particolare di funzioni* (1).

1. Per rendere più facili le ricerche che formano l'oggetto di questa Memoria giova applicare gli studî precedenti ad una specie particolare di funzioni, cioè a quelle che si dicono *integrabili.*

Sia $f(x)$ una funzione finita di una successione continua del segmento ab. Ciò posto, si dica G_s $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ un gruppo di punti del tratto ab che lo divide nei tratticelli $\delta_1^{(s)}, \delta_2^{(s)}, \ldots \delta_{r_s}^{(s)}$ tali, che si abbia $\lim\limits_{s=\infty} \delta_v^{(s)} = 0$, quale si sia v, e si chiami $A_v^{(s)}$, $a_v^{(s)}$ il limite superiore ed inferiore rispettivamente dei valori della $f(x)$ nell'intervallo $\delta_v^{(s)}$. Ora, ciascuna delle quantità

$$\sum_1^{r_{t_s}} {}_v \, \delta_v^{(s)} A_v^{(s)}, \qquad \sum_1^{r_{t_s}} {}_v \, \delta_v^{(s)} a_v^{(s)}$$

tende ad un valore determinato all'annullarsi di $\frac{1}{s}$, quale si sia la serie dei gruppi che consideriamo, essendo r_{t_s} l'indice dell'ultimo dei tratti determinati dal gruppo G_s che appartiene per intero al segmento ad $(d \leq b)$.

La somma

$$\sum_1^{r_{t_s}} {}_v \, \delta_v^{(s)} c_v^{(s)}, \qquad A_v^{(s)} \leq c_v^{(s)} < a_v^{(s)},$$

(1) Per l'intelligenza di quanto segue fa di mestieri leggere la mia Nota: *Sul concetto di integrale definito*, inserita nel tomo II della serie 2ª degli Atti della R. Accademia dei Lincei.

oscilla quindi al crescere indefinito di s tra due grandezze C e D ($C \geq D$) non eccedenti i limiti L_d e l_d, essendo

$$\lim_{s=\infty} \sum_1^{r_{t_s}} v\, \delta_v^{(s)} A_v^{(s)} = L_d, \qquad \lim_{s=\infty} \sum_1^{r_{t_s}} v\, \delta_v^{(s)} a_v^{(s)} = l_d,$$

quale si sia la serie dei gruppi cui ci riferiamo.

Le espressioni L_d ed l_d sono due funzioni definite in ciascun punto del segmento $\overline{a+0\, b}$, le quali hanno una oscillazione nulla in ogni punto del tratto $\overline{a+0}\ \overline{b-0}$, e la oscillazione laterale destra in a e la sinistra in b pure nulla.

Apparterranno ad una stessa classe quelle funzioni alle quali corrispondono le medesime quantità L_d ed l_d. Il numero di queste funzioni è manifestamente illimitato e ciascuna di esse è finita. Le condizioni perchè due funzioni $f(x)$ ed $l(x)$ sieno della stessa classe sono quindi:

$$\lim_{s=\infty} \sum_1^{r_{t_s}} v\, (A_v^{(s)} - B_v^{(s)})\, \delta_v^{(s)} = 0, \qquad \lim_{s=\infty} \sum_1^{r_{t_s}} v\, (a_v^{(s)} - b_v^{(s)})\, \delta_v^{(s)} = 0.$$

Per definire una classe di funzioni basta dare una funzione finita di una successione continua del segmento ab.

2. Giova distinguere due casi: $L_b > l_b$, oppure $L_b = l_b$; nell'ultimo caso la classe considerata si dice integrabile. Ciò posto, studiamo alcune proprietà comuni alle funzioni di una stessa classe nell'ipotesi particolare che sia $L_b = l_b$.

Anzitutto si ha per definizione

$$\int_a^d f(x)\,dx = \int_a^d l(x)\,dx, \quad a < d \leqq b.$$

Questa eguaglianza può porsi anche nella forma

$$\int_a^d \Big(f(x) - l(x)\Big)\,dx = 0,$$

quando le funzioni $f(x)$ ed $l(x)$ esistano in ogni punto di una stessa serie continua di ab.

Si avverte facilmente che le funzioni

$$\theta_x(+0),\ \omega_x(+0),\ \theta_x(-0),\ \omega_x(-0),\ \varphi_x,\ \psi_x$$

appartengono alla stessa classe della $f(x)$. Questa asserzione è subito posta in sodo quando si osservi che, se ci riferiamo al gruppo G_s ($s = 1, 2, 3, \ldots$) dotato della proprietà indicata nel paragrafo precedente, si può assegnare per s un valore s_1 tale, che a partire da esso risulti piccola quanto si vuole la somma degli spazî, in cui la oscillazione massima della $f(x)$ non è di quella piccolezza che si vuole. In ciascuno degli altri la funzione proposta ha un valore quasi costante, ed altrettanto ha quindi luogo in ciascun punto interno dei medesimi per ciascuna delle sei funzioni indicate.

Ognuna delle quantità $\theta_c(+0)$, $\omega_c(+0)$, $\theta_c(-0)$, $\omega_c(-0)$ ($a < c < b$) relative ad una funzione qualsivoglia della classe della $f(x)$ può rappresentare una grandezza del tutto arbitraria per ogni valor particolare c, poichè il valore di un integrale è indipendente dai valori assunti dalla funzione cui si riferisce in una serie tale di punti,

che possa farsi arbitrariamente piccola la somma degli spazî che li racchiude. Una semplice considerazione ci indica tuttavia che si può tener parola di valori tali delle quantità accennate, che valgano per una qualsivoglia delle funzioni di una medesima classe.

Infatti, abbiamo

$$n(h) = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(x)\,dx = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} l(x)\,dx\,.$$

Dette $A_{\overline{c+0}}$ e $B_{\overline{c+0}}$ le quantità tra le quali oscilla la espressione $n(h)$ all'annullarsi di h, supporrò che esse appartengano ad una qualsivoglia delle funzioni della classe della $f(x)$, e dirò *oscillazione laterale destra comune alle stesse la differenza* $A_{\overline{c+0}} - B_{\overline{c+0}}$. Analoghe considerazioni si ponno fare rispetto al punto $\overline{c-0}$. Le quantità $\theta_c(+0)$, $\omega_c(+0)$ corrispondenti ad una qualunque tra le funzioni della classe considerata soddisfanno alle relazioni

$$A_{\overline{c+0}} \leq \theta_c(+0)\,, \quad B_{\overline{c+0}} \geq \omega_c(+0)\,.$$

Le funzioni $A_{\overline{c+0}}$, $B_{\overline{c+0}}$, $A_{\overline{c-0}}$, $B_{\overline{c-0}}$ definite in ciascun punto del segmento $\overline{a+0}\ \overline{b-0}$ appartengono alla stessa classe della $f(x)$.

Infatti, tolta una somma di spazî la cui piccolezza è arbitraria, la $f(x)$ può considerarsi quasi costante in ciascuno degli altri intervalli; altrettanto ha quindi luogo per le funzioni indicate. È degno di nota che, fatta astrazione dei punti appartenenti ad una somma di spazî che è di quella piccolezza che si vuole, si può assegnare una quantità h_1 tale, che le espressioni

$$\pm\frac{1}{h}\int_c^{c\pm h} f(x)\,dx \quad (0 < h \leq h_1)$$

non eccedano rispettivamente i limiti $A_{\overline{c\pm 0}} + \sigma$ $B_{\overline{c\pm 0}} - \sigma$, σ essendo una quantità positiva ed arbitrariamente piccola.

Dirò poi limite superiore dei valori assunti dalla classe considerata nel punto c la maggiore delle due grandezze $A_{\overline{c+0}}$, $A_{\overline{c-0}}$, e limite inferiore la più piccola delle due $B_{\overline{c+0}}$, $B_{\overline{c-0}}$. Per ultimo, chiamerò oscillazione della classe in c la differenza tra le due quantità indicate.

3. Le considerazioni precedenti si ponno generalizzare alquanto, come risulta da quanto segue.

Il simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ può aver significato anche se il numero dei punti nei quali la $f(x)$ va all'infinito è senza limite, quando si interpreti convenientemente. Infatti, poniamo che la $f(x)$ vada all'infinito soltanto in un gruppo $P^{(r)}$ dell'ordine r di ab, voglio dire con ciò che in ciascun punto appartenente a $P^{(r)}$ o ad una sua derivata essa non è finita, mentre lo è altrove.

Rammentata la decomposizione del segmento ab fatta nel paragrafo terzo del capitolo primo, ammetto che i simboli

$$\int_{A_1^{(0)}} f(x)\,dx\,, \qquad \int_{A_2^{(0)}} f(x)\,dx\,, \ldots .$$

abbino significato. Il valore dell'integrale $\int_{A_1^{(0)}} f(x)\,dx$ si ottiene dalla espressione $\int_{'A_1^{(0)}}$ facendo convergere in modo arbitrario il segmento $'A_1^{(0)}$ all'altro $A_1^{(0)}$.

Gli integrali precedenti aggruppati in modo opportuno danno origine agli altri

$$\int_{'A_1^{(1)}} f(x)\,dx\,, \qquad \int_{'A_2^{(1)}} f(x)\,dx\,, \ldots$$

Ciascuno dei precedenti integrali tenda ad un limite, mentre le quantità $'A_1^{(1)}$, $'A_2^{(1)}, \ldots$ convergono in modo arbitrario verso le altre $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}, \ldots$.

I segni

$$\int_{'A_1^{(2)}} f(x)\,dx\,, \qquad \int_{'A_2^{(2)}} f(x)\,dx\,, \ldots$$

rappresentano quindi altrettante grandezze.

Procedendo in questo modo si vede come il simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ possa aver significato, quando la $f(x)$ vada all'infinito in un gruppo d'ordine assegnabile. Nel caso ora contemplato diremo che la $f(x)$ è integrabile in ciascun punto del segmento ab, e la stessa cosa si dirà quando la $f(x)$ è finita in ab.

Pertanto, data una funzione $f(x)$ integrabile in ciascun punto di ab, essa determinerà una classe di funzioni, ognuna delle quali non sarà necessariamente finita.

Dirò che una classe integrabile di funzioni è finita in ab, quando sia tale una delle quattro funzioni $A_{\overline{c\pm 0}}$, $B_{\overline{c\pm 0}}$, e di conseguenza ciascuna delle altre, che cresce oltre ogni limite, se ciò non ha luogo.

La funzione

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{6}\,x^{-1}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{2}{3}} \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

definisce una classe integrabile nel segmento $0\,b$, che va all'infinito in un gruppo del primo ordine; all'incontro la funzione eguale a $\operatorname{sen} x$ nello stesso segmento, tolti i punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \left(\lim_{n=\infty} \alpha_n = +0\right)$, nei quali è eguale ad $\frac{1}{x}$, determina una classe integrabile finita.

9. *Funzioni continue.*

1. Per render più facili le ricerche che ho in animo di fare in questo lavoro mi torna acconcio lo studiare quelle funzioni che si dicono continue.

Sia $f(x)$ una funzione dei punti di ab, la quale esiste in un punto qualsivoglia del tratto comunque piccolo $\overline{c-\eta_1}\ \overline{c+\eta_2}$ $(a<c<b)$. Ciò posto, dirò che la $f(x)$

è continua nel punto c, quando la sua oscillazione nel medesimo sia nulla; continua tra a e b, oppure nel tratto $\overline{a+0}\ \overline{b-0}$, quando sia continua in ciascun punto del segmento $\overline{a+0}\ \overline{b-0}$; come la funzione $e^{\frac{1}{x-a}}+e^{\frac{1}{b-x}}$. Per ultimo, si dirà che la $f(x)$ è continua tra a e b, i limiti inclusi, oppure nel tratto ab, se, essendo soddisfatta l'ultima condizione, la $f(x)$ tende convergendo al punto $\overline{a+0}$ ad un valore che raggiunge in a, e se altrettanto ha luogo rispetto a b. È poi manifesto ciò che vada inteso dicendo la $f(x)$ è continua nel tratto $\overline{a+0}\,b$, oppure nell'altro $a\,\overline{b-0}$.

Se $f(x)$ è una funzione definita in un punto qualsivoglia di un segmento ab, la quale ha una oscillazione nulla in ciascun punto di una successione continua del medesimo, non se ne potrà inferire che la sua oscillazione è nulla in ogni punto del tratto $\overline{a+0}\ \overline{b-0}$. La funzione definita in ciascun punto di ascissa incommensurabile del tratto $0\,2$ mediante le ordinate di una semicirconferenza descritta sul medesimo come diametro, e negli altri per mezzo delle stesse ordinate aumentate o diminuite del valore corrispondente $\frac{1}{q}$, $\frac{p}{q}$ essendo l'ascissa del punto considerato e p e q primi tra loro, ha una oscillazione nulla nei punti di ascissa irrazionale, non già negli altri.

Ove però la data funzione fosse *uniformemente* continua in una serie continua del segmento $\overline{a+0}\ \overline{b-0}$, essa sarebbe continua tra a e b, i limiti inclusi.

Dico che una funzione è uniformemente continua in una successione continua P di un intervallo ab, quando si può assegnare una quantità η tale, che la oscillazione della medesima non superi nel tratto $\overline{c-\eta}\ \overline{c+\eta}$ la grandezza arbitraria σ, c essendo un punto qualsivoglia della serie P.

Ora, è chiaro che nella fatta ipotesi io potrò dividere il segmento ab in parti per modo, che la oscillazione massima della funzione data sia in ciascuna delle medesime di quella piccolezza che si vuole.

2. Le funzioni continue tra a e b, i limiti inclusi, godono di proprietà veramente rimarchevoli delle quali ora ci occuperemo.

Pertanto, dimostriamo il teorema:

Una funzione $f(x)$ continua nel segmento ab raggiunge un valore C al quale passa infinitamente vicino, in altre parole: se il limite inferiore dei valori assoluti della differenza $f(x)-\mathrm{C}$ è eguale a zero, la $f(x)$ raggiunge almeno in un punto di ab il valore C.

Infatti, si divida il segmento ab in un numero arbitrario di parti eguali a_1, $a_2, \ldots, a_m$, e si dicano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ le liste di piano determinate dalle rette limiti corrispondenti a ciascuna delle medesime. È chiaro che la linea $y=\mathrm{C}$ non cadrà esternamente ad ognuna di queste liste, ma apparterrà almeno ad una delle medesime, sia questa α_t. Il ragionamento fatto per l'intervallo ab si può ripetere pel segmento a_t, e così di seguito indefinitamente. Si tenderà in tal modo ad un punto c, nel quale non sarà al certo $f(c) \gtrless \mathrm{C}$.

Questo teorema ha per corollario il seguente:

Una funzione continua nel segmento ab raggiunge il limite inferiore e superiore dei suoi valori.

È notevole anche la proposizione:

Una funzione continua nel tratto $\overline{a+0}\,\overline{b-0}$, che raggiunge valori positivi e negativi, si annulla almeno in un punto del medesimo.

Per ipotesi io posso segnare due punti c, d interni ad ab in guisa, che sia

$$f(c) > 0\,, \quad f(d) < 0.$$

Ciò posto, consideriamo la funzione $+\sqrt{\left(f(x)\right)^2}$ continua nel segmento cd e diciamo σ il suo limite inferiore nel medesimo. Il teorema risulta dimostrato quando si faccia vedere che $\sigma = 0$. Ammettiamo per un momento che ciò non abbia luogo, ossia che σ sia maggiore di zero. Diviso il segmento cd nelle parti eguali $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$, è manifesto che la $f(x)$ non potrà esser dello stesso segno in ciascuno dei medesimi, i limiti inclusi, chè, se ciò fosse, sarebbe sempre positiva o negativa nel tratto cd, perchè continua, contro l'ipotesi. Posso quindi assegnare un segmento a_t nel quale la $f(x)$ dà origine a delle ordinate poste sopra l'asse delle X e ad altre site sotto allo stesso asse. Col tratto a_t si operi come col dato, e così di seguito indefinitamente; si tenderà ad un punto e tale, che nel tratto $\overline{e-\eta}\,\overline{e+\eta}$, η essendo di quella piccolezza che si vuole, la $f(x)$ è positiva e negativa. Ma i valori positivi della $f(x)$ non sono minori di σ, nè i negativi $> -\sigma$; laonde la $f(x)$ sarebbe discontinua in e, la qual cosa essendo contraria all'ipotesi $\sigma = 0$.

Come corollario si ha:

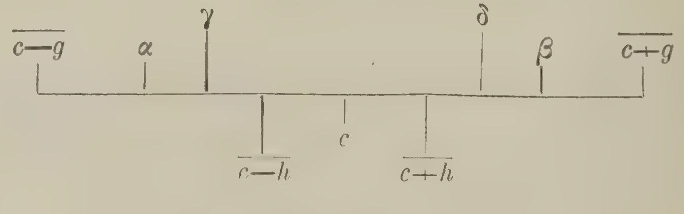
Una funzione continua del segmento $\overline{a+0}\,\overline{b-0}$ raggiunge un valore qualsivoglia C compreso tra i suoi valori limiti.

Infatti la differenza $f(x) - C$ è una funzione continua nel segmento $\overline{a+0}\,\overline{b-0}$, che raggiunge nel medesimo valori positivi e negativi.

3. È degno di nota il teorema:

Si può sempre assegnare una grandezza η tale, che nel tratto $\overline{c-\eta}\,\overline{c+\eta}$ la oscillazione della $f(x)$ non ecceda la quantità arbitraria σ, essendo c un punto qualsivoglia del segmento ab nel quale la $f(x)$ è continua.

Ed invero, io non dovrò avvertire che la oscillazione della $f(x)$ è inferiore a σ in ab, per quanto sia piccola la quantità σ, chè, se ciò avesse luogo, la $f(x)$ sarebbe ovunque costante, la qual cosa vogliamo supporre esclusa. A partire da valore opportuno di σ io potrò assegnare un tratto $\overline{c-g}\,\overline{c+g}$ nel quale la oscillazione della $f(x)$ è maggiore di σ, ed un altro $\overline{c-h}\,\overline{c+h}$ in cui è minore, essendo $a \leq c \leq b$, ammesso per comodo che la $f(x)$ esista al di qua di a e sia eguale ad $f(a)$ ed al di là di b avendo il valore $f(b)$.



Sieno or α e β i punti di mezzo dei due intervalli $\overline{c-g}\ \overline{c-h}$, $\overline{c+h}\ \overline{c+g}$ rispettivamente. Se la oscillazione della $f(x)$ nel tratto $\alpha\beta$ non è superiore a σ dimezzo gli intervalli $\overline{c-g}\,\alpha$, $\beta\,\overline{c+g}$, altrimenti piglio i punti medî dei segmenti $\alpha\,\overline{c-h}$, $\overline{c+h}\,\beta$. Supposto, per fissare le idee, che abbia luogo il secondo caso, diciamo γ e δ i punti di mezzo accennati. Ora prendo i punti medî degli intervalli $\gamma\,\overline{c-h}$, $\overline{c+h}\,\delta$, se la oscillazione della $f(x)$ è maggiore di σ nel segmento $\gamma\delta$, se ciò non ha luogo, i punti di mezzo dei tratti $\alpha\gamma$,$\delta\beta$. Procedendo in tal guisa indefinitamente, si tenderà ad un intervallo $\overline{c-\eta_c}\ \overline{c+\eta_c}$ che soddisfa alla condizione indicata ed in pari tempo è il massimo possibile.

La quantità η_c è quindi una funzione positiva definita in ciascun punto del tratto ab. Essa è continua negli stessi limiti; infatti, detto c_1 un punto del segmento $\overline{c+0}\ \overline{c+\eta_c-0}$, sarà:

$$c+\eta_c-c_1 \leq \eta_{c_1} \leq \eta_c+(c_1-c),$$

ossia

$$\eta_c-(c_1-c) \leq \eta_{c_1} \leq \eta_c+(c_1-c),$$

e perciò:

$$\lim \eta_{c_1}=\eta_c\,,\quad c_1=\overline{c+0}\,.$$

Analogamente si dimostra la eguaglianza

$$\lim \eta_{c_{11}}=\eta_c\,,\quad c_{11}=\overline{c-0}\,,$$

e poichè $\eta_x=\eta_c$, se $x=c$, la funzione η_x è continua in ab. Essa raggiunge quindi il suo limite inferiore, che non è lo zero, perchè la oscillazione della $f(x)$ è nulla per ogni valor particolare della x tale, che sia $a \leq x \leq b$.

Questo teorema equivale all'altro:

Si può dividere il tratto ab in un numero limitato di parti in guisa, che la differenza tra due valori qualsivoglia assunti dalla $f(x)$ in una delle medesime non superi la quantità positiva ed arbitraria σ, quando la data funzione sia continua in ab.

10. *Sui dati sufficienti a definire una funzione continua.*

1. Una funzione qualsivoglia dei punti del tratto ab è nota soltanto quando si conosca il valore da essa assunto in uno qualunque dei punti pei quali ha luogo la dipendenza, e questo valore è del tutto arbitrario. Non si può dire la stessa cosa se la funzione considerata è continua, come risulta dalle ricerche seguenti.

Una funzione continua tra a e b, la quale assume un valore nullo in una successione continua di ab, è ovunque nulla.

Ed invero, se fosse $f(c) \gtrless 0$ $(a<c<b)$, si potrebbe assegnare un tratto $\overline{c-\eta}\ \overline{c+\eta}$ in ciascun punto del quale si avrebbe rispettivamente $f(x) \gtrless 0$, la qual cosa non può aver luogo per la ipotesi fatta.

Come corollario si ha:

Due funzioni continue nel segmento $\overline{a+0}\ \overline{b-0}$, che coincidono in una serie continua, sono ovunque eguali nel medesimo.

Quindi:

Una funzione continua è ovunque definita, se si conoscono i valori da essa raggiunti in una serie continua di punti.

Quando si ponga mente che una successione continua contiene delle altre, ed in numero illimitato, ne emerge che non è possibile il dare *dati necessarî e sufficienti* per determinare una funzione continua. Il valore da attribuirsi alla medesima in un punto x nel quale non è definita è

$$\theta_x(+0) = \omega_x(+0) = \theta_x(-0) = \omega_x(-0) = \varphi_x = \psi_x .$$

11. *Dei varî modi possibili di comportarsi di una funzione continua tra a e b, quando si converga al valore a oppure b.*

1. Se tendiamo al punto $\overline{a+0}$ e se la $f(x)$ è in esso finita si potranno tracciare due rette $y=\theta_a(+0)+\sigma$, $y=\omega_a(+0)-\sigma$ $(\sigma>0)$ tali, che la immagine della $f(x)$ nel segmento $\overline{a+0}\ \overline{a+\eta}$ sia nella lista di piano da esse determinata, η essendo una quantità positiva scelta opportunamente. Esprimeremo questo fatto dicendo che la $f(x)$ oscilla per $x=\overline{a+0}$ tra le due quantità $\theta_a(+0)$, $\omega_a(+0)$; se fosse $\theta_a(+0)=\omega_a(+0)$ la $f(x)$ convergerebbe ad un valore per $x=a+0$; servano ad esempio di questi due casi le funzioni $\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}$, $\operatorname{sen} x$.

Indichiamo con $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ il limite superiore ed inferiore della $f(x)$ nel tratto $\overline{a+0}\ x$ rispettivamente. Queste funzioni sono continue in esso intervallo.

Infatti, la $\varphi(x)$ è una funzione finita che ha un valore in ciascun punto del medesimo ed è scevra da infiniti massimi e minimi. Se ci avviciniamo quindi indefinitamente al punto $\overline{x_1+0}$ $(a<x_1<x)$ tenderemo ad un valore, che dico essere il limite superiore dei valori della $f(x)$ nell'intervallo $\overline{a+0}\,x_1$. Ed invero, se ciò non avesse luogo, sarebbe $\varphi(x_1+0)>\varphi(x_1)$, non essendo al certo $\varphi(x_1+0)<\varphi(x_1)$. Ma, neppure la diseguaglianza $\varphi(x_1+0)>\varphi(x_1)$ può verificarsi; poichè, se avvicinandomi indefinitamente al punto $\overline{x_1+0}$ io avverto che una funzione $\theta(x)$, continua per $x=x_1$, assume valori maggiori di A, potrà essere $\theta(x_1+0)=\theta(x_1)=A$. Se però sapessi che la $\theta(x)$ raggiunge valori maggiori di A di una grandezza assegnabile per quanto si vada vicino al punto $\overline{x_1+0}$, non si avrebbe $\theta_1(x_1+0)=\theta_1(x_1)=A$, ma bensì $\theta(x_1)>A$. Ora, supposto $\varphi(x_1+0)>\varphi(x_1)$, la $f(x)$ raggiungerebbe nelle estreme vicinanze del punto x_1+0 valori, che sono più grandi di $\varphi(x_1)$ di una quantità non minore di $\varphi(x_1+0)-\varphi(x_1)$, sarebbe quindi $f(x_1)>\varphi(x_1)$, la qual cosa non potendo aver luogo, sarà:

$$\varphi(x_1+0)=\varphi(x_1).$$

In modo analogo si dimostra la eguaglianza $\varphi(x_1-0)=\varphi(x_1)$; l'asserto è quindi vero.

In guisa del tutto conforme si dimostra la continuità della funzione $\psi(x)$.

2. Accenno ora ad alcune relazioni che passano tra le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$.

Se per $x=x_1+0$ la $\varphi(x)$ decresce, avremo $\varphi(x_1)=f(x_1)$. Ed invero, per la fatta ipotesi la $f(x)$ assume valori più grandi di $\varphi(x_1)$ per quanto ci accostiamo al punto $\overline{x_1+0}$, laddove a sinistra del punto x_1 le sue ordinate non sono superiori

a $\varphi(x_1)$. Ne consegue che, se la $\varphi(x)$ decresce sempre nell'intervallo $x_1x_2 (x_1 < x_2)$, la data funzione raggiunge il limite superiore dei suoi valori nel segmento $ac (x_1 \leq c \leq x_2)$.

La $\varphi(x)$ ha un valore costante quando la data funzione non raggiunge il limite superiore nel tratto $\overline{a+0}\,x$. Infatti, supposto che ciò non abbia luogo, sarà in un certo intervallo $ax_1 (a < x_1 < x)$ $\varphi(x_1) < \varphi(x)$. Ne consegue che il limite superiore della $f(x)$ è eguale a $\varphi(x)$ nel segmento $x_1 x$, e questo valore viene anche conseguito in un punto del medesimo, essendo la data funzione continua tra x_1 ed x, i limiti inclusi. Questa conseguenza contrasta con l'ipotesi, onde l'asserto è dimostrato. La reciproca non è vera, ad es. la funzione sen $\frac{1}{x-a}$.

Si ponno fare analoghe considerazioni rispetto alla funzione $\psi(x)$.

3. Supposto che le due rette $y = \psi(a+0)$, $y = \varphi(a+0)$ sieno distinte studiamo il modo di comportarsi della $f(x)$ nelle estreme vicinanze del punto $a+0$. A tal fine non sarà inopportuno il considerare insieme la imagine della $f(x)$ e della retta $y = D$ $\left(\varphi(a+0) < D < \psi(a+0)\right)$. Osservo anzitutto che questa retta ha un numero illimitato di punti comuni con la data funzione nel tratto $\overline{a+0}\;\overline{a+\eta}$, η essendo una quantità positiva arbitraria. Infatti, la $f(x)$ non è eguale a D per $x = \overline{a+0}$; d'altra parte, se si potesse assegnare una grandezza η_1 tale, che nel segmento $\overline{a+0}\;\overline{a+\eta_1}$ la $f(x)$ non fosse mai eguale a D, essa sarebbe $>$ o $<$ di D nel medesimo, la qual cosa è pure contraria all'ipotesi.

Per vedere con tutta chiarezza come si comporti la $f(x)$ nel punto $\overline{a+0}$ giova distinguere due casi: si può assegnare una quantità η tale, che nel tratto $\overline{a+\varepsilon}\;\overline{a+\eta}$ $(\varepsilon < \eta)$, quale si sia ε, la retta $y = D$ abbia a comune un numero limitato di elementi (punti o tratticelli) con la $f(x)$, oppure ciò non ha luogo. Il numero degli elementi comuni cresce nel primo caso oltre ogni limite all'annullarsi di ε. Sia ora $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ la serie di questi elementi da $\overline{a+\eta}$ verso $\overline{a+0}$; tra due consecutivi qualsivoglia $\alpha_s \alpha_{s+1}$ la $f(x)$ giace tutta da una parte della retta $y = D$. È chiaro poi che esiste un numero illimitato di segmenti compresi tra i punti o tratti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, nei quali la differenza $f(x) - D$ è positiva ed un numero pure illimitato nel quale è negativa.

La $f(x)$ ammette nell'intervallo $\alpha_s \alpha_{s+1}$, quando nel medesimo sia $f(x) - D > 0$, un limite inferiore eguale a D che raggiunge soltanto ai suoi estremi, ed un limite superiore A_s che viene conseguito almeno una volta. Se poi $\alpha_r \alpha_{r+1}$, $\alpha_q \alpha_{q+1}, \ldots$ è la serie successiva dei tratti, nei quali $f(x) - D > 0$, è manifesto che, tirate le parallele $y = \varphi(\overline{a+0}) \pm \varepsilon$, ε essendo qualsivoglia, dalla successione di grandezze $A_r, A_q, \ldots$ si potrà torre un'altra che non eccede i limiti $\varphi(\overline{a+0}) \pm \varepsilon$. Analoghe considerazioni si ponno fare rispetto ai rami della $f(x)$ sottoposti alla retta $y = D$; valga ad esempio la funzione sen $\frac{1}{x}$ per $x = +0$.

Poniamo ora che la $f(x)$ abbia a comune con la retta $y = D$ un numero illimitato di elementi (punti o tratticelli) nel segmento $\overline{a+\varepsilon}\;\overline{a+\eta}$ $(\varepsilon < \eta)$. Tirate le rette $y = D \pm \sigma \left(\sigma < \varphi(\overline{a+0}) - D,\ < D - \psi(\overline{a+0})\right)$, esisterà un numero illimitato di

tratti non comuni alle due linee $y=\mathrm{D}$, $y=f(x)$, ai quali competono limiti superiori ed inferiori più grandi rispettivamente di $\mathrm{D}\pm\sigma$, astrazion fatta dal segno, e siti nel segmento $\overline{a+0}\;\overline{a+\eta}$.

Infatti, se una funzione continua assume nel punto c un valore diverso da zero, si potrà costruire un tratto che lo racchiude nel quale non si annulla. Il numero dei tratticelli indicati è limitato nell'intervallo $\overline{a+\varepsilon}\;\overline{a+\eta}$. Ed invero, se ciò non avesse luogo, io potrei segnare un punto K nel segmento $\overline{a+\varepsilon}\;\overline{a+\eta}$ tale, che in un tratto arbitrariamente piccolo che lo contiene si possano assegnare tanti tratticelli quanti si vogliono, in ciascuno dei quali la $f(x)$ assume un limite superiore più grande di $\mathrm{D}+\sigma$, oppure uno inferiore più piccolo di $\mathrm{D}-\sigma$. La $f(x)$ continua in K dovrebbe quindi conseguire nel tratto $\overline{\mathrm{K}-\eta_1}\;\overline{\mathrm{K}+\eta_1}$ valori $>$ di $\mathrm{D}+\sigma$ o $<$ di $\mathrm{D}-\sigma$, la qual cosa contrastando con la ipotesi fatta, l'asserto è dimostrato. Valga ad esempio la funzione definita nel segmento $\alpha_r\alpha_{r+1}$ $(r=1, 2, \ldots)$ dalla quantità

$$(x-\alpha_r)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x-\alpha_r}+(x-\alpha_{r+1})\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x-\alpha_{r+1}}+\lambda(x),$$

essendo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \left(\lim_{n=\infty}\alpha_n=a\right)$ una serie di punti del tratto $\overline{a+0}\;\overline{a+\eta}$, $f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=\ldots=0$, e $\lambda(x)$ una funzione nulla in ciascuno dei tratti $\alpha_{r+1}\,a_{r+1}$, $a_r\,\alpha_r$ $(\alpha_{r+1}<a_{r+1}<a_r<\alpha_r)$ ed eguale a $\mathrm{sen}\,\frac{(x-a_r)2\pi}{a_{r+1}-a_r}$ nell'intervallo $a_{r+1}\,a_r$.

4. Abbia ora la $f(x)$ un infinito isolato per $x=\overline{a+0}$; in tale ipotesi, se esso è di prima specie, una parallela qualsivoglia all'asse X avrà a comune con la $f(x)$ una serie illimitata di punti. Se poi l'infinito è di seconda specie, ciò avrà luogo con una parallela qualunque condotta al di sopra della retta $y=\psi\,(a+0)$ o al di sotto dell'altra $y=\varphi\,(a+0)$. Anche ora giova distinguere due casi: questi elementi sono isolati nelle estreme vicinanze di $a+0$, oppure ciò non si verifica. Nella prima ipotesi, se mi muovo verso $\overline{a+0}$ segnando successivamente i tratticelli nell'interno dei quali la $f(x)$ non ha punti comuni con la retta $y=\mathrm{D}$ io convergo al punto a. Ed è chiaro che in questo caso havvi un numero illimitato di tratti nei quali la $f(x)$ giace superiormente ed un altro pure illimitato in cui è al di sotto della retta $y=\mathrm{D}$ nel segmento $\overline{a+0}\;\overline{a+\eta_1}$.

Ammesso ora che gli elementi comuni alle linee $y=f(x)$ ed $y=\mathrm{D}$ non sieno isolati, tiro le rette $y=\mathrm{D}\pm\varepsilon$, ε essendo di quella piccolezza che si vuole, e considero soltanto quei segmenti della retta $y=\mathrm{D}$ nell'interno dei quali la differenza $f(x)-\mathrm{D}$ non è ovunque $<$ di ε o $>$ di $-\varepsilon$ nè mai si annulla. Ciò posto, si potrà convergere al punto $\overline{a+0}$ raccogliendo i tratticelli indicati.

II.

Ricerche fondamentali di calcolo integrale.

1. *Sugli infiniti isolati.*

1. Se si indica con $f_1(x)$ una funzione continua tra $+0$ ed η, la quale diviene infinita per $x=+0$ sempre crescendo, e se si denota con $f(x)$ una funzione qualsivoglia dotata di un infinito

isolato nel punto $+0$, si dirà che la $f(x)$ va all'infinito come la $f_1(x)$, quando il rapporto

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = \theta_1(x)$$

non tende nè a zero nè all'infinito all'annullarsi di x.

Questo quoto esiste soltanto per quei valori della x pei quali il simbolo $f(x)$ ha significato. La funzione $e^{-\frac{1}{x}}\,\omega(x) + \frac{1}{x^m}\,\omega_1(x)$ diviene infinita come $e^{\frac{1}{x}}$, $\omega(x)$ ed $\omega_1(x)$ essendo due funzioni finite, la prima delle quali non va a zero con x.

Ora, è degno di nota che, data una funzione $f(x)$ avente un infinito isolato per $x = +0$, esiste sempre un numero illimitato di funzioni $f_1(x)$ dotate della proprietà indicata.

Infatti, supposto in prima che l'infinito della $f(x)$ non sia di prima specie nè negativo, sieno $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \left(\alpha_1 = \eta,\ \lim_{n=\infty} \alpha_n = 0\right)$ le ascisse di una serie di punti nel segmento $+0\,\eta$. Si dicano A_r e B_r il limite superiore ed inferiore rispettivamente della $f(x)$ nel tratto $\alpha_r \alpha_{r+1}$, quando essa esista almeno in un punto del medesimo, e si considerino le due serie di grandezze

$$A_{r_1},\ A_{r_2},\ A_{r_3}, \ldots ,$$
$$B_{r_1},\ B_{r_2},\ B_{r_3}, \ldots .$$

Il limite superiore A dei valori $A_{r_1}, A_{r_2}, \ldots$, che esiste soltanto quando il simbolo $\varphi(\eta)$ ha significato, è eguale al limite superiore dei valori della $f(x)$ nel tratto $+0\eta$. Ed invero, in tale ipotesi la $f(x)$ non va all'infinito nel verso positivo dell'asse Y. D'altra parte, il suo limite superiore tra $+0$ ed η non è maggiore di A; perchè, se ciò fosse, si potrebbe assegnare un intervallo $\alpha_s \alpha_{s+1}$ nel quale il limite superiore A_s sarebbe più grande di A, la qual cosa non può aver luogo; in pari modo si dimostra che $\varphi(\eta)$ non è minore di A.

Il limite inferiore B delle quantità $B_{r_1}, B_{r_2}, B_{r_3}, \ldots$, che esiste soltanto quando il simbolo $\psi(\eta)$ ha significato, è pure il limite inferiore della $f(x)$ nel segmento $+0\eta$.

Ciò posto, il termine generale di una almeno delle due serie precedenti dovrà andare quindi all'infinito insieme al suo indice. Poniamo, per fissare le idee, che A_{r_s} cresca con s oltre ogni limite, nulla asserendo circa al modo di comportarsi di B_{r_s} all'annullarsi di $\frac{1}{s}$. Nell'intervallo $\alpha_{r_t} \alpha_{r_{t+1}}$ $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ esiste un numero limitato od illimitato di punti P tali, che il limite superiore dei valori della $f(x)$ in una parte comunque piccola di $\alpha_{r_t} \alpha_{r_{t+1}}$ contenente almeno un punto P sia A_{r_t}. Detto a_t uno di questi elementi determinato col metodo delle successive divisioni in guisa, che a destra del medesimo non possa assegnarsi nell'intervallo $\alpha_{r_t} \alpha_{r_{t+1}}$ un punto del sistema P, si potrà fissare una successione di numeri $t_1, t_2, \ldots$ tali, che si abbia

$$A_{r_{t_1}} > A_{r_{t_2}} > A_{r_{t_3}} > \ldots ,$$

essendo in pari tempo ciascun termine A_{r_s} avente un indice inferiore ad $r_{t_{q+1}}$ e maggiore di r_{t_q} $(q=1, 2, 3, \ldots)$ più piccolo di $A_{r_{t_{q+1}}}$. Costruisco ora una funzione continua $f_1(x)$ sempre crescente nell'intervallo $\alpha_{r_{t_q}}\, a_{r_{t_{q+1}}}$ $(q=1, 2, 3, \ldots)$ e tale, che sia

$$A_{r_{t_q}} = f_1\left(a_{r_{t_q}}\right),\ A_{r_{t_{q+1}}} = f_1\left(a_{r_{t_{q+1}}}\right);\ f(x) < f_1(x)\left(a_{r_{t_q}} < x < a_{r_{t_{q+1}}}\right).$$

L'asserzione è quindi dimostrata.

È chiaro poi che, se il simbolo $\psi(+0)$ ha significato il rapporto $\dfrac{f(x)}{f_1(x)}$ oscillerà tra lo zero e l'unità positiva all'annullarsi di x. Se poi la retta limite inferiore andasse all'infinito per $\eta = +0$, esso rapporto non eccederebbe all'indefinito diminuire di x dei valori c e d tali, che sia

$$c = 1,\quad 0 \leq d \leq 1.$$

Se l'infinito della $f(x)$ non fosse di prima specie nè positivo, basterebbe applicare il ragionamento che precede alla funzione $-f(x)$.

2. Supponiamo ora che l'infinito della $f(x)$ sia di prima specie. In tale ipotesi, ribalto la parte di piano sottoposta all'asse X intorno al medesimo come a cerniera sino a che combacci con la parte superiore. In questo modo ottengo una nuova funzione $f_{11}(x)$; costruisco quindi la $f_1(x)$ col metodo del paragrafo precedente. Il quoto $\dfrac{f(x)}{f_1(x)}$ oscilla manifestamente all'annullarsi di x tra le quantità c e d tali, che

$$c = 1,\quad -1 \leq d \leq 0,$$

oppure

$$0 \leq c \leq 1,\quad d = -1.$$

2. *Sugli infiniti isolati ed integrabili.*

1. Dimostrato che, data una funzione $f(x)$ dotata di un infinito isolato per $x = +0$, si può assegnare un numero arbitrario di funzioni $f_1(x)$ continue sempre crescenti e tali, che il quoto $\dfrac{f(x)}{f_1(x)} = \theta_1(x)$ oscilli all'annullarsi della variabile x tra le grandezze M ed N $(M \geq N)$, una delle quali *almeno* è diversa da zero, studiamo il modo di comportarsi dell'integrale

$$\varphi(\varepsilon) = \int_\varepsilon^\eta f(x)\,dx \quad (\eta > 0)$$

all'indefinito diminuire di ε.

Essendo la $\varphi(z)$ continua nel segmento $+0\eta$, è chiaro che per $\varepsilon = +0$ si potranno offrire tutte le singolarità di cui una tale funzione è capace nelle estreme vicinanze dei valori limiti della variabile. Ma, senza impegnarci nello studio dei casi nei quali si offra una singolarità anzi che un'altra, cerchiamo di determinare, per quanto è possibile, delle condizioni affinchè l'integrale precedente converga.

A tal uopo vediamo di dedurre possibilmente le condizioni di integrabilità della $f(x)$ da quelle della funzione più semplice $f_1(x)$.

Pertanto, è facile vedere che, se la $\theta_1(x)$ oscilla per $x=+0$ tra due quantità A e B ($A \geq B$) dello stesso segno, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la $f(x)$ sia integrabile è che sia tale la $f_1(x)$. Infatti, potendosi fare in questa ipotesi $\pm f(x) > c f_1(x)$ $(c > 0)$, ne consegue la necessità che sia soddisfatta la condizione accennata; che poi essa sia sufficiente risulta manifesto osservando, che il convergere dell'integrale $\int_\varepsilon f_1(x)\,dx$ per $\varepsilon=+0$ implica la convergenza dell'altro $D\int f_1(x)\,dx$, essendo $D > \theta_1(x)$, fatta astrazione dal segno.

2. Se fosse $A>0$ e $B<0$, oppure $A>0$ e $B=0$, o anche $A=0$ e $B<0$, l'integrale $\int_\varepsilon f(x)\,dx$ convergerebbe insieme all'altro $\int_\varepsilon f_1(x)\,dx$ per $\varepsilon=+0$. È però degno di nota che in questi casi l'integrale $\int_\varepsilon f_1(x)\,dx$ può divergere mentre l'altro converge, ciò avrebbe luogo per esempio se fosse $f_1(x)=\frac{1}{x}$ ed $f(x)=\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, poichè si ha

$$D_x\left(x\cos\frac{1}{x}\right)=\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x}.$$

Se la funzione $f_1(x)$ continua nel segmento $+0\eta$ ha un infinito di quarta specie per $x=+0$ non integrabile, esiste un numero arbitrario di funzioni che vanno all'infinito come la $f_1(x)$ e sono integrabili. Ed invero, determinata nel tratto $+0\eta$ una successione di tratticelli isolati $a_1, a_2, a_3, \ldots$ e tali, che sia

$$\lim_{n=\infty}\sum_1^n r\int_{a_r} f_1(x)\,dx=\text{M},$$

M essendo una quantità finita, si costruisca una funzione nulla in un punto qualsivoglia non appartenente ai segmenti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ e che ammette l'unità per limite superiore in ciascuno dei medesimi, e si otterrà in tal guisa una funzione $\theta_1(x)$ che rende integrabile il prodotto $f(x)=\theta(x)f_1(x)$ a destra dell'origine.

Rispetto alle ricerche contenute in questo capitolo Riemann osserva (¹):

« Hat aber die Function $f(x)$ unendlich viele Maxima und Minima, so lässt sich über die Ordnung ihres Unendlichwerdens nichts bestimmen. In der That nehmen wir an, die Function sei ihrem absoluten Werthe nach, vovon die Ordnung des Unendlichwerdens allein abhängt, gegeben, so wird man immer durch geeignete Bestimmung des Zeichens bewirken können, dass das Integral $\int f(x)dx$ bei unendlichem Abnehmen der unteren Grenze convergirt ».

3. *Una distinzione relativa agli infiniti integrabili di prima specie.*

1. Torna utile una distinzione tra le funzioni $f(x)$ dotate di un infinito integrabile di prima specie: esse sono integrabili

(¹) Vedi p. 230.

anche prese con lo stesso segno [1], oppure ciò non ha luogo. Indicheremo con $f_{11}(x)$ la funzione $+\sqrt{\left(f(x)\right)^2}$. È chiaro che, se l'infinito della funzione ovunque integrabile $f(x)$ è di specie superiore alla prima, la $f_{11}(x)$ è sempre integrabile.

L'integrale $\int_{\varepsilon} f(x)\,\omega(x)\,dx$ converge per $\varepsilon = +0$, se ciò ha luogo dell'altro $\int_{\varepsilon} f_{11}(x)\,dx$, $\omega(x)$ essendo una funzione finita nel tratto $+0\eta$. Però, se il simbolo $\int_{+0} f_{11}(x)\,dx$ non avesse significato, potrebbe aver luogo altrettanto dell'altro $\int_{+0} f(x)\,\omega(x)\,dx$.

A chiarire quanto si è asserito valgano gli esempî seguenti: sia $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ $\left(\lim_{n=\infty} \alpha_n = 0\right)$ una serie di punti dell'intervallo $+0\eta$, e la $f(x)$ non sia mai negativa nei tratti $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_5\alpha_6, \dots$, nè positiva negli altri. Di più sia

$$\int_{\alpha_{2s}}^{\alpha_{2s-1}} f(x)\,dx = \frac{1}{2s-1}\,, \qquad \int_{\alpha_{2s+1}}^{\alpha_{2s}} f(x)\,dx = \frac{-1}{2s} \quad (s = 1, 2, 3 \dots).$$

In tale ipotesi, rammentando che le due serie $\Sigma_1^n \frac{1}{2n-1}$, $\Sigma_1^n \frac{1}{2n}$ divergono, mentre l'altra $\Sigma_1^n \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge, la $f(x)$ ha un infinito integrabile di prima specie nel punto $x = +0$ e la $f_{11}(x)$ uno non integrabile. Se si indica poi con $\omega(x)$ una funzione finita che esiste in una serie continua del tratto 0η ed assume il valore $+1$ nel segmento $\alpha_{2s}\alpha_{2s-1}$ $(s=1, 2, \dots)$ ed il valore -1 nell'altro $\alpha_{2s+1}\alpha_{2s}$ $(s=1, 2, \dots)$, il simbolo $\int_{+0} f(x)\,\omega(x)\,dx$ non rappresenta veruna grandezza. La stessa cosa avrebbe luogo, se la $\omega(x)$ fosse eguale a $\frac{1}{\log(2s+1)}$ nell'intervallo $\alpha_{2s+1}\alpha_{2s+2}$ $(s=1, 2, \dots)$ e del resto nulla, perchè la serie $\Sigma_1^n \frac{1}{(2n+1)\log(2n+1)}$ è divergente.

2. Torna conveniente per le ricerche successive rammentare il teorema [2]:

Se $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sono due funzioni integrabili nel segmento ab, ciascuna delle quali va all'infinito in un numero limitato di punti, gli infiniti dell'una essendo diversi da quelli dell'altra, sarà:

$$\underset{\smile}{\mathrm{K}} \int_a^b \left(\varphi(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta)\,d\beta\right) d\alpha = \int_a^b \varphi(\alpha)\,d\alpha \int_a^b \psi(\alpha)\,d\alpha - \int_a^b \left(\psi(\alpha) \int_a^\alpha \varphi(\beta)\,d\beta\right) d\alpha.$$

(1) Vedi la mia Memoria: *Sulle serie* $\Sigma\, A_n\, X_n$, inserita negli Annali di Matematica di Brioschi e Cremona, tom. VII p. 263 e seg^{te}.

(2) Vedi la stessa Memoria, capitolo 5.

Questo teorema regge anche se una delle due funzioni $\varphi(x), \psi(x)$ o amendue sono dotate di un numero illimitato di infiniti, essendo ovunque integrabili e gli infiniti dell' una diversi da quelli dell' altra.

Poniamo in prima che la $\varphi(x)$ vada all' infinito in un gruppo di punti del primo ordine, mentre l'altra è finita oppure ha un numero assegnabile di infiniti in punti in cui la prima non cresce oltre ogni limite. Se diciamo $c_s^{(1)} d_s^{(1)}$ i limiti del segmento $A_s^{(1)}$, avremo pel teorema rammentato:

$$\int_{c_s^{(1)}+\eta_s}^{d_s^{(1)}-\varepsilon_s}\left(\varphi(\alpha)\int_{c_s^{(1)}+\eta_s}^{\alpha}\psi(\beta)d\beta\right)d\alpha=\int_{c_s^{(1)}+\eta_s}^{d_s^{(1)}-\varepsilon_s}\varphi(\alpha)d\alpha\int_{c_s^{(1)}+\eta_s}^{d_s^{(1)}-\varepsilon_s}\psi(\beta)d\beta-\int_{c_s^{(1)}+\eta_s}^{d_s^{(1)}-\varepsilon_s}\left(\psi(\alpha)\int_{c_s^{(1)}+\eta_s}^{\alpha}\varphi(\beta)d\beta\right)d\alpha\ (s=1,2),$$

essendo $d_s^{(1)}=c_{s+1}^{(1)}$, supposto che i due segmenti $A_s^{(1)}$, $A_{s+1}^{(1)}$ sieno successivi, ed η_s, ε_s quantità arbitrariamente piccole. Operando ora come nel capitolo or ora accennato con le due equazioni che si hanno dalla precedente facendo $s=1$, $=2$, si ottiene

$$\int_{c_1^{(1)}}^{d_2^{(1)}}\left(\varphi(\alpha)\int_{c_1^{(1)}}^{\alpha}\psi(\beta)d\beta\right)d\alpha=\int_{c_1^{(1)}}^{d_2^{(1)}}\varphi(\alpha)\,d\alpha\int_{c_1^{(1)}}^{d_2^{(1)}}\psi(\beta)\,d\beta-\int_{c_1^{(1)}}^{d_2^{(1)}}\left(\psi(\alpha)\int_{c_1^{(1)}}^{\alpha}\varphi(\beta)d\beta\right)d\alpha\,,$$

e così pure, seguendo lo stesso metodo, si ricava la relazione $\underset{\smile}{\mathrm{K}}$ pel caso che la $\varphi(x)$ vada all' infinito in un gruppo del primo ordine, mentre l'altra è finita oppure cresce oltre ogni limite in un numero limitato di punti in cui la prima è finita. Ciò posto, è manifesto come si dovrà procedere pel caso che la $\varphi(x)$ vada all' infinito in un gruppo del secondo ordine, del terzo ecc. Generalizzato il teorema pel caso che la $\varphi(x)$ vada all' infinito in un gruppo d'ordine assegnabile, si scorge tosto che esso regge anche se la $\psi(x)$ cresce oltre ogni limite in un gruppo d'ordine finito. Di conseguenza:

Se la $\varphi(x)$ è ovunque integrabile nel segmento ab; e se in esso la $\psi(x)$ è finita, il simbolo

$$\int_a^b\left(\varphi(x)\int_a^x\psi(\alpha)\,d\alpha\right)dx$$

ha significato.

4. *Sugli infiniti isolati non integrabili.*

1. Supponiamo che la funzione

$$\varphi(x)=\int_a^x f(\alpha)\,d\alpha \qquad (a<c<b)$$

abbia un infinito isolato nel punto $\overline{c-0}$, e che si possa assegnare una funzione

continua $\psi(x)$ in un segmento aderente al medesimo dotata di un infinito di quarta specie, e tale, che la differenza $\psi(x)-\varphi(x)$ si annulli per $x=c-0$. Le stesse condizioni sieno soddisfatte dalle funzioni

$$\varphi_1(x)=\int_b^x f(\alpha)\,d\alpha\,, \qquad \psi_1(x),$$

nel punto $\overline{c+0}$, essendo gli infiniti delle espressioni $\psi(x)$ e $\psi_1(x)$ dello stesso segno.

Ciò posto, ha luogo il teorema:

Si può sempre determinare una funzione continua $\theta(x)$ in un tratto aderente al punto $+0$, la quale si annulla ognora decrescendo per $x=+0$, ed è tale, che la espressione

$$\varphi(c-\varepsilon)-\varphi_1\Big(c+\theta(\varepsilon)\Big)=\Big(\int_a^{c-\varepsilon}-\int_b^{c+\theta(\varepsilon)}\Big)f(\alpha)\,d\alpha$$

tende verso un limite qualsivoglia D mentre ε converge a zero.

Ed invero, poniamo, per fissare le idee, che sia $\lim\limits_{\varepsilon=+0}\varphi(c-\varepsilon)=+\infty$, e quindi, per l'ipotesi fatta, $\lim\limits_{\varepsilon=+0}\varphi_1(c+\varepsilon)=+\infty$.

La funzione $y=\psi_1(x)$, continua nel segmento $\overline{c+0}\;\overline{c+\eta}$, va all'infinito sempre crescendo nel medesimo, consegue quindi un valore qualsivoglia $\geq$ di $\psi_1(c+\eta)$ in un punto del tratto $\overline{c+0}\;\overline{c+\eta}$ una volta soltanto. Si vede perciò che, posto $x=\theta_1(y)$, la x è una funzione continua nell'intervallo $\psi_1(c+\eta)\;\psi_1(c+0)$, la quale varia da $\overline{c+\eta}$ a $\overline{c+0}$ sempre decrescendo. Possiamo quindi fare:

$$y=\psi_1(x)=\psi_1\Big(\theta_1(y)\Big)=y\,,$$

e perciò, posto

$$x=\theta_1\Big(\psi(c-\varepsilon)-\mathrm{D}\Big),$$

la qual cosa può farsi quando ε sia scelto in guisa, che sia

$$\psi(c-\varepsilon)-\mathrm{D}\geq\psi_1(c+\eta),$$

sarà:

$$\psi(c-\varepsilon)-\psi_1\Big[\theta_1\Big(\psi(c-\varepsilon)-\mathrm{D}\Big)\Big]=\mathrm{D}.$$

Ma, per dato,

$$\lim_{\varepsilon=+0}\left[\varphi(c-\varepsilon)-\psi(c-\varepsilon)\right]=0\,, \qquad \lim_{\varepsilon_1=+0}\left[\varphi_1(c+\varepsilon_1)-\psi_1(c+\varepsilon_1)\right]=0,$$

e quindi:

$$\lim_{\varepsilon=+0}\Big[\varphi(c-\varepsilon)-\varphi_1\Big(c+\theta(\varepsilon)\Big)\Big]=\mathrm{D},$$

essendo

$$\theta(\varepsilon)=\theta_1\Big(\psi(c-\varepsilon)-\mathrm{D}\Big)-c\,.$$

L' integrale

$$\lim_{\varepsilon=+0}\Big(\int_a^{c-\varepsilon}+\int_{c+\theta(\varepsilon)}^{x}\Big)f(\alpha)\,d\alpha=$$

$$\lim_{\varepsilon=+0}\Big[\varphi(c-\varepsilon)+\varphi_1(x)-\varphi_1\Big(c+\theta(\varepsilon)\Big)\Big]=\varphi_1(x)+\mathrm{D}\quad(c<x\leq b)$$

rappresenta una funzione continua nel segmento $\overline{c+0\, b}$, e così pure l'altro

$$\int_a^x f(\alpha)\, d\alpha$$

nel tratto $a\,\overline{c-0}$. È manifesto che si ponno sostituire alla funzione $\theta(\varepsilon)$ altre in numero illimitato, ciascuna delle quali dà all'integrale precedente lo stesso valore.

Se per integrale della $f(x)$ relativo alla parte di piano superiore od inferiore all'asse X intendiamo quello della funzione dedotta dalla proposta dando alla medesima un valore nullo, ove essa è rispettivamente negativa o positiva, il teorema ora dimostrato regge per una funzione rispetto alla quale diverge l'integral relativo ad una parte soltanto di piano nel tratto $\overline{c-\eta}\ \overline{c-0}$, mentre la stessa cosa ha luogo per $x=\overline{c+0}$ e rispetto alla stessa parte di piano.

2. Detta $f(x)$ una funzione integrabile in ab, tolto il punto $c\ (a<c<b)$, e posto

$$\int_a^x f(\alpha)\, d\alpha = \psi(x)\,, \quad \int_b^x f(\alpha)\, d\alpha = \psi_1(x)\,.$$

cerchiamo di determinare, se pure è possibile, due funzioni $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ che si annullino per $x=\overline{c-0}$ ed $x=\overline{c+0}$ rispettivamente ed in guisa, che la differenza

$$\psi\Big(c-\theta_1(\varepsilon)\Big)-\psi_1\Big(c+\theta_2(\varepsilon)\Big)$$

tenda ad un limite K all'annullarsi di ε.

Pertanto, è manifesto che, se ciascuna delle due funzioni $\psi(x)$ e $\psi_1(x)$ ha un infinito di specie non inferiore alla terza e se questi due infiniti sono di segno contrario, non potrà soddisfarsi al problema proposto. La stessa cosa ha luogo, se una delle funzioni resta finita in c, mentre l'altra è dotata in esso di un infinito della specie indicata, oppure se una delle due funzioni ha un infinito di specie non inferiore alla terza e l'altra uno di seconda, gli infiniti essendo di segno contrario.

In ogni altro caso il problema ammette un numero illimitato di soluzioni, come risulta da quanto segue. Per procedere però con tutta chiarezza giova fare varie ipotesi circa alle funzioni $\psi(x)$ e $\psi_1(x)$.

I. Le due funzioni $\psi(x)$ e $\psi_1(x)$ si mantengono finite. Dette A e B ($A \geq B$) le quantità tra le quali oscilla la $\psi(x)$ nel punto $\overline{c-0}$, si potrà determinare nel segmento $\overline{c-\eta}\ \overline{c-0}$ una serie di punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \left(\lim\limits_{n-\infty} \alpha_n = \overline{c-0}\right)$ in guisa, che sia

$$\lim_{n=\infty} \psi\left[c+(\alpha_n-c)\right]=\mathrm{L} \quad (\mathrm{A}\leq \mathrm{L}\leq \mathrm{B}).$$

Se dico poi C e D le grandezze tra le quali oscilla la $\psi_1(x)$ nel punto $\overline{c+0}$, potrò assegnare nel tratto $\overline{c+0}\ \overline{c+\eta}$ una serie di punti $\beta_1, \beta_2, \ldots \left(\lim\limits_{n'=\infty} \beta_{n'} = \overline{c+0}\right)$ per modo, che si abbia

$$\lim_{n'=\infty} \psi_1\left[c+(\beta_{n'}-c)\right]=\mathrm{L}_1 \quad (\mathrm{C}\leq \mathrm{L}_1\leq \mathrm{D}).$$

Ciò posto, è chiaro che la differenza $L - L_1$ può essere qualsivoglia, purchè non ecceda i limiti $A - D$, $B - C$ $(A - D > B - C)$.

II. La funzione $\psi(x)$ è finita, l'altra ha un infinito di specie non superiore alla seconda.

Col metodo seguìto or ora si scorge facilmente che, se l'infinito della $\psi_1(x)$ è di prima specie, la quantità K potrà essere qualsivoglia; se di seconda, essa non potrà essere inferiore a $B - C$ o superiore ad $A - D$ secondo che l'infinito è negativo o positivo.

Si ponno fare analoghe considerazioni nel caso in cui la $\psi_1(x)$ è finita, mentre l'altra ha un infinito di prima o seconda specie.

III. La $\psi(x)$ ha un infinito di prima specie e la $\psi_1(x)$ uno la cui specie non è superiore alla seconda.

In questo caso la quantità K è arbitraria. Per ottenerla possiamo ora procedere col metodo tenuto poc'anzi oppure con quello che segue: si scelgano i punti α_1, α_2, ... in guisa, che si abbia

$$\psi(\alpha_1) < \psi(\alpha_2) < \dots \quad \left(\lim_{n=\infty} \psi(\alpha_n) = \infty\right),$$

$$\psi(\alpha_s) - \psi_1(\beta_s') = K, \quad s = s',$$

quale si sia s, quando l'infinito della $\psi_1(x)$ è di prima specie, oppure di seconda e positivo; se esso fosse di seconda e negativo si potrebbe fare

$$\psi(\alpha_1) > \psi(\alpha_2) > \dots \quad \left(\lim_{n=\infty} \psi(\alpha_n) = -\infty\right),$$

$$\psi(\alpha_s) - \psi_1(\beta_s') = K, \quad s = s'.$$

Si ragionerebbe in modo analogo se la $\psi_1(x)$ fosse dotata di un infinito di prima specie, mentre l'altra ne ha uno di prima o seconda.

IV. La $\psi(x)$ oppure la $\psi_1(x)$ è dotata di un infinito di prima specie, l'altra di uno di specie non inferiore alla terza.

In tale ipotesi la quantità K è arbitraria.

V. Le due funzioni $\psi(x)$ e $\psi_1(x)$ hanno un infinito di seconda specie.

Se i due infiniti sono dello stesso segno la quantità K è qualsivoglia; se di segno contrario essa non potrà essere inferiore a $B - C$ oppure superiore ad $A - D$, secondo che l'infinito della $\psi(x)$ è positivo o negativo.

VI. La $\psi(x)$ oppure la $\psi_1(x)$ è dotata di un infinito di seconda specie, l'altra di un infinito di specie non inferiore alla terza.

In questo caso gli infiniti devono essere dello stesso segno, e la quantità K è arbitraria.

VII. Ciascuna delle funzioni $\psi(x)$ e $\psi_1(x)$ ha un infinito di specie non inferiore alla terza.

In tale ipotesi la grandezza K è qualsivoglia, purchè gli infiniti non sieno di segno opposto.

5. *Sugli infiniti isolati non integrabili nel caso in cui il secondo integrale converga.*

1. Tenendo le notazioni del capitolo precedente si ha

$$\int_a^x \psi(\alpha)\, d\alpha = \Big[\psi(\alpha)(\alpha - c)\Big]_a^x - \int_a^x f(\alpha)(\alpha - c)\, d\alpha .$$

Supposto che l'integrale

$$\int_a^x \psi(\alpha)\, d\alpha$$

converga per $x = \overline{c-0}$, avverrà altrettanto dell'altro

$$\int_a^x f(\alpha)(\alpha - c),$$

se la espressione $[\psi(\alpha)(\alpha - c)]^x$ tende ad un limite per $x = \overline{c-0}$.

Rammentate le ricerche del paragrafo secondo del capitolo che precede, è manifesto che, tolti i casi IV, VI, VII, si può sempre scegliere la successione $\alpha_1, \alpha_2, ..$ in guisa, che la quantità $\psi(\alpha_s)$ tenda ad un limite all'annullarsi di $\frac{1}{s}$, pur essendo K compreso tra i limiti indicati. In tale ipotesi il prodotto $\psi(\alpha_s)(\alpha_s - c)$ si annulla con $\frac{1}{s}$, ed il simbolo

$$\lim_{s=\infty} \int^{\alpha_s} (\alpha - c) f(\alpha)\, d\alpha$$

ha significato, quando la $\psi(x)$ sia integrabile nel punto $\overline{c-0}$.

Altrettanto dicasi in questi casi del segno

$$\lim_{t=\infty} \int_{\beta_t} f(\alpha)(\alpha - c)\, d\alpha$$

essendo

$$\int_x^b \psi_1(\alpha)\, d\alpha = \Big[\psi_1(\alpha)(\alpha - c)\Big]_x^b - \int_x^b f(\alpha)(\alpha - c)\, d\alpha$$

se il simbolo $\int_{c+0}^b \psi_1(\alpha)\, d\alpha$ ha significato.

Nei casi IV, VI, VII una almeno delle due funzioni $\psi(x)$ e $\psi_1(x)$ ha un infinito di specie non inferiore alla terza, e si mantiene quindi sempre dello stesso segno nelle estreme vicinanze del punto c. Sia questa, per fissare le idee, la $\psi(x)$, l'altra non essendo dotata di necessità di un infinito di specie non inferiore alla terza.

Ciò posto, la quantità $\psi(\alpha)(\alpha - c)$ è ognora positiva o negativa nell'intervallo arbitrariamente piccolo $\overline{c-0}\ \overline{c-\eta}$. D'altra parte, la funzione $\psi(\alpha)$ è integrabile nel punto $\overline{c-0}$ e di conseguenza il limite inferiore del modulo del prodotto $\psi(\alpha)(\alpha - c)$ nel segmento indicato è eguale a zero, mentre la stessa cosa non ha luogo nel tratto $\overline{c-\varepsilon}\ \overline{c-\eta}$ $(\varepsilon < \eta)$. Si può quindi scegliere una successione di punti α_s $(s = 1, 2, 3, ...)$

nel segmento $\overline{c-0}\ \overline{c-\eta}$ in guisa, che sia

$$\lim_{s=\infty} \psi(\alpha_s)(\alpha_s - c) = 0.$$

Infatti, la funzione $\psi(\alpha)(\alpha - c)$ continua nel segmento $\overline{c-\eta}\ \overline{c-0}$ tende per $\alpha = \overline{c-0}$ ad un limite, oppure ciò non si verifica. Nel primo caso si ha $\lim\limits_{s=\infty} \psi(\alpha_s)(\alpha_s - c) = 0$, quale si sia la successione α_s ($s = 1, 2, \ldots$) ; nel secondo il prodotto $\psi(\alpha)(\alpha - c)$ resta finito per $\alpha = \overline{c-0}$, oppure cresce oltre ogni limite. Se finito, esso oscilla nel punto $\overline{c-0}$ tra due quantità A e B ($A \geq B$) una delle quali è eguale a zero; se poi non è tale, esso è dotato di un infinito di seconda specie la cui retta limite è l'asse X. Adunque anche in questi casi si potrà determinare una successione α_s ($s = 1, 2\ 3, \ldots$) che soddisfi alla condizione voluta.

La serie β_t ($t = 1, 2, 3, \ldots$) determinata coi metodi indicati nel capitolo precedente annulla il prodotto $\psi_1(\beta_t)(c - \beta_t)$, quando t vada all'infinito.

È chiaro che il limite al quale tende ciascuna delle quantità

$$\int_a^{\alpha_s} f(\alpha)(\alpha - c)\, d\alpha\,, \qquad \int_{\beta_s}^{b} f(\alpha)(\alpha - c)\, d\alpha$$

all'annullarsi di $\frac{1}{s}$ è lo stesso, quali si sieno le serie α e β considerate.

III.

Sulle serie trigonometriche.

1. *La serie di Fourier relativa ad una funzione dotata di un numero limitato di infiniti non integrabili nel tratto* $0 2\pi$, *e di cui il secondo integrale converge.*

1. È chiaro che, se la $f(x)$ è una funzione periodica secondo 2π ed ovunque integrabile, la serie di Fourier relativa alla medesima è determinata in virtù dell'ultimo teorema enunciato nel terzo capitolo del numero precedente. Tale serie appartiene egualmente ad una qualsivoglia tra le funzioni della classe determinata dalla $f(x)$. Diremo perciò che la serie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \Sigma_1^n \int_0^{2\pi} f(t) \cos n(t - x)\, dt$$

compete alla classe definita dalla $f(x)$.

2. Detta $\psi(x)$ una funzione integrabile nel segmento ab, tolto un numero limitato di punti, si vede facilmente che si può anche in questo caso tener parola di una classe di funzioni determinata dalla $\psi(x)$. Ed invero, una funzione $\lambda(x)$ apparterrà alla stessa classe della $\psi(x)$ quando si abbia

$$\int_c^d \psi(x)\, dx = \int_c^d \lambda(x)\, dx\,,$$

c e d essendo gli estremi di un intervallo qualsivoglia di ab non contenente verun infinito non integrabile della $\psi(x)$. Gli infiniti non integrabili sono comuni a ciascuna delle funzioni di una stessa classe, la stessa cosa non può dirsi degli infiniti integrabili anche se non isolati.

Ciò posto, sia $f(x)$ una funzione periodica secondo 2π dotata degli infiniti non integrabili $x_1, x_2, \ldots, x_i$ nel tratto $a\ a+2\pi$ $(x_1 > a)$. In tale ipotesi non può farsi parola di una serie di Fourier relativa alla classe definita dalla $f(x)$.

Pertanto, si avverte di leggieri che gli integrali

$$\left(\int_a^{\alpha_{s_1}^{(1)}} + \int_{\beta_{s'_1}^{(1)}}^{\alpha_{s_2}^{(2)}} + \int_{\beta_{s'_2}^{(2)}}^{\alpha_{s_3}^{(3)}} + \ldots + \int_{\beta_{s'_i}^{(i)}}^{a+2\pi}\right) f(t)\, dt\,,$$

$$\text{»} \qquad\qquad \text{»} \qquad\qquad f(t) \cos n\,(t-x)\, dt\,,$$

convergeranno, quando si facciano crescere oltre ogni limite i numeri $s_1, s'_1, s_2, s'_2, \ldots$, se le quantità $\alpha_{s_r}^{(r)}, \beta_{s'_r}^{(r)}$ $(s_r = 1, 2, 3, \ldots)$ hanno rispetto ad x_r lo stesso significato che avevano le grandezze α_s e β_s $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ rispetto al punto c nell'ultimo capitolo del numero precedente, se si escludono gli infiniti in esso non considerati, e se il secondo integrale della $f(x)$ converge.

Ed invero, si ha

$$\int^{\alpha_{s_r}^{(r)}} f(t) \cos n\,(t-x)\, dt + \int_{\beta_{s'_r}^{(r)}} f(t) \cos n\,(t-x)\, dt =$$

$$\int^{\alpha_{s_r}^{(r)}} f(t) \cos n\Big(t - x_r - (x - x_r)\Big)\, dt + \int_{\beta_{s'_r}^{(r)}} f(t) \cos n\Big(t - x_r - (x - x_r)\Big)\, dt =$$

$$\cos n(x - x_r) \int^{\alpha_{s_r}^{(r)}} f(t) \cos n(t - x_r)\, dt + \operatorname{sen} n(x - x_r) \int^{\alpha_{s_r}^{(r)}} f(t) \operatorname{sen} n\,(t - x_r)\, dt$$

$$+ \cos n(x - x_r) \int_{\beta_{s'_r}^{(r)}} f(t) \cos n\,(t - x_r)\, dt + \operatorname{sen} n(x - x_r) \int_{\beta_{s'_r}^{(r)}} f(t) \operatorname{sen} n\,(t - x_r)\, dt =$$

$$\cos n(x - x_r) \left(\int^{\alpha_{s_r}^{(r)}} + \int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}\right) f(t) \cos n\,(t - x_r)\, dt +$$

$$\operatorname{sen} n(x - x_r) \left(\int^{\alpha_{s_r}^{(r)}} + \int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}\right) f(t) \operatorname{sen} n\,(t - x_r)\, dt\,.$$

Ma,

$$\left(\int^{\alpha_{s_r}^{(r)}} + \int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}\right) f(t)\cos n\,(t-x_r)\,dt =$$

$$\left(\int^{\alpha_{s_r}^{(r)}} + \int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}\right) f(t)\,dt - \frac{n^2}{2}\left(\int^{\alpha_{s_r}^{(r)}} + \int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}\right) f(t)\,(t-x_r)^2\,dt$$

$$+\frac{n^4}{2.3.4}\left(\int^{\alpha_{s_r}^{(r)}} + \int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}\right) f(t)\,(t+x_r)^4 - \ldots ,$$

$$\left(\int^{\alpha_{s_r}^{(r)}} + \int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}\right) f(t)\,\mathrm{sen}\, n\,(t-x)\,dt = \frac{n}{1}\left(\int^{\alpha_{s_r}^{(r)}} + \int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}\right) f(t)\,(t-x_r)\,dt - \ldots\ldots .$$

D'altra parte,

$$\int_d^{\alpha_{s_r}^{(r)}} f(t)(t-x_r)^m\,dt = \left(\alpha_{s_r}^{(r)}-x_r\right)^m \int_d^{\alpha_{s_r}^{(r)}} f(t)\,dt -$$

$$m\int_d^{\alpha_{s_r}^{(r)}}\left(\int_d^t f(t_1)\,dt_1\right)(t-x_r)^{m-1}\,dt ,$$

$$\int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}^{e} f(t)(t-x_r)^m\,dt = -\left(\beta_{s'_r}^{(r)}-x_r\right)^m \int_e^{\beta_{s'_r}^{(r)}} f(t)\,dt -$$

$$m\int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}^{e}\left(\int_e^t f(t_1)\,dt_1\right)(t-x_r)^{m-1}\,dt ,$$

essendo $m \geq 1$, d ed e due punti posti rispettivamente nei segmenti $\overline{x_{r-1}+0\ x_r-0}$, $\overline{x_r+0\ x_{r+1}-0}$.

L'asserto è quindi dimostrato.

3. La serie or ora costruita si dirà la serie di Fourier relativa alla classe determinata dalla $f(x)$.

È chiaro che col metodo indicato possiamo formare tante serie relative alla classe determinata dalla $f(x)$ quante vogliamo. Giova quindi studiare la serie trigonometrica che nasce togliendo termine a termine due qualsivoglia delle serie indicate.

Se diciamo $\gamma^{(r)}_{s_r}$, $\delta^{(r)}_{s'_r}$ un'altra serie di grandezze corrispondente al punto x_r, la quale renda il limite dell'integrale

$$\left(\int^{\gamma^{(r)}_{s_r}} + \int_{\delta^{(r)}_{s'_r}}\right) f(t)\, dt$$

diverso da quello corrispondente alle serie $\alpha^{(r)}_{s_r}$, $\beta^{(r)}_{s'_r}$, è manifesto che il termine generale della serie differenza sarà della forma

$$(\Sigma r\, a^{(r)} \cos n x_r) \cos nx + (\Sigma r\, a^{(r)} \operatorname{sen} x_r) \operatorname{sen} nx\,,$$

$$a^{(r)} = \lim\left(\int^{\alpha^{(r)}_{s_r}} + \int_{\beta^{(r)}_{s'_r}}\right) f(t)\, dt - \lim\left(\int^{\gamma^{(r)}_{s'_r}} + \int_{\delta^{(r)}_{s'_r}}\right) f(t)\,,$$

quando i numeri s_r, s'_r crescano oltre ogni limite, poichè ciascuna delle quantità

$$\int_d^{\alpha^{(r)}_{s_r}} f(t)\,(t - x_r)^m\, dt \quad \int_{\beta^{(r)}_{s'_r}}^{e} f(t)\,(t - x_r)^m\, dt$$

$$(m \geq 1, \quad r = 1, 2, \ldots)$$

tende ad uno stesso limite quali si sieno le serie α e β considerate.

2. *Di una classe di funzioni non ovunque integrabile, la quale ammette la serie di Fourier.*

1. Detta T una classe di funzioni periodica secondo 2π dotata di un numero limitato di infiniti non integrabili nel segmento $\overline{a\, a+2\pi}$, diciamo $f(x)$ una funzione appartenente alla medesima e definita in ciascun punto dell'asse X. Ammettiamo altresì che possa assegnarsi una funzione $F(x)$ ovunque continua la cui derivata seconda sia la $f(x)$, voglio dire con ciò che, tolto tutto al più un gruppo di punti P di ordine finito r nel segmento $\overline{0 2\pi}$, il quoto

$$\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha^2}$$

oscilla all'annullarsi di α per ogni valor particolare di x tra due quantità A_x e B_x ($A_x \geq B_x$) appartenenti alla classe T. Quanto al modo di comportarsi del rapporto precedente nei punti del gruppo P al decrescere indefinito di α non si fa alcuna ipotesi. Se si suppone per ultimo che per ogni valor particolare di x il quoto

$$\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha}$$

si annulli con α, non è difficile dimostrare che la classe T ammette la serie di Fourier.

La nostra asserzione è posta in sodo quando si faccia vedere che, se x_r è un infinito non integrabile della $f(x)$, avverrà uno dei sette casi distinti al paragrafo 2

del capitolo 4 del numero precedente, e che il secondo integrale della $f(x)$ è ovunque integrabile.

2. Detto b_r un punto intermedio ad $x_{r-1}\, x_r$, l'integrale

$$\psi_r(x)=\int_{b_r}^{x} f(\alpha)\, d\alpha$$

rappresenta una funzione continua nell'intervallo $\overline{x_{r-1}+0}\ \overline{x_r-0}$, ed altrettanto ha luogo dell'altro

$$\mathrm{F}_r(x)=\int_{b_r}^{x} d\beta\left(\int_{b_r}^{\beta} f(\alpha) d\alpha\right).$$

La funzione $\mathrm{F}_r(x)$ ammette poi per derivata seconda la $f(x)$ nel tratto $\overline{x_{r-1}-0}\ \overline{x_r+0}$ (¹).

Consideriamo ora la differenza

$$\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}_r(x)=\rho_r(x),$$

la quale ha la proprietà che il quoto

$$\frac{\rho_r(x+\alpha)-2\rho_r(x)+\rho_r(x-\alpha)}{\alpha^2},$$

tolto un gruppo d'ordine finito, oscilla per ogni punto del tratto $\overline{x_{r-1}+0}\ \overline{x_r-0}$ tra le quantità $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ $\big(\theta_1(x)\geq\theta_2(x)\big)$ tali, che si ha

$$\int_c^d \theta_1(x)\, dx=\int_c^d \theta_2(x)\, dx=0 \quad (x_{r-1}\leq c<d\leq x_r).$$

Ne consegue che nel segmento $x_{r-1}\, x_r$ si ha

$$\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}_r(x)=\mathrm{C}_r x+\mathrm{C}'_r,$$

essendo C_r e C'_r due costanti.

Ed invero, consideriamo il tratto $\overline{x_{r-1}+\varepsilon}\ \overline{x_r-\varepsilon}$ nel quale la funzione $\rho_r(x)$ è continua e rammentiamo il teorema:

Se $\rho(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $\overline{a+0}\ \overline{b-0}$, e se in ogni punto del medesimo la quantità

$$\frac{\rho(x+\alpha)-2\rho(x)+\rho(x-\alpha)}{\alpha^2}$$

oscilla all'annullarsi di α tra due grandezze A_x e B_x $(\mathrm{A}_x\geq\mathrm{B}_x)$ finite nel tratto $\overline{a+\varepsilon}\ \overline{b-\varepsilon}$ per ogni valor particolare di ε e tali, che sia

$$\int_a^y \mathrm{A}_x\, dx=\int_a^y \mathrm{B}_x\, dx=0 \quad (a<y\leq b),$$

sarà:

$$\rho(x)=\mathrm{C}x+\mathrm{C}',$$

C e C′ essendo due costanti (²).

Fatta la decomposizione del tratto $\overline{x_{r-1}+\varepsilon}\ \overline{x_r-\varepsilon}$, di cui è parola nel paragrafo 3 del capitolo 1 del n. I, rispetto a quel gruppo di punti nei quali è ignoto il

(¹) Vedi la mia Memoria, *Sulle serie* $\sum_0 r\, \mathrm{A}_r\, \mathrm{X}_r$, cap. 7. — (²) Vedi la stessa Memoria, cap. 6.

modo di comportarsi del rapporto $\underset{\smile}{\gamma}$ all'annullarsi di α, è chiaro che la $\rho_r(x)$ è in ciascuno dei tratti $A_1^{(0)}$, $A_2^{(0)}$, ... della forma $c_s x + c'_s$ $(s=1,2,...)$. Aggruppando convenientemente questi segmenti io genero gli altri $'A_1^{(1)}$, $'A_2^{(1)}$, ... in ciascuno dei quali la $\rho_r(x)$ è pure della forma $d_t x + d'_t$ $(t=1,2,...)$, poichè, detto p il punto che sopra gli intervalli $A_1^{(0)}$, $A_2^{(0)}$, quando sieno successivi, si ha

$$\rho_r(p+\alpha)=c_2(p+\alpha)+c'_2\,,\quad \rho_r(p-\alpha)=c_1(p-\alpha)+c'_1\,,$$

$$\rho_r(p+0)=c_2(p+0)+c'_2=\rho_r(p-0)=c_1(p-0)+c'_1\,,$$

e quindi:

$$\lim_{\alpha=0}\frac{\rho_r(p+\alpha)-2\rho_r(p)+\rho_r(p-\alpha)}{\alpha}=c_2-c_1=0\,.$$

Per la continuità della funzione $\rho_r(x)$ nel punto p si ha:

$$c'_2=c'_1\,;$$

e per la stessa ragione la $\rho_r(x)$ è della forma $d_t x + d'_t$ $(t=1,2,...)$ in ciascuno dei segmenti $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$, ...

Procedendo nel modo indicato si dimostra la eguaglianza $\rho_r(x)=C_r x + C'_r$ nel tratto $\overline{x_{r-1}+\varepsilon\;\; x_r-\varepsilon}$; mandando poi ε a zero si scorge che la precedente relazione è vera nel segmento $x_{r-1}\,x_r$.

La funzione $F_r(x)$ converge ad un limite per $x=\overline{x_{r-1}+0}$, $\overline{x_r-0}$, ossia i due simboli

$$\int_{b_r}^{x_{r-1}+0}d\alpha\int_{b_r}^{\alpha}f(\beta)\,d\beta\,,\qquad \int_{b_r}^{x_r-0}d\alpha\int_{b_r}^{\alpha}f(\beta)\,d\beta$$

hanno significato, ossia il secondo integrale della classe T rappresenta ovunque una grandezza.

3. Negli intervalli $x_{r-1}\,x_r$, $x_r\,x_{r+1}$ abbiamo quindi rispettivamente:

$$F(x)-F_r(x)=C_r x + C'_r\,,\quad F(x)-F_{r+1}(x)=C_{r+1}x+C'_{r+1}\,.$$

Ora,

$$F(x_r-\alpha)=F_r(x_r-\alpha)+C_r(x_r-\alpha)+C'_r\,,\quad F_r(x_r-0)=F_r(x_r-0)+C_r x_r+C'_r\,,$$

$$F(x_r+\alpha)=F_{r+1}(x_r+\alpha)+C_{r+1}(x_r+\alpha)+C'_{r+1}, F_{r+1}(x_r+0)=F_{r+1}(x_r+0)+C_{r+1}x_{r+1}+C'_{r+1},$$

e perciò:

$$F(x_r+\alpha)-2F(x_r)+F(x_r-\alpha)=$$

$$F_{r+1}(x_r+\alpha)-F_{r+1}(x_r+0)+F_r(x_r-\alpha)-F_r(x_r-0)+\alpha(C_{r+1}-C_r)\,.$$

$$\frac{\Delta^2 F(x_r)}{\alpha}=(C_{r+1}-C_r)+\frac{1}{\alpha}\Big(F_{r+1}(x_r+\alpha)-F_{r+1}(x_r+0)\Big)-\frac{1}{-\alpha}\Big(F_r(x_r-\alpha)-F_r(x_r-0)\Big).$$

D'altra parte,

$$F_{r+1}(x_r+\alpha)-F_{r+1}(x_r+0)=\int_{x_r-0}^{x_r+\alpha}\psi_{r+1}(\beta)\,d\beta=\int_{+0}^{+\alpha}\psi_{r+1}(x_r+\beta)d\beta\,,$$

$$F_{r+1}(x_r-\alpha)-F_{r+1}(x_r-0)=\int_{x_r-0}^{x_r-\alpha}\psi_r(\beta)\,d\beta=-\int_{+0}^{+\alpha}\psi_r(x_r-\beta)\,d\beta\,,$$

laonde:

$$\frac{\Delta\, F(x_r)}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\int_{+0}^{+\alpha}\Big(\psi_{r+1}(x_r+\beta)-\psi_r(x_r-\beta)\Big)d\beta+(C_{r+1}-C_r)\,.$$

Ammettiamo per un momento che la $f(x)$ sia dotata di un infinito di specie non inferiore alla terza nel punto $\overline{x_r-0}$ e così pure nel punto $\overline{x_r+0}$, e che questi due infiniti sieno di segno contrario. In tale ipotesi la $\psi_{r+1}(x)$ ha un infinito positivo o negativo di quarta specie nel punto $\overline{x_r+0}$, mentre la $\psi_r(x)$ ne ha uno della stessa specie per $x=x_r-0$ ma di segno opposto. La espressione $\psi_{r+1}(x_r+\beta)-\psi_r(x_r-\beta)$ ha perciò un infinito della specie indicata nel punto $+0$, e non può quindi aversi:

$$\lim_{\alpha=+0}\frac{1}{\alpha}\int_{+0}^{\alpha}\Big(\psi_{r+1}(x_r+\beta)-\psi_r(x_r-\beta)\Big)d\beta+C_{r+1}-C_r=0\,,$$

la qual cosa dee pure avere luogo nelle fatte ipotesi.

Da questa ricerca si deduce che la $f(x)$ non può comportarsi nel punto x_r in guisa, che le funzioni $\psi_r(x)$, $\psi_{r+1}(x)$ abbino rispettivamente nei punti $\overline{x_r-0}$, $\overline{x_r+0}$ un infinito di specie non inferiore alla terza e di segno contrario.

Analogamente si dimostra che la $\psi_r(x)$ oppure la $\psi_{r+1}(x)$ non può avere nel punto $\overline{x_r-0}$, $\overline{x_r+0}$ rispettivamente un infinito di specie non inferiore alla terza, mentre l'altra ha un infinito di seconda specie di segno contrario, oppure si mantiene finita.

Adunque, la classe T, di cui è parola a principio di questo capitolo, ammette la serie Fourier.

3. *Un teorema fondamentale sulle serie trigonometriche.*

1. Se la classe T periodica secondo 2π è integrabile, tolto un numero limitato di punti del segmento $\overline{a\,a+2\pi}$, e se può assegnarsi una serie trigonometrica

$$\underset{\smile}{\alpha'}\ \sum_0^n (\alpha_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)$$

tale, che il simbolo

$$\tfrac{1}{2}\, b_0 x^2-\sum_1^n \frac{a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx}{n^2}=\frac{A_0}{2}x^2-\sum_1^n\frac{A_n}{n^2}$$

rappresenti una funzione $F(x)$ ovunque continua, che ammette per derivata seconda la classe T, mentre il quoto

$$\frac{F(x+\alpha)-2F(x)+F(x-\alpha)}{\alpha}$$

si annulla con α per ogni valor particolare di x, sarà la serie α' una serie di Fourier [1].

Diciamo $f(x)$ una funzione della classe T definita in ciascun punto del segmento $\overline{a\,a+2\pi}$ ed $x_1, x_2, \ldots x_t$ $(a < x_1)$ i punti di quest' ultimo, nei quali la $f(x)$ non è integrabile, se pur ve ne sono.

Per le ricerche dei due capitoli precedenti risulta che la $f(x)$, se ovunque integrabile, è dotata di una sola serie di Fourier, di un numero illimitato, se ciò non ha luogo.

Ciò posto, fatto

$$\beta' \quad \psi(x) = \int_a^x f(x)\,dx = \lim \left(\int_a^{\alpha_{s_1}^{(1)}} + \int_{\beta_{s'_1}^{(1)}}^{\alpha_{s_2}^{(2)}} + \ldots + \int_{\beta_{s'_v}^{(v)}}^{x} \right) f(t)\,dt =$$

$$\lim \left(\int_a^{\beta_{s'_t}^{(t)} - 2\pi} + \int_{\alpha_{s_t}^{(t)} - 2\pi}^{\beta_{s'_{t-1}}^{(t-1)} - 2\pi} + \ldots \int_{\alpha_{s_r}^{(r)} - 2\pi}^{x} \right) f(t)\,dt\,,$$

essendo $x_1, x_2, \ldots, x_v$ oppure $\overline{x_t - 2\pi}$, $\overline{x_{t-1} - 2\pi}$, ..., $\overline{x_r - 2\pi}$ quei punti dei segmento ax nei quali la $f(t)$ non è integrabile, sarà $\psi(x)$ una funzione continua, tolti i punti indicati ed i loro congrui (mod. 2π). È chiaro poi che col metodo indicato noi non definiamo una sola funzione $\psi(x)$, ma bensì quante vogliamo. Due qualsivoglia delle medesime differiscono in ogni tratto x_1x_2, x_2x_3, ... per un valore costante.

La espressione

$$F_1(x) = \int_a^x \psi(t)\,dt$$

rappresenta una funzione ovunque continua dotata della derivata prima $\psi(x)$, tolti gli infiniti non integrabili della classe T.

È facile vedere che si ha

$$F_1(x+2\pi) = F_1(x) + Cx + C'.$$

Infatti,

$$F_1(x+2\pi) = \int_a^{x+2\pi} \psi(t)\,dt = \int_a^{a+2\pi} \psi(t)\,dt + \int_{a+2\pi}^{x+2\pi} \psi(t)\,dt = C'_1 + \int_a^x \psi(2\pi + t)\,dt\,,$$

$$\psi(2\pi + t) = \int_a^{2\pi+t} f(\beta)\,d\beta = \int_a^{a+2\pi} f(\beta)\,d\beta + \int_{a+2\pi}^{2\pi+t} f(\beta)\,d\beta = C + \int_a^t f(\beta)\,d\beta\,,$$

gli integrali relativi alla $f(\beta)$ essendo formati come l' integrale β'. Possiamo quindi porre:

$$F_1(x+2\pi) = Cx + C'_1 - Ca + F_1(x) = F_1(x) + Cx + C'.$$

(1) Questo teorema regge anche se si lascia ignoto il modo di comportarsi della serie $\frac{A_0}{2}x^2 - \Sigma_1^n \frac{A_n}{n^2}$ nei punti in cui la classe T non è integrabile, quando si supponga $F(x_r - 0) = F(x_r + 0)$ $(r = 1, 2, \ldots)$. Si avverte poi di leggieri come vadano modificate le formole successive in tale ipotesi.

La eguaglianza

$$\psi(2\pi+t)=C+\int_a^t f(\beta)\,d\beta$$

non ha significato se t è un infinito non integrabile, la qual cosa però non infirma manifestamente la verità della formola dimostrata.

Si potrà quindi togliendo dalla $F(x)$ una espressione della forma $\frac{\alpha}{2}x^2+\beta x$ renderla periodica secondo 2π, basterà fare

$$C-2\alpha\pi=0\,,\quad C'-2\alpha\pi^2-2\beta\pi=0\,.$$

Infatti,

$$F_1(x+2\pi)-\frac{\alpha}{2}(x+2\pi)^2-\beta(x+2\pi)=F_1(x)+Cx+C'-\frac{\alpha}{2}x^2-\frac{\alpha}{2}4\pi x$$

$$-\beta x-\frac{\alpha}{2}4\pi^2-\beta 2\pi=$$

$$F_1(x)-\frac{\alpha}{2}x^2-\beta x+(C-2\alpha\pi)\,x+(C'-2\alpha\pi^2-2\beta\pi)\,.$$

Osservo che

$$\alpha=\frac{C}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi}f(t)\,dt\,.$$

Torna ora acconcio il costruire la serie di Fourier relativa alla funzione $F_1(x)-\frac{\alpha}{2}x^2-\beta x$. Essa è

$$\gamma'\;\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi}\left(F_1(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-\beta t\right)dt+\frac{1}{\pi}\Sigma_1^n\int_a^{a+2\pi}\left(F_1(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-\beta t\right)\cos n(t-x)\,dt$$

$$=C_{11}-\Sigma_1^n\frac{A'_n}{n^2}.$$

Pertanto,

$$\int_a^{a+2\pi}\left(F_1(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-\beta t\right)\cos n(t-x)\,dt=-\frac{1}{n}\int_a^{a+2\pi}\left(\psi(t)-\alpha t\right)\operatorname{sen} n(t-x)\,dt$$

$$=-\frac{1}{n}\lim\Sigma r\int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}^{\alpha_{s_{r+1}}^{(r+1)}}\left(\psi(t)-\alpha t\right)\operatorname{sen} n(t-x)\,dt=$$

$$\frac{1}{n^2}\lim\Sigma r\left[\left(\psi(t)-\alpha t\right)\cos n(t-x)\right]_{\beta_{s'_r}^{(r)}}^{\alpha_{s_{r+1}}^{(r+1)}}-\frac{1}{n^2}\lim\Sigma r\int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}^{\alpha_{s_{r+1}}^{(r+1)}}f(t)\cos n(t-x)\,dt\,.$$

È facile vedere che

$$\lim \Sigma r \left[\left(\psi(t) - \alpha t \right) \cos n (t - x) \right]_{\beta_{s'_r}^{(r)}}^{\alpha_{s_{r+1}}^{(r+1)}} = 0 .$$

Infatti,

$$\delta' \left(\psi\left(\alpha_{s_r}^{(r)}\right) - \alpha\, \alpha_{s_r}^{(r)} \right) \cos n \left(\alpha_{s_r}^{(r)} - x\right) - \left(\psi\left(\beta_{s'_r}^{(r)}\right) - \alpha\, \beta_{s'_r}^{(r)} \right) \cos n \left(\beta_{s'_r}^{(r)} - x\right) =$$

$$\left(\psi\left(\alpha_{s_r}^{(r)}\right) - \alpha\, \alpha_{s_r}^{(r)} \right) \cos n \left(x_r - x - \left(x_r - \alpha_{s_r}^{(r)} \right) \right) -$$

$$\left(\psi\left(\beta_{s'_r}^{(r)}\right) - \alpha\, \beta_{s'_r}^{(r)} \right) \cos n \left(x_r - x + \left(\beta_{s'_r}^{(r)} - x_r \right) \right) =$$

$$\cos n (x_r - x) \left[\left[\psi\left(\alpha_{s_r}^{(r)}\right) - \alpha\, \alpha_{s_r}^{(r)} \right] \cos n \left(x_r - \alpha_{s_r}^{(r)} \right) - \left[\psi\left(\beta_{s'_r}^{(r)}\right) - \alpha\, \beta_{s'_r}^{(r)} \right] \cos n \left(x_r - \beta_{s'_r}^{(r)} \right) \right]$$

$$+ \operatorname{sen} n (x_r - x) \left[\left[\psi\left(\alpha_{s_r}^{(r)}\right) - \alpha\, \alpha_{s_r}^{(r)} \right] \operatorname{sen} n \left(x_r - \alpha_{s_r}^{(r)} \right) + \left[\psi\left(\beta_{s'_r}^{(r)}\right) - \alpha\, \beta_{s'_r}^{(r)} \right] \operatorname{sen} n \left(\beta_{s'_r}^{(r)} - x_r \right) \right].$$

D'altra parte,

$$\psi\left(\alpha_{s_r}^{(r)}\right) \cos n \left(x_r - \alpha_{s_r}^{(r)} \right) - \psi\left(\beta_{s'_r}^{(r)}\right) \cos n \left(\beta_{s'_r}^{(r)} - x_r \right) =$$

$$\psi\left(\alpha_{s_r}^{(r)}\right) - \psi\left(\beta_{s'_r}^{(r)}\right) - \frac{n^2}{2} \left[\psi\left(\alpha_{s_r}^{(r)}\right) \left(x_r - \alpha_{s_r}^{(r)} \right)^2 - \psi\left(\beta_{s'_r}^{(r)}\right) \left(\beta_{s'_r}^{(r)} - x_r \right)^2 \right] + \ldots ,$$

$$\psi\left(\alpha_{s_r}^{(r)}\right) \operatorname{sen} n \left(x_r - \alpha_{s_r}^{(r)} \right) + \psi\left(\beta_{s'_r}^{(r)}\right) \operatorname{sen} n \left(\beta_{s'_r}^{(r)} - x_r \right) =$$

$$n \left[\psi\left(\alpha_{s_r}^{(r)}\right) \left(x_r - \alpha_{s_r}^{(r)} \right) + \psi\left(\beta_{s'_r}^{(r)}\right) \left(\beta_{s'_r}^{(r)} - x_r \right) \right] - \ldots .$$

Ora,

$$-\psi\left(\alpha_{s_r}^{(r)}\right) + \psi\left(\beta_{s'_r}^{(r)}\right) = \left(\int_a^{\beta_{s'_r}^{(r)}} - \int_a^{\alpha_{s_r}^{(r)}} \right) f(t)\, dt = \left(\int_{\alpha_{s_r}^{(r)}}^{x_r - 0} + \int_{x_r + 0'}^{\beta_{s'_r}^{(r)}} \right) f(t)\, dt ,$$

quindi :

$$\lim \left(\psi\left(\alpha_{s_r}^{(r)}\right) - \psi\left(\beta_{s'_r}^{(r)}\right) \right) = 0 ,$$

e poichè

$$\lim \psi\left(\alpha^{(r)}_{s_r}\right)\left(x-\alpha^{(r)}_{s_r}\right)=\lim \psi\left(\beta^{(r)}_{s'_r}\right)\left(\beta^{(r)}_{s'_r}-x_r\right)=0\,,$$

si ha:

$$\int_a^{\overline{a+2\pi}}\left(F_1(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-\beta t\right)\cos n\,(t-x)\,dt=-\frac{1}{n^2}\lim \Sigma r\int_{\beta^{(r)}_{s'_r}}^{\alpha^{(r+1)}_{s_{r+1}}} f(t)\cos n\,(t-x)\,dt\,.$$

Per un noto teorema, che del resto verrà dimostrato tra breve, si ha:

$$\lim_{n=\infty}\int_a^{a+2\pi}\left(F_1(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-\beta t\right)\cos n\,(t-x)\,dt=0,$$

ed essendo la $F_1(x)$ dotata di una derivata prima in ciascun punto dei segmenti $\overline{a\,x_1-0}$, $\overline{x_1+0\;\;x_2-0}$, ... $\overline{x_t+0\;\;a+2\pi}$, la serie

$$\tfrac{1}{2}A'_0-\frac{A'_1}{1}-\frac{A'_2}{2^2}-\dots\,,$$

ove

$$A'_n=\frac{1}{\pi}\lim \Sigma r\int_{\beta^{(r)}_{s'_r}}^{\alpha^{(r+1)}_{s'_{r+1}}} f(t)\cos n\,(t-x)\,dt,$$

è convergente in ognuno dei medesimi.

2. Per le ricerche del capitolo precedente si hanno le eguaglianze

$$F(x)-F_1(x)=C_1x+C'_1\quad(a\leq x\leq x_1)\,,$$
$$F(x)-F_1(x)=C_2x+C'_2\quad(x_1\leq x\leq x_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F(x)-F_1(x)=C_{t+1}x+C'_{t+1}\quad(x_t\leq x\leq \overline{a+2\pi})\,,$$

ed importa far vedere che si può determinare una funzione $\psi(x)$ in guisa, che sia

$$C_1=C_2=\dots=C_{t+1}\,,\;\;C'_1=C'_2=\dots=C'_{t+1}\,.$$

Per ogni valor particolare di x la espressione

$$\frac{F(x+\alpha)-2F(x)+F(x-\alpha)}{\alpha}$$

si annulla con α, di conseguenza:

$$\lim_{\alpha=0}\frac{F_1(x_r+\alpha)-2F_1(x_r)+F_1(x_r-\alpha)}{\alpha}=C_r-C_{r+1}\,,$$

ossia

$$\lim_{\alpha=0}\frac{1}{\alpha}\int_{+0}^{\alpha}\Big[\psi(x_r+x)-\psi(x_r-x)\Big]dx=C_r-C_{r+1}\quad(r=1,2,\dots t)\,.$$

Supposto in prima che la funzione $\psi(x)$ sia finita nel punto x_r, sarà:

$$\psi(x_r+x)-\psi(x_r-x)=\int_{x_r-x}^{x_r+x} f(t)\,dt=\lim\int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}^{x_r+x} f(t)\,dt+\lim\int_{x_r-x}^{\alpha_{s_r}^{(r)}} f(t)\,dt\,.$$

Se diciamo b_r un punto qualsivoglia del segmento $\overline{x_{r-1}+0}\ \overline{x_r-0}$, avremo

$$\lim\int_{x_r-x}^{\alpha_{s_r}^{(r)}} f(t)\,dt=\lim\int_{b_r}^{\alpha_{s_r}^{(r)}} f(t)\,dt-\int_{b_r}^{x_r-x} f(t)\,dt=\mathrm{L}-\int_{b_r}^{x_r-x} f(t)\,dt\,,$$

essendo $\mathrm{B}\leq\mathrm{L}\leq\mathrm{A}$, ed A e B i limiti tra i quali oscilla la funzione $\int_{b_r}^{x_r-x} f(t)\,dt$ all'annullarsi della variabile x.

Detto poi b_{r+1} un punto del tratto $\overline{x_r+0}\ \overline{x_{r+1}-0}$, si ha

$$\lim\int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}^{x_r+x} f(t)\,dt=\int_{b_{r+1}}^{x_r+x} f(t)\,dt-\lim\int_{b_{r+1}}^{\beta_{s'_r}^{(r)}} f(t)\,dt=\int_{b_{r+1}}^{x_r+x} f(t)\,dt-\mathrm{M}\,,$$

ove $\mathrm{D}\leq\mathrm{M}\leq\mathrm{C}$, mentre C e D $(\mathrm{C}\leq\mathrm{D})$ sono le quantità che l'integrale $\int_{b_{r+1}}^{x_r+x} f(t)\,dt$ non eccede per $x=+0$; laonde:

$$\psi(x_r+x)-\psi(x_r-x)=\left(\int_{b_{r+1}}^{x_r+x}-\int_{b_r}^{x_r-x}\right)f(t)\,dt+\mathrm{L}-\mathrm{M}\,.$$

Possiamo quindi fare:

$$\lim_{\alpha=0}\frac{1}{\alpha}\int_{+0}^{\alpha}\Big(\psi(x_r+x)-\psi(x_r-x)\Big)dx=\mathrm{L}-\mathrm{M}+\lim_{\alpha=0}\frac{1}{\alpha}\int_{+0}^{\alpha}\left(\left(\int_{b_{r+1}}^{x_r+x}-\int_{b_r}^{x_r-x}\right)f(t)\,dt\right)dx.$$

La quantità

$$-\frac{1}{\alpha}\int_{+0}^{\alpha}\left(\left(\int_{b_{r+1}}^{x_r+x}-\int_{b_r}^{x_r-x}\right)f(t)\,dt\right)dx$$

tende dunque ad un limite $\mathrm{R}=-\mathrm{C}_r+\mathrm{C}_{r+1}-\mathrm{M}+\mathrm{L}$ all'annullarsi di α. Esso non è maggiore di $\mathrm{A}-\mathrm{D}$; ed invero, se ciò fosse, sarebbe:

$$\lim_{\alpha=0}\frac{1}{\alpha}\int_{+0}^{\alpha}\left[\mathrm{R}+\left(\int_{b_{r+1}}^{x_r+x}-\int_{b_r}^{x_r-x}\right)f(t)\,dt\right]dx=0\,,$$

mentre la somma

$$R+\left(\int_{b_{r+1}}^{x_r+x}-\int_{b_r}^{x_r-x}\right)f(t)\,dt$$

è a partire da valori sufficientemente piccoli di x sempre positiva. In pari modo si dimostra che R non è minore di B — C, quindi

$$B-C\leq R\leq A-D\,.$$

Determinando convenientemente le successioni α e β possiamo fare in modo, che sia $R=L-M$, essendo, come or ora si vide,

$$B\leq L\leq A\,,\qquad D\leq M\leq C$$

e di conseguenza:

$$B-C\leq L-M\leq A-D\,.$$

In tal modo si ha:

$$\lim_{\alpha=0}\frac{1}{\alpha}\int_{+0}^{\alpha}\Big[\psi(x_r+x)-\psi(x_r-x)\Big]\,dx=0$$

e perciò:

$$C_r=C_{r-1}\,,\qquad C'_r=C'_{r+1}\,.$$

3. Stando le ipotesi del paragrafo precedente, è manifesto che una delle due espressioni

$$\int_{b_r}^{x_r-x}f(t)\,dt\,,\quad \int_{b_{r+1}}^{x_r+x}f(t)\,dt$$

soltanto potrà convergere all'annullarsi della variabile x, oppure ciò non ha luogo. Ammettiamo che si verifichi il primo caso e precisamente che il simbolo $\int_{b_{r+1}}^{x_r+0}f(t)\,dt$ abbia significato. In tale ipotesi comunque si scelga la successione $\beta^{(r)}_{s'_r}$ la espressione $\int_{b_{r+1}}^{\beta^{(r)}_{s'_r}}f(t)\,dt$ tenderà al limite $\int_{b_{r+1}}^{x_r+0}f(t)\,dt$, e la serie $\alpha^{(r)}_{s_r}$ dovrà esser presa in guisa, che sia

$$\lim\int_{b_r}^{\alpha^{(r)}_{s_r}}f(t)\,dt-\int_{b_{r+1}}^{x_r+0}f(t)\,dt=R.$$

È chiaro poi che il numero delle successioni $\alpha^{(r)}_{s_r}$ che soddisfanno all' ultima condizione è arbitrario.

Poniamo ora che nessuno dei simboli

$$\int_{b_{r+1}}^{x_r+0}f(t)\,dt\,,\quad \int_{b_r}^{x_r-0}f(t)\,dt$$

rappresenti una grandezza. In questo caso ciascuna delle due espressioni

$$\int_{b_{r+1}}^{\beta_{s'_r}^{(r)}} f(t)\,dt\,, \quad \int_{b_r}^{\alpha_{s_r}^{(r)}} f(t)\,dt$$

dovrebbe tendere ad un limite soltanto, perchè sia L—M=R, pur essendo arbitrario il numero di ciascuna delle due serie $\beta_{s'_r}^{(r)}$ ed $\alpha_{s_r}^{(r)}$, oppure ognuna delle precedenti quantità può convergere verso un numero illimitato di valori, mentre L — M = R. Infatti, supponiamo che gli integrali

$$\int_{b_r}^{x_r-x} f(t)\,dt\,, \quad \int_{b_{r+1}}^{x_r+x} f(t)\,dt$$

oscillino rispettivamente tra le quantità A, B e C, D (A > B, C > D). In tale ipotesi la espressione

$$-\frac{1}{\alpha}\int_{+0}^{\alpha}\left(\left(\int_{b_{r+1}}^{x_r+x} - \int_{b_r}^{x_r-x}\right) f(t)\,dt\right) dx$$

tende ad un limite R non eccedente i limiti A — D, B — C.

Ora, noi possiamo determinare tante successioni quante vogliamo in guisa, che sia

$$\lim \int_{b_r}^{\alpha_{s_r}^{(r)}} f(t)\,dt = \mathrm{A}\,,$$

ed altrettanto dicasi della serie $\beta_{s'_r}^{(r)}$ per la quale

$$\lim \int_{b_{r+1}}^{\beta_{s'_r}^{(r)}} f(t)\,dt = \mathrm{P} \quad (\mathrm{D} \leq \mathrm{P} \leq \mathrm{C}).$$

Giovandoci delle successioni indicate la differenza

$$\left(\lim \int_{b_r}^{\alpha_{s_r}^{(r)}} - \lim \int_{b_{r+1}}^{\beta_{s'_r}^{(r)}}\right) f(t)\,dt$$

assume un valore non eccedente i limiti A—D, A—C. Detta poi ε una quantità arbitrariamente piccola si potrà determinare un numero arbitrario di serie $\alpha_{s_r}^{(r)}$ per modo, che sia

$$\lim \int_{b_r}^{\alpha_{s_r}^{(r)}} f(t)\,dt = \mathrm{A} - \varepsilon\,.$$

Se ci gioviamo ora di una qualsivoglia delle serie $\beta^{(r)}_{s'_r}$ di cui or ora si fece parola, la espressione

$$\left(\lim \int_{b_r}^{\alpha^{(r)}_{s_r}} - \lim \int_{b_{r+1}}^{\beta^{(r)}_{s'_r}}\right) f(t)\, dt$$

non eccederà i limiti $A - D - \varepsilon$, $A - C - \varepsilon$. La quantità ε può farsi variare con continuità da 0 ad $A - B$.

Ciò posto, si avverte di leggieri che, se $R = A - D$ oppure $B - C$, il limite di ciascuna delle due espressioni

$$\int_{b_r}^{\alpha^{(r)}_{s_r}} f(t)\, dt\,, \qquad \int_{b_{r+1}}^{\beta^{(r)}_{s'_r}} f(t)\, dt$$

è determinato, mentre, se ciò non ha luogo, ognuna di esse può tendere verso un numero illimitato di valori, pur essendo $R = L - M$.

4. Resta a dimostrarsi che le eguaglianze $C_r = C_{r+1}$, $C'_r = C'_{r+1}$ si verificano in qualunque modo la $\psi(x)$ si comporti nel punto x_r.

Rammentate le ricerche del paragrafo 2 del capitolo 4 del n. II, prenderemo in esame i varî casi ivi contemplati.

Nell' ipotesi II il limite R dell' integrale

$$-\frac{1}{\alpha}\int_{+0}^{\alpha}\left(\left(\int_{b_{r+1}}^{x_r+x} - \int_{b_r}^{x_r-x}\right) f(\gamma)\, d\gamma\right) dx$$

può essere una quantità qualunque, se la funzione $\int_{b_{r+1}}^{x_r+x} f(t)\, dt$ ha un infinito di prima specie a destra dell'origine. Ciascuna delle espressioni

$$\int_{b_r}^{\alpha^{(r)}_{s_r}} f(t)\, dt\,, \qquad \int_{b_{r+1}}^{\beta^{(r)}_{s'_r}} f(t)\, dt$$

potrà poi tendere verso un numero illimitato di valori, mentre $R = L - M$. Se invece l' integrale $\int_{b_{r+1}}^{x_r+x} f(t)\, dt$ ha un infinito di seconda specie, la quantità

$$-\frac{1}{\alpha}\int_{+0}^{\alpha}\left(\left(\int_{b_{r+1}}^{x_r+x} - \int_{b_r}^{x_r-x}\right) f(\gamma)\, d\gamma\right) dx$$

non potrà essere inferiore a B — C o superiore ad A — D, secondo che l'infinito considerato è negativo o positivo. Se poi R = A — D oppure = B — C, si potrà determinare un solo limite per ciascuna delle quantità

$$\int_{b_r}^{\alpha^{(r)}_{s_r}} f(t)\, dt\,, \qquad \int_{b_{r+1}}^{\beta^{(r)}_{s'_r}} f(t)\, dt\,,$$

altrimenti ciascuna di esse potrà tendere ad un numero illimitato di valori.

Analogamente si ragiona se la funzione $\int_{b_{r+1}}^{x_r+x} f(t)\, dt$ si mantiene finita, mentre l'altra $\int_{b_r}^{x_r-x} f(t)\, dt$ ha un infinito di prima o seconda specie.

I casi III e V si trattano pure facilmente, quando si scelgano le successioni $\alpha^{(r)}_{s_r}$ e $\beta^{(r)}_{s'_r}$ per modo, che ognuna delle espressioni

$$\int_{b_r}^{\alpha^{(r)}_{s_r}} f(t)\, dt\,, \qquad \int_{b_{r+1}}^{\beta^{(r)}_{s'_r}} f(t)\, dt$$

tenda ad un limite all'annullarsi di $\frac{1}{s_r}$ e $\frac{1}{s'_r}$.

Consideriamo ora il caso IV, nel quale converrà fare, come pure in ciascuno degli altri VI, VII,

$$\psi(x_r+x)-\psi(x_r-x) = \lim_{s_r=\infty} \left(\int_{b_r}^{\alpha^{(r)}_{s_r}} - \int_{b_{r+1}}^{\beta^{(r)}_{s_r}} \right) f(t)\, dt + \left(\int_{b_{r+1}}^{x_r+x} - \int_{b_r}^{x_r-x} \right) f(t) dt.$$

perchè i due simboli

$$\lim \int_{b_r}^{\alpha^{(r)}_{s_r}} f(t)\, dt\,, \qquad \lim \int_{b_{r+1}}^{\beta^{(r)}_{s_r}} f(t)\, dt$$

non hanno significato, mentre la loro differenza presa opportunamente può avere un valore qualsivoglia. La successione $\alpha^{(r)}_{s_r}$ può prendersi ad arbitrio non dimenticando però le ricerche dell'ultimo capitolo del n. II.

5. Possiamo dunque porre:

$$F(x) = F_1(x) + Cx + C',$$

e perciò:

$$F(x) - \frac{A_0}{2} x^2 - F_1(x) + \frac{\alpha}{2} x^2 + \beta x = Cx + C' - \frac{A_0}{2} x^2 + \frac{\alpha}{2} x^2 + \beta x = C',$$

ossia

$$- \sum_1^n \frac{A_n - A'_n}{n^2} - C_{11} - C' = 0\,.$$

perchè le due funzioni

$$F(x) - \frac{A_0}{2} x^2, \; F_1(x) - \frac{\alpha}{2} x^2 - \beta x$$

sono periodiche secondo 2π.

Ma una equazione della forma

$$\sum_0^n (c_n \operatorname{sen} nx + d_n \cos nx) = 0$$

non può esistere per ogni valor particolare della x, tolto al più un gruppo di punti di ordine finito, senza che sia

$$c_n = d_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

come è noto (¹); laonde:

$$A'_n = a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx = \frac{1}{\pi} \lim \varepsilon \int_{\beta_{s_r}^{(r)}}^{\alpha_{s_{r+1}}^{(r+1)}} f(t) \cos n(t - x)\, dt,$$

e poichè

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t)\, dt, \qquad \alpha = A_0,$$

si ha

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t)\, dt;$$

l'asserto è quindi dimostrato.

4. *Osservazioni e corollari al teorema precedente.*

1. Sia T una classe di funzioni periodica secondo 2π, tutto al più non integrabile in un numero limitato di punti del segmento 02π, e tale, che possa assegnarsi una funzione $F(x)$ ovunque continua di cui la derivata seconda è la classe T. Di più sia

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha} = 0$$

per ogni valor particolare di x. È chiaro che, aggiungendo una espressione della forma $Cx + C'$ alla $F(x)$ si otterrà un'altra funzione qualsivoglia che soddisfa alle stesse condizioni della data.

(¹) Vedi la Memoria del sig. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, inserita nel vol. V degli Annali di Matematica di Clebsch e Neumann.

Ciò posto, si vede facilmente che la classe T ammette la serie di Fourier.

Ed invero, la differenza

$$F(x+2\pi)-F(x)=\mu(x)$$

è una funzione ovunque continua e tale, che, tolto un gruppo di punti nel segmento $0 2\pi$ ed i loro congrui (mod. 2π), il quoto

$$\frac{\mu(x+\alpha)-2\mu(x)+\mu(x-\alpha)}{\alpha^2}$$

oscilla per ogni valor particolare della x all' annullarsi di α tra due quantità P_x e Q_x ($P_x \geq Q_x$), essendo

$$\int_c^d P_x\,dx=\int_c^d Q_x\,dx=0\,,$$

ove c e d sono due grandezze arbitrarie, e per ogni valor particolare di x si ha

$$\lim_{\alpha=0}\frac{\mu(x+\alpha)-2\mu(x)+\mu(x-\alpha)}{\alpha}=0.$$

Di conseguenza:

$$\mu(x)=F(x+2\pi)-F(x)=Cx+C',$$

e togliendo dalla espressione $F(x)$ un binomio della forma $\frac{\gamma}{2}x^2+\delta x$ si potrà renderla periodica secondo 2π.

Ciò posto, se facciamo

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi}\left(F(t)-\frac{\gamma}{2}t^2-\delta t\right)dt\,,\quad A_n=-\frac{n^2}{\pi}\int_a^{a+2\pi}\left(F(t)-\frac{\gamma}{2}t^2-\delta t\right)\cos n(t-x)\,dt\,.$$

la serie

$$\underset{\smile}{\alpha'}\qquad \gamma+A_1+A_2+A_3+\ldots.$$

integrata due volte termine a termine, produrrà la funzione

$$F(x)-\delta x-A_0=F_{11}(x)\,.$$

Se ora sostituiamo alla funzione $F(x)$ la $F_{11}(x)$, avvertiremo di leggieri che la serie $\underset{\smile}{\alpha'}$ è una serie di Fourier relativa alla classe data T.

2. Quando sieno soddisfatte le condizioni dette al principio di questo capitolo, si ponno costruire tante serie di Fourier relative alla classe T, quante si vogliono. Ad onta di ciò noi possiamo far parola di una *unica* serie di Fourier, che è la serie $\underset{\smile}{\alpha'}$; e da ora in poi per serie di Fourier relativa ad una classe T, che soddisfa alle condizioni dette al principio di questo capitolo, intenderemo quella testè definita.

Infatti, diciamo

$$\underset{\smile}{\alpha''}\quad \gamma'+A'_1+A'_2+A'_3+\ldots$$

la serie analoga alla precedente e relativa alla funzione $F(x)+cx+c'$. La differenza

$$(\gamma-\gamma')+(A_1-A'_1)+(A_2-A'_2)+\ldots.$$

è una serie che integrata due volte dà origine ad una funzione $\theta(x)$ di cui la derivata seconda appartiene alla classe zero, mentre il quoto

$$\frac{\theta(x+\alpha)-2\theta(x)+\theta(x-\alpha)}{\alpha}$$

si annulla con α per ogni valor particolare di x, quindi per le ricerche precedenti:

$$\gamma = \gamma', \quad A_s = A'_s \quad (s = 1, 2, 3, \ldots).$$

Comunque la serie $\underset{\smile}{\alpha'}$ sia nelle fatte ipotesi unica, giova dimostrare che, detto x_r un punto in cui la classe T non è integrabile, si ha

$$\lim \left(\int_{x_r-\eta}^{\alpha_{s_r}^{(r)}} + \int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}^{x_r+\eta} \right) f(t) \cos n(t-x)\, dt = \lim \left(\int_{x_r-\eta}^{\overline{\alpha}_{s_r}^{(r)}} + \int_{\overline{\beta}_{s'_r}^{(r)}}^{x_r+\eta} \right) f(t) \cos n(t-x)\, dt,$$

quale si sia n, $\alpha_{s_r}^{(r)}$, $\beta_{s'_r}^{(r)}$, $\overline{\alpha}_{s_r}^{(r)}$, $\overline{\beta}_{s'_r}^{(r)}$ essendo successioni opportune alla costruzione della serie $\underset{\smile}{\alpha'}$.

Questa asserzione è posta subito in sodo, quando si rammentino le ricerche del paragrafo 2 del capitolo 1 di questo numero, e si ricordi che il limite della quantità

$$\left(\int_{b_r}^{\alpha_{s_r}^{(r)}} + \int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}^{b_{r+1}} \right) f(t)\, dt$$

ee avere un valore determinato ed unico.

3. Dico che una classe T è esprimibile per serie trigonometrica, quando si può assegnare una serie della forma

$$\sum_0^n (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx),$$

tale, che, fatta astrazione di un gruppo P di punti di ordine finito, in ciascuno dei quali si ignora il suo modo di comportarsi, la sua somma oscilli per ogni valor particolare della x tra due quantità $\theta_1(x)$ e $\theta_2(x)$ $\left(\theta_1(x) \geq \theta_2(x)\right)$ appartenenti alla classe T [1].

Ciò posto, possiamo enunciare il teorema:

Se la serie

$$\sum_0^n (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)$$

esprime una classe integrabile T, tolto al più un numero limitato di punti, essa sarà quella di Fourier.

Per le fatte ipotesi si può assegnare un tratto dell'asse X in ciascun punto del quale la quantità

$$a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx$$

è di quella piccolezza che si vuole al crescere indefinito di n, e di conseguenza:

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \quad (n = \infty) \ [2].$$

(1) Vedi la mia Memoria, *Sulle serie* $\sum_0^n A_n X_n$, cap. 2.

(2) Vedi la Memoria citata da ultimo, cap. 4.

La funzione

$$F(x) = \tfrac{1}{2} b_0 x^2 - \sum_1^n \frac{a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx}{n^2}$$

gode quindi delle seguenti proprietà (¹):

I. Essa è ovunque continua.

II. L'espressione

$$\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha^2}$$

non eccede i limiti

$$\theta_1(x) + \frac{\theta_1(x) - \theta_2(x)}{2}, \quad \theta_2(x) - \frac{\theta_1(x) - \theta_2(x)}{2}$$

per ogni valor particolare di x all'annullarsi di α, non essendo x un punto del gruppo P.

III. Per ogni valor particolare di x si ha

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha} = 0 .$$

Il teorema or ora enunciato è adesso una facile conseguenza di quello contenuto nel capitolo che precede.

4. Se consideriamo la classe M di funzioni periodiche secondo 2π, per la quale

$$\int_c^d f(x)\,dx = 0 \quad (a \leq c \leq d \leq \overline{a + 2\pi})$$

il segmento cd essendo scevro da punti non integrabili, se pure vi sono, avvertiremo tosto che il loro numero è nullo, ossia che la classe M è ovunque integrabile; laonde:

Se la serie

$$\sum_0^n (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)$$

esprime la classe zero, sarà:

$$a_n = b_n = 0 ,$$

quale si sia n.

IV.

Ricerche sulla serie di Fourier.

1. *Fine delle ulteriori ricerche.*

1. Proponiamoci di studiare quando è che una classe T periodica secondo 2π ed integrabile, tolto un numero limitato di punti del segmento 02π, sia esprimibile per serie trigonometrica.

Per gli studî fatti nel numero precedente, ove non si voglia escludere a priori la

(¹) Vedi Riemann, pag. 231 e segᵗⁱ, e la mia Memoria, *Sulle serie* $\sum_0^n A_n X_n$, cap. 8.

esprimibilità della classe data per serie della forma

$$\sum_0^n (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx),$$

dovrà esistere una funzione F(x) ovunque continua la cui derivata seconda è la classe T, e tale, che sia

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha} = 0$$

per ogni valor particolare della x; in questa ipotesi gli infiniti non integrabili della classe T dovranno soddisfare alle condizioni indicate nel paragrafo 2 del capitolo 4 del numero precedente, mentre il primo integrale della classe T è ovunque integrabile.

Ciò posto, noi costruiremo la unica serie di Fourier relativa alla classe T, che esiste nelle fatte ipotesi, e se questa sarà atta a rappresentarla, la classe data sarà esprimibile per serie trigonometrica, in caso contrario, ciò non ha luogo.

Affinchè questa serie rappresenti la classe T è necessario, ma non sufficiente, che sia

$$\lim_{n=\infty} \int_a^{a+2\pi} f(t) \cos n(t-x)\, dt = 0$$

per ciascun punto di un tratto scelto in una parte qualsivoglia dell' intervallo $a\,\overline{a+2\pi}$, oppure, ciò che torna lo stesso, dovrà essere

$$\lim_{n=\infty} \int_a^{a+2\pi} f(t) \cos nt\, dt = \lim \int_a^{a+2\pi} f(t) \operatorname{sen} nt\, dt = 0\,,$$

Vediamo quindi quando avviene che questa condizione sia soddisfatta.

2. *Studî sull' integrale* $\int_a^{a+2\pi} f(t) \cos n(t-x)\, dt$ *per n crescente al di là di ogni limite.*

1. Essendo $f(t)$ una funzione finita ed integrabile del segmento bc, sarà:

$$\lim_{n=\infty} \int_b^c f(t) \cos nt\, dt = \lim \int_b^c f(t) \operatorname{sen} nt\, dt = 0\,.$$

Si ha

$$\int_b^c f(t) \cos nt dt = \int_0^{c-b} f(b+t) \cos n(b+t)\, dt,\quad \int_b^c f(t) \operatorname{sen} t dt = \int_0^{c-b} f(b+t) \operatorname{sen}(b+t)\, dt\,,$$

e poichè

$$\int_0^{c-b} f(b+t) \cos n(b+t)\, dt = \cos nb \int_0^d \varphi(t) \cos nt dt - \operatorname{sen} nb \int_0^d \varphi(t) \operatorname{sen} nt dt\,,$$

$$\int_0^{c-b} f(b+t) \operatorname{sen} n(b+t)\, dt = \operatorname{sen} nb \int_0^d \varphi(t) \cos nt dt + \cos nb \int_0^d \varphi(t) \operatorname{sen} nt dt\,,$$

$$c-b=d\,,\qquad f(b+t) = \varphi(t)\,,$$

basta far vedere che

$$\lim_{n=\infty}\int_0^d \varphi(t)\cos nt\,dt=\lim\int_0^d \varphi(t)\operatorname{sen} nt\,dt=0\,.$$

Sia $G_1, G_2, G_3, \ldots$ una serie di gruppi di punti del segmento $0d$ tali, che la distanza di due punti successivi qualsivoglia tenda a zero mentre l' indice del gruppo va all' infinito. La $\varphi(t)$ è integrabile e finita, si potrà quindi scegliere l'indice del gruppo per modo, che per esso, diciamolo s_1+t $(t\geq 0)$, sia piccolissima la somma degli spazî $b_1, b_2, b_3, \ldots$, in ciascuno dei quali la oscillazione massima della $\varphi(t)$ non è inferiore alla quantità arbitraria σ. Indico poi con $a_1, a_2, a_3, \ldots$ gli altri intervalli appartenenti al segmento $0\,d$.

Se l_r è il limite inferiore dei valori assunti dalla $\varphi(t)$ nel tratto a_r, e se in esso $\varphi(t)=l_r+\tau_r$, sarà:

$$\int_0^d \varphi(t)\cos nt\,dt=\Sigma r\, l_r\left(\frac{\operatorname{sen} nt}{n}\right)_{(a_r)}+\Sigma r\int_{(a_r)}\tau_r\cos nt\,dt+\Sigma s\int_{(b_s)}\varphi(t)\cos nt\,dt\,.$$

$$\int_0^d \varphi(t)\operatorname{sen} nt\,dt=\Sigma r\, l_r\left(\frac{\cos nt}{n}\right)^{(a_r)}+\Sigma r\int_{(a_r)}\tau_r\operatorname{sen} nt\,dt+\Sigma s\int_{(b_s)}\varphi(t)\operatorname{sen} nt\,dt\,.$$

Gli integrali

$$\Sigma r\int_{(a_r)}\tau_r\operatorname{sen} nt\,dt,\quad \Sigma r\int_{(a_r)}\tau_r\cos nt\,dt,\quad \Sigma s\int_{(b_s)}\varphi(t)\operatorname{sen} nt\,dt,\quad \int_{(b_s)}\varphi(t)\cos nt\,dt$$

sono per le ipotesi fatte di quella piccolezza che si vuole; l' asserto è quindi dimostrato.

Riemann dimostra questa proposizione con metodo diverso dal precedente (¹).

2. Sia ora $G'_1, G'_2, G'_3, \ldots$ una serie di gruppi del segmento $\overline{a\ a+2\pi}$, e facciamo l'indice del gruppo tale, diciamolo s_1+t $(t\geq 0)$, che sia di quella piccolezza che si vuole la somma degli spazî $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ in ciascuno dei quali la $f(x)$ non è finita, e chiamiamo $e_1, e_2, e_3, \ldots$ gli altri intervalli. Possiamo anche supporre che il gruppo G'_s $(s=1, 2, \ldots)$ sia scelto per modo, che la $f(t)$ sia finita agli estremi del segmento α_r $(r=1, 2, 3, \ldots)$.

Ciò posto, l'integrale

$$\Sigma_r\int_{(e_r)} f(t)\cos n(t-x)\,dt$$

sarà in virtù del teorema precedente infinitesimo con $\frac{1}{n}$, quale si sia x.

(¹) Vedi Riemann, p. 239 e seg^ti.

Resta quindi a studiare il modo di comportarsi dell' integrale

$$\Sigma_s \int\limits_{(\alpha_s)} f(t) \cos n\,(t-x)\,dt$$

al crescere indefinito di n.

Non è difficile dimostrare che ciascuno degli integrali

$$\int\limits_{(\alpha_s)} f(t) \cos n\,(t-x)\,dt \quad (s=1, 2, 3, \ldots.)$$

dee annullarsi con $\frac{1}{n}$, se

$$\lim_{n=\infty} \int_a^{a+2\pi} f(t) \cos n\,(t-x)\,dt = 0,$$

quale si sia x.

Noi possiamo pertanto supporre che ad ogni infinito non integrabile corrisponda un tratto α_s, nel quale la $f(t)$ è del resto finita. Supposto che ciò abbia luogo nel tratto α_t e che in esso si trovi l'infinito non integrabile x_r, facciamo

$$\int\limits_{(\alpha_t)} f(t) \cos n\,(t-x)\,dt = \lim \int_{m_t}^{\alpha_{s_r}^{(r)}} f(t) \cos n\,(t-x)\,dt + \lim \int_{\beta_{s_r}^{(r)}}^{n_t} f(t) \cos n\,(t-x)\,dt =$$

$$\cos nx \lim \int_{m_t}^{\alpha_{s_r}^{(r)}} f(t) \cos nt\,dt + \operatorname{sen} nx \lim \int_{m_t}^{\alpha_{s_r}^{(r)}} f(t) \operatorname{sen} nt\,dt +$$

$$\cos nx \lim \int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}^{n_t} f(t) \cos nt\,dt + \operatorname{sen} nx \lim \int_{\beta_{s'_r}^{(r)}}^{n_t} f(t) \operatorname{sen} nt\,dt\,,$$

m_t ed n_t essendo gli estremi del segmento α_t.

Possiamo quindi porre

$$\int\limits_{(\alpha_t)} f(t) \cos n\,(t-x)\,dt = a_n^{(t)} \operatorname{sen} nx + b_n^{(t)} \cos nx\,,$$

a fare altrettanto, se il tratto α_v non contiene infiniti non integrabili; perciò:

$$\Sigma_s \int\limits_{(\alpha_s)} f(t) \cos n\,(t-x)\,dt = \mathrm{A}_n \operatorname{sen} nx + \mathrm{B}_n \cos nx\,,$$

essendo

$$\mathrm{A}_n = \Sigma_v\, a_n^{(v)}\,, \qquad \mathrm{B}_n = \Sigma_v\, b_n^{(v)}\,.$$

Affinchè l'ultimo integrale si annulli con $\frac{1}{n}$, quale si sia x, basta che sia

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{A}_n = \lim \mathrm{B}_n = 0\,,$$

mentre non si ha

$$\lim a_n^{(v)} = \lim b_n^{(v)} = 0 \quad (v = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nel nostro caso però ciascun termine $a_n^{(v)}$, $b_n^{(v)}$ si annulla con $\frac{1}{n}$.

3. Per dimostrare l'ultima asserzione ci gioveremo del noto teorema:

Se b e c sono due costanti qualsivoglia ($b < c$), e se $\lambda(x)$ è una funzione continua nel segmento bc insieme alla sua derivata prima e tale, che sia

$$\left[\lambda(t)\frac{dB_{\mu\pm n}}{dt}\right]_c^b = \left[\lambda'(t)\,B_{\mu\pm n}\right]_c^b = 0,$$

mentre

$$\lim_{r=\infty}\int_b^c \lambda''(t)\cos r(t-x)\,dt,$$

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim b_n = 0,$$

sarà:

$$\lim_{\mu=\infty}\mu^2\int_b^c\left(F(t)-\frac{A_0}{2}t^2\right)\lambda(t)\cos\mu(t-x)\,dt = 0,$$

quando si faccia

$$B_{\mu\pm n} = \tfrac{1}{2}(a_n \operatorname{sen} nx + b_n\cos nx)\cos(\mu\pm n)(t-x) \pm$$
$$\tfrac{1}{2}(a_n\cos nx - b_n \operatorname{sen} nx)\operatorname{sen}(\mu\pm n)(t-x),$$

e

$$F(t) = \tfrac{1}{2}b_0 t^2 - \Sigma_1^n \frac{a_n \operatorname{sen} nt + b_n\cos nt}{n^2} \quad (^1).$$

Sia ora $\lambda(x)$ una funzione continua insieme alla sua derivata prima nel segmento d_v i cui estremi sono m_v ed n_v, e poniamo che

$$\lambda(m_v) = \lambda(n_v) = \lambda'(m_v) = \lambda'(n_v) = 0.$$

Questa funzione abbia poi il valore uno nel tratto $\overline{m_v+\rho\ n_v-\rho}$, ρ essendo una quantità scelta in guisa, che la $f(x)$ si mantenga finita in ciascuno degli intervalli $\overline{m_v\ m_v+\rho}$, $\overline{n_v-\rho\ n_v}$.

Ciò posto, si ha:

$$n^2\int_{m_v}^{n_v}\left(F_1(t)-\frac{\alpha}{2}t^2\right)\lambda(t)\cos n(t-x)\,dt =$$

$$-n\int_{m_v}^{n_v}\left[\left(F_1(t)-\frac{\alpha}{2}t^2\right)\lambda'(t) + \left(F'_1(t)-\alpha t\right)\lambda(t)\right]\operatorname{sen} n(t-x)\,dt$$

$$=-\int_{m_v}^{n_v}\left[\left(F_1(t)-\frac{\alpha}{2}t^2\right)\lambda''(t) + 2\left(F'_1(t)-\alpha t\right)\lambda'(t) + \left(f(t)-\alpha\right)\lambda(t)\right]\cos n(t-x)\,dt,$$

(1) Vedi la mia Memoria, *Sulla serie di Fourier*, inscrita negli Annali di Matematica di Brioschi e Cremona, T. VI pag. 303 e segti.

essendo

$$F_1(t) = \frac{t^2}{4\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt - \sum_1^n \frac{1}{\pi n^2}\int_a^{a+2\pi} f(t)\cos n(t-x)\,dt\,,$$

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt\,.$$

Ma la $f(t)$ è finita nei tratti $m_v\,\overline{m_v + \rho}\;\overline{n_v - \rho}\,n_v$, quindi:

$$0 = \lim_{n=\infty} n^2 \int_{m_v}^{n_v} \left(F_1(t) - \frac{\alpha}{2}t^2\right)\lambda(t)\cos n(t-x)\,dt =$$

$$\lim_{n=\infty}\int_{m_v+\rho}^{n_v-\rho} f(t)\cos n(t-x)\,dt\,;$$

l'asserto è adunque dimostrato.

3. *Ancora sullo stesso argomento.*

1. Vediamo quindi quando è che l'integrale

$$\int_{m_v}^{n_v} f(t)\cos n(t-x)\,dt$$

si annulla con $\frac{1}{n}$.

Pertanto, è chiaro che, se la funzione $f(x)$ è integrabile insieme all'altra $+\sqrt{\left(f(x)\right)^2}$ nel tratto $m_v\,n_v$, l'integral precedente si annulla con $\frac{1}{n}$, laddove ciò non ha luogo di necessità, se questa condizione non è soddisfatta.

Consideriamo accuratamente il caso in cui la $f(x)$ è dotata di un infinito isolato integrabile nel segmento $m_v n_v$.

Teorema: Se $f(t)$ è una funzione finita nel tratto εb per ogni valor particolare della quantità arbitrariamente piccola ε ($\varepsilon > 0$), esiste un numero illimitato di funzioni $\theta(n)$ che si annullano con $\frac{1}{n}$ e tali, che sia

$$\lim_{n=\infty}\int_{\theta(n)}^{b} f(t)\cos n(t-x)\,dt = 0\,.$$

Ed invero, sia
$$b > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots, \quad \lim_{n=\infty} \alpha_n = 0,$$
e $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ un' altra serie di grandezze positive sempre ed indefinitamente decrescenti. Ciò posto, scelgo un numero intero e positivo n_1 per modo, che sia
$$\int_{\rho_1}^{b} f(t) \cos (n_1 + s_1)(t - x)\, dt \leq \sigma_1 \quad (s_1 \gtreqless 0,\ \alpha_1 \leq \rho_1 < b),$$
la qual cosa è al certo possibile, quindi un numero $n_2 > n_1$ tale, che si abbia
$$\int_{\rho_2}^{b} f(t) \cos (n_2 + s_2)(t - x)\, dt \leq \sigma_2 \quad (s_2 \gtreqless 0,\ \alpha_2 \leq \rho_2 < b),$$
e così di seguito indefinitamente. Se facciamo ora
$$\theta(n_1) = \theta(n_1 + 1) = \dots = \theta(n_2 - 1) = \alpha_1,$$
$$\theta(n_2) = \theta(n_2 + 1) = \dots = \theta(n_3 - 1) = \alpha_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
sarà:
$$\lim_{n=\infty} \int_{\theta(n)}^{b} f(t) \cos n(t - x)\, dt = 0;$$
il teorema è quindi dimostrato.

Per costruire la funzione $\theta(t)$ si potrebbe anche supporre
$$\theta(n_1) > \theta(n_1 + 1) > \dots > \theta(n_2 - 1) = \alpha_1,$$
$$\alpha_1 > \theta(n_2) > \theta(n_2 + 1) > \dots > \theta(n_3 - 1) = \alpha_2.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

2. Ammesso ora che il simbolo
$$\int_{+0}^{b} f(t)\, dt$$
abbia significato, condizione che manifestamente non è necessaria affinchè regga il teorema precedente, studiamo il modo di comportarsi dell'integrale
$$\int_{+0}^{b} f(t) \cos (t - x)\, dt$$
all'annullarsi di $\frac{1}{n}$. In questo caso si ha
$$\lim_{n=\infty} \int_{+0}^{b} f(t) \cos n(t - x)\, dt = \lim \int_{\theta(n)}^{b} f(t) \cos n(t - x)\, dt +$$
$$\lim \int_{+0}^{\theta(n)} f(t) \cos n(t - x)\, dt = \lim \int_{+0}^{\theta(n)} f(t) \cos n(t - x)\, dt.$$

L'integrale
$$\int_{+0}^{\theta(n)} f(t)\, dt$$

si annulla con $\frac{1}{n}$, mentre la stessa cosa non può asserirsi dell'altro

$$\int_{+0}^{\theta(n)} f(t) \cos n\,(t - x)\, dt.$$

Quale esempio di un integrale di questa forma che non si annulla con $\frac{1}{n}$ valga il seguente, che non mi sembra meno generale di quello di Riemann e che in pari tempo permette forse di veder meglio nella essenza della cosa (¹).

Sia

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \quad (u_s > 0,\ s = 1, 2, 3, \ldots)$$

una serie convergente, mentre l'altra

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

diverge, ed $A_1, A_2, A_3, \ldots$ una successione di quantità positive tali, che si abbia

$$A_1 < A_2 < A_3 < \ldots \ (\lim_{n=\infty} A_n = \infty)\,.$$

Ora, poichè la serie $\Sigma_r u_r$ diverge, si potrà porre:

$$\Sigma_r{}_{1}^{t_1} u_r \geqq A_1\,, \quad \Sigma_r{}_{t_1+1}^{t_2} u_r \geqq A_2\,, \quad \Sigma_r{}_{t_2+1}^{t_3} u_r \geqq A_3\,, \ldots.$$

Scelta dalla successione di tratticelli $\alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \ldots (\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots, \lim_{n=\infty} \alpha_n = +0)$ un'altra senza limite $\alpha_s\alpha_{s+1}, \alpha_q\alpha_{q+1}, \alpha_v\alpha_{v+1}, \ldots$ nel modo che indicherò tra breve, costruisco una funzione $f(t)$ integrabile nel tratto $0\alpha_1$ e dotata di un infinito isolato nel punto $+0$ nella guisa seguente. Fatta astrazione dei tratticelli $\alpha_s\alpha_{s+1}, \alpha_q\alpha_{q+1}, \alpha_v\alpha_{v+1}, \ldots$, sia essa finita nel segmento $0\alpha_1$.

Indico con $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ una serie di quantità le quali decrescono sempre ed indefinitamente e do ad n un valore n_1 sì grande, che, facendo variare la quantità t nel segmento $\alpha_s\alpha_{s+1}$ scelto ad arbitrio, la funzione sen $n_1 t$ si annulli almeno $t_1 + 1$ volte nel medesimo, e si abbia

$$\int_{\rho_1}^{\alpha_1} f(t) \operatorname{sen}(n_1 + s_1)\, t dt \leq \sigma_1 \ (s_1 \geq 0,\ \alpha_s \leq \rho_1 < \alpha_1).$$

Dico $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{t_1+1}$ $(\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \ldots)$ le ascisse di $t_1 + 1$ punti successivi posti nel tratto $\alpha_s\alpha_{s+1}$ e nei quali sen $n_1 t$ si annulla. Ciò posto, la $f(t)$ sia costante nei tratti $\overline{\beta_1 - 0\ \beta_2 + 0}$, $\overline{\beta_2 - 0\ \beta_3 + 0}$, ..., e rispettivamente eguale ad $\frac{u_1}{\beta_1\beta_2}$, $-\frac{u_2}{\beta_2\beta_3}$, . . . Nei punti $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ la $f(t)$ potrà esistere e anche no, e nei tratticelli di $\alpha_s\alpha_{s+1}$, nei quali per avventura non fosse definita, sia essa nulla.

Consideriamo ora il segmento $0\ \frac{\pi}{2n_1}$ e scegliamo un intervallo $\alpha_q\alpha_{q+1}$ sito per intero nel medesimo, facciamo quindi n eguale ad n_2 in guisa, che nel tratto $\alpha_q\alpha_{q+1}$

(¹) Vedi Riemann, p. 246 e seg^{ti}.

cadano almeno $t_2 - t_1 + 1$ punti in ciascuno dei quali $\operatorname{sen} n_2 t = 0$, e si abbia

$$\int_{\rho_2}^{\alpha_1} f(t) \operatorname{sen}(n_2 + s_2)\, t dt \leq \sigma_2 \quad (s_2 \geq 0,\ \ \alpha_q \leq \rho_2 < \alpha_1).$$

Detti $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_{t_2-t_1+1}$ $t_2 - t_1 + 1$ punti successivi in cui la funzione $\operatorname{sen} n_2 t$ si annulla, si definisca la $f(t)$ per modo, che sia costante ed eguale a $\frac{u_{t_1+1}}{\beta'_1 \beta'_2}$, $-\frac{u_{t_1+2}}{\beta'_3 \beta'_3}$, ... rispettivamente nei tratti $\overline{\beta'_1 - 0\ \beta'_2 + 0}$, $\overline{\beta_2 - 0\ \beta'_3 + 0}$, ... Circa al modo di comportarsi della $f(t)$ nei punti β'_1, β'_2, ... e nei segmenti dell'intervallo $\alpha_q\, \alpha_{q+1}$, nei quali per avventura non fosse definita, valga la osservazione fatta or ora rispetto al tratto $\alpha_s\, \alpha_{s+1}$.

Si consideri adesso il segmento $0 \frac{\pi}{2n_2}$ e, scelto l'elemento $\alpha_v\, \alpha_{v+1}$ entro il medesimo, si proceda nel modo indicato già due volte.

Rammentando che la serie $\Sigma_1^n (-1)^{n-1} u_n$ è convergente si scorge di leggieri che la funzione or ora costruita è integrabile, e che si ha

$$\lim_{n=\infty} \int_{\theta(n)}^{\alpha_1} f(t) \operatorname{sen} nt\, dt = 0\,,$$

essendo

$$\theta(n_1) = \theta(n_1 + 1) = \dots = \theta(n_2 - 1) = \alpha_s\,,$$
$$\theta(n_2) = \theta(n_2 + 1) = \dots = \theta(n_3 - 1) = \alpha_q\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

L'integrale

$$\int_{+0}^{\theta(n)} f(t)\, dt$$

si annulla quindi con $\frac{1}{n}$, la stessa cosa non ha però luogo dell'altro

$$\int_{+0}^{\theta(n)} f(t) \cos n\,(t - x)\, dt\,,$$

quale si sia x.

Infatti, si ha

$$\int_{\beta_{t_1+1}}^{\beta_1} f(t) \operatorname{sen} n_1 t\, dt = \left(\int_{\beta_2} + \int_{\beta_3}^{\beta_2} + \dots + \int_{\beta_{t_1+1}}^{\beta_{t_1}} \right) f(t) \operatorname{sen} n_1 t\, dt =$$

$$\frac{u_1}{\beta_1\beta_2} \int_{\beta_2}^{\beta_1} \operatorname{sen} n_1 t dt - \frac{u_2}{\beta_2\beta_3} \int_{\beta_3}^{\beta_2} \operatorname{sen} n_1 t dt + \dots + (-1)^{t_1+1} \frac{u_{t_1}}{\beta_{t_1}\beta_{t_1+1}} \int_{\beta_{t_1+1}}^{\beta_{t_1}} \operatorname{sen} n_1 t dt$$

$$= \pm \frac{u_1}{\beta_1\beta_2} \frac{2}{n_1} \pm \frac{u_2}{\beta_2\beta_3} \frac{2}{n_1} \pm \dots \pm \frac{u_{t_1}}{\beta_{t_1}\beta_{t_1+1}} \frac{2}{n_1}\,,$$

valendo i segni superiori od inferiori.

Ma,

$$\beta_1\beta_2 = \beta_2\beta_3 = \ldots\ldots = \beta_{t_1}\,\beta_{t_1+1} = \frac{\pi}{n_1},$$

laonde:

$$\int_{\beta_{t_1+1}}^{\beta_1} f(t)\,\mathrm{sen}\,n_1 t dt = \pm\,\frac{2}{\pi}\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_{t_1}) = \pm\,\mathrm{B}_1,$$

essendo $\mathrm{B}_1 \geq \frac{2}{\pi}\,\mathrm{A}_1$.

Analogamente si dimostrano le relazioni

$$\int_{\beta'_{t_2-t_1+1}}^{\beta_1'} f(t)\,\mathrm{sen}\,n_2 t dt = \pm\,\frac{2}{\pi}\,(u_{t_1+1} + u_{t_1+2} + \ldots + u_{t_2}) = \pm\,\mathrm{B}_2,$$

$$\int_{\beta''_{t_3-t_2+1}}^{\beta''_1} f(t)\,\mathrm{sen}\,n_3 t dt = \pm\,\frac{2}{\pi}\,(u_{t_2+1} + u_{t_2+2} + \ldots + u_{t_3}) = \pm\,\mathrm{B}_3,$$

. . . .

$$\mathrm{B}_2 \geq \frac{2}{\pi}\,\mathrm{A}_2\,, \quad \mathrm{B}_3 \geq \frac{2}{\pi}\,\mathrm{A}_3\,, \ldots.$$

Gli integrali

$$\int_{+0}^{\beta_{t_1+1}} f(t)\,\mathrm{sen}\,n_1 t dt\,, \quad \int_{+0}^{\beta'_{t_2-t_1+1}} f(t)\,\mathrm{sen}\,n_2 t dt\,, \quad \int_{+0}^{\beta''_{t_3-t_2+1}} f(t)\,\mathrm{sen}\,n_3 t dt\,, \ldots.$$

formano una serie di quantità indefinitamente decrescenti, perchè, posto

$$\varphi(t) = \int_{+0}^{t} f(t)\,dt\,,$$

si ha

$$\int_{+0}^{\frac{\pi}{2n_s}} f(t)\,\mathrm{sen}\,n_s t dt = \Big[\varphi(t)\,\mathrm{sen}\,n_s t\Big]_{+0}^{\frac{\pi}{2n_s}} - n_s \int_{+0}^{\frac{\pi}{2n_s}} \varphi(t)\cos n_s t dt =$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2n_s}\right) - \varphi\left(\theta\,\frac{\pi}{2n_s}\right) n_s \int_{+0}^{\frac{\pi}{2n_s}} \cos n_s t dt = \varphi\left(\frac{\pi}{2n_s}\right) - \varphi\left(\theta\,\frac{\pi}{2n_s}\right)$$

$$(0 < \theta < 1).$$

Il simbolo

$$\int_{+0}^{\eta} f_1(t)\,dt \quad \left(f_1(t) = +\sqrt{(f(t))^2}\right)$$

non ha significato, perchè altrettanto ha luogo della somma $\sum_1^n r\, u_r$, l'altro all'incontro

$$\int_{+0}^{\eta} f(t)\,dt$$

rappresenta una grandezza, e ciò pel rapido alternarsi dei segni della funzione $f(t)$, onde avviene che gli accrescimenti dell'ultimo integrale vicendevolmente si distruggono in guisa, che esso non può crescere oltre ogni misura; l'aggiunta del fattore sen nt fa sì che questi accrescimenti di nuovo si sommino almeno in certi tratticelli e per valori opportuni di n.

3. Dalle ricerche precedenti si avverte che l'annullarsi dell'integrale

$$\int_a^{a+2\pi} f(t) \cos n(t-x)\,dt$$

per n crescente al di là di ogni limite dipende soltanto dal modo di comportarsi della $f(t)$ nelle estreme vicinanze di quei punti, nei quali la funzione $+\sqrt{(f(t))^2}$ non è integrabile. Fra questi punti sono compresi gli infiniti non integrabili della classe T.

Nell'ipotesi che l'integral precedente si annulli con $\frac{1}{n}$, quale si sia x, i coefficienti della serie di Fourier della classe data vanno per ultimo a zero; altrimenti ciò non ha luogo.

4. *Alcuni teoremi fondamentali sulla serie di Fourier.*

1. Sia a_1 un valor particolare della x tale, che sia

$$\lim_{n=\infty} \int_a^{a+2\pi} f(t) \cos n(t-a_1)\,dt = 0,$$

mentre non si fa alcuna ipotesi circa al modo di comportarsi degli integrali

$$\int_a^{a+2\pi} f(t) \cos nt\,dt, \qquad \int_a^{a+2\pi} f(t) \operatorname{sen} nt\,dt$$

al crescere indefinito di n. Supposto poi che la classe T si mantenga finita in a_1 e che la somma

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt + \sum_1^m r\,\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)\cos r(t-a_1)\,dt$$

non vada all'infinito con m, cerchiamo se può stabilirsi un qualche nesso fra le quantità tra cui oscilla la serie

$$\underset{\smile}{\mu}\quad \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt + \Sigma_1^r \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)\cos r\,(t-a_1)dt$$

e quelle tra cui oscilla la classe data nel punto a_1.

Poniamo

$$G(t) = \frac{F_1(a_1+t)+F_1(a_1-t)}{2},$$

ove

$$F_1(x) = \frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x + \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi}\left(F_1(t') - \frac{\alpha}{2}t'^2 - \beta t'\right)dt' -$$

$$\frac{1}{\pi}\Sigma_1^n \frac{1}{n^2}\int_a^{a+2\pi} f(t')\cos n\,(t'-x)\,dt',$$

e quindi:

$$F_1(a_1 \pm t) = \frac{\alpha}{2}(a_1 \pm t)^2 + \beta\,(a_1 \pm t) + \gamma - \Sigma_1^n \frac{1}{\pi n^2}\int_a^{a+2\pi} f(t')\cos n(t'-a_1 \mp t)\,dt',$$

essendo

$$\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi}\left(F_1(t') - \frac{\alpha}{2}t'^2 - \beta t'\right)dt.$$

Laonde:

$$G(t) = \mathcal{E} + \frac{\alpha}{2}t^2 - \Sigma^n \frac{1}{n^2}\frac{\cos nt}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t')\cos n\,(t'-a_1)\,dt'$$

$$\left(\mathcal{E} = \frac{\alpha}{2}a^2{}_1 + \beta a_1 + \gamma\right).$$

Dette A_{a_1} e B_{a_1} ($A_{a_1} \geq B_{a_1}$) le quantità tra le quali oscilla la serie $\underset{\smile}{\mu}$, la espressione

$$2\,\frac{G(t)-G(0)}{t^2} = \frac{F_1(a_1+t) - 2F_1(a_1) + F_1(a_1-t)}{t^2} = \omega(t)$$

non eccederà i limiti

$$A_{a_1} + \frac{A_{a_1} - B_{a_1}}{\pi}, \quad B_{a_1} - \frac{A_{a_1} - B_{a_1}}{\pi}.$$

Adunque il teorema:

Se la funzione $\omega(t)$ oscilla nel punto $+0$ tra le quantità M_{a_1} ed N_{a_1} ($M_{a_1} \geq N_{a_1}$), mentre la somma

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_1^m n \int_a^{a+2\pi} f(t)\cos n(t-a_1)\,dt$$

non eccede al crescere indefinito di m le grandezze A_{a_1}, B_{a_1} ($A_{a_1} \geq B_{a_1}$), e se

$$\lim_{n=\infty} \int_a^{a+2\pi} f(t)\cos n(t-a_1)\,dt\,,$$

non sarà:

$$A_{a_1} + \frac{A_{a_1}-B_{a_1}}{\pi} < M_{a_1}\,,\quad B_{a_1} - \frac{A_{a_1}-B_{a_1}}{\pi} > N_{a_1}\,.$$

Quindi:

Se la classe T si mantiene finita nel segmento pq, e se in ciascun punto del medesimo la serie

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_1 n \int_a^{a+2\pi} f(t)\cos n(t-x)\,dt$$

è pure finita oscillando tra le quantità A_x, B_x ($A_x \geq B_x$), di cui la differenza $A_x - B_x$ appartiene alla classe zero, essa serie esprimerà la classe T nel tratto pq.

3. Consideriamo ora il caso in cui la classe T non è finita nel punto a_1, mentre può assegnarsi una funzione $f(x)$ appartenente alla classe data e tale, che la espressione

$$f(a_1+t)+f(a_1-t)$$

sia continua nel tratto 0ε, ε essendo di quella piccolezza che si vuole.

Nella fatta ipotesi la classe T è integrabile nel punto a_1 oppure ciò non ha luogo; nel secondo caso si potranno scegliere due serie di punti

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \left(\lim_{m=\infty} \alpha_m = \overline{a_1 - 0}\right),$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \left(\lim_{s=\infty} \beta_s = \overline{a_1 + 0}\right),$$

tali, che α_s e β_s distino egualmente dal punto a_1 ed i simboli

$$\int^{\alpha_s} f(t)\,(t-a_1)\,dt\,,\quad \int_{\beta_s} f(t)\,(t-a_1)\,dt$$

abbino significato, quale si sia s. Ora, tanto nell'uno che nell'altro caso si può fare

$$G(t) = G(0) + G'(+0)\,\frac{t}{1} + G''(\theta t)\,\frac{t^2}{2}\quad (0 < \theta < 1)\,,$$

essendo

$$G(0) = F_1(a_1),$$

$$G(t) = \tfrac{1}{2}\left(\int_a^{a_1+t} + \int_a^{a_1-t}\right)\psi(x)\,dx,$$

$$G'(t) = \tfrac{1}{2}\Big(\psi(a_1+t) - \psi(a_1-t)\Big) = \tfrac{1}{2}\left(\int_a^{a_1+t} - \int_a^{a_1-t}\right) f(x)\,dx.$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{a_1-t}^{a_1+t} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{+0}^{t}\Big(f(a_1+t) + f(a_1-t)\Big)\,dt$$

$$G''(t) = \tfrac{1}{2}\Big(f(a_1+t) + f(a_1-t)\Big).$$

Abbiamo quindi:

$$G'(+0) = 0, \quad G''(\theta t) = \tfrac{1}{2}\Big(f(a_1+\theta t) + f(a_1-\theta t)\Big),$$

e perciò il teorema:

Se la serie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_1^r \int_0^{2\pi} f(t)\cos n(t-a_1)\,dt$$

è finita, e se

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi} f(t)\cos n(t-a_1)\,dt = 0,$$

mentre il simbolo

$$f(a_1+t) + f(a_1-t)$$

rappresenta una funzione continua nell'intervallo 0ε, essendo $f(x)$ una funzione della classe data T, la quantità

$$\tfrac{1}{2}\Big(f(a_1+0) + f(a_1-0)\Big)$$

non eccederà i limiti

$$A_{a_1} + \frac{A_{a_1} - B_{a_1}}{\pi}, \qquad B_{a_1} - \frac{A_{a_1} - B_{a_1}}{\pi}.$$

4. Interessa ora risolvere il problema: a qual criterio convien ricorrere per giudicare del modo di comportarsi della serie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_1^n \int_0^{2\pi} f(t)\cos n(t-a_1)\,dt,$$

nell' ipotesi che sia

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi} f(t)\cos n(t-a_1)\,dt=0\,.$$

A questa domanda è subito risposto quando si rammenti il teorema ([1]):

Se $\rho(t)$ è una funzione continua con la sua derivata prima e seconda nel segmento $-\eta+\eta$ e tale, che sia

$$\rho(-\eta)=\rho(\eta)=\rho'(-\eta)=\rho'(\eta)=\rho''(\eta)=\rho''(-\eta)=0\,,$$

mentre nel tratto $-\mu+\mu\,(0<\mu<\eta)$ si ha $\rho(t)=1$, sarà:

$$\lim_{n=\infty}\left[\sum_1^n{}_s A'_s-\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{+\eta}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-\varepsilon\right)\rho(t)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right)dt\right]=0\,,$$

essendo

$$A'_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos n(t-a_1)\,dt\,,\quad \lim A'_n=0\,.$$

Una funzione continua nel tratto $\overline{a_1-\eta}\ \overline{a_1+\eta}$ la cui derivata seconda è la classe T è eguale ad $F_1(x)$ oppure ne differisce per un binomio della forma $Cx+C'$. I due integrali

$$\int_{-\eta}^{+\eta}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-\varepsilon\right)\rho(t)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right)dt\,,$$

$$\int_{-\eta}^{+\eta}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-\varepsilon+Ca_1+C'\right)\rho(t)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right)dt$$

differiscono della quantità

$$\int_{-\eta}^{+\eta}(Ca_1+C')\rho(t)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right)dt=(Ca_1+C')\int_{-\eta}^{+\eta}\rho''(t)\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}dt$$

che, per le fatte ipotesi circa alla funzione $\rho(t)$, si annulla con $\frac{1}{n}$, l' espressione

$$\int_{-\eta}^{+\eta}\alpha\frac{t^2}{2}\rho(t)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right)dt-2\alpha\pi$$

si annulla con $\frac{1}{n}$; perciò:

([1]) V. la mia Memoria: *Sulla serie di Fourier.*

Il modo di comportarsi della serie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt + \sum_1^n \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos n(t - a_1)\, dt\,,$$

mentre

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi} f(t) \cos n(t - a_1)\, dt = 0\,,$$

dipende dal modo di comportarsi della classe T nelle estreme vicinanze del punto a_1.

5. Consideriamo in particolare il caso in cui la classe T è integrabile nel punto a_1, e quello in cui è tale la funzione

$$f(a_1 + t) + f(a_1 - t)$$

nella origine.

In tale ipotesi si ha

$$\int_{-\eta}^{+\eta}\left(G(t) - \frac{\alpha}{2}t^2 - \varepsilon\right)\rho(t)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right)dt =$$

$$\int_{-\eta}^{+\eta}\left[\rho''(t)\left(G(t) - \frac{\alpha}{2}t^2 - \varepsilon\right) + 2\rho'(t)\left(G'(t) - \alpha t\right) + \rho(t)\left(G''(t) - \alpha\right)\right]\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt\ (^1).$$

L'integrale

$$\left(\int_{-\eta}^{-\mu} + \int_{+\mu}^{+\eta}\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\left[\rho''(t)\left(G(t) - \frac{\alpha}{2}t^2 - \varepsilon\right) + 2\rho'(t)\left(G'(t) - \alpha t\right)\right.$$
$$\left. + \rho(t)\left(G''(t) - \alpha\right)\right] dt$$

si annulla con $\frac{1}{n}$, perchè se la $f(x)$ non fosse finita in a_1 l'infinito sarebbe isolato o no, e nel secondo caso si può far sempre in guisa, che la classe T non cresca oltre ogni limite nei segmenti $-\eta - \mu$, $+\mu + \eta$.

D'altra parte, le funzioni $\rho'(t)$ e $\rho''(t)$ sono nulle tra $-\mu$ e $+\mu$, la differenza

$$\sum_1^n r\, A'_r - \frac{1}{2\pi}\int_{-\mu}^{+\mu}\left(G''(t) - \alpha\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt$$

decresce quindi indefinitamente con $\frac{1}{n}$.

(1) Il significato di $G''(t)$ è manifesto.

Ora,

$$\int_{-\mu}^{+\mu}\left(G''(t)-\alpha\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt=2\int_{+0}^{+\mu}\left(G''(t)-\alpha\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt,$$

essendo

$$G(t)=G(-t),$$

ma

$$2\int_{+0}^{\mu}\left(G''(t)-\alpha\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt=$$

$$\int_{+0}^{\mu}\left(f(a_1+t)+f(a_1-t)\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt-2\alpha\int_{+0}^{\mu}\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt$$

laonde:

$$\lim_{n=\infty}\left(\sum_0^n{}_r A'_n-\frac{1}{\pi}\int_{+0}^{\mu}\left(f(a_1+t)+f(a_1-t)\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt\right)=0.$$

La serie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_1{}_n\int_0^{2\pi}f(t)\cos n(t-a_1)\,dt$$

in cui il termine generale diviene per ultimo zero, si comporta nelle fatte ipotesi circa alla classe T come l'integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_{+0}^{\mu}\left(f(a_1+t)+f(a_1-t)\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt$$

all'indefinito diminuire di $\frac{1}{n}$.

Sulla formazione serpentinosa dell'Apennino pavese.

Memoria del prof. TORQUATO TARAMELLI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 5 maggio 1878.

CENNI PRELIMINARI

Il rilievo geologico di una porzione poco nota dell'Apennino settentrionale mi porse occasione di occuparmi delle ofioliti, quivi assai sviluppate. Non avendo potuto nè coll'aiuto dei trattati nè collo spoglio dei lavori monografici, all'intento esaminati, trovar sufficiente spiegazione e preciso riscontro dei fatti osservati e delle immediate deduzioni, che ne scaturivano, mi risolsi ad approfondirne alquanto lo studio ed a renderlo di pubblica ragione.

Qualora la porzione d'Apennino da me percorsa a tale uopo fosse stata nota al pari delle attigue e se realmente l'oggetto di tale studio fossemi in fine risultato così difficile come lo resero e la moltiplicità e la diversità dei principî degli scrittori, che se ne occuparono, questa mia diserzione dal campo della geologia alpina, la quale fu sino ad ora l'oggetto delle mie ricerche, potrebbe esser giudicata come atto inconsulto ed anche un po' presontuoso. Ma in complesso mi accorgo di non aver molto di nuovo da dire riguardo alla teoria e di poter precisare invece alcuni fatti; il che sembrami quanto occorre in una questione così complicata, quale si è fatta quella delle serpentine apenniniche. Quindi parmi che la pietruzza, che in tal guisa innesto nel grande musaico della italiana geologia, non sia per tornare del tutto inutile allo scopo di diminuire di questo i troppo forti risalti e di accostarlo alla verosimiglianza.

È noto che le formazioni ofiolitiche, colla più imbarazzante costanza di caratteri litologici, molto svariati per ogni singolo giacimento, si ripetono in terreni di più epoche e con tali relazioni stratigrafiche da ritenersi dai più come stratificate, anzichè a dicchi ed a grosse masse di roccia emersoria. Ma è noto del pari come in seguito ai non mai abbastanza lodati studî del signor marchese Paréto e per le più recenti osservazioni del signor Carlo De-Stefani e del signor Mayer, risultava già molto probabile una certa unità cronologica di tali rocce nell'Apennino; poichè sono subordinate costantemente ai terreni dell'eocene superiore e precisamente di quel piano, distinto dal signor Mayer col nome di Liguriano e per consenso di tutti i geologi mantenuto con un nome o coll'altro, sopra il piano parigino, al quale appartiene il piano nizzardo del signor Pareto (¹). Rimane però in discussione se trattasi di contemporaneità di emersione oppure di una semplice costanza stratigrafica di una serie di

(¹) *Note sur les divisions, que l'on pourrait établir dans les terrains de l'Apennin septentrional.* Bull. Soc. géol. de France, série 2ᵉ tom. XXII p. 210, 1865.

rocce metamorfosate; questione evidentemente subordinata all'altra, se le serpentine sieno o meno da ritenersi rocce eruttive.

È anche generalmente ammesso che insieme alla formazione serpentinosa dell'Apennino, si manifesti ovunque quell'altro complesso di rocce, che la maggior parte dei geologi ritengono metamorfiche e che si raccolgono sotto i due tipi delle *argille scagliose*, uguagliate al *galestro* e del *gabbro rosso*.

Mi proposi lo studio della più logica interpretazione dell'accennata unità cronologica e delle condizioni stratigrafiche delle ofioliti e delle rocce annesse, in una parte non molto estesa dell'Apennino, tra i meridiani di Genova e di Piacenza, la valle padana ed il mare. Tratterò prima dell'andamento della zona ofiolitica in questa regione; quindi ne descriverò le principali forme litologiche; in fine, dato qualche cenno sullo sviluppo delle serpentine apenniniche ed un sunto delle idee in proposito enunciate dai geologi, esporrò le conclusioni o per dir meglio, lo stadio, nel quale oggidì mi si presenta la storia geologica di queste singolarissime rocce.

Parte I.

Andamento della formazione serpentinosa nell'area esaminata.

L'ampia valle della Trebbia, a monte della stretta gola a tramontana di Bobbio, l'intera valle della Staffora, che sbocca nel piano padano presso Voghera e buona parte delle valli del Curone e del Tidone, costituiscono un tratto d'Apennino, il quale, prima di far parte per non troppo naturale connubio della provincia di Pavia, rimaneva come in un angolo degli antichi stati sardi, presso al confine col Piacentino. Lontana dai valichi apenninici più frequentati, non molto fertile e poco popolata, senza distinte specialità orografiche che creassero a questa regione maggior attrattiva che alle regioni attigue, è assai naturale che rimanesse a differenza di queste pochissimo esplorata dai geologi. Il signor Sismonda esaminò sin dal 1840 i dintorni di Bobbio ed in epoca più recente vi passarono i signori Pareto e Gastaldi, e tutti e tre questi egregi geologi ne fecero cenno nei loro scritti. Ma il primo si limitò alla descrizione delle due masse serpentinose del monte Barberino e di Ponte Organasco, con un breve cenno ed uno spaccato risguardante altresì lo interessante affioramento ofiolitico di Zebedassi di Volpedo, presso Tortona, e tutte queste masse le riteneva quivi injettate nella serie sedimentare; il secondo parla solo di sfuggita delle serpentine dei dintorni di Bobbio, di Ottone e di s. Margherita, per accennare assai giustamente all'importanza, che quivi assumono i conglomerati a pasta serpentinosa e con elementi frequentemente granitici, ed egli pure mantiene l'idea che le serpentine fossero intruse come rocce massiccie. È noto poi come il signor Gastaldi, il quale prima col signor Pareto quindi da solo ha ripetutamente esaminato parecchi degli affioramenti di cui sono per parlare, espose qualche anno fa l'idea che tali affioramenti si debbano risguardare come sporgenze della continuazione, lungo la catena apennina, della zona alpina delle *pietre verdi;* ipotesi, che viene contraddetta dai fatti, che andrò mano mano esponendo. Nessuno poi degli accennati geologi ebbe opportunità di rilevare i contorni

di queste masse serpentinose, i rapporti stratigrafici e la loro relazione colle masse analoghe, molto più considerevoli, della Liguria orientale e del Piacentino. Il che non sarà difficile possa fare meco il lettore, ponendo l'occhio sull'unito schizzo geologico; nel delineare il quale schizzo io mi valsi appunto delle carte dei sigg. Pareto e Sismonda, modificandole per quanto mi bastarono le osservazioni fatte sino a questo punto. Gli spaccati geologici ed i profili contenuti nelle altre tavole risguardano esclusivamente la regione di sopra delimitata, della quale ho potuto fare uno studio meno incompleto.

Nelle montagne, che succedono alla riviera di Chiavari, tra le valli del torrente Entella e del torrente Vara, troviamo due principali ed estesissime masse serpentinose, alle quali fanno evidente continuazione quelle dell'Apennino bobbiese. La più meridionale di esse tocca il mare a Levanto e con piccola interruzione si avvia in direzione di tramontana verso Varese ligure, passando per Carrodano, Carro e s. Pietro di Vara. Secondarî affioramenti la accompagnano, più a levante e più bassi verso il letto del Vara, ed altri ne formano la prosecuzione; forse unificandosi con quelli meno estesi, ma del pari continui, che si manifestano ai due versanti dello spartiacque tra il torrente Vara ed il Magra.

La massa più settentrionale, appena a levante di Chiavari, si estende con ancor maggiore sviluppo e continuità verso settentrione, sin quasi all'altezza di Borzonasca; formando la porzione superiore dello spartiacque sinistro del torrente Sturla. Credo molto probabile che queste due masse non rappresentino in realtà che l'affioramento della stessa zona serpentinosa, sotto un mantello di rocce sedimentari più recenti ed analoghe a quelle, che anche altrove ricoprono le serpentine eoceniche; ma che così sia realmente non posso asserire, non avendo percorso la località.

Il signor Pareto, nella sua *Descrizione geologica sulla Liguria* (1) e nel più recente lavoro sulle rocce pirogene terziarie e posterziarie d'Italia, pone quivi pure il punto di partenza delle masse ofiolitiche delle alte vallate della Trebbia e dell'Aveto; dice comparire quivi tra la serpentina qualche raro dicco di eufotide, della quale però non può affermare, con sicurezza pari a quanta parve risultare ad altri geologi nei giacimenti ofiolitici toscani, la data relativamente più recente, rispetto alle serpentine diallagiche; afferma esistere quivi le stesse varietà variolitiche e spesso scoriacee, che si osservano nella Liguria occidentale e che corrispondono alle dioriti ed alle diabasi dal signor Savi così dettagliatamente descritte per i giacimenti toscani; nota in fine che la massa di serpentina, che va da Sestri a Varese « è notevole per le modificazioni prodotte nella calcarea di una delle suddivisioni del macigno, che l'avvicinano; pare l'abbia resa molto dura e compatta, privata dei suoi colori e resa quasi silicea. Questa stessa serpentina ha anche modificato in diaspro le argille delle montagne di Bargone, che sono legate alla calcarea summentovata ». E più oltre osserva che tanto nella valle del torrente Sturla, come nei dintorni di Rovegno, che entrano nel territorio da me esaminato, il fenomeno più notevole è la grandissima quantità di brecce ed aggregati, che avviluppano e fasciano in alcuni punti le serpentine medesime. Di più rileva come a questa zona sia quasi caratteristica la esistenza dei

(1) *Descrizione di Genova e del Genovesato.* Genova tip. Ferrando, 1846.

conglomerati granitici e dei massi erratici di questa roccia; fatto del quale ho trattato in altro mio scritto (¹) ed avrò occasione di far parola in seguito.

Con tali osservazioni il signor Pareto pose in luce le piu importanti condizioni di fatto della massa serpentinosa, della quale avremo a seguire lo sviluppo ed i varî e numerosi affioramenti da mezzodì a tramontana; e quantunque io sia per trarne molto diverse deduzioni, in confronto di quelle che l'egregio e tanto benemerito e così oculato osservatore volle inferire allorquando la plurarità dei geologi era portata ad esagerare l'efficacia sollevante e metamorfosante delle rocce emersorie, sono lieto di aver potuto constatare l'importanza di questi caratteri e la loro costanza sopra un tratto non piccolo di terreno.

Infatti la stessa abbondanza di conglomerati diasprigni a frammenti calcari, di argille compatte o meno e fortemente ossidate, la stessa varietà grandissima di rocce serpentinose, con o senza diallagio, si osserva a mattina di Borzonasca sin quasi ai vertici dei monti Penna (1714) e Breccalupo in quella massa serpentinosa, che si dirige da un lato verso l'Aveto, lo attraversa e si espande nei pressi di Rovegno, in valle di Trebbia; mentre dall'altro, verso tramontana, forma magnifico basamento al monte Ragola (1690), circondando il bacino molto elevato di s. Stefano d'Aveto. È questa la massa serpentinosa, che manifesta maggiore compattezza ed unità; sebbene si possa notare come di essa le formazioni aggregate e diasprigne formino costantemente il bordo occidentale, più scarse presentandosi verso le prime origini del Taro e del Ceno; e si possa eziandio rilevare lungo tutto il suo decorso la continua intromissione di zone scistose ed arenacee ai singoli banchi serpentinosi, di cui essa si compone.

Lasciando per un momento da parte la diramazione di questa massa, che si protende a tramontana verso ed oltre s. Stefano d'Aveto, seguiamone la continuazione e lo sfasciarsi in numerosi e diversamente caratterizzati affioramenti lungo il corso del fiume Trebbia, indi nella valle di Staffora, sino ad un suo ultimo affioramento in regione collinesca, presso Zebedassi di Volpedo, sulla sinistra del torrente Curone. Per meglio definire la sua posizione stratigrafica, prima di esaminarne il dettaglio, formiamoci un'idea della massa dei terreni, che la ricoprono e che ponno indirettamente precisarne l'orizzonte geologico.

Alla sella di Montebruno (827^m) presso Torriglia, ove pigliano origine e direzioni diverse la Trebbia, il Bisagno e la Scrivia, prende le mosse quella catena assai continua e molto uniforme di montagne, che si protende in linea quasi meridiana sin presso Varzi in valle di Staffora, coi dossi del Carmo, Cavalmurone, Alfè, Lesima, Ebro e monte Bogleglio, alti presso a 1700^m sul livello marino. In essi non vi ha traccia di affioramenti serpentinosi nè delle rocce annesse; sonvi soltanto dei calcari marnosi e delle arenarie con qualche fucoide, tra cui distinta ed abbastanza comune la *Helmintoidea labyrintica;* quella stessa, che disegna i suoi bizzarri meandri sulle lastre argillose di s. Pier d'Arena. È una pila di almeno 700 metri di rocce sedimentari; tenuto calcolo anche delle contorsioni, piuttosto frequenti ma non così tormentate e ripetute come nelle rocce immediatamente inferiori. Verso ponente e verso

(¹) *Del granito nella formazione serpentinosa dell' Apennino pavese.* Rendiconti R. Istituto lombardo, 31 gennaio 1878.

tramontana, si adagiano discordanti su questa massa di terreni arenaceo-marnosi gli strati del miocene inferiore e medio di Rocchetta ligure e di Garbagna, dell'alto Tortonese, di Castel del Groppo e del monte Vallassa presso Varzi; e questi terreni, come mostra lo schizzo geologico, in zona continua o con qualche lembo staccato, come nella valle del Tidone, costituiscono direi quasi la cornice della regione serpentinosa. Ed incidentalmente osservo come questi stessi terreni dell'Aquitaniano, a quanto rilevò il signor Pareto, piombino quasi a perpendicolo nel bacino mediterraneo, affiorando con una loro sporgenza al monte s. Margherita, a Portofino (610^{m}). La discordanza di sopraposizione di questa zona miocenica alle arenarie e marne, che fanno mantello alla formazione serpentinosa, spiega poi abbastanza bene perchè questa e le rocce che l'accompagnano affiorino, come si disse, in zona collinesca nella valle del Curone: proprio a contatto o quasi delle rocce plioceniche inferiori. Inoltre ciò dimostra che il mantello eocenico, ricoprente i serpentini, era già stato sollevato, contorto ed eroso prima che ripigliasse la sedimentazione marina dei più recenti terreni terziarî, e che i dettagli orografici attuali hanno scarsa dipendenza dall'effetto immediato del sollevamento posteocenico.

Verso oriente della accennata catena arenaceo-marnosa, lungo la sponda sinistra del fiume Trebbia sino a Ponte Organasco, quindi nella valle di Collistano ed alla sella di Brallo e finalmente nella valle della Staffora, prima della confluenza del fiume Aronchio, sempre ad un livello stratigrafico inferiore ai detti calcari marnosi ed alle arenarie, succedono le rocce concomitanti le serpentine e che voglionsi da esse prodotte per metamorfismo; cioè, i *galestri* od *argille scagliose* ed i *gabbri rossi,* presso a Rovegno metalliferi.

Esaminata questa catena di montagne arenaceo-marnose, soprastanti alle serpentine, mi parve di non andar lungi dalla realtà nello stabilire un fatto, che può avere qualche importanza nella interpretazione delle equivalenze di queste rocce con altre dell'eocene superiore apenninico. Osservai cioè che verso tramontana, specialmente ai monti Bogleglio e Giarolo (1500^{m}) e sulle falde settentrionali del Lesima, prevalgono le arenarie a fucoidi e che i calcari marnosi son copiosi e molto omogenei soltanto in prossimità della formazione ofiolitica, sempre però colle prime alternati; mentrechè, verso la spiaggia ligure la formazione ofiolitica (compresi i galestri ed i gabbri) è bensì subordinata a rocce calcareo-marnose, ma queste si avvicendano piuttosto con scisti argillosi che con arenarie, e la prevalenza dei sedimenti fini e la sottigliezza degli strati si continuano per tutta la massa dei terreni eocenici; sia che questa si attraversi verticalmente, salendo da Torriglia e da Ottone i monti Antola ed Alfè (1327-1651), sia che si esamini lungo la valle del fiume Bisagno ed a levante di Genova, ove la stessa serie si ripiega con forte angolo verso il mare. Se non fosse prematuro il desiderio di conoscere la orografia di quel tempo, in cui le Alpi erano soltanto accennate da qualche isola, mentre chissà quali terre emerse occupavano parte dell'attuale Mediterraneo, si potrebbe scorgere in questo fatto una prova di un non lontano litorale a tramontana; di guisa che sul fondo marino, sempre più basso verso mezzogiorno, avvenisse l'accennata distribuzione dei materiali. Osservo però che se questa diversità di profondità marina realmente esisteva all'epoca delle rocce arenaceo-marnose, che ricoprono la formazione serpentinosa, non si ha però alcuna ragione di

ammettere che analoga differenza esistesse nel periodo di tale formazione; stantechè, prescindendo dalle rocce variamente interpretate dei galestri e dei gabbri, tanto nella Liguria che nella valle della Trebbia e nei pressi di Volpedo, *le rocce sedimentari, che stanno sopra e tra le rocce ofiolitiche sono prevalentemente calcari od argillo-scistose.* Altra distinzione in questa uniforme formazione, che dietro il consenso di tutti i geologi io pure riferisco all'eocene superiore (*Tongriano inferiore, Flysch*), non saprei ravvisare, nella mancanza di dati paleontologici, che si limitano alle ancora più uniformi fucoidi.

Interessantissimo invece è il passaggio degli strati più profondi di essa alla formazione serpentinosa. Lungo l'accennata zona di oltre quaranta chilometri, non meno che nella Liguria, questo passaggio è quanto si può dire graduato. Ma non già nel senso, in cui esso fu rilevato ed esposto dai sostenitori dell'origine per metamorfismo delle accennate rocce; nel senso, cioè, che i calcari marnosi e le arenarie si facciano a gradi argille scagliose o diaspri o gabbri, oppure ftaniti, varioliti, iperiti, diabasi, oligoclasiti, eufotidi e serpentine. Invece si osserva una fitta alternanza di rocce arenacee e calcareo-marnose, nelle quali non fui mai capace di distinguere alcuna sicura traccia di metamorfismo, con strati o con banchi di tutte queste rocce, che si vollero ritenere i rappresentanti dei varî gradi dell'accennato metamorfismo. Tanto che, quando siamo nel cuore della formazione serpentinosa, nei pressi di Bobbio, di s. Margherita, di Ottone, e presso ai gabbri ed alle argille scagliose in queste stesse località ed a Rovegno, dove i gabbri hanno massimo sviluppo, vi troviamo sempre tra banco e banco di tali rocce i nostri calcari marnosi, spesso colle loro fucoidi e le nostre arenarie, coi loro vegetali carbonizzati o rimpiazzati da argilla. Tutt' al più si osserva la superficie degli strati ricoperta da una pattina cloritica od argillosa, che mi guarderei bene dal confondere con uno degli evidenti quanto rari esempî di metamorfismo di contatto. Bensì ho osservato frequentissima più che altrove la presenza di filoncelli e di druse di calcite e di quarzo, da cui ebbi bei saggi di cristallizzazioni simili a quelle dei dintorni di Porretta; ma questi stessi filoni e queste druse sono pur frequenti nelle dette rocce ofiolitiche e non si potranno quindi riportare che a fenomeni avvenuti dopo la formazione sia di queste che delle rocce sedimentari, a queste alternantisi e sopraposte. Raccolsi parecchi campioni di conglomerati a pasta serpentinosa o cloritica ed a frammenti calcari; osservai con molta attenzione i frammenti calcari d'ogni dimensione compresi nel gabbro rosso di Rovegno; esaminai in più luoghi il contatto delle serpentine e degli agglomerati serpentinosi e delle argille scagliose diasprizzate colle arenarie, coi calcari marnosi; ma posso affermare di non aver constatato alcun segno di subìto metamorfismo, vuoi per spatizzazione vuoi per alterata composizione chimica. Tutto al più una teca verdastra di qualche millimetro, sfumantesi nella massa del calcare, formava il contorno dei frammenti; oppure era del calcare stalattitico, insinuatosi tra il cemento ed il frammento, come nelle vene delle oficalci. Ma una alterazione da paragonarsi a quella, che i calcari marnosi e le arenarie hanno subìto nelle formazioni veramente metamorfosate, non mi si offerse giammai. Non passerò tuttavia sotto silenzio un fatto, che non riuscii a spiegarmi nemmeno quando ne addimandai qualche collega o qualche professore di chimica. Nello sfacelo dei conglomerati serpentinosi a Zebedassi di Volpedo, ed anche in posto in

alcuni arnioni, compresi nelle argille scagliose di Canevino, osservai e raccolsi del calcare pulverolento, pressochè puro, con pochissime tracce di magnesia, in massi che sembravano mantenere la forma della roccia originaria; quantunque mi sembrasse di poter escludere che fosse stata questa in tale stato di struttura. Di tali massi ne vidi di oltre un metro di spessore, candidissimi, friabili siccome fossero di calce spenta ed attraversati da filoncelli spatici.

Si volle dare un' importanza soverchia anche ai disturbi stratigrafici, che per verità sono grandissimi, della zona di calcari marnosi e di arenarie, che segue da presso la formazione ofiolitica. Nella valle della Staffora, nei dintorni di Bobbio verso Gerbidi e verso Carana io ne osservai pure degli stranissimi; nè di tali certamente ne vidi giammai nella regolarissima zona degli strati, che salgono a formare i prossimi monti della accennata catena arenaceo-marnosa dell' Antola e del Lesima. Ma la formazione del *Flysch* alpino, perchè a strati di solito poco potenti e poco omogenei (al pari di altre formazioni scistose mesozoiche, alle quali son quasi affatto straniere le rocce eruttive, quali sarebbero le arenarie e le marne del Raibliano e gli scisti dell'Infralias) non presentano forse consimili ed ancor più bizzarre contorsioni? Fra i più complicati problemi stratigrafici mi rimarranno sempre nella memoria due profili: l'uno appunto nella arenaria del *Flysch,* che torreggia presso la stazione ferroviaria di Trieste e l'altro lungo la linea pontebbana nella valle del Fella, presso a Dogna. E tanto l'uno quanto l'altro, lontani da ogni roccia endogena, non accusavano se non una complicatissima accidentalità di ripiegature, subìte da una massa a strati sottili e di diversa natura, la quale venne compressa e contorta tra masse meno fissili, del pari sollevate e ripiegate. Giova poi osservare che queste contorsioni e queste dislocazioni della serie arenaceo-marnosa presso le rocce ofiolitiche non sono nè più frequenti nè più bizzarre di quelle, che interessano la formazione ofiolitica medesima, la quale appunto in massimo grado presenta questa alternanza di masse eterogenee e di assai disuguale potenza.

Epperò se il passaggio litologico è tale da escludere ogni azione metamorfica esercitata dalle rocce ofiolitiche sulle altre sedimentari, che loro stanno presso; così i dettagli stratigrafici, anche quando si arrivasse a decifrarli col più evidente sviluppo delle curve e colla ricostruzione dei piani, non farebbero che sempre più chiaramente comprovare la forza e l'efficàcia del sollevamento subìto dalle une e dalle altre rocce ed escludere ogni effetto meccanico, dalle rocce ofiolitiche esercitato sulle rocce sedimentari.

In questa zona di contatto tra la formazione del calcare marnoso e delle arenarie e la formazione serpentinosa, si avverte appunto, come appare da quanto ho detto e come del resto è molto noto, lo sviluppo dei gabbri e dei galestri. Questi parmi di poter associare, anzi identificare colle argille scagliose, nel senso che sarà inteso da tutti i geologi, qualunque idea essi abbiano sulla loro origine. Ma la loro disposizione topografica e sino ad un certo punto anche stratigrafica, non mi pare da trascurarsi. Infatti i gabbri rossi, compatti o frammentizî, si presentano precisamente a ridosso delle serpentine nei pressi di Fontanigorda, Casanova, Rovegno e Gorreto. Le argille scagliose invece, quivi appena accennate, abbondano talora a contatto e talora a breve distanza dalle serpentine a tramontana di Ottone,

verso il Brallo, a s. Margherita e più ancora nelle valli della Staffora, del Coppa e del Curone, ove affatto mancano o sono scarsi gli affioramenti ofiolitici. Esse d'altronde si insinuano nella massa arenaceo-marnosa a molta distanza dalle serpentine. Ciò si può scorgere in modo evidentissimo, movendo lungo la strada postale del Penice da Varzi alla cantoniera, e circa due chilometri prima che si trovino le serpentine dei Sassi Neri; e meglio ancora nella valle del Tidone e nelle attigue dello Scuropasso e del Coppa, a distanza grandissima dal serpentino di Romagnese, che si continua appunto con quelli dei Sassi Neri a nord di Bobbio. Epperò ritengo probabilissimo che esse, non i gabbri ed i serpentini, si ripetano a livelli geologici più recenti dell'eocene superiore. Anzi in una mia breve relazione sulla stratigrafia dell'Apennino pavese, pubblicata lo scorso anno, ho fissato almeno in abbozzo la posizione di altre argille scagliose mioceniche nell'area stessa della provincia. Ma ciò non toglie che il massimo sviluppo delle argille scagliose, così note per tutte le loro cattive qualità (per adoperare un'espressione verissima dell'illustre signor Gastaldi) coincide colla sedimentazione marno-arenacea, immediatamente conseguente alla formazione serpentinosa. Nel mentre che i gabbri rossi sono rocce più strettamente legate alle serpentine, tanto per passaggi litologici come per disposizione stratigrafica e topografica; per la qual cosa è logico ammettere già a priori una maggior simiglianza nelle condizioni, in cui gli uni e le altre furono generate.

Questa zona serpentinosa, che si accompagna da presso Montebruno di Torriglia sino ai limiti della pianura padana, non è già continua; ma come appare dalla carta de' suoi affioramenti, che ho potuto con più precisione segnare per averli esaminati in dettaglio, essa è rappresentata da molti gruppi isolati, più o meno ravvicinati; i quali poi realmente si decompongono per interstrati marnosi ed arenacei in numerose masse, che solo potranno distinguersi sopra una carta a scala sufficiente. Ben lontano dal voler togliere il valore grandissimo di questi interstrati, vorrei però che il lettore potesse convincersi che quelle masse smembrate vanno considerate siccome la continuazione di un'unica massa serpentinosa, infranta, contorta ed erosa ancor prima che si stabilisse l'attuale tracciato orografico; e quindi ancora dislocata, infranta e profondamente incisa dalle attuali depressioni per erosione. Io non credo che sarà contrario a tale opinione chiunque abbia esaminato in alcun punto le serpentine apennine, senza il preconcetto della emersione di queste dalle viscere del terreno ovunque le si vedono sbucare tra le rocce sedimentari. Concetto questo, che a mio avviso molto ha danneggiato l'esattezza ed il merito incontestabili e non abbastanza apprezzati dei rilievi stratigrafici apenninici del compianto marchese Pareto e che lo costrinse, sulle tracce del Savi, ad esagerare il potere meccanico e metamorfizzante delle rocce in discorso.

La zona serpentinosa più orientale decorre dalla comune origine dell'Aveto, della Sturla, del Taro e del Ceno sino a metà del corso del fiume Trebbia, attraversandolo con due sue diramazioni, a tramontana di Bobbio ed a sud di Travo. Conosco meno questa seconda zona per averne esplorato in dettaglio appena l'estremo settentrionale. Ma in complesso parmi che dalla zona dell'alta valle della Trebbia essa si differisca soltanto per molto maggiore sviluppo superficiale; stante la posizione meno inclinata, dalla formazione serpentinosa assunta nel punto intermediario di una

volta, allungata in direzione meridiana. Quivi d'altronde la formazione serpentinosa è molto più elevata, toccando secondo il Pareto i 1607 metri a nord-est di s. Stefano: cioè un' altitudine di poco inferiore a quella, che al monte Alfè presso Ottone è raggiunta soltanto dagli strati calcareo-marnosi, che stanno a più di 1200 metri sopra le serpentine di Lozzo e di Ottone. Epperò non è inverosimile che al decorso così rettilineo e così marcato della depressione della Trebbia, a sud del Ponte Organasco, al quale poi formano continuazione la valle di Collistano, la sella di Brallo e la valle di s. Margherita, corrisponda una importante frattura, conseguente a tale differenza nella misura del sollevamento subìto dalla formazione serpentinosa, insieme alle rocce eoceniche che le facevano mantello. Comunque sia, sta il fatto che il grande sviluppo delle serpentine lungo questa zona non prova punto che quivi fosse un più ampio centro di eruzione o di formazione di queste rocce. Quivi le serpentine affiorano e si modellano secondo l'andamento di curve stratigrafiche perfettamente comuni a quelle, che incurvano la meno tormentata, vale a dire la più omogenea massa delle rocce che le ricopriva. In nessun punto della regione esplorata da me come da nessun passo delle descrizioni dei signori Pareto e Sismonda si può sicuramente indurre la conformazione delle serpentine a filone od a dicco, od a grandiose masse perdentisi nelle profondità terrestri; rimanendo ciò solo suggerito da alcuni spaccati, ai quali, per quanta stima si meritino i loro autori, non devesi accordare maggior valore che di modi rappresentativi delle opinioni di essi autori, le quali erano avvalorate dal consenso dei contemporanei. Quello, a cagion d'esempio, che vien dato dal sig. Sismonda del monte Barberino (Tav. I, fig. 9) (¹) presso Bobbio, mantenendo il dato reale e verissimo dell'inclinazione dei calcari marnosi dei Gerbidi sotto la massa serpentinosa, non si potrebbe molto più verosimilmente spiegare come un profilo di una sopraposizione regolare delle serpentine al calcare, anzichè come una intrusione a forma di dicco? E chi non scorge come sarebbero molto semplificati colla interpretazione che io propongo, coll'appoggio anche delle osservazioni recentemente fatte nella Garfagnana dall'egregio sig. C. Silvestri e dall' illustre sig. Mayer nella Liguria, gli spaccati del sig. Pareto (²) alla seconda e terza tavola; ovunque gli strati del macigno e del calcare marnoso si vedono così regolarmente eppur così contrariamente al loro normale svolgimento sollevati e contorti dalle serpentine? Sento come l'autorità della mia asserzione sia debole in confronto dell' interpretazione stratigrafica data dal sig. Pareto; ma tuttavia espongo il mio parere in proposito e dichiaro che in complesso l' andamento stratigrafico di queste serpentine dell' eocene superiore dell' Apennino bobbiese e ligure non mi è parso gran fatto diverso da quello delle colate di *dolerite*, che si alternano coi calcari nummulitici e madreporici e colle brecciole, estremamente fossilifere dell' eocene e del miocene inferiore del Vicentino. Notai soltanto che la formazione serpentinosa di questo tratto di Apennino e con essa le rocce che la inchiudono sono più contorte, più infrante, più tormentate e dislocate dalle serie eocenica

(¹) A. Sismonda, *Osservazioni geologiche sui terreni delle formazioni terziaria e cretacea in Piemonte*. Mem. Soc. R. d. Scienze di Torino, serie 2ª vol. V.

(²) M. L. Pareto, *Coupes, à travers l'Apennin, des bords de la Méditerranée à la vallée du Pô, depuis Livorne jusqu' à Nice*. Bull. Soc. géol. de France, série 2ᵉ t. XIX, 1861.

nella regione delle Alpi venete. Alla quale differenza stratigrafica non vorrò intralasciare di aggiungerne un'altra, quantunque notissima, e così saliente da doversi da tutti ammettere, e così importante da non potersi dimenticare da chiunque volesse imprendere uno studio monografico delle serpentine eoceniche italiane. Questa differenza è che le doleriti ed i basalti del Vicentino si alternano con depositi formati in mari, al cui fondo e sulle cui spiagge si agitavano a migliaia ed a miriadi i viventi; mentre un funebre mantello pare si distenda sulla formazione serpentinosa e sulle argille scagliose e sui gabbri, che la accompagnano. Durante la formazione di centinaia di metri di potenza di roccia, ai quali chissà quanti secoli corrispondono, la vita animale nel seno di quei mari fu sospesa ed a stento, e rade, e senza forme distinte si sviluppavano le incerte fucoidi ([1]). Fu questo fatto causato da una soverchia profondità marina? Io nol credo; stantechè i depositi son tutti di costiera e di zona litorana e mancano appunto quei sedimi, che distinguono le aree di massima profondità marina. Fu questo fatto invece l'effetto di condizioni deleteriche, legate ad emanazioni, che tennero dietro alla formazione delle sepolte argille scagliose e delle serpentine oppur furono contemporanee con quella di altri galestri, che andavano ancora deponendosi? Ma di che natura era questo elemento deleterico, come e sin dove esercitavasi? Ecco un problema, che certamente io non sarò il primo che lo rimandi a lontano avvenire, nè sarà il solo dubbio che lasceranno insolute queste poche pagine, per quanto assai limitato ne sia l'argomento.

Tornando alla nostra zona serpentinosa sulla destra del fiume Aveto e della Trebbia, la continuità delle masse principali e la relativa estensione dei singoli affioramenti sembrano fare saliente differenza colla zona più occidentale, da me rilevata con maggiore dettaglio. Temo però che questa differenza dipenda unicamente dalla imprecisione dei contorni delle masse serpentinose, la cui indicazione non deve essere interpretata che siccome una guida per chi volesse con maggior cura definirla sopra una carta a scala più ampia. Così dicasi per l'altro affioramento della stessa zona serpentinosa, che circonda in alto il bacino del torrente Nure, poi forma lo spartiacque tra questo e quello del torrente Ceno, presso Bardi e quindi si ripiega a tramontana, verso la valle del torrente Arda. Ma dal complesso delle descrizioni dei signori Pareto e del Fötterle, il quale ultimo scrisse del giacimento minerario, cuprifero di Ferriere, risulta che questa zona non offre differenze sensibili colla zona parallela dell'alta valle di Trebbia e della valle di Staffora. Essa infatti ci rappresenta e lo sviluppo grandissimo delle serpentine brecciate, e la presenza in grande scala dei conglomerati granitico-cloritici, e lo sviluppo dei gabbri rossi ed anche

([1]) La mancanza di fossili nella formazione eocenica dell'Apennino non è assoluta; poichè si trovarono anche recentemente delle bivalvi sul macigno presso la Porretta ed a più riprese, anche nel Bobbiese, si rinvennero dei cefalopodi, che non si ha alcuna ragione di ritenere importati di altre formazioni e si rinvennero a breve distanza e generalmente sopra il piano dei galestri e delle serpentine. Questo dimostra come questa scarsità di fossili sia originaria, non già causata da loro posteriore distruzione. È dessa d'altronde un carattere generale della formazione arenaceo-marnosa eocenica, in tutta l'Europa meridionale; per taluni piani si mantiene anche in quelle poche regioni dove alle arenarie ed alle marne si intercalano ricchissimi banchi madreporici o di foraminifere e di echinidi, come è il caso nelle prealpi venete ad est di Bassano, nell'Istria e nell'Illiria.

l'anologia tra il giacimento di Ferriere e quello di Rovegno. Epperò ritengo che l'annesso schizzo e gli spaccati, se non ponno precisare la struttura di questa zona serpentinosa in tutto il suo sviluppo, non ne svisino però i rapporti stratigrafici; specialmente colle rocce immediatamente alternate e con quelle, che succedono alle rocce ofiolitiche.

Rimane ora la molto più oscura delimitazione delle formazioni, che sostengono il complesso di queste zone ofiolitiche e la discussione se o meno esse rocce possano rappresentare un più antico orizzonte eocenico. Stando ai fatti che si ponno rilevare nell'area da me esaminata, pochissimo posso affermare a questo riguardo; ma giovandomi ancora delle osservazioni del signor Pareto, ricordo come nella Liguria, inferiormente alla zona del macigno e dell'alberese, secondo questo autore modificati dalle serpentine, si osservi una zona scistoso-calcare, assai sviluppata nei dintorni di Mentone e nella valle del torrente Bevera e che viene associata senza restrizione al calcare nummulitico della contea di Nizza. Non so se questa associazione sia sicura, rimarcando lo stesso signor Pareto una più profonda zona di galestri, assai ricchi di selci e di diaspri sotto a questi scisti; ma sembrami che in essi appunto trovino riscontro le rocce più profonde, che osservai nell'area delle serpentine.

Gradatamente accostandoci alle più antiche amigdale di rocce ofiolitiche, interstratificate colla serie eocenica, noi troviamo infatti quello stesso passaggio, che ho notato dapprima doversi rilevare da tramontana a mezzodì per la formazione dell'eocene superiore, presa nel suo complesso. Le arenarie cioè scarseggiano sempre più e sono in tenui banchi, le marne ed i calcari marnosi prevalgono e si fanno più fissili, più compatti e spesso nodulosi. Parimenti abbondano gradatamente gli argilloscisti neri o bruni, leggerissimamente micacei; essi pure ricchi di noduli, dovuti, io penso, a posteriori concentrazioni di silice o di calcite. Anche le fucoidi sembranmi mancare affatto od essere estremamente rare; per quanto io sappia non una traccia di roccia biogenica può suggerire, indipendentemente dalle considerazioni stratigrafiche, l'equivalenza di questi scisti e calcari marnosi colle rocce del piano nizzardo.

Dietro ripetute indagini dovetti anche persuadermi che i calcari marnosi, che formano il monte Penice (1462^{m}), a sera di Bobbio, sono realmente inferiori alla zona serpentinosa dei Gerbidi, di Pregola e s. Margherita e di Carana e quindi debbo ascrivere allo stesso orizzonte anche la continuazione di questi calcari, che si spinge sino alla destra del torrente Carlone e forma una buona parte del monte Costa Ferrata. Trattasi almeno di una potenza di 300 metri di rocce marnose e calcari, sottostanti alle serpentine. Ma nemmeno quivi trovai alcuna traccia di fossili, nè veruna rassomiglianza con rocce del piano nizzardo, esaminato in altri punti dell'alta Italia. Così rimangono inferiori alle serpentine e quasi esclusive ad un'area poco estesa le marne salate di Bobbio, che si ricoprono di abbondante efflorescenza di cloruro di sodio e di carbonati alcalini; alle quali marne corrispondono due sorgenti salso-jodiche presso i Gerbidi ed a s. Martino. Ed è in queste marne, che il signor Sismonda ha pel primo indicata l'abbondanza di concrezioni calcari di forme svariatissime (Tav. III, fig. 1), le quali devono essersi formate prima dello incurvamento degli strati; essendochè esse medesime sono da questo influenzate. Ma nemmeno questa specie di septarie ponno evidentemente fornire buon criterio stratigrafico, siccome accidentalità di struttura,

che si presentano a molti e svariati livelli, nelle serie cretacea ed eocenica non meno che nella miocenica e pliocenica.

Laonde io sono d'avviso che il meglio che si possa al presente indurre dai rapporti stratigrafici delle serpentine colle rocce ad esse sottostanti, nei pressi di Bobbio e di Varzi, e nella Liguria orientale, consiste nel riconoscere che queste rocce inferiori accennano ad una condizione di più uniforme e forse maggiore profondità del fondo marino; allorchè non si era ancora formato il molto complesso mantello delle rocce, che comprendono le serpentine. I calcari marnosi, uniformi, compatti, poveri di fucoidi, i quali si alternano con parecchi dei più profondi banchi di serpentine, diallagiche o meno, a s. Margherita, a Cà dei Brugnoni ed ai Gerbidi di Bobbio, come pure nell'estremo affioramento settentrionale di Zebedassi, in val del torrente Curone, tornano a riprova di questo modo di vedere.

Che se queste rocce più profonde devonsi stratigraficamente riferire all'eocene medio, ciò che io non credo, dovremmo poi spiegare la assoluta mancanza delle tracce biologiche, che ogni qual tratto pur compaiono nella zona del *Flysch* alpino, in prossimità od al preciso livello dei banchi nummulitici del piano di s. Illarione. E così saremmo condotti ad ammettere, per questo tratto di Apennino, di data più antica l'azione di quella causa deleterica, che spopolava i mari del Tongriano contemporaneamente ed in corrispondenza alle formazioni ofiolitiche. Ma io credo che a tanto non ci autorizzi alcun fatto; mentre che, interpretata nel suo valore geologico e mantenuta nel suo più probabile limite cronologico, questa mancanza di tracce biologiche forma la caratteristica, negativa se vuolsi ma non trascurabile, di un unico complesso di rocce, che i geologi si trovarono costretti a distinguere coi nomi di arenarie carpatiche, di terreno etrurio, di liguriano, di modenese, di *Flysch* alpino, di zona del tassello e così via. Nei limiti delle attuali ricerche nessun argomento ci costringe ad assegnare ad alcune delle serpentine affioranti nell'area esaminata una data più antica del periodo tongriano e questo sembra potersi ritenere eziandio per l'area di massimo sviluppo delle rocce ofiolitiche della Liguria occidentale e nella Toscana. Ciò non esclude a priori la possibilità che altrove affiorino serpentine più antiche, o più recenti; nella stessa guisa che più presso al colosso alpino, nelle serie della creta superiore e dell'eocene, e persino negli strati dell'Aquitaniano, si presentano a più livelli gli espandimenti di doleriti e di basalti del Vicentino.

Parte II.

Composizione litologica della formazione serpentinosa nell'Apennino bobbiese.

Così definita, per quanto le attuali condizioni me lo concedano, la posizione stratigrafica della zona serpentinosa presa in esame, passo a descrivere le varietà litologiche da essa presentate; per quei confronti, che potranno stabilire meglio di me coloro, che sono più esperti nello studio di queste formazioni. Per la determinazione e per la denominazione di esse rocce mi sono attenuto agli scritti così giustamente ammirati del Savi, nonchè alle posteriori modificazioni introdotte dai

signori Meneghini, Bombicci e D'Acchiardi. Negli scritti dei geologi stranieri poco trovai, che potesse sicuramente riferirsi a questo studio delle serpentine eoceniche. Anche il lavoro abbastanza esteso del signor Nogues, sulle ofiti dei Pirenei, non presenta a questo riguardo più sicuri confronti di quanto il facciano gli studî risguardanti le prossime regioni apenniniche.

Mantenendo come opportuna la distinzione delle *rocce verdi* apenniniche in prevalentemente magnesiache ed in pirossenico-feldispatiche, ci si presentano le prime più abbondanti; tantopiù se tra esse comprendiamo col signor Bombicci le *ofiti oligoclasiche* e le serpentine a noduli saussuritici. Quindi incominceremo appunto da queste rocce.

Serpentina diallagica ed omogenea, serpentina brecciata. — In tutti gli affioramenti indicati nel precedente capitolo, in cadaun dosso che si erga dall'uniforme ondulazione dei colli e dei monti calcareo-marnosi od arenacei, troviamo prevalere senza eccezione la massa delle vere *ofioliti*, come furono intese dal Savi. Questo pare non essere il caso della zona serpentinosa ligure, ove abbondano invece le iperiti e le eufotidi; mentre nell' Apennino dell' Emilia, se non erro, le serpentine hanno ancora il sopravvento.

La presenza del diallagio non mi parve in alcun giacimento sicuro criterio per distinguere le varie masse ofiolitiche e tanto meno per assegnarne l' epoca relativa. Imperocchè il minerale, colle sue varietà di colorito dal nero al violaceo-chiaro ed al giallo-bronzato, spesso dipendenti da alterazioni meteoriche, mi si presentò sempre in maggior o minor copia e spesso assai scarsamente disseminato. Anche indipendentemente dal fatto che la serpentina diallagica trovasi anche nella zona superiore, in contatto colle argille scagliose e coi gabbri, il qual fatto ha solo valore per coloro che vogliano meco accettare la regolare successione di questi membri della formazione serpentinosa, sta però l' altro fatto, non meno vero nè meno significante, che le due varietà di serpentino sono sempre associate. Rinvenni però molto frequentemente lungo tutta la zona, specialmente sotto forma di più o meno regolare alternanza, associata alla serpentina diallagica una breccia con elementi diallagici e cemento di serpentino amorfo, generalmente più chiaro. Tali rimpasti avvenivano di certo a spese della roccia, colla quale si alternano o nella quale anche si trovano compresi sotto forma di dicchi irregolari; i quali però non è punto sicuro che abbiano molto profonde le loro origni. Anche la serpentina omogenea si presenta piuttosto sotto forma di interstrati o di irregolari filoni, più o meno potenti. Meglio che un magma magnesiano originario, essa sembra essere stata un prodotto di alterazione della serpentina diallagica, formatosi alla superficie e per entro le fessure di questa. Dove alla serpentina si innestano più o meno vaste amigdale di rocce feldispatiche, non diminuisce perciò in essa la presenza del diallagio disseminato. Dove invece prevalgono i serpentini brecciati, steatitosi, di colorito scialbo e poco compatti, quivi pure le vere ofioliti diallagiche sono scarse o solo in frammenti.

Non saprei segnare sullo schizzo alcun affioramento, al quale manchino queste due rocce; ma posso benissimo precisare, per l'area esaminata, la loro massima abbondanza nei dintorni immediati di Bobbio, nei monti di Cerignale ed al monte di Roccabruna, tra l'Aveto e la Trebbia.

A Rovegno un ammasso di ofiolite diallagica affiora a contatto del gabbro metallifero. A Zebedassi di Volpedo, una potente zona della serpentina stessa riposa sopra banchi di calcare marnoso a fucoidi, punto alterato. Ai Sassi Neri di Bobbio, a Cà Brugnoni ed a Corte Brugnatella, essa si alterna con arenarie micacee, parimenti disseminate di fucoidi.

Le varietà brecciate, a cemento di serpentino omogeneo, sono frequentemente steatitose e la *steatite* si presenta in noduli, irregolari e contorti, talora di assai considerevoli dimensioni e colle loro superficie lisciate. Il *crisotilo* riveste soventi volte la superficie dei frammenti ofiolitici, oppure li riunisce invece della serpentina amorfa. Assai spesso poi queste breccie serpentinose sono attraversate da molto estese ma poco ampie fratture, riempiute da una sòstanza asbestoide; questa, appena raccolta è assai molle e si spappola tra le dita. Ed anche questi filoncelli asbestoidi sono irregolari e come contorti da spostamenti subìti dalla massa, già infranta dalle fratture nelle quali essi si sono formati.

Alcune volte le serpentine formano la pasta dei conglomerati a frammenti granitici ed in tal caso sono sempre amorfe o granulari. Quantunque tali conglomerati, oppure il loro sfacelo, non facciano difetto di alcun affioramento ofiolitico, tuttavia mai non ho osservato un frammento granitico compreso nella serpentina diallagica.

Oficalce. — Per comprendere tutte le varietà di questa roccia, che ponno meritare questa denominazione, occorre necessariamente distinguerne almeno due tipi, che probabilmente ebbero diversa origine. L'uno è la roccia comunemente impiegata nelle decorazioni, a fondo di roccia ofiolitica con evidenti venature bianche di calcite o di aragonite. E questa varietà, per i frequenti passaggi che presenta il cemento al crisotilo od al serpentino amorfo che pur rilegano la roccia ofiolitica, parmi risulti da una molto antica ricomposizione della roccia medesima. Un'altra varietà è costituita prevalentemente dalle serpentine granulari, affanitiche, e spesso anche da iperiti alterate, le quali sono percorse da minute venuzze di calcite; il colorito è generalmente più chiaro, la compattezza minore e l'uso decorativo più scarso, mentre sono più evidenti i passaggi al gabbro rosso ed alle iperiti, prevalenti nella porzione superiore della formazione serpentinosa.

Entrambe queste varietà sono assai sviluppate nell'Apennino bobbiese; la prima presentando delle bellissime apparenze di colorito e di macchia a s. Margherita, al R. dei Gavi, presso i Gerbidi di Bobbio ed a Casanova a sud-est di Rovegno; la la seconda, comunissima a Pietranera, a sud di Ottone, al Ponte Organasco e presso Cà di Lago e Corte Brugnatella, a sud di Bobbio.

Ofisilici. — Anche queste rocce sono subordinate al gabbro rosso. Con belle venule cristalline di quarzo, presentansi alcune serpentine granulari giallastre o verdi chiare, appena a tramontana di Pietranera e mi sembrarono poco diverse da alcune arenarie serpentinose, parimenti attraversate da filoncelli quarzosi, che rinvenni da Corte Brugnatella a Collistano e sul monte Scarparina, presso Pregola. I migliori campioni di quarzo, spesso aeroide, provengono dai dintorni di Ottone, da alcuni filoncelli di calcite e di quarzo jalino attraverso i calcari marnosi, scistoidi, quivi alternati con brecciole serpentinose. Quantunque queste brecciole passino a vere serpentine diallagiche e spesso simulino la forma di dicco; tuttavia attentamente

considerando le trincee, or ora aperte per la costruzione della strada nazionale da Bobbio a Genova, mi convinsi che tali rocce sono realmente constratificate cogli scisti marnosi (Tav. III, fig. 13 e 14). Epperò la presenza in questi delle venule quarzose non si deve punto considerare come effetto di metamorfismo, appena posteriore o concomitante la formazione di esse brecciole serpentinose; le quali poi alla lor volta non mancano dal presentare le venule stesse di calcite e di quarzo. Nemmeno la scistosità della roccia, che la fa somigliante alla lavagna della Liguria, può in verun modo ascriversi a metamorfismo; sibbene devesi alle contorsioni subìte dalla formazione calcareo-marnosa. Gli scisti marnosi del Raibliano in tutte le Alpi venete e dell'Infralias lombardo hanno l'identica struttura; nè molto diversi io penso si ridurrebbero i depositi delle molasse e delle marne mioceniche e plioceniche se compresse da ingente pila di strati, sollevate e contorte. Ripetutamente osservai essere i piani di questa scistosità convergenti con angolo più o meno obliquo al piano della stratificazione. Il quarzo deve essere infiltrato in epoca posteriore alla formazione delle breccie serpentinose, probabilmente all'epoca di formazione del gabbro rosso, il quale a non grande distanza ricopre quella serie di scisti marnosi quarziferi. Le ofisilici delle altre località sono ancora più chiaramente subordinate alle argille scagliose di Brallo, del monte Scarparina e delle vallette del R. Avagnone.

Ofite oligoclasica. — È una bellissima roccia porfiroide, che ho sino ad ora riscontrato in due punti del Bobbiese, cioè: a Ponte Organasco, ove costituiva una massa ora soltanto rappresentata dallo sfacelo di colossali frammenti ed in origine compresa dalle ofioliti diallagiche, le quali a guisa di gigantesca dicca salgono sulla destra della Trebbia, in regolare alternanza cogli scisti e colle brecciole ofiolitiche del Liguriano (Tav. III, fig. 8). Quindi, cinque chilometri più a mezzogiorno, la roccia medesima è contenuta in piccoli ammassi assai irregolari nella serpentina brecciata sulla sinistra del fiume, presso il ponte di Trascio.

La pasta è minutamente cristallina, per feldispato sodico disseminato nella serpentina granulare e verdastra; ma sono frequenti e perfettamente definibili alcuni grossi cristalli di oligoclasio, di colorito bianco sporco, opachi sulle facce laterali ed anzi splendenti in quelle di clivaggio. Taluni raggiungono la lunghezza di 4 centimetri. Possiedo un campione interessantissimo delle prime località, il quale comprende dei frammenti di argilloscisto micaceo, assai induriti e resi piritosi, ma perfettamente riconoscibili. La pirite d'altronde è disseminata anche nella roccia porfiroide e vi è tradizione che a Ponte Organasco fosse coltivata una miniera di rame. Il giacimento di entrambe queste amigdale di tale ofite è al margine occidentale della formazione serpentinosa del Bobbiese, appena sotto la zona delle argille scagliose.

Serpentino amigdaloide con saussurrite. — A nemmeno un chilometro a sud del Ponte Organasco, raccolsi la prima volta tale roccia, che poi mi si presentò più abbondante nei dintorni di Pietranera e di Casanova ed al monte di Roccabruna, nonchè ai Gerbidi di Bobbio, alla base del monte Barberino. I nuclei feldispatici sono a volta facilmente isolabili dalla roccia, che è piuttosto una fanghiglia serpentinosa che una vera ofiolite; a volta sono più minuti e tenacemente saldati alla pasta. Questa poi erodendosi alle meteore più dei nuclei, essi sporgono dalle superficie alterate della roccia. Ma si dà anche il caso che i nuclei feldispatici si distruggano

e rimanga una roccia spugnosa d'aspetto scoriaceo, la quale, siccome assai bene osservò il signor Gastaldi a proposito di analoga roccia osservata dal signor Issel in Liguria. non può essere punto interpretata siccome prova di una eruzione subaerea od a piccola profondità marina delle serpentine. A sud del Ponte Organasco, questa roccia ha uno sviluppo considerevole e passa alle serpentine brecciate del Corno d' Aquila, sempre intramezzata da arenarie e da scisti nodulosi, argillo-micacei. Nella serie alpina delle roccie triasiche e di quell'altra zona, che si adagia immediatamente sui porfidi quarzosi del Permiano inferiore, osservai di frequente in tutte le Alpi carniche e cadorine una roccia quasi identica e deve esser frequente nella Liguria ove era già stata avvertita dal signor Pareto e dal signor Perazzi (Tav. III, fig. 7 e 15).

Serpentina affanitica. — Un' ultima varietà di serpentina, la quale molto ricorda eziandio le rocce alpine triasiche e perfettamente corrisponde alle affaniti del Bolognese, trovasi non molto comune nelle masse ofiolitiche del Bobbiese. Sono però abbastanza sviluppati i banchi di tal roccia presso Colleri e Corte Brugnatella ed al monte Castellaccio, a nord di Pietranera; in un sito e nell'altro attraversati da belle vene e sparsi di geodi quarzifere. Il quarzo vi è rubiginoso ed ametistino. Nella seconda località meglio che nella prima sono evidentissimi, tanto il passaggio di questa roccia al gabbro rosso quanto il suo riposo su calcari marnosi, giallognoli, della più normale apparenza.

Euritotalcite. — A Trussi di Ottone ed appena a sud di Isola di Rovegno, poco lungi dalla strada postale, rinvenni questa roccia assai distinta e perfettamente simile a quella determinata con tal nome dal signor comm. Bombicci, a Bombiana nell'Apennino bolognese. Rientra nelle varietà statitose della eufotide, descritte dal Savi a Sassoforte e monte Vaso e passa a quell' altra varietà, che del pari ha il diallagio rimpiazzato da una sostanza serpentinosa e che è in relazione col giacimento cuprifero di monte Castelli. A Rovegno, siccome poco si conosce la disposizione di quel filone o piuttosto ammasso irregolare di calcopirite e di limonite, pure si ignorano le relazioni della euritotalcite col gabbro rosso, nel quale è quell'ammasso innicchiato, e solo si può affermare che quella affiora a un livello inferiore al piano d'attacco del giacimento cuprifero.

A Trussi di Ottone non vi è cenno di minerali metalliferi; la roccia in discorso vi è completamente avviluppata da una serpentina steatitosa, a volta più scura e diallagica. Sopra e sotto, stanno gli scisti nodulosi, più volte ricordati; assai contorti ed infranti come ovunque.

Eufotide. — L'abbondanza di questa bella roccia nei conglomerati ofiolitici del miocene inferiore e medio in tutta la zona subapenninica tra la Trebbia e la Scrivia, ne farebbe a prima giunta sperare altrettanto abbondanti gli affioramenti in posto anche nell'Apennino bobbiese, siccome sono dessi frequentissimi e più degli ofiolitici sviluppati nella Liguria occidentale. Ma realmente io la osservai in posto soltanto nella valletta del R. dei Gavi presso i Gerbidi di Bobbio e nell'altra che da Casanova rimonta verso Fopiano, a sud di Ottone; altri grossi blocchi di eufotide provenivano poi dal poco discosto dirupo, che sta sopra Fontanigorda. In entrambe la prima località e probabilmente anche nella terza, si tratta di masse poco estese, circondate dalle serpentine e non posso affermare che abbiano alcuna apparenza di dicchi per

frattura. Siccome i massi di eufotide dell'accennato conglomerato hanno grosse dimensioni e perciò non devono aver rotolato per molta distanza; così devesi di necessità ammettere che nelle porzioni abrase della zona serpentinosa, le quali furono certamente considerevolissime, erano più abbondanti le amigdale di questa roccia.

Sembra che nel Bolognese l'eufotide tenga un livello piuttosto recente nella formazione serpentinosa; citandone il signor Bombicci degli affioramenti in rocce eoceniche e tra le argille scagliose a Casale di Castelluccio ed al noto Sasso di Gaggio; e per le località bobbiesi di Casanova e Fontanigorda si avrebbe analoga posizione della roccia, a brevissimo tratto dal gabbro rosso. Ma nel R. di Gavi essa verrebbe a collocarsi proprio nel cuore della formazione serpentinosa del monte Barberino, alla quale, secondo ogni apparenza, sta ancora al di sopra l'altra zona ofiolitica di monte Scabiazza e della Pietra Parcellera, nel Piacentino. Anche indipendentemente da questa posizione stratigrafica che va accertata, pel Bobbiese come per la Liguria si può affermare non esistere sicure prove d'una injezione di eufotide nelle masse serpentinose, nel senso in cui sembra constatata dai geologi toscani; mentrechè rimane molto probabile la formazione della prima per lenta concentrazione cristallogenica nel seno delle masse ofiolitiche. Nei dintorni del giacimento cuprifero di Rovegno, non mi accadde di osservare questa eufotide; ma le località di Casanova e Fontanigorda sono poco lontane ed intermediarie tra quel giacimento ed altri, che vennero esplorati nella valle di Aveto.

Iperite. — Conosco una sola località ove tra i conglomerati ofiolitici o le oficalci compaia un masso di *iperite*, ed è al prato delle Bisse, da Carana a Corte Brugnatella, appena a manca della strada da Bobbio ad Ottone. Questa roccia vi offre distinti cristalli di iperstene in pasta feldispatica assai scarsa e fa parte di una grossa lente ofiolitica, che affiora con ragguardevole potenza a Cà di Lago ed al Collegio, con nuclei serpentinosi a Poggio Rondino e nel monte Rosarola, e che quindi si continua cogli affioramenti della valle di Collistano. Parmi che questo giacimento appartenga alla posizione più recente della zona ofiolitica; poichè a pochi passi si scorgono le argille scagliose di R. Avagnone, alla base orientale del monte Lesima. Notai però l'intermezzo di arenarie micacee, con resti vegetali carbonizzati e silicizzati, consimili a quelle del monte Scabiazza e della valle del Tidone.

L'oficalce, che è ad immediato contatto della iperite, mostrasi nelle porzioni meno alterate e verdastre di una struttura finamente radiato-fibrosa e corrisponde ad identiche rocce, favoritemi dal signor capitano A. Verri, della base del monte Amiata. La presenza in quelle località di un gabbro rosso, brecciato, rende assai probabile il passaggio, già da altri ammesso, dall'iperite alla proteiforme roccia alluminoso-ocracea.

Conglomerato granitico a pasta cloritica. — Di questa roccia, la quale parmi una particolarità interessante della zona ofiolitica dell'Apennino settentrionale, trattai diffusamente in una Memoria inserita nei rendiconti del R. Istituto lombardo [1]. In questo scritto dimostrava come il granito erratico ed i cloritescisti, spesso

[1] *Del granito nella formazione serpentinosa dell'Apennino pavese.* Rendic. R. Istit. lombardo di scienze e lettere. Adunanza 31 gennaio 1878.

granatiferi, che si rinvengono nelle formazioni serpentinose della Liguria, del Bobbiese e del Piacentino e che non sono meno frequenti nella zona delle argille scagliose del Vogherese, del Reggiano e della provincia di Modena, provengano da banchi di un conglomerato a pasta cloritica ed a frammenti granitici, che sembrano sfumarsi in essa pasta, come disciolti. Il fatto, conosciuto sin da' tempi dello Spallanzani e richiamato all' attenzione dei geologi dal signor Studer, dal Pareto, dal Sismonda e dal Mantovani, fu anche riscontrato e descritto dal signor De-Stefani per la formazione serpentinosa della Garfagnana e può darsi che si ripeta in proporzioni varie su tutta la estensione della formazione ofiolitica dell'Apennino. Anzi si mostrò abbastanza frequente in tutta la formazione equivalente del *Flysch* alpino, nella Svizzera e nella Baviera. Quivi lo si volle ritenere effetto di una concentrazione cristallogenica cogli elementi delle arenarie eoceniche ed il signor De-Stefani propende a considerarlo come un accidente litologico delle serpentine, ma come queste di origine eruttiva, sottomarina. Io inclinerei invece a tener salda l' idea del signor Pareto della sua provenienza da masse granitiche sotterranee, nel cui seno si sono elaborati i magma ofiolitici; ed agli argomenti allora addotti per appoggiare questa mia opinione aggiungo che mi vennero sott'occhio dei campioni dell' identico granito dei dintorni del lago d' Orta, nella valle del Pelino, dove appartiene alla formazione delle *pietre verdi* protozoiche, epperò non deve essere roccia infrequente, come credesi, nel sottosuolo cristallino, che si può immaginare con una certa verosimiglianza sotto la non troppo potente zona dei terreni mesozoici nelle Alpi mediterranee. Lo stesso conglomerato granitico, ma cogli elementi feldispatici più decomposti, ricompare nell'area esaminata anche nelle argille scagliose delle vallette del Coppa e del Ghiaja, a sud di Voghera; quivi associato a banchi di una brecciola ofiolitico-selciosa non molto diversa da quella, che si osserva nel corpo delle masse serpentinose ai Gerbidi di Bobbio ed a s. Margherita. A sud di Gariseto, verso Selva ed Ottone questo conglomerato passa ad un'*eurite* granitoide, che, stando alle descrizioni del signor Nogues, si presenta abbastanza comune nella porzione occidentale dei Pirenei.

Questo conglomerato granitico, sia in banchi sia in massi erratici e sempre a pasta cloritica con detrito più minuto del granito medesimo, si riscontra in tutti gli affioramenti ofiolitici del Bobbiese ed a Zebedassi di Volpedo. Forma considerevoli ammassi, compresi nelle serpentine, *ma separati da queste per interstrati arenacei di apparenza normale,* al Groppo di Pregola, al monte Pamperdù di Bobbio, al paese di Gariseto, dove sopporta il castello e forma un ciglio bizzarramente scheggiato a mattina del villaggio, protendendosi quindi a mezzodì sino a Selva; e finalmente a Pietranera, a nord-est di Rovegno (Tav. III, fig. 4, 5, 9 e 12).

Riporterò le importanti osservazioni chimiche e microscopiche stabilite su questa roccia interessante dal chiarissimo sig. comm. A. Cossa. Il campione proveniva dalla località più abbondante della mia stessa, al monte Pamperdù.

« La roccia è essenzialmente composta di: *a*) feldispato ortosio, di color roseo, in grossi cristalli, di cui alcuni sono geminati secondo la legge di Carlsbad; *b*) di un feldispato triclino, di color bianco, molto alterato; *c*) di granuli di quarzo, di color bianco-cinereo; *d*) di lamine di clorite di color verde; *e*) di clorite terrosa; *f*) di poca calcite, aderente specialmente alla clorite terrosa ed al feldispato plagio-clasio.

« Coi saggi chimici ho trovato nella roccia dell'acido fosforico, il quale, come risulta dalla osservazione microscopica, si trova nella roccia combinato alla calce sotto forma di *apatite*.

« Il feldispato monoclino diede all'analisi sicuro indizio della presenza della *litina*. Il feldispato bianco si decompone piuttosto facilmente sotto l'azione dell'acido cloridrico concentrato e lascia svolgere bollicine di anidride carbonica.

« Ciò che rende veramente interessante questa roccia è la struttura del feldispato ortosio, che ne forma il componente principale. Questo feldispato presenta tutti i caratteri cristallografici del feldispato monoclino; è pochissimo alterato. Esaminando con un microscopio polarizzante una sottile laminetta di sfaldatura corrispondente alla faccia (001) si osserva, anche con un piccolo ingrandimento, che essa presenta due sistemi di finissime striature, parallele alle facce del clino e dall'orto-pinacoide e che perciò si intersecano ad angolo retto.

« Ho ripetuto sopra dieci cristalli questa osservazione ed ebbi sempre lo stesso risultato. Il modo con cui queste striature si comportano alla luce polarizzata, la loro posizione rispettiva e per di più i risultati dell'analisi chimica, che svelò nel feldispato la presenza di quantità relativamente grande di soda, conducono ad ammettere che queste striature dipendono dalla interposizione regolare di lamine di *albite*, come venne già osservato in feldispati di altre località. L'esame adunque di questa roccia conferma sempre più la nota teoria di Tchermak sulla costituzione dei feldispati.

« Ossèrvando tre sezioni molto sottili di questa roccia, ho notato che il feldispato roseo, contiene molte interposizioni, tra le quali si distinguono dei piccoli cristallini di *apatite*, lamine esilissime di *ferro-micaceo* e cristalli di plagio-clasio quasi completamente alterati. Il feldispato triclino, bianco, è così alterato che in molti casi è quasi completamente opaco.

« Il quarzo è molto più ricco di interposizioni di quello del granito di Baveno. Contiene moltissime cavità con liquidi e libelle mobili, e molti microliti. La clorite presenta nulla di interessante. La mica è molto rara in questa roccia ».

Il *cloritescisto granatifero* venne raccolto in massi erratici nei ruderi dei castelli di P. Gavina e di Zavatterello. Pare che servisse come pietra da macina. Una roccia perfettamente analoga trovasi del pari erratica nel Bolognese e nel Reggiano. Il signor Bombicci dice che essa corrisponde a quella di valle d'Aosta (opera citata pag. 124) e la ricorda tra i ciottoli erratici trovati nei conglomerati del monte Cavaloro presso Riola, presso la Porretta e sui colli prossimi a Bologna; ma ne assegna speciale giacimento tra Varignana e Castel s. Pietro, nel torrente Gajana. I cloritescisti granatiferi di val Gavargna e val Colla nel Canton Ticino sono identici a questi dell'Apennino. Io però ritengo che sieno in posto come il conglomerato granitico-cloritico, perchè la pasta è quanto si può dire identica nelle due rocce.

Non terminerò questo breve sunto delle fatte osservazioni sul conglomerato granitico senza affermare che a Pietranera ed a s. Margherita, prima dal signor prof. Balsamo Crivelli e quindi da me, furono osservati e raccolti dei campioni contenenti ciottoli calcari, angolosi, per nulla alterati.

Anche i conglomerati ofiolitici, o dirò meglio le ofioliti agglomerate, contengono frequentemente di tali frammenti e si osserva soltanto un leggero colorimento

cloritico alla loro periferia. È la stessa tinta, che si nota sulle superficie e sulle commessure degli strati calcareo-marnosi alternati colle serpentine diallagiche a s. Margherita ed a Pregola e che si ripete in più vasta scala alla superficie o in tutta la massa degli strati, originariamente alternati colle *argille scagliose* e con esse contorti, infranti e confusi; sì da essere da molti ritenuti come interclusi. La quale analogia tra questi due modi di leggerissima alterazione del calcare, in un caso veramente intercluso e nell'altro caso alternato colle formazioni ofiolitiche, è non dubbio argomento a ritenere che se queste si giudicano eruttive, la loro temperatura non si può di certo paragonare a quella delle lave degli attuali vulcani subaerei, nelle quali gli interclusi hanno subita una così profonda alterazione, come lo attesta la ricca serie dei minerali regalati alla scienza dai calcari erratici del monte Somma.

Dirò infine che essendomi occupato più della osservazione stratigrafica e litologica delle formazioni in discorso che della minuta esamina delle moltissime varietà di rocce ofiolitiche, affioranti nell'area esplorata, scarsissimo è il numero dei minerali riscontrati in venule od in geodi nelle rocce stesse. Epperò attendo dalle future ricerche mie o di altri più pazienti osservatori la scoperta anche nelle serpentine del Bobbiese e della Liguria di quella bella serie di zeoliti magnesifere, che il signor Bombicci enumera per i giacimenti del Bolognese.

Per supplire però alla meglio a questa deficenza di osservazioni, dirò schiettamente, anche di cognizioni in questo delicato argomento della mineralogia della formazione in discorso, mi son rivolto al sullodato mio egregio amico, prof. Cossa, inviandogli alcuni altri campioni perchè ne facesse l'analisi chimica e microscopica e presto saranno pubblicate le osservazioni, che egli vi ha istituite.

Parte III.

Rivista dei principali affioramenti serpentinosi dell'Italia settentrionale e centrale.

Esposte le condizioni stratigrafiche e litologiche delle serpentine pavesi, non tornerà inutile una breve rassegna dei principali affioramenti ofiolitici dell'Apennino; e ciò onde avviarci con più abbondante materiale alla ricerca, tra le molte opinioni dagli autori esposte, della origine assai probabilmente a tutti essi affioramenti comune.

Incominciando dai più meridionali, troviamo presso alla base del dosso trachitico di monte Amiata e presso Allerona, nella valle del Paglia, a nord-ovest di Orvieto, i primi affioramenti di rocce ofiolitiche; furono già menzionati e segnati dal Giuli, dal Savi e dal Rath e più recentemente delimitati con molta precisione dal signor capitano A. Verri (¹). Sono assai ristretti; presentano serpentine arenacee, passanti ad iperiti di finissima cristallizzazione, talora con cristallini di *piropo*. Affiorano sul fondo di burroni, che incidono le soprastanti arenarie del macigno; ma sono direttamente

(¹) A. Verri, *Alcune linee sulla valle di Chiana e luoghi adiacenti*. Pavia, 1877 con carta geologica.

subordinate agli alberesi, dei quali gli strati ad immediato contatto delle rocce ofiolitiche sono tinti in verde e si direbbero passare pur essi alle serpentine arenacee. Non credo vi sieno argomenti sicuri per ascrivere il complesso di rocce calcareo-arenacee, superiori a quelle ofioliti, a periodi più antichi dell'eocene medio.

Anche nel Senese si osservano delle masse isolate, sempre subordinate all'Alberese, le quali allineansi in due gruppi, diretti da nord a sud. Il più orientale è lungo il fiume Merse, sotto Frontignano, l'altro segue una linea dal monte Riggioni a Chiusdino, entrambi in rocce eoceniche. A questi affioramenti fanno poi continuazione quelli molto più numerosi tra i torrenti Era ed Elsa, nelle vicinanze di Montajone, di Jano e della Nera di s. Ottajano. Il signor D'Acchiardi li associa agli altri della Toscana occidentale, tra rocce eoceniche; il signor dott. De-Stefani, che li voleva più antichi, ora li ritiene dell'eocene recente, come tutte le serpentine dell'Apennino centrale. Fatto sta che dalle altre ofioliti non presentano altra differenza tranne la più abbondante silicizzazione dei loro materiali; essendo quivi frequenti le ofisilici, le incrostazioni silicee e delle vere resiniti.

È poi nella Maremma e nel Volterrano che le ofioliti, pur conservando il carattere di smembramento ma aumentando di molto la loro potenza, formano quella così estesa zona serpentinosa, che fu il campo degl'importanti studî del Savi, del Meneghini e del D'Acchiardi. Rasente al Tirreno, anzi toccando il mare al capo Argentaro, essa decorre dal colle Salvetti a Montiano ed alle celebri località di monte Vaso, Castellina marittima, Riparbella, monte Catini, attraversa il torrente Cecima col massimo affioramento di Berignone e monte Castelli, e si ripresenta con molti dossi al Querceto, a Mairano ed a Libbiano. Indi continua a monte Ruffoli, monte Cerboli, Lustignano, monte Masi, Rocca Tederigi, Rocca-Strada, Petriola, così accostandosi alla massa del monte Amiata, dalla quale pigliammo le mosse. In complesso si hanno due zone serpentinose, quasi parallele, allineate a nord-nord-ovest, alquanto oblique all'asse orografico apenninico.

Più ad occidente, cioè nella sommersa catena insulare, le serpentine affiorano in Corsica, dal capo Corso a Nazza. Costituiscono la massima parte della diramazione occidentale dell'isola d'Elba, col monte Campana, attraversato e direi quasi abbracciato dal granito; e nell'isola stessa formano due altre serie di sporgenze dalle rocce eoceniche, col solito rivestimento di scisti galestrini e di gabbro rosso. Il signor De-Stefani, appoggiandosi alle osservazioni dei signori Brögger e Reusch, propenderebbe a ritener cretaceo, anzichè terziario, il granito e per conseguenza per lo meno mesozoiche anche le serpentine dell'Elba; ma da quanto si può dedurre dalle descrizioni molto particolareggiate del sig. Cocchi, io non saprei vedere alcuna diversità tra questa serie di calcari e di arenarie, comprendente le serpentine dell'Elba e le rocce per comune consenso ritenute dell'eocene superiore. Le serpentine, d'altronde, affiorano alle isole di Gorgona, di Giglio e di Montecristo, attraversando all'isola Giglio i calcari infraliasici; epperò mi sembra che si possa almeno con una lontana probabilità ritenere, fino a più sicura dimostrazione, che questa zona serpentinosa insulare non appartenga ad un'epoca diversa da quella della Toscana, della Liguria e dell'Apennino settentrionale.

Tornando alla Toscana, più a mattina della zona serpentinosa di monte Amiata

e del Senese, troviamo la serie che il Savi distinse col nome di apennina, la quale comprende gli affioramenti molto estesi dell' alta valle tiberina, dal monte Auto all'Alpe della Luna, delineati dal Giuli e ricordati da tutti i geologi toscani. Quindi si continua coll'altro affioramento dell'Impruneta, a sud di Firenze, colle serpentine di Monferrato presso Prato e colle altre assai sviluppate e secondo il Giuli associate ai graniti, presso Firenzuola sul crinale dell'Apennino. Questi affioramenti più orientali delle serpentine, siccome molto estesi e continui, fanno andar molto cauti nell'assegnar un centro di espandimento di tali rocce, il quale a tutta prima si inclinerebbe a porre in corrispondenza del loro massimo sviluppo, nella Liguria. Piuttosto pare che a questa regione ed alla Toscana occidentale ed alle isole dell'arcipelago toscano si restringa il fenomeno della mineralizzazione di talune tra le più recenti rocce ofiolitiche, specialmente per minerali cupriferi; il quale fenomeno fu dal Savi e dal Meneghini dimostrato come indubbiamente posteriore al consolidamento, anzi allo spostamento delle masse ofiolitiche stesse per un periodo sismico, che ad un dipresso coincide collo stabilimento del vulcanismo trachitico dell'Italia centrale ed alle più grandiose eruzioni, pure di trachite, nel vulcano euganeo [1].

Come già osservarono il Savi ed il Meneghini, la comparsa delle serpentine non ha colla conformazione orografica della Toscana alcun altro nesso, tranne che per quelle secondarie accidentalità dovute alla compattezza generalmente maggiore delle rocce ofiolitiche, in confronto colla formazione del macigno e dell'alberese. Secondo che è portato dalle condizioni stratigrafiche di questa uniforme quanto complicata formazione, esse affiorano lungo le anticlinali erose, secondo direzioni più meridiane dell'asse apenninico. Laonde questa catena compare per essi affioramenti ancora più evidentemente costituita di molte rughe parallele, ondulate ed interrotte dai seni riempiuti da più recenti formazioni, pur esse in vario senso e con varia misura spostate nei diversi periodi posterziarî.

Questa direzione pressochè meridiana, la quale ci comparve così bene mantenuta negli affioramenti liguri e bobbiesi e nelle diramazioni ofiolitiche dell'alto Piacentino, è parimenti conservata dagli affioramenti serpentinosi delle valli del Magra e del Vara, delineate dal Giuli e dal Pareto, e dalle serpentine della Garfagnana, abilmente descritte dal signor De-Stefani. Queste ultime salgono con brevi interruzioni sin presso al crinale apenninico del Camporaghena, dell'Alpe di Mommio, senza però raggiungerlo; essendo quivi affioranti delle rocce mesozoiche, che si protendono nelle montagne di Parma e di Reggio. E come altra riprova della colleganza delle serpentine in queste regioni colle rocce eoceniche, ove non fosse sufficiente il consenso dei sullodati geologi, potremo anche rilevare il fatto che la prossima catena mesozoica e paleozoica delle Alpi apuane non è punto interessata nel fenomeno delle rocce ofiolitiche, quantunque essa cada precisamente nella continuazione dell'accennato asse di affioramento di quelle rocce.

Delle rocce serpentinose della Liguria orientale, già ho ricordato quanto osservò il signor Pareto. Per quelle della Liguria occidentale abbiamo inoltre le osservazioni

[1] D. Fd. Rayer, *Die Euganeen. Bau und Geschichte eines Vulcanes*. Wien, 1877. A. Hölder.

del signor Mayer [1]. Le serpentine affiorano quivi in una vastissima area, la quale è delimitata a mezzogiorno dal mare da Sestri Ponente a Savona, a tramontana dai colli miocenici tra la Bormida e la Scrivia, a ponente da una linea assai tortuosa da Ovada e dall'alta valle del torrente Orba a Sassello ed a Varazze, ed a levante dalla valle di Polcevera e quindi dalla strada della Rocchetta a Voltaggio ed a Gavi. I monti Reisa (1179), del Dente, Penello e del Poggio (1079) si ergono su questa massa di serpentine, cosparsa di limitati e numerosi lembi di rocce arenacee del piano liguriano, ed il signor Mayer non esitò nel collocare alla base di questo periodo la zona di massimo sviluppo delle serpentine, le quali però egli ritiene che compaiano in amigdale ed associate a galestri ed a gabbri, rocce per lui metamorfiche, anche a livelli più recenti. Tale fatto io non ho mai osservato nella zona serpentinosa da me esaminata; epperò mi rimetto alla autorità del chiarissimo geologo, attendendo di conoscere di questo fatto i particolari, che certamente dovranno aver riscontro in qualche altro punto della catena apenninica.

Nelle Alpi calcari a ponente di Varagine, come asserisce il Pareto, le serpentine fanno assolutamente difetto; di guisa da rimaner fermamente provato che il mantello mesozoico, che separa l'eocene della Liguria dalle rocce paleozoiche della valle del Varo, toglie ogni continuità tra le serpentine eoceniche dell' Apennino, e quelle paleozoiche delle Alpi occidentali, così sviluppate nel gruppo del monte Viso e più a nord tra la Dora Baltea e la Riparia. Il Pareto stesso però, il quale già propendeva ad associare tutte le rocce ofiolitiche in un unico sistema, osserva che a stabilire tale continuità potrebbero realmente servire due masse di rocce ofiolitiche. le quali sporgono l'una a s. Basiglio dal terreno miocenico e l'altra, tra la Chiusa e Mondovì, da taluni scisti lucenti, cui è incerto se debba riferire all'eocene oppure ad epoche molto più antiche. Giovi notare però collo stesso signor Pareto che questi massi serpentinosi sono allineati non più secondo l'accennata direzione, sibbene da levante a ponente; e ricordare altresì come successivamente il signor Gastaldi, che fu noto sostenitore della associazione delle serpentine apenniniche alle analoghe rocce da lui comprese nella grande zona paleozoica delle *pietre verdi*, non credette di scorgere un sicuro indizio di continuità in questi affioramenti, che certamente non avrà ignorato; poichè evidentemente essi ponno appartenere od all'uno od all' altro dei sistemi ofiolitici, che è giocoforza riconoscere in questa regione. Manteniamo anche il confronto, tanto ripetuto e che non può essere del tutto falso, della catena apenninica colla pirenaica; accettiamo anche il sincronismo di talune serpentine dei Pirenei e degli Apennini, e noi saremo tutto al più condotti ad ammettere anche nella nostra penisola una pluralità di orizzonti ofiolitici. Ora rimane fuor di questione che queste di cui noi ci occupiamo sono eoceniche, al pari di quelle poche, che nei Pirenei si intercalano con rocce superiori all'orizzonte di Biarritz, esatto rappresentante del nostro piano nizzardo.

Nel presente scritto mi limito alle zone ofiolitiche sicuramente sincrone alla zona da me esplorata e piegando a levante, ripiglio la incominciata rivista lungo

[1] C. Mayer, *Studi geologici sulla Liguria orientale*. Boll. R. Comit. geologico italiano 1877; 11. 12 p. 407.

l'interessantissimo e per fortuna poco accidentato versante settentrionale dell' Apennino. Egli è quivi, a mio avviso, che le questioni risguardanti i rapporti delle varie rocce ofiolitiche tra loro e colle rocce che le comprendono, e per conseguenza il quesito della loro genesi e delle modificazioni da esse subìte, devono ricevere la loro soluzione. Ma non è men vero che è appunto quivi che le osservazioni fanno ancora difetto o per lo meno sono affatto localizzate. Un primo tentativo di riunirle venne già fatto dallo Stoppani nella sua bella monografia sui petrolî in Italia e dalla carta, che accompagna quel lavoro si può già scorgere la disposizione dei principali affioramenti. Più recentemente i signori Doderlein, Capellini, Bombicci e Mantovani aggiunsero nuovi dati e più precisi; mostrando sempre più stretta la relazione affermata dallo Stoppani tra le serpentine e quelle rocce, nel cui seno si svolge il fenomeno della formazione e della emanazione degli idrocarburi. Ognuno può rilevare colla scorta degli accennati lavori come le masse ofiolitiche vi compaiano sparse e relativamente poco estese. Nelle provincie di Parma e Reggio alcune rasentano il crinale apenninico, siccome quelle numerosissime e ravvicinate presso Minozzo, intorno al monte Fiorino. Altre, parimenti numerose ma più sparse, sporgono nell' alta valle del torrente Secchia, tra Lago e Boccassiolo, presso ai rinomati fuochi di Barigazzo, e di queste la più considerevole attraversa la valle del torrente Dragone. Altre masse infine, riunite a gruppi secondarî di sette a otto poggetti, si presentano nell'alta valle del Panaro, alle falde settentrionali dei monti Calvanelle e Francescone. In questa zona montana, le serpentine sono costantemente subordinate alle due zone del macigno e dell'alberese, dal signor Doderlein riferite all'eocene, e sono con pari costanza associate alle argille scagliose, che lo stesso autore riferisce alla creta, siccome i gessi da esse comprese. Io però sono d'avviso che questa definizione dipenda dall'aver riferito all'eocene la zona di Bismantova, nella quale realmente si osservano alcune nummuliti. Notai però in una escursione fatta lo scorso estate in quella regione che questa zona di Bismantova, la quale si interpone tra le due serie di affioramenti dei gessi e delle argille scagliose e per conseguenza tra l'accennata zona montana delle ofioliti ed un'altra di cui vedremo tosto, non può in nessun modo separarsi dalla formazione miocenica e forma la base della serie aquitaniana, a conglomerati madreporici. Epperò trovai molto piu semplici e nello stesso tempo più naturali i rapporti stratigrafici quivi rilevati dal sig. Pareto nell'accennata Memoria ed espressi dal profilo 5°; almeno per quanto esso risguarda la serie superiore alle marne ed arenarie a fucoidi. Delle condizioni delle ofioliti in quelle provincie però questo autore non fa cenno e soltanto si può dall'accennato profilo indurre che non solo esse, ma eziandio le *rauchkalk* gessifere, sono considerate come emersorie ed efficienti l'incurvamento ed il sollevamento della serie terziaria e perfino delle rocce mesozoiche del monte Raghena. E poichè poco posso giovarmi delle indicazioni del signor Doderlein, mancando la spiegazione della carta da lui accuratamente delineata e poco lume posso ricavare dai profili del sig. Pareto, sono costretto ad accordare qualche valore alle impressioni da me avute. Per queste, parmi che nè le argille scagliose, nè i gessi, nè le serpentine di questa zona dell'alto Apennino reggiano e parmense non differiscano punto dalle rocce stesse, che più a tramontana affiorano, siccome avviene nell' area del Vogherese, dagli erosi lembi del terreno miocenico. Sarà questione di distinguere quivi pure una zona gessifera

veramente associata alle argille scagliose e quell'altra dei gessi stratificati alla base del pliocene antico, il quale terreno è così ben rappresentato dalle colline dei Quattro Castelli; distinzione intraveduta dal Bianconi or son quasi quarant'anni ma non ancora definita. Sarà indubbiamente da fissare il numero e la posizione delle zone di argille scagliose e pseudo-scagliose anche in questo tratto del versante settentrionale dell'Apennino. Ma le serpentine di Rossena e quelle altre tra la Secchia ed il Panaro, a Varana, Sassomereo e Pompeano, così ristrette e numerose, così sempre associate alle argille scagliose dell'eocene superiore e sottostanti, come nel Piacentino, nel Bobbiese e nella Liguria, al calcare marnoso a fucoidi, non ponno in modo alcuno separarsi dalle serpentine dell'altra zona apennina. Esse non fanno che confermare colla loro presenza nel cuore della regione miocenica la accennata discordanza di questa serie dalla serie tongriana e l'avvenuta abrasione di questa, prima che ripigliasse la sedimentazione marina o di estuario o lacustre del piano aquitaniano. L'affioramento ofiolitico di Zebedassi di Volpedo, a nemmeno mezzo chilometro dai conglomerati marini del piano messiniano ed a poco maggiore distanza dalla distintissima zona miocenica dai conglomerati ofiolitici di Castel del Groppo (vedi lo schizzo a Tav. III, fig. 9) il quale affioramento, già esaminato dal signor Sismonda ed associato alle serpentine del Bobbiese, io non ho la menoma difficoltà a mantenere nello stesso, identico piano di queste serpentine, mi rappresenta e mi spiega con molta evidenza questa doppia zona degli affioramenti ofiolitici nelle due provincie di Reggio e di Modena; se non è, in ultima analisi, troppo artificiosa per se medesima la distinzione in due zone di quei numerosissimi e così sparsi lembi della formazione in discorso.

Nel Modenese e nella provincia di Bologna pare che le ofioliti presentino ancor maggiore smembramento, congiunto alla prevalenza delle rocce feldispatiche ed iperitiche, ed alla scarsità della serpentina omogenea e diallagica [1]. Ond'è che di esse pensarono i signori Capellini e Bombicci che si avessero anche a considerare come slegate e distinte, e formate per cementazione cristallogenica sotto l'influsso di correnti metamorfosanti. Tornerò a suo tempo su questa idea. Limitandomi al presente a seguire lo svolgimento della descritta zona serpentinosa, la vediamo proseguire da Paullo a Varice e Montespecchio, quindi al Gaggio ed alla Porretta e più oltre presso Vergato e nella valle del fiume Setta; sino a che si giunge ai più estesi e più anticamente conosciuti affioramenti serpentinosi di monte Oggioli, monte Beni e dell'Alpe di Covigliajo. Le già ricordate masse ofiolitiche di Firenzuola fanno continuazione appunto con questi ultimi affioramenti. Più a tramontana, stanno le serpentine del Bisano e dei dintorni di Sassumo, nella valle del Sillario. Ignoro i precisi rapporti di queste ofioliti colle annesse argille scagliose e coi gabbri rossi, che mai non mancano; ma per analogia a quanto si osserva più a ponente può ritenersi che si mantengano sempre nel dominio delle rocce eoceniche ed io accetto pienamente l'idea di coloro, che le conoscono molto meglio di me e che ritengono non abbiano profonde

[1] L. Bombicci, *Descrizione della mineralogia generale della provincia di Bologna.* Parte seconda, 1876.— Capellini, *Sulle rocce serpentinose ed in particolare su quelle dei dintorni di Bisagno.* Bologna, 1873.

radici nelle viscere della terra. Quivi le varie rocce ofiolitiche non sembrano presentare rispettivamente una posizione molto costante; tuttavia il signor Bombicci vi distingue, sulla traccia del Savi e del Meneghini, le serpentine di *prima* e di *seconda eruzione*, le prime con maggior abbondanza di diallagio porfiricamente disseminato: e rispetto alle ofioliti prevalentemente feldispatiche (*euritotalcite*, *eufotide*, *oligoclasite, iperite*) le descrive sempre in ammassi, nel cuore delle masse serpentinose. La quale condizione sarebbe sensibilmente diversa da quella, che si osserva nelle ofioliti bobbiesi, nelle quali lo sviluppo massimo delle rocce verdi feldispatiche o pirosseniche è immediatamente a contatto colle zone dei gabbri, delle argille scagliose e dei conglomerati granitico-cloritici. La profonda differenza tra i due estremi della zona serpentinosa dell'Apennino settentrionale, che si rileva anche solo dalla diversa potenza e continuità delle masse, mi impedisce, nello stato rudimentale delle mie cognizioni in argomento, di dare alcuna interpretazione a questa secondaria diversità di struttura delle masse ofiolitiche. Mi limito quindi ad esporre la mia speranza che un più attento studio stratigrafico dimostri nella zona serpentinosa dell'Emilia maggiore continuità e maggiore costanza cronologica.

Più ad oriente, non so che sieno state osservate formazioni ofiolitiche. Epperò il loro limite sarebbe quivi segnato da una linea meridiana da Imola all'alta valle tiberina, la quale comprende col meridiano di Savona la distanza approssimativa di 260 chilometri. Se realmente su tanto grande distanza, e su quella poco minore da Voghera al capo Argentaro, la zona serpentinosa, che abbiamo descritta, non presenta che diversità di sviluppo e di potenza o di disposizione di elementi litologici; se realmente, come io inclino a ritenere, sta il fatto della sua costante subordinazione alla formazione del piano liguriano e della sua superiorità all'orizzonte nummulitico; se è vera la associazione costante di queste serpentine e delle rocce feldispatiche annesse colle due forme litologiche così variamente interpretate, ma da tutti concordemente riconosciute nel più stretto legame colle zone ofiolitiche, quali il gabbro rosso e le argille scagliose, senza voler affermare precisamente che si tratta di un unico livello stratigrafico, parmi però molto ragionevole l'indurre che la zona serpentinosa apennina costituisce una formazione unica, intercalata di rocce cristalline, di aggregati endogeni, di rocce sedimentari d'una apparenza assai singolare, e di calcari e di arenarie affatto normali, ma però mancanti di fossili.

Per tal modo delimitata, la formazione ofiolitica apenninica non si può confondere nè colle ofioliti probabilmente mesozoiche della Terra di Lavoro, nè con quelle paleozoiche della Calabria e delle Alpi occidentali e lombarde. Quindi più semplice ne riescirà lo studio geologico. Siccome però tale studio è tutt'altro che nuovo, così non sia discaro al lettore, che io dopo la rapida rivista delle serpentine eoceniche dell'Apennino, mi permetta una succinta esposizione dei principali lavori, che le risguardano ed un esame delle varie teoriche, in proposito enunciate.

Parte IV.

Breve riassunto dei principali lavori risguardanti le ofioliti apennine.

Verso il principio del secolo il Viviani ([1]) richiamò l'attenzione dei naturalisti sui singolari passaggi, che le serpentine della valle del Varo e dei dintorni di monte Dragone offrivano con rocce granulari, pirosseniche e con altre argillose e silicee, intensamente colorate; e molti anni prima il Ferber ([2]) aveva dimostrato il legame tra le serpentine toscane e le rocce quivi dette alberesi ed affermava che all'Impruneta i calcari psamitici, allora ritenuti primitivi, riposavano sul serpentino. Sembra però che il Brocchi fosse il primo a prendere in considerazione lo sviluppo delle distintissime rocce ofiolitiche nella catena che formò il soggetto dei suoi classici studî, e nel capitolo primo (p. 139 e seg.) della sua *Conchiologia fossile* mostra di essere al fatto della estensione delle serpentine e della loro costante inferiorità rispetto al *macigno;* tanto che in esse riscontra la roccia primitiva, che forma il basamento a tutte le altre dell'alto Apennino. Quantunque fuorviato dall'idea della remota antichità della formazione calcareo-psamitica, non tralascia di notare che le serpentine debbono esser meno antiche in questo tratto della penisola che nella Calabria, presso Gerace ed Amantea, nelle Alpi occidentali e nella Valtellina, dove le sapeva associate a rocce granitiche e gneissiche. Anzi afferma esplicitamente che le serpentine della Liguria e della Toscana *appartengono ad epoche sempre meno antiche.* Egli descrive dettagliatamente e con molta precisione le varie rocce ofiolitiche, dando il nome di *granitoni* alle eufotidi di Impruneta; osserva che quivi il gabbro rosso ed il galestro sono inferiori al serpentino diallagico; in queste rocce è ben lontano dallo scorgere alcuna azione metamorfica, ma le riconosce come *parte di un deposito posteriore a quello della materia serpentinosa.* Plutonista dichiarato, non può mancare di riconoscere nei varî fatti, che posero recentemente in molto favore l'idea dell'origine idro-termale delle serpentine, un argomento non spregevole a conferma delle sue opinioni wernierane. Nel buio della scienza cristallogenica di quei tempi, non è meraviglia se l'autore attribuisca la presenza della bronzite nelle serpentine ad una cristallizzazione di questo silicato magnesiano e più ancora se non abbia potuto rilevare tutta la forza degli argomenti, che stavano in suo favore per escludere le serpentine dalle rocce vulcaniche. Dobbiamo però riconoscere un merito non piccolo a quelle sue prime descrizioni ed idee; le quali, come sempre, rivelano l'acume della sua osservazione e la giustezza delle sue distinzioni.

Sette anni dopo la prima edizione dell'opera del Brocchi, comparve una interessantissima Memoria del Brongniart ([3]), della quale però potei conoscere soltanto un

([1]) *Voyage dans les Apennins de la ci-devant Ligurie.* Gènes, 1807.

([2]) *Lettres sur la minéralogie et sur divers autres objets d'hystoire naturelle de l'Italie.* Strassburg, 1776.

([3]) A. Brongniart, *Sur le gisement ou sur la position relative des ophiolites, euphotides, diaspes etc. dans quelques parties des Apennins.* Paris, 1821. Heunard, con due tavole. L'estratto è nella *Biblioteca italiana* (vol. 24, 1821).

estratto. Vidi però che in essa Memoria si combatte con molta giustezza di vedute e con molta vigoria di argomenti l'idea della antichità della formazione calcareo-psamitica, alla quale si riconoscono subordinate, anzi constratificate le serpentine apenniniche; laonde se ne deduce dover queste riputarsi più recenti dei terreni secondarî. E questo fu certamente un grande passo, non solo nello studio della questione che ne occupa, ma eziandio nella geologia dell'intera penisola.

Ma la cronologia rispettiva delle rocce includenti le ofioliti e della varietà di queste veniva presa in serio esame dal Savi, gli scritti del quale in argomento sono certamente troppo noti ai miei colleghi perchè mi dilunghi nel porgerne un riassunto. Cogliendone soltanto i principali risultati, dirò che molto opportunamente l'autore all'analisi delle masse ofiolitiche e dei filoni, che le attraversano, fece precedere una nitida esposizione dei rapporti stratigrafici di queste ofioliti colle rocce sedimentari; dalla quale analisi compare che le serpentine eransi formate per eruzione e già solidificate, anzi che erano state infrante e rilegate coi filoni metalliferi, allorchè accadde lo spostamento della catena da lui designata appunto col nome di metallifera. Però una tal quale attività vulcanica perdurava molto a lungo, sino all'epoca della deposizione della *Panchina*, la quale fu riferita da posteriori studî a parecchi livelli miocenici e pliocenici ed era dal Savi ritenuta al più contemporanea ai terreni subapennini. Importantissimo poi fu lo stabilimento dell'orizzonte del terreno *terziario ofiolitico*, che l'autore pone chiaramente alla base delle rocce subapennine, anche delle più profonde, salifere e gessifere; affermando però che intorno alle masse serpentinose, allora già emerse, esso terreno continuò a formarsi durante la sedimentazione delle argille e delle ghiaie del terziario superiore. La serie attraversata e secondo l'autore metamorfosata delle serpentine, in conformità alle idee più accette e più comuni a quel tempo, viene mantenuta nel mesozoico. Il quale errore però non toglie che siano molto vere le altre relazioni cronologiche, intravedute tra le varie epoche di formazione delle diverse serpentine, delle rocce metallifere, dei graniti, delle trachiti e salagiti, e dei basalti di Radicofani.

Nel trattato delle rocce ofiolitiche, comparso l'anno dopo nello stesso Giornale de'letterati, quindi ristampato colla memoria suaccennata nel 1839 (1), la definizione litologica delle rocce ofiolitiche è così esatta ed opportuna che in gran parte tuttora essa si mantiene anche da coloro, che meno son disposti a riconoscere l'origine eruttiva delle ofioliti. Come pure i recenti studî non fecero che comprovare la insinuazione del granito tanto nelle serpentine come nelle dioriti o iperiti, che ad esse formano spesso il passaggio più graduato. E si mantiene l'opinione che le serpentine diallagiche sieno comparse per le prime; che quindi facessero emersione le eufotidi, seguite da altre serpentine amorfe, da ofiti e da dioriti; che in ultimo tutte queste rocce fossero attraversate dai filoni metalliferi, conseguentemente lisciati, infranti e circondati da losime frammentizie; i quali filoni non si arrestano alle serpentine ed annesse rocce cristalline, ma passano al gabbro rosso, che alle serpentine costantemente si associa e si sovrappone.

(1) P. Savi, *Memorie per servire allo studio della costituzione fisica della Toscana*. Pisa tipografia Nistri, 1839.

Di questa roccia a lungo discorre il Savi, in un primo suo lavoro (¹), definendola semplicemente come un' alterazione degli strati calcari, compresi nel macigno; ma nel trattato, comprende sotto questa denominazione le rocce frammentizie od omogenee, intensamente colorate, diasprizzate o semplicemente colorate, che egli stesso riconobbe, prima di altri geologi, come facienti graduato passaggio alle spiliti, alle varioliti, ed alle ofioliti; delle quali rocce tutte l'autore reputa l' origine indubbiamente eruttiva. In molte località e specialmente al Botro delle Donne, presso monte Vaso, egli descrive la più regolare successione dalla ofite, probabilmente una oliclasite, alla serpentina diallagica, da questa al gabbro rosso e quindi alle argille galestrine; le quali, finalmente, con fitta alternanza passano alle argille fucitiche, scistose e quindi all' alberese. Tale passaggio graduato sembra all' autore essere la più sicura prova dell'origine per metamorfismo del gabbro stesso e delle argille scagliose o diasprigne che lo ricoprono. Anzi questa idea del metamorfismo, esercitato dalle serpentine, è spinta fino ad ammettere che quella fitta alternanza, che si osserva così comune dai galestri e dagli straterelli calcareo-marnosi, dipenda dalla riduzione della potenza di questi per la non spiegata azione metamorfica, alla quale poi l'autore stesso deve negare in alcuni casi la benchè menoma azione metamorfosante su molte rocce calcari. Epperò con questa apparenza di spiegazione l' autore veniva a trascurare una importantissima objezione, che tuttora si eleva contro la assai fortunata teorica da lui enunciata. Del pari è inesplicabile che abbia potuto considerare come rocce metamorfiche i conglomerati ad elementi calcari e ad impasto serpentinoso o diasprigno; nel mentre che questi calcari non presentano, come egli stesso riconosce, alcuna profonda alterazione. Per la qual cosa è costretto ad ammettere che tali formazioni metamorfiche avvennero quando la temperie delle serpentine non era capace di produrre i più evidenti fenomeni della formazione delle oficalci. Ed anche questa spiegazione mostra come fosse sopra un falso terreno, sul quale fu seguìto da tutti coloro i quali con lui hanno ritenuto le serpentine come rocce endogene, intruse per injezione attraverso la serie calcareo-psamitica. Essi resero inspiegabili i fenomeni tutti risguardanti la genesi delle serpentine, imaginandone le eruzioni avvenute successivamente all' aria libera e con efficacia meccanica più o meno pronunciata sulle rocce sedimentari.

Credo che nell'accennato graduale passaggio dalle ofioliti alle rocce, che si vollero da esse metamorfosate, stia appunto la ragione del fatto, poco vantaggioso al progresso della questione, che queste idee del Savi trovarono tanto favore presso gli scienziati italiani e stranieri. Sicchè il Burat (²) non fa che riprodurle ed esagerarle; confondendo poi in una unità di origine tutte le rocce verdi magnesifere ed augitiche od amfiboliche ed esagerando oltremisura la efficacia sollevante di tutte queste rocce; ed il Fournet (³) giunse a dire che le serpentine della Toscana hanno dislocato

(¹) P. Savi, *Dei sollevamenti ed abbassamenti, che han dato alla Toscana la sua attuale configurazione.* Vedi Giornale dei letterati. Pisa, 1837.

(²) A. Burat, *Sur les relations des roches trapéens avec les minérais de cuivre et sur l'assimilation des Schahlstein de Dillembourg, des Blatterstein der Hartz et des Gabbro de la Toscane.* Ann. des mines, série 4ᵉ tom. XIII, 1848.

(³) J. Fournet, *Sur les serpentines de la Toscane.* Bul. Soc. géol. de France, série 2ᵉ vol. VI, 1849. — *Sur l'origine des filons métallifères.* Ibidem pag. 513.

ed alterato anche le rocce giuresi ed hanno prodotta la porfiricità di alcune rocce metamorfiche, cangiate in ofiti. Ed entrambi, specialmente il secondo, mantennero del pari l'origine eruttiva dei filoni metalliferi più o meno strettamente collegati alle serpentine; la quale idea venne, assai prima che le altre del Savi, meglio delimitata dagli studî posteriori. Ed è assai singolare che mentre tali sue idee facevansi strada con tanta fortuna, rimanevano poi nell'oblio per tanti anni molte delle sue intuizioni, le quali meglio onorano la lucidità della sua mente; come quando, a cagion d'esempio, esprime la sua opinione che le rocce ofiolitiche « siano da risguardarsi come una alterazione od una scoria di alcune rocce nettuniane, fuse, alterate ed impregnate di materie estranee dall'azione del calorico, dell'elettricismo e di principî che si pongono in attività dalle vere rocce plutoniane, cioè i metalli, e tra questi specialmente il ferro »; oppure dove afferma che la fusione dei graniti « non fu soltanto prodotta per via *secca* o dalla sola influenza del foco, ma ancora vi si unì la via *umida*, cioè l'azione dell'acqua portata ad un immenso calore, in grazie della pressione » (pag. 68 e 74). Nè faremo noi rimprovero al tanto benemerito maestro della italiana geologia se quarant'anni or sono, dal connubio di queste due intuizioni non abbia tratto una più verosimile spiegazione degli interessantissimi fenomeni, che egli descrisse con tanta esattezza; poichè anche solo dalla prima osservazione traspare manifesto aver quella acutissima mente intraveduto ad ogni modo nella natura delle rocce ofiolitiche una prova di quella rigenerazione delle rocce, che, a varie profondità nella crosta terrestre e con diversi elementi, preparò tutte le serie litologiche delle rocce emersorie, le quali sono strette da più o meno prossima parentela e si riducono a tipi mineralogici assai poco numerosi. Non meno ammirabile è la lucidità del concetto delle faglie e delle dislocazioni, che hanno sicuramente disturbato le masse ofiolitiche; quantunque sia indubitabile che questo concetto sarebbe stato più preciso e più vantaggioso nello studio in discorso se in quel tempo si fosse pensato alla possibilità di una spiegazione della esistenza delle ofioliti, pur considerandole isolate sotto forma di vaste amigdale, alternate e concordanti colle rocce sedimentari che le comprendono. Osserveremo ancora a maggior lode del signor Savi e dell'illustre compagno e continuatore dei suoi studî, il signor comm. Meneghini [1], che essi pur ritenendo l'origine eruttiva delle ofioliti, furono ben lontani dall'attribuire a queste eruzioni alcuna influenza nel determinare le curve stratigrafiche e per conseguenza il tracciato orografico della Toscana; avendo riconosciuto che gli affioramenti ofiolitici non si allineano nè coll'asse principale delle elissoidi mesozoiche e paleozoiche, nè coll'asse della catena apennina.

Il sig. A. Sismonda, invece, pochi anni dopo il Savi, occupandosi della questione delle serpentine in due lavori assai pregevoli sulla geologia del Piemonte e della Liguria [2], da quell'ardente sostenitore che fu sempre delle idee beaumontiane,

[1] G. Meneghini, *Della presenza del ferro oligisto nei giacimenti ofiolitici della Toscana*. Nuovo Cimento, vol. II, 1860. — *Sul macigno ofiolitico*. Ibidem, vol. XII. — *Rapporto sulle cave dei marmi varicolori* etc. Ibidem, p. 45.

[2] A. Sismonda, *Osservazioni geologiche sulle Alpi marittime e sugli Apennini liguri*. Mem. Acc. R. di Torino. Classe mat. serie 2ª vol. IV, 1841. — *Osservazioni geologiche sui terreni delle formazioni terziarie e cretacee del Piemonte*. Ibidem, vol. V, 1842.

poichè fu convinto essere le serpentine ed i conglomerati che le accompagnano delle rocce eruttive, non dubitò di riferire il sollevamento da esse prodotto al sistema *sardo-corso*, che comprendeva i due assi di sollevamento apennino-pirenaico ed alpino-occidentale. Verrà tempo che la geologia ricomporrà i frammenti di quell'artificioso edificio con altra architettura, meglio in armonia collo stato attuale della scienza; ma al presente non troviamo in queste idee di parallelismo o di reticolazione di successivi sollevamenti molto vantaggio nella intelligenza dei fatti stratigrafici, esaminati nel maggior dettaglio. Nel caso speciale, dobbiamo convenire che se vi è una roccia, il cui affioramento meno si presti alla verosimiglianza di quelle idee, per la tortuosità dei suoi affioramenti sempre spiegabili col ritenerli di testata di formazione, questa è certamente la serpentina, considerata con tutte le rocce alle quali si collega. Nessuna di queste, infatti, forma veri dicchi o filoni di ragguardevole profondità e simili a cagione d'esempio a quelli, che le doleriti eoceniche del Vicentino presentano negli scisti paleozoici e nei calcari giuresi e cretacei. Quelle stesse a più distinta cristallizzazione, quali le euritotalciti, le eufotidi e le iperiti, sono sempre sotto forma di amigdale più o meno contorte ed infrante. Abbiamo poi veduto nelle prime pagine come il signor Sismonda abbia dovuto svisare le condizioni stratigrafiche del giacimento di Zebedassi di Volpedo (¹) e di monte Barberino, per dimostrare le serpentine venute dal disotto per infrangere e sollevare i calcari marnosi a fucoidi, da lui come dai geologi di quel tempo ritenuti cretacei. Siccome però le prevenzioni, per quanto forti e risguardanti i principî più vitali del nostro studio, non impediscono agli osservatori come fu il signor Sismonda di far tesoro di importantissimi fatti; così troviamo nella sua Memoria rilevata la costanza dei conglomerati a pasta serpentinosa e ad elementi i più svariati, nel perimetro delle masse ofiolitiche e sopra e sotto i banchi ofiolitici, e la presenza in questi conglomerati dei calcari stessi e delle arenarie, che formano gli strati sedimentarî poco discosti. Però a questi conglomerati assegna un'origine puramente esogena, per movimenti straordinarî del mare; come pure spiega per questi la presenza dei massi di granito, che egli non ignorava esistere in quei conglomerati, nelle regioni dell'Apennino settentrionale. Devesi poi notare come il Sismonda avesse in quel tempo rivolta la sua attenzione allo studio della serie sedimentare e solo incidentalmente si occupasse di rocce cristalline; ond'è che non potè formarsene una idea precisa nè molto avvantaggiarne la cognizione pel progresso della scienza, che pur lo ricorda con venerazione per altri importantissimi risultati dei suoi studî.

Più felice nelle sue vedute sull'origine e sull'epoca delle serpentine fu certamente il Pilla. Poichè se noi ci riportiamo al suo tempo e distribuiamo nella serie terziaria attualmente ammessa i membri del suo *terreno etrurio*, dobbiamo ammirare la giustezza dei suoi apprezzamenti, espressi meglio che altrove in questo brano di una sua importante Memoria (²). Egli scrive: « Assai preciso è il periodo, in cui seguirono in Italia le eruzioni delle ofioliti e degli altri gabbri toscani e della Liguria. Queste rocce traversano frequentemente la formazione del macigno, gli strati del quale sono gradatamente dislocati e modificati. Ne' conglomerati di questa formazione non

(¹) A. Sismonda, Mem. citata pag. 479 f. 7-9.

(²) L. Pilla, *Saggio comparativo dei terreni che compongono il suolo d'Italia.* Pisa, 1845.

avviene mai di trovare ciottoli di gabbri; all'incontro molti se ne trovano col conglomerato del terziario medio (1). Dai quali fatti si deduce chiaramente che le ofioliti e gli altri gabbri toscani e liguri hanno fatto le loro eruzioni posteriormente al terreno etrurio e innanzi al deposito del terreno terziario ».

Non devesi negare altresì un merito ragguardevole nella questione che ci occupa al Giuli, autore di una carta non molto ricordata, da lui detta di *Mineralogia utile* della Toscana. In questa carta vengono accuratamente indicati gli affioramenti serpentinosi toscani e si può scorgere la loro costante subordinazione agli alberesi, alle pietre coltelline ed agli argillosciti, inferiori al macigno. I giacimenti dell'alta valle tiberina sono segnati con una continuità, che non vidi quindi da alcuno smentita: come pure sono importanti le indicazioni delle masse granitiche nelle serpentine di Firenzuola, e numerose e precise quelle delle ofioliti nella Lunigiana e nella Garfagnana. Parmi che per la Toscana, colla scorta di queste indicazioni, corrette colle carte più specializzate del Savi, del Meneghini e del Campani, verrebbero a continuarsi con molta analogia le demarcazioni stabilite nell' annesso schizzo geologico; senza poter rilevare fortissima diversità, tranne le relazioni tra le serpentine e le rocce trachitiche e granitiche, le quali nell' Apennino settentrionale mancano totalmente o sono rappresentate soltanto dai massi erratici nei conglomerati serpentinosi. Epperò ritengo che la carta del Giuli poteva da sè sola molti anni fa dimostrare l'eocenicità di tutte le accennate serpentine; purchè gli affioramenti non si interpretassero come teste di masse eruttive. Il Giuli però era molto lontano dall'avere una giusta idea dell'epoca di quelle rocce, che comprendevano le serpentine, mantenendo ancora la credenza della loro remota antichità, ed associandole con altre realmente paleozoiche della Toscana occidentale.

A rendere più universalmente riconosciuta l'eocenicità delle rocce comprendenti le serpentine, contribuì validamente la mirabile opera di Murchison (2), con tanto vantaggio della nostra geologia tradotta ed ampliata di moltissime indicazioni risguardanti la Toscana dai due benemeriti professori pisani. Quantunque in questa opera non si parli espressamente delle serpentine, si danno però interessanti ragguagli circa

(1) Questo fatto non sarebbe generalmente vero, essendo ricordati dal D'Acchiardi conglomerati eocenici, con ciottoli ofiolitici nell'alta valle tiberina. D'altra parte il signor De-Stefani riterrebbe recentissimi, cioè pliocenici alcuni conglomerati ofiolitici del Volterrano, coi giacimenti lignitici in essi compresi. Il signor Meneghini ha poi dimostrata la esistenza di un *macigno ofiolitico*, passante a roccia puddingoide con elementi di serpentine, di gabbri, di eufotidi e di dioriti, che si alterna con strati di galestro; ed asserisce che a Libbiano tale macigno ofiolitico è attraversato da un *amalgama serpentinoso*, da lui come dal signor Savi considerato di origine endogena e di eruzione in periodo miocenico, posteriormente a tutte le altre rocce ofiolitiche. È assai rimarchevole questo fatto e per la prova, che somministra, dell'origine endogena di tali amalgama così comuni anche nella serie tongriana dell'Apennino ligure e bobbiese, e perchè unitamente al precitato dell'alta valle tiberina induce la probabile emersione e la parziale abrasione, allo scorcio del periodo eocenico, di alcuni tratti della formazione ofiolitica dell'Apennino. Nel seguente periodo aquitaniano sarebbe poi avvenuta una più generale emersione ed una più profonda erosione della formazione stessa e del suo mantello di rocce arenacee e calcareo-marnose.

(2) R. Murchison, *Sulla struttura geologica delle Alpi, degli Apennini e dei Carpazi*, 1849. Tradotta dai prof. Savi e Meneghini nel 1851.

il fatto della presenza nella formazione del *Flysch* alpino dei conglomerati granitici, ad esse associati e nel quadro delle rocce, si pone la serpentina diallagica al principio dell'eocene ed il granitone alla metà di questo periodo. Alla fine poi del miocene, si collocano le dicche metallifere di monte Vaso, monte Catini, Riparbella e Castellina marittima. Nell'appendice inoltre si ammette che anche il gabbro rosso abbia spesso la più decisa apparenza eruttiva, la qual frase trovo ripetuta da tutti gli autori che ne trattarono dappoi, quantunque convinti della sua origine per metamorfismo. L'epoca eocenica delle rocce a contatto delle serpentine, già intraveduta dal Pilla, vi è ammessa senza eccezione, specialmente in base alla relazione di quasi costante superiorità al calcare ed alle brecciole a nummuliti della Garfagnana, del Volterrano e dei dintorni di Firenze. Da quell'epoca in poi, essendo accettata questa idea anche dal marchese Pareto, venne gradatamente universalizzandosi tra i geologi. Anche fuori della Toscana e della Liguria abbiamo veduto come non si sian fatte sicure scoperte che la possano infirmare.

Aveva il marchese Pareto, già dal 1832 in alcune lettere scritte col Guidoni ([1]) e quindi nella accennata descrizione geologica del Genovesato, rilevata l'importanza del conglomerato ofiolitico nei terreni terziarî della Liguria e divisa l'idea dell'azione metamorfica, esercitata dalle serpentine sulle rocce che le comprendono, sì di ridurle in gabbri ed in galestri, se calcari; oppure simiglianti agli scisti primitivi, se argilloscistose. Aveva considerato come conglomerati eruttivi le serpentine brecciate a ciottoli e massi granitici, e stabilite molte osservazioni, che riportai sulle prime pagine; sempre convinto dell'origine eruttiva, anzi dell'eruzione subaerea e sollevante delle serpentine. E tali idee mantenne il Pareto anche nelle successive pubblicazioni sulle rocce pirogene italiane e sulla stratigrafia apenninica, solo mostrando di aver cangiata l'opinione riguardo all'epoca delle rocce secondo lui sollevate, rotte e metamorfosate dalle ofioliti. E di questa azione meccanica e fisico-chimica di tali rocce era egli così persuaso che la ammise anche là dove le serpentine non si fecero strada sino alla superficie, mantenendosi al nucleo dei sollevati mammelloni, cui hanno abraso i fenomeni posteriori di erosione fluviale. Epperò, per così dire, l'intera geologia dell'Apennino era secondo lui collegata alla emersione ed alla protrusione dalle viscere della terra delle ofioliti. Per tale emersione delle rocce ofiolitiche e per tali sottospinte nelle porzioni non dilacerate, si stabilirono due direzioni ortogonali, di cui una meridiana e comprendente appunto la massima parte degli affioramenti serpentinosi che ho antecedentemente descritti. Circa poi al gabbro rosso, più volte ricordato, il benemerito geologo ne comprova la frequente apparenza eruttiva; anzi soggiunge che possiede tutti i caratteri di una roccia emersoria ed ha indizî tali di aver sofferto una completa fusione, quali non li hanno sovente le vere serpentine e riserberebbe l'origine metamorfica alla sola parte periferica delle masse di gabbro ed alle argille scagliose. Di queste, che molto bene son dette le *marne iridate* delle formazioni terziarie, viene fissato giustamente l'orizzonte per tutta l'area abbracciata dagli spaccati delineati dall'autore, alla base della formazione calcareo-arenacea a fucoidi; riconoscendone egli soltanto una sottile striscia sotto i calcari eocenici con

[1] *Sulle montagne del golfo della Spezia e sopra le Alpi apuane.* Biblioteca ital. tom. XVII, 1832.

banchi nummulitici della Liguria occidentale. Già ho discorso del suo modo di interpretare gli affioramenti di queste rocce e delle ofioliti ed allora addussi le ragioni, per le quali io non accetto tale interpretazione per la parte della catena apenninica da me esplorata. E parmi non andar lungi dal vero affermando che ove il Pareto non fosse stato fuorviato da tali idee sull'efficacia sollevante e metamorfosante delle serpentine, con tutto quel corredo di fatti che raccolse ed illustrò minuziosamente in tanta porzione d'Italia, avrebbe di molto avvantaggiata la questione dell'origine di quelle rocce; nel mentrechè essa per quasi trent'anni si rimase al punto medesimo, al quale l'avevano condotta i geologi toscani.

Le idee del Savi e del Pareto furono accettate dal Perazzi, in un catalogo che egli pubblicò delle rocce ofiolitiche della Liguria e quindi in una pregevole Memoria intorno ai giacimenti cupriferi, contenuti nei monti serpentinosi dell'Italia centrale [1]. Nel catalogo si ricordano tra le altre parecchie rocce argillose, pisolitiche, passanti alle serpentine affanitiche, che riscontrai identiche nel Bobbiese: nella Memoria si mantengono le distinzioni cronologiche e litologiche dei geologi toscani, si descrivono accuratamente i giacimenti cupriferi, già illustrati dal Savi e quelli di val Petronia, di monte Loreto, di Casali, Gallinaria e Levanto, nella Liguria orientale. Riconosce l'autore la massima analogia tra questi giacimenti minerarî toscani e liguri; quantunque le rocce eruttive, alle quali si collegano, sieno abbastanza diversamente distribuite. Poichè nella Liguria, ove pure prevalgono le eufotidi e le serpentine diallagiche, tuttora non si può affermare la precedenza di queste a quelle e sono poi sino ad ora ignote le serpentine recenti, ammesse dai geologi toscani e specialmente dal signor Meneghini. I giacimenti cupriferi hanno la forma di filoni e sono a ganga quarzosa e spesso listati, nella eufotide e nella diorite; mentrechè gli stessi filoni nelle serpentine e nei gabbri si sfasciano e si convertono in arnioni ed in lastre non continue, involte in sottile lamina serpentinosa. Essi prevalgono però al contatto delle rocce cristalline coi gabbri; taluni, come quello traversato dalla galleria Maria (miniere Casali), presentando rigetto e brusca interruzione per una massa dioritica. L'azione di questi ammassi sulle serpentine e sui granitoni è pressochè nulla; grandissima invece sui gabbri, che si mostrano singolarmente modificati; divenendo spesso omogenei, meno arrossati, frammentarî o sferulitici e poveri di quarzo, che pare all'autore essersi concentrato a formare le salbande dei filoni. Nelle serpentine di monte Masco e della Rossora, furono esplorate delle masse lenticolari di pirrotina con calcopirite e attraverso la eufotide della Francesca, una zona di dicche quarzose con calcopirite, inclinate a mattina e dirette a nord-nord-est. Ad onta delle riscontrate differenze, indotte nel modo di presentarsi di tali giacimenti dalla natura varia delle rocce, il signor Perazzi, non abbandona l'idea di tutti considerarli come veri filoni di frattura, formati al modo stesso dei filoni più conosciuti; soggiungendo che i minerali vi hanno assunto diversi modi di giacitura e di composizione ed una particolare indole a seconda della influenza chimica della roccia incassante. Per quanto riguarda la posizione mutua delle rocce cristalline, si rileva dalla sullodata Memoria essere assai problematica la forma di filone dell'eufotide nella serpentina e dei grunstein in entrambe; formando

[1] Atti R. Accademia delle scienze in Torino, serie 2ª tom. XXII, 1864.

queste due rocce piuttosto degli ammassi, talora circondati dalla ofiolite oppure al contatto tra essa ed i gabbri. E questa condizione io pure riconobbi costantemente anche nell'Apennino bobbiese.

L'origine endogena dei giacimenti minerarî compresi nelle rocce ofiolitiche e dei gabbri non viene ammessa dal Rath (1). Questo illustre mineralogo, egli pure disposto a riconoscere l'origine metamorfica di queste ultime rocce, propende invece a ritenere quei giacimenti siccome il prodotto di concentrazione di minerali metallici, sparsi prima nel seno delle rocce ofiolitiche ed ancor prima contenuti nelle rocce peridotiche, che a queste hanno somministrato gli elementi di formazione. Colla quale idea non sembra escludere l'origine eruttiva delle serpentine. Dice poi che una cotale concentrazione causò tali disturbi che la massa di rocce magnesiane, nella quale essa avveniva, ne venne tutta rotta o dislocata e così si produssero tutte quelle laminature, striature e lisciature di noduli, che il Savi così bene descrive nei giacimenti metalliferi toscani. La spiegazione del geologo toscano mi pare molto più semplice e naturale; allorchè tali accidentalità attribuisce a spostamenti dell'intera massa subìte, allorchè prese parte ad oscillazioni telluriche molto posteriori la formazione idrotermale dei filoni metalliferi.

Tale idea del signor Rath, sebbene abbia incontrato molto favore anche in Italia e sia stata ampliata dal nostro illustre Bombicci, applicandola ai giacimenti elbani (2) ed estendendola, come vedremo, alla spiegazione delle masse ofiolitiche stesse nel seno ai terreni sedimentarî, a me sembra insufficiente per spiegare tutte le analogie, che i giacimenti cupriferi della Liguria e della Toscana offrono cogli altri filoni di origine endogena e che le serpentine e rocce annesse mantengono colle rocce cristalline eruttive. Dietro a tale concetto, il signor Rath definisce anche il gabbro come una roccia metafiroide, resa sferoidica per separazione della ematite e molto alterata. Con la quale definizione, che parmi risguardi solo taluni gabbri, comprova la loro analogia, quale fu rilevata da tutti coloro che studiarono le rocce ofiolitiche apenniniche, colle affaniti e colle iperiti. Tale definizione e tale analogia però non vorremo noi applicare ai diaspri rossi, che sono alternati ed immedesimati al gabbro e fanno passaggio ai galestri; poichè tali diaspri sono talvolta sopra larghe estensioni regolarmente stratificati con banchi di entrambe le dette rocce, ritenute metamorfiche. Ed in complesso sembrami che la questione dell' origine delle ofioliti apenniniche non abbia avanzato di un passo per le osservazioni del geologo tedesco. Con questo spiegar tutto col metamorfismo, noi corriamo evidente pericolo di scordare la ricerca prima dello stato originario e del modo di formazione delle rocce, che hanno determinato da un lato e subìto dall'altro tale assai complessa alterazione. Se noi a proposito del gabbro e del galestro ci sbarazziamo delle difficoltà, o per parlare più precisamente le moltiplichiamo fuori di modo, col ritenere queste rocce metamorfosate e se come tali poi riteniamo anche le serpentine, entriamo in un circolo vizioso; senza nemmeno la speranza di poter rispondere alla più urgente

(1) G. v. Rath, *Ein Besucht des Kupfergrube von Monte-Catini in Toscana und einiger Punkte ihrer Umgebung*. Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft. Berlin, Bd. XVII, 1865.
(2) *Trattato di Mineralogia* 2ª edizione 1875, vol. I pag. 120.

dimanda, troppo sollecitamente evasa dai primi geologi che affrontarono lo studio di tali rocce, e che risguarda lo stato originario delle rocce che si vogliono metamorfosate e la genesi o la provenienza degli agenti e delle rocce, che si vogliono metamorfosanti. Credo anche che dai sostenitori di tali inspiegati metamorfismi e specialmente dal signor Rath siasi dimenticato che trattandosi di questa serie eocenica, non possono le teorie chimiche e mineralogiche essere applicate alla spiegazione delle masse ofiolitiche e dei filoni minerarî in essa comprese con tutta quella larghezza d'ipotesi, che ne concedono la remotissima antichità e le condizioni di grande temperie e pressione, in cui si trovano le *pietre verdi* alpine. La nostra zona serpentinosa è lì, nella serie relativamente recente dell'eocene e sopra di essa è molto se noi possiamo ammettere la potenza di un migliaio di metri di più recenti rocce terziarie; avendo sempre riguardo al fatto che la più parte delle rocce di quella zona erano come al presente formate, sollevate, denudate ed erose nei primi periodi miocenici.

Le idee del Savi furono con poche differenze mantenute dal signor Cocchi nella descrizione delle formazioni ofiolitiche elbane (¹), nella nota sua opera su quella classica isola. Ammette infatti l'origine eruttiva delle ofioliti e ne assegna l'epoca di emersione dalla base della creta all'eocene superiore; disponendole cronologicamente siccome fece il suo maestro. Circa al gabbro rosso, ne distingue una varietà proveniente da alterazione di una iperite e perciò eruttiva, da un'altra, che egli chiama gabbro galestrino; questa passa per gradi alle argille ossidate ed ai diaspri e viene ritenuta di metamorfismo. Entrambe poi queste varietà associate, formano una duplice e continua zona, decorrente dal capo Olivari a monte Grosso in direzione quivi pure meridiana alla base della formazione dei calcari alberesi a fucoidi e delle arenarie del macigno, riferite all'eocene. Egli distingue poi una zona di diaspri e di ftaniti (di Volterraio, Pietra rossa e monte Ferrato ecc.) la quale sarebbe indipendente dalle precedenti e dalle serpentine ed apparterrebbe ad un livello mesozoico. Non si fa cenno di alcun sospetto sul riferimento della serie, che comprende le serpentine; nè si pone in dubbio il rapporto cronologico di queste colle euriti e coi graniti, segnati e descritti sotto la forma costante di veri filoni e dicchi, insinuati dal basso attraverso i serpentini e le rocce dell'eocene. Così non si ammette alcuna dipendenza tra le serpentine e le masse ferree, che sono subordinate agli scisti quarziferi, alle anageniti ed agli scisti nodulosi e la cui formazione viene dal sig. Cocchi riferita al mesozoico, ma può essere molto più antica. Senza perderci in questa questione, così lontana da quella della genesi delle rocce serpentinose apenniniche e per giunta così intricata, e limitandoci soltanto alle rocce ofiolitiche, mi sembra che i fatti descritti in quella monografia collimino a comprovare la origine eruttiva dei filoni e delle masse feldispatiche e tormalinifere, l'epoca di loro eruzione posteriore alle serpentine ed un allineamento degli affioramenti di queste alla base della formazione dei calcari alberesi e del macigno, affatto simile a quella del continente toscano. Stabilito il quale fatto è da ritenersi che quivi le stesse rocce attraversino realmente l'Alberese nel gruppo di

(¹) I. Cocchi, *Descrizione geologica dell'isola dell'Elba*. Memorie R. Comitato geologico italiano, vol. I, 1871.

Gavorrano, nel continente toscano, come pare dalla descrizione datane dal sig. U. Lotti (1); il quale aggiunge altresì che il granito tormalinifero di questa località attraversa i calcari del Lias e l'Alberese, metamorfosando quest'ultimo sopra una zona, al massimo, di cinque o sei metri. Non so di quale alterazione si parli; ma certamente non è una conversione in gabbro od in galestro, poichè in tal caso il fatto avrebbe assunto tale importanza da non dovere essere taciuto dal signor Lotti, che in altra Nota (2) giudica che nel dilemma di considerare eruttive o metamorfiche tanto le serpentine che i gabbri convenga attenersi all'opinione che sieno entrambi metamorfici: mostrandosi in tal modo assai convinto dell'efficacia del metamorfismo. Ad ogni modo, le relazioni stratigrafiche della formazione serpentinosa all'Elba non sono tali da distaccarla da quelle dell'Apennino settentrionale; ma in complesso mi sembrano concorrere a dimostrare le stesse conclusioni, che ciascuno può trarre dal sin qui detto sulla formazione stessa nel continente.

A proposito delle rocce ofiolitiche della Toscana, abbiamo altresì un interessante riassunto delle osservazioni precedenti nella pregevole opera mineralogica del sig. D'Acchiardi (3). Questo operoso quanto abile naturalista aggiunge preziose analisi chimiche, precisa convenientemente alcune denominazioni del signor Savi e non pare disposto ad ammettere l'origine eruttiva delle serpentine e quindi tanto meno delle rocce gabbriformi. Le vorrebbe tutte ascrivere a grandiosi fenomeni sotterranei, pei quali le rocce ofiolitiche si intrusero successivamente tra le rocce sedimentarie già deposte, talune modificandone ed altre no. Crede anche che esse masse ofiolitiche abbiano acquistato l'attuale aspetto solo dopo le deposizioni del pliocene, gli strati del quale pur risentirono l'azione di quei sollevamenti, che hanno portato a giorno le rocce serpentinose. E ciò parmi non essere punto vero; avvegnachè la stratigrafia pliocenica dell'Italia centrale è semplicissima e si spiega con poche oscillazioni, avvenute secondo linee estesissime e collegate cogli spiragli vulcanici, ai quali esse oscillazioni hanno appunto data origine. Questa stratigrafia non presenta alcun rapporto con quella delle rocce mesozoiche ed eoceniche, colle quali ultime, come abbiamo veduto nel capitolo precedente, si colloca la zona serpentinosa. Lo stesso sig. D'Acchiardi riconosce del resto il fatto della formazione in epoca miocenica del conglomerato ofiolitico, la quale, per quanto le posteriori osservazioni del sig. De-Stefani la abbiano smembrata in parecchi periodi miocenici e persino pliocenici, è pur sempre una prova della avvenuta emersione della zona serpentinosa e della sua denudazione all'aurora del miocene o piuttosto al chiudersi del periodo eocenico, in corrispondenza di quei piani oligogenici e del Tongriano superiore, che vediamo così scarsamente rappresentati nelle regioni apennine.

Dalle idee del sig. D'Acchiardi poco differiscono quelle, che furono suggerite ai signori Capellini e Bombicci (4) dallo studio delle formazioni ofiolitiche della provincia

(1) U. Lotti, *Sulla geologia del gruppo di Gavorrano, nella provincia di Grosseto*. Boll. Com. geol. italiano. v. 1877. 1. 2.

(2) U. Lotti, *Descrizione geologica dei dintorni di Rocca-Strada, nella maremma toscana*. Ibidem, n. 3.

(3) A. D'Acchiardi, *Mineralogia della Toscana*. Pisa, 1871. 74.

(4) L. Bombicci, *Descrizione della mineralogia generale della provincia di Bologna*. Parte II^a p. 161 e seg., 1874.

di Bologna. Queste furono prima oggetto di una breve Memoria (1) del chiarissimo signor professore Capellini, nella quale prevale l'ipotesi dell'origine per metamorfismo in luogo delle rocce ofiolitiche: ipotesi che l'autore pare mantenere, più o meno modificata, nelle posteriori pubblicazioni (2). Quivi le serpentine e specialmente le diallagiche sono considerate siccome l' ultimo termine del metamorfismo di preesistenti rocce sedimentari, sotto l'influsso di sorgenti magnesifere, svolgentisi da ammassi di leherzolite, profondamente sepolti. Le masse così formate si espansero tra gli strati, formando lenti più o meno estese, da posteriori oscillazioni e contorsioni disturbate, rotte e smembrate. Verrebbe così spiegato come le serpentine, secondo l'idea di parecchi geologi, non abbiano profonde radici nelle viscere della terra, ma compaiano a varî livelli geologici, slegate e distinte siccome i banchi di gesso. Anche l'associazione dei minerali metallici ai giacimenti ofiolitici si riterrebbe dal Capellini, a quanto pare, un effetto di concentrazioni speciali, avvenute in origine secondo zone molte regolari, ma deformate quindi come le masse che le comprendono.

Il sig. Bombicci è pure partigiano della genesi per concentrazione o per metamorfismo in posto, sotto l'influenza d'acque termali magnesifere o ricche di monosilicati alcalini. Egli riconosce da principio le sfumature le più insensibili nelle rocce ofiolitiche, dal tipo magnesifero al tipo pirossenico; ammette quindi le gradazioni, che mi sembrano meno naturali, tra le rocce medesime e le brecce formate di frammenti di esse o delle rocce sedimentari che le ricoprono, oppure le calcareo-marnose o scistose, regolarmente stratificate ma soverchiamente ossidate, o variamente mineralizzate per venule e geodi di calcite, di quarzo o di gesso. Le deduzioni, che l'illustre professore di Bologna dichiara risultargli da uno studio, del quale porge in quest'opera un saggio così lodevole, sono nella questione di cui ci occupiamo d'importanza capitale. Perciò brevemente le riferisco; permettendomi qualche considerazione, che l'egregio collega vorrà accogliere come espressione del vivo mio desiderio che la geologia apenninica possa trarre il massimo partito dalle sue idee.

I minerali costitutivi delle rocce ofiolitiche tutte, sono composti per associazione di molecole di silicati normali, fondamentali, resa possibile dall'acqua riscaldata e compressa. Date le formole dei componenti normali delle argille e delle marne di sedimento, bastano le formole delle sostanze che più abitualmente mineralizzano le sorgenti termali per ottenere mercè la sintesi delle une colle altre, convenientemente ripartite, quelle dei minerali delle rocce verdi, dette eruttive. Essendo questi cristallizzabili, e le circostanze permettendo la loro cristallizzazione, si potrà avere una serie di amigdale di minerali definiti, quali di gesso, il salgemma, l'anidrite, il ferro ossidato idrato, la selce, il quarzo, la calamina ed anche le rocce silicate cristalline a pasta serpentinosa ed oligoclasica. Qualora invece la cristallizzazione non potesse avvenire, la masse argillose rimarrebbero scagliose, magnesifere, ocracee, salifere o

(1) G. Capellini, *Sulle rocce serpentinose ed in particolare su quelle dei dintorni di Bisano*, 1873. Rendiconti Acc. Istituto di Bologna.

(2) G. Capellini, *La formazione gessosa di Castellina marittima*. Bologna, 1874. — *Sui terreni terziari di una parte del versante settentrionale dell'Apennino*. Bologna, 1876. Memorie Acc. Istit. di Bologna, serie 3ª tom. I e III.

petroleifere, gessifere e via dicendo; cioè, con tutti i caratteri delle rocce, che accompagnano le ofioliti.

Tutti i prodotti di tale associazione mostrarono una vasta tendenza di concentrazione molecolare, per la quale in seno dei magma magnesiani così costituiti si formarono le amigdale di calcare dolomitico, di saussurrite serpentinosa, di oliclasite ferrifera; e nelle argille più o meno modificate, i grossi globi di selenite raggiata, le cupule gessose, le incrostazioni nelle septarie; mentre nei vani, riempiuti di steatite, per entro le rocce ofiolitiche e nei gabbri si formarono i nuclei criptocristallini di minerali cuprei, ed altri solfuri metallici stanno disseminati, talora in minuti cristalli nelle varietà affanitiche di serpentina e nelle masse di eufotide. La forma di filone, propria dei giacimenti metalliferi normali, sarebbe quindi esclusa. Come nel concetto del sig. Rath ma con più largo intervento di sostanze di provenienza endogena, quei giacimenti non sarebbero che un'accidentalità di questo ingente movimento molecolare, che invase quelle porzioni di roccia, originariamente sedimentare. Osserva poi il sig. Bombicci come in generale, dall'arnione più piccolo e che figura nelle collezioni agli ammassi, che costituiscono dei rilievi montuosi, i nuclei centrali sono di natura feldispatica. Vi si soprapongono le masse o zone pirosseniche; a queste seguono le serpentine, prevalentemente steatitose; tutto poi venendo circondato da un campo variatissimo di rocce intermedie tra le sedimentari e le eruttive, i di cui tipi meglio definiti sono le oficalci, le ofisilici, le spiliti, ed il gabbro rosso. L'autore consente che questo ordine possa variare di luogo a luogo e spesso mancare; ma sembrami non pigli in considerazione che se un ordine più o meno costante ed evidente si può ammettere nelle rocce magnesiache e feldispatiche cristalline o compatte, per le altre, ritenute di meno pronunciato metarmorfismo, è più ipotetico che reale. È vero che una vasta formazione di gabbri, di diaspri, di galestri ricopre le masse ofiolitiche, risultanti appunto dalla unione di amigdale di roccie variatissime, ma non è men vero che moltissime volte, anzi nel maggior numero dei casi osservati in dettaglio, la roccia ofiolitica è ad immediato contatto ed alternata a più riprese con rocce sedimentari, calcaree ed arenacee della più normale apparenza e composizione. Non so se questo siasi constatato nell'Apennino bolognese, che non conosco; ma per le regioni da me esplorate posso asserirlo senza tema di errare. Pare però che in fine il signor Bombicci miri soltanto a dimostrare che tali associazioni cristallogeniche sieno avvenute in masse non già fuse ma disciolte nelle acque mineralizzanti. Anzi ammette dei magma eruttivi, i quali giunsero a contatto di rocce sedimentarie, già formate, e quivi sul posto che vediamo da essi occupato si completarono e perfezionarono per gli accennati adunamenti cristallogenici; nel mentre che in loro vicinanza alteravansi le rocce sedimentari. Quindi termina con un concetto ancora un po' involuto, che mira alla combinazione delle idee molto distinte: dell' origine endogena e della genesi per metamorfismo con elementi di provenienza endogena, delle rocce ofiolitiche. Dice infatti: « Perciò ben volentieri accolgo e preferisco il concetto del sollevamento (se vuolsi dell'eruzione) di una poltiglia calda ma acquosa, essenzialmente composta dei prodotti di tali medesime associazioni ».

Io penso che queste assai importanti osservazioni e queste probabili supposizioni dell'illustre professore possano trovare anche migliore applicazione qualora non si

unifichino soverchiamente i varî elementi delle formazioni in discorso e qualora, in base ai caratteri necessarî delle rocce endogene, cristalline o meno, e sempre preparate col medio dell'acqua soprariscaldata, si distingua la loro varia natura prima di ricercarne l'origine, che pur dev'esser varia o variamente modificata da diverse condizioni d'ambiente. Non oso sperare di poter io districare tale matassa, resa complicata da tante idee e da tanti nomi; mentre la litologia apennina mi è tutt'altro che famigliare. Ma sarò assai lieto se le condizioni stratigrafiche delle serpentine bobbiesi, esposte in questo scritto, contribuiranno a dimostrare come necessario lo ammettere una prima eruzione sottomarina ed in periodo eocenico di varie qualità di magma magnesiani ed oligoclasici, in seno ai quali, durante od appena dopo la emissione, sieno avvenuti i movimenti cristallogenici, ideati dal chiarissimo mineralogo. Frattanto rimane fuori di questione che se vi ha gruppo di rocce cristalline, alla cui spiegazione la presenza dell'acqua sia richiesta in modo ineccepibile anche per chi fosse restio a concedere a questa condizione un carattere universale, questo gruppo è certamente quello delle rocce ofiolitiche, generalmente idrate; ed è in esse che più esteso e più meraviglioso fu il lavorìo delle concentrazioni mineralogeniche, attestate innegabilmente dalle condizioni rispettive delle varie masse lenticolari delle rocce in esse comprese.

Apparentemente la rilevante qualità dell'acqua di composizione, circa il 13 %, in queste rocce magnesiane può esser considerata come una obiezione alla loro origine eruttiva, la quale le associa a tante rocce cristalline con elementi mineralogici anidri o solo contenenti acqua di cristallizzazione. Ma se noi meglio consideriamo questo carattere chimico delle serpentine come inerente alla composizione atomica del minerale in esse prevalente, non tardiamo a scorgervi, non già una obiezione alla loro genesi eruttiva, ma una delle cause, per cui fu scarsa la emissione del vapor acqueo e quindi insufficiente a produrre la costruzione di coni, prima sottomarini quindi subaerei; costruzione sempre dovuta ad una projezione dei materiali eruttivi, sia in correnti sia in frammenti più o meno minuti. E ciò tanto più se si combina la natura chimica idrata delle serpentine colla poco elevata temperatura, che dovettero originariamente possedere i magma magnesiani che le hanno generate, come è dimostrato dallo stato di conservazione degli interclusi calcari, scistosi o feldispatici.

Perciò la forma a colate, originariamente fangose, tranquillamente espanse sotto al mare per meati non troppo beanti, si presenta come natural conseguenza della stessa natura chimicamente idrata delle serpentine; epperò a loro peculiare e senza confronti nelle lave e nei porfidi; i quali, anche se non molto diversi da talune rocce ofiolitiche, si presentano per ciascuna colata più uniformi e più chiaramente e più frequentemente sotto forma di dicchi. E poichè una saliente diversità tra le giaciture ofiolitiche e quella delle lave e dei porfidi consiste appunto negli effetti delle modificazioni molecolari e meccaniche, subìte dalle prime posteriormente alla loro ejaculazione; così anche questa diversità sarebbe spiegata dalla natura chimica dei magma magnesiani, i quali, già espansi sul fondo marino hanno nel loro interno percorse quelle evoluzioni, che subirono prima di erompere i porfidi e le lave.

Le serpentine risulterebbero per tal modo quali rocce quasi precocemente emesse, sotto forma lavica, in cadaun ciclo vulcanico. Infatti non le vediamo noi aprire il

vulcanismo terziario nell'Europa meridionale? E nel sistema alpino non appartengono esse ad orizzonti geologici molto più antichi dei porfidi e dei graniti? E non si ritengono da tutti i mineralogi siccome più semplici e più facili ad avvenire quelle pseudomorfosi, che dai minerali peridotici e feldispatici passano al gruppo del talco e del serpentino?

Ma io non vorrò certamente correre all'impazzata su questo terreno, così scabro, delle genesi delle serpentine. Almeno nei ristretti confini delle mie cognizioni, reputo importante il poter riconoscere questo accordo tra la natura chimica ed il modo, con cui ponno imaginarsi espanse le ofioliti e generate le molte rocce, che ad esse si connettono.

Potrebbero anche esistere strettissimi rapporti tra la condizione sottomarina, che in ogni caso (anche nel concetto del signor Bombicci) fu richiesta alla formazione delle serpentine e la natura chimica di queste; e tali rapporti potrebbero essere assai meno necessarî per le lave e per i porfidi. Ma l'analisi di questi legami sarà fatta quando i chimici ed i mineralogi o saranno persuasi della origine eruttiva dei magma magnesiani o prepareranno delle ipotesi più in armonia coi fatti stratigrafici e coi rapporti cronologici da essi magma presentati.

Fra i partigiani dell'origine per metamorfismo in posto delle serpentine devesi contare il signor Gastaldi(1), il quale nelle sue dotte pubblicazioni sulla geologia delle Alpi occidentali mostra di escludere l'origine eruttiva, di queste rocce non solo, ma di tutte le altre molto più distintamente cristalline e che formano la zona delle *pietre verdi*, della serie protozoica. È noto poi come nelle masse ofiolitiche dell'Apennino (p. 31 e seg.) il chiarissimo geologo piemontese, basandosi sul fatto che queste sono per composizione identiche e per annessi depositi metalliferi analoghe a quelle alpine, inclinasse a scorgere in esse la continuazione delle punte alpine, affioranti nel mezzo degli strati giurassici, cretacei e terziarî, che le circondano. Ma chi mi ha seguìto sino a questo punto e meglio ancora chi abbia avuto opportunità di esaminare la formazione serpentinosa dell'Apennino comprenderà di leggeri come l'illustre autore abbia in questo caso ceduto a quella tendenza di generalizzazione, dalla quale forse nessuno può sottrarsi coi lavori monografici. Credo d'altronde che egli medesimo, di fronte ad evidenti obiezioni mossegli dai geologi toscani, abbia rinunciato a tale idea. Epperò la ricordo soltanto per osservare come non sussista nemmeno il fatto dell'isolamento delle masse ofiolitiche apenniniche, se facciamo astrazione dei salti e delle erosioni subìte dalla serie liguriana, che le comprende.

La formazione serpentinosa dell'Apennino forma un vero e proprio orizzonte, risultante di un intreccio di rocce cristalline o stratificate senza fossili e profondamente mineralizzate. Se ben consideriamo, esso trova molti riscontri nella serie dei terreni alpini e specialmente in quella, che così di frequente e così a ragione si confronta colla terziaria: cioè colla triasica. Sostituiamo alle dolomie gli alberesi ed aggiungiamo alle rocce cristalline a tipo pirossenico ed oligoclasico, così abbondanti nel Trias medio delle prealpi, le rocce magnesiane, che frequentemente contengono

(1) B. Gastaldi, *Studî geologici sulle Alpi occidentali.* Memorie R. Comitato geolog. ital., vol. 1871 e parte seconda, vol. II, 1874.

un minerale ben poco diverso dall'augite, cioè il diallagio; ricordiamoci di tutte le gradazioni di colorito, di struttura e di composizione delle marne iridate, salifere e gessifere, e della mirabile continuità di tali caratteri litologici ben oltre i limiti delle Alpi, e ci persuaderemo anche per confronto che questa, da noi studiata, è una zona cronologica, a più o meno ampî confini, ma a determinato livello nelle serie dei terreni. In presenza di questa unità geologica non vorremo noi dare la preferenza a spiegazioni, che si basano a fatti di loro natura locali; ma aduneremo invece tutte le spiegazioni plausibili per formarcene un'adequata idea, nella sua vastità e nella realtà dei suoi rapporti cogli altri fatti, di ordine parimenti generale accusati dalla formazione stessa. Certamente non dispregeremo anche i minimi fatti e specialmente quelli, che dimostrano la molteplice origine delle rocce magnesiane idrate e del serpentino, in specie per pseudomorfismo di altri minerali; e nemmeno gli altri fatti, che tendono a stabilire la natura originaria della roccia, dalla quale tutte le rocce ofiolitiche ponno provenire; studieremo per così dire tutti i gradi di parentela che esse presentano ed il comune albero genealogico. Ma telluriche e generali devono essere le condizioni, che hanno determinati e favoriti tali passaggi, come generali e telluriche son quelle, che su tanta estensione di terreno hanno indotta cotanta uniformità nella formazione del *Flysch* apenninico ed alpino, dalla Baviera alla Dalmazia ed ai Carpazî, dalla Liguria alla Sicilia. Mi si passi la associazione di idee abbastanza singolare. Confesso che nel rappresentarmi alla mente le *uje* delle rocce verdi, sporgenti dalla massa dei terreni eocenici non ancor ripiegati dai successivi sollevamenti, faccio uno sforzo, che trova una certa analogia colla difficoltà che io provo nel comprendere le correnti di sostanze mineralizzanti, dei magma acquei magnesiani e di monosilicati, che vengono ad alterare la già deposta e non ancor ripiegata formazione del *Flysch*. Se l'ipotesi del signor Gastaldi è insostenibile, bisogna pur confessare che vi è qualche cosa di soverchiamente artifizioso anche in quest'ultimo modo di spiegazione; ed in quella guisa che di quelle punte alpine, immerse nel mantello delle rocce apenniniche, la mente non può comprendere il corpo principale e la base; così di quelle correnti e di quelle azioni mineralizzanti noi indarno ricerchiamo la provenienza, e la natura, e le vie tenute; le quali pure ci dovrebbero essere mostrate in qualche punto della massa delle rocce apenniniche, così profondamente erosa dalle correnti nel volgere dei periodi posteriori all'eocene.

Fortunatamente questo modo di considerare le rocce ofiolitiche come prodotti di un metamorfismo in posto non è il solo che sia stato presentato in questi ultimi tempi da coloro, che si occuparono delle rocce ofiolitiche; non mancando strenui campioni della genesi eruttiva delle serpentine.

Assai di peso è l'autorità dello Stoppani, anche pel fatto che l'illustre trattatista, di tutti gli argomenti militanti in favore della origine idrotermale delle rocce cristalline, pur riconoscendole eruttive, si mostra cognito e convinto non meno dei sostenitori della genesi del serpentino per metamorfismo in posto (1). L'insigne geologo, esposti i molti fatti che dimostrano la moltiplicità delle epoche, alle quali vanno riferiti i varî giacimenti ofiolitici, ricorda gli studî di Nogues sulle rocce verdi dei

(1) A. Stoppani, *Trattato di Geologia* 1871-73, vol. II p. 293, vol. III p. 645 e 702.

Pirenei. Da questi studî risulta che le ofiti sono di origine eruttiva e che talune eruppero in seguito ad un dislocamento di tutti i terreni sino al nummulitico, mentre i terreni dell'eocene superiore e del terziario recente non sono punto disturbati; altre invece appartengono ad epoche sempre più antiche, probabilmente sino al Trias. Pare poi che al muscelkalk corrisponda un'altra zona di queste ofiti, che però sono prevalentemente del tipo augitico; quindi paragonabili a quelle delle Alpi centrali e delle prealpi. A proposito delle serpentine apenniniche, ne riconosce l'indipendenza dalle alpine e gli sembrano comprese in limite di tempo non molto ampio, tra la creta e l'eocene superiore. Riporta poi dal trattato del Naumann un'idea del signor Studer, che allargherebbe la estensione di tali serpentine dal capo Argentaro sino a Martigny; ma non credo le attuali cognizioni sufficienti a sostenere tale modo di vedere; quantunque vi sia una sorprendente analogia tra il granito di alcune valli, che dividono la zona di tal roccia da Biella al lago d'Orta, e quello compreso dei conglomerati serpentinosi dell'Apennino. Dell'origine eruttiva delle serpentine, specialmente delle diallagiche, le Stoppani non dubita punto; pur riconoscendo la singolare analogia, che presentano le colate appartenenti a parecchi livelli geologici e dichiarando assai importante la ricerca delle condizioni di preparazione endogena di queste rocce e della formazione delle altre assai più problematiche, che le accompagnano. Evidentemente l'analogia litologica delle serpentine tutte non ne esclude l'origine eruttiva più di quanto la analogia stessa possa escluderla per i graniti e per i porfidi augitici, spettanti ad epoche di eruzione così diverse.

All'autorità dello Stoppani si aggiunge quella di due altri autori, la cui opinione è per entrambi molto avvalorata dagli studî geologici e stratigrafici da essi fatti nella formazione terziaria, l'uno nella Toscana e l'altro nella Liguria orientale; vo' dire dei signori De-Stefani e Mayer.

Il signor De-Stefani, in un lavoro sulle rocce serpentinose della Garfagnana (1) asserisce anzitutto che la zona ofiolitica è assai estesa e continua nella valle del Serchio e che affiora *con confini così ben definiti come si trattasse di una vera e propria massa stratificata*. Ritiene inoltre che questa massa medesima si continui con quelle della Lunigiana, a proposito delle quali abbiamo qualche indicazione dal signor U. Botti (2) risguardante la interclusione del granito in quelle serpentine, di cui il Giuli ed il Savi avevano segnato soltanto alcuni isolati affioramenti. Osserva quindi come questa massa ofiolitica sia composta essenzialmente di serpentino poco diallagico, a struttura nodulosa, a frammenti con superficie levigata e con impasto di sostanza steatitosa; precisamente come nell'Apennino bobbiese. I granitoni vi si veggono in vene più o meno potenti e sono assai alterati. Del gabbro dice che assume spesso una apparenza variolitica e nodulosa e che dalla sostanza serpentinosa vedesi compenetrato quasi una spugna immersa in una soluzione acquosa, poi disseccata; ma afferma decisamente di non averlo mai osservato fare passaggio agli alberesi, nè ad altre rocce, dalla trasformazione delle quali si crede ordinariamente che esso derivi. Non mancano le diabasi porfiroidi od

(1) C. De-Stefani, *Sulle rocce serpentinose della Garfagnana*. Boll. Com. geolog. italiano, vol. VII 1876, p. 16-31.

(2) U. Botti, *Delle rocce impastate entro il serpentino*. Ibidem, vol. V 1874, pag. 67.

affanitiche e finalmente si rimarcano molto sviluppati i conglomerati granitici, i quali stabiliscono una molto saliente somiglianza tra questi giacimenti ofiolitici della Garfagnana e quelli della descritta zona, da Levanto al piano padano presso Tortona. La zona serpentinosa è quivi sempre compresa tra rocce del macigno, nelle quali l'autore non trova altra alterazione presumibile che un leggero indurimento ed un colorito verde scuro, dovuto ad una infiltrazione di elementi serpentinosi; ma pur non sembra alieno dal pensare che queste alterazioni arrivino sino al passaggio dalle arenarie del macigno alle diabasi porfiroidi, coll'intermezzo delle affaniti talora micacee. Questo passaggio mi sembra inammissibile se appena s' intende qualcosa più che di superficiale apparenza; una roccia feldispatico-pirossenica, più o meno magnesiaca, potrà avere gradazioni genetiche, per comunanza di origine o per immediata precedenza, con un argilloscisto o con un serpentinoscisto; non mai con una roccia aggregata come il macigno, i cui elementi litologici, per quel poco che ne sappiamo, sono di provenienza alpina o per lo meno da rocce quarzose micacee quali affiorano ora nelle Alpi.

I calcari marnosi pure abbondano in Garfagnana, ma si alternano con banchi di conglomerato ofiolitico, il quale verrebbe a collocarsi ad un livello molto più antico degli altri conosciuti nella serie terziaria; se non corrisponde a quello descritto dal signor Meneghini alle cave di Libbiano, che è attraversato dagli amalgama ofiolitici. La serie eocenica poi è chiusa dalla solita vicenda di scisti, di alberese e di macigno. Inferiormente alla zona serpentinosa, ovunque si osserva il macigno, il quale ricopre con discordanza le rocce di varie epoche, dall'Infralias alla creta. E che pur esso macigno sia eocenico, lo prova un chiaro orizzonte nummulitico che affiora a Soraggio, Corfino, Torrita e Sassi e che si continua probabilmente con quello segnato dal signor De-Mortillet nei dintorni di Porretta [1]. L'autore ritiene che questo macigno inferiore fosse già incurvato, quasi come al presente, per una sinclinale corrispondente alla valle del Serchio prima della formazione delle serpentine; e questo anche mi sembra poco sicura induzione, perchè troppo in opposizione ai tanti fatti, che fanno così difficile il rimontare anche solo alla orografia dei più antichi periodi miocenici. Ma questa è una particolarità per ora meno rilevante. Quanto importa si è che quivi pure le serpentine rientrano nel periodo dell'eocene superiore; che i conglomerati ofiolitici si alternano con banchi di serpentine e di diabasi porfiroidi con grossi cristalli di labradorite, con scisti argillosi e con argilloscisti turchini; che queste alternanze corrispondono a quelle, avvertite in alcuni punti dell'area da me esplorata.

Gli accennati fatti portano l'egregio geologo ad escludere, oltre che l'idea del Gastaldi, anche quella dei sostenitori dell'origine in posto, per via idrotermale del serpentino e delle rocce annesse ed a considerare queste rocce tutte come lave sottomarine; solo per le diabasi dubiterebbe, per gli accennati passaggi, di un'origine per metamorfismo, che non vedrei chiaramente come e quando potesse esser subìta dalla formazione, che regolarmente comprende tutte quelle rocce. Della eufotide, accostandosi alle idee del signor Bombicci, egli pensa che sia probabile la formazione per cernita di una parte delle materie, che componevano le masse serpentinose. Dei

(1) G. De-Mortillet, *Note sur le crétacée et le nummulitique des environs de Pistoja.* Milano, Atti Soc. ital. Scienze natur., vol. III, 1861.

graniti, compresi in blocchi di vario volume nelle ofiotoli e a quanto pare quivi pure formanti un conglomerato a cemento cloritico, ritiene difficilissima la spiegazione. Non accettando l'idea avanzata dal Pareto che possano essere stati divelti da un sottosuolo granitico, nel cui seno si elaborassero i magma serpentinosi ed oligoclasico-augitici, ne ritiene probabile la formazione contemporaneamente alla preparazione e persino alla emissione delle serpentine. Anche a questa idea ho fatto qualche rimarco in una mia già ricordata pubblicazione su questo conglomerato [1] e tuttora mantengo l'opinione che ammessa l'origine eruttiva delle serpentine, quale andrò più sotto precisando, il conglomerato granitico dia la chiave per la spiegazione dell'origine di tutte le rocce ofiolitiche, anteriormente alla loro emersione come lave sottomarine. Evidentemente queste piccole divergenze, che ho accennate tra il signor De-Stefani e me, non tolgono che io debba riconoscere in questo egregio geologo un potente alleato e che qualunque sia l'opinione sulla origine delle rocce ofiolitiche saranno sempre pregevolissime le sue osservazioni.

Più recentemente, in una ulteriore comunicazione inserita nel primo numero del Bollettino geologico dell'anno corrente, l'egregio geologo, ancor prima di conoscere le mie conclusioni sui serpentini bobbiesi e liguri, affermava che tutte le serpentine del continente toscano appartengono all'eocene superiore, ed alle esposte congetture sull'origine vulcanica delle medesime aggiungeva quella che abbian fatto eruzione (sieno venute allo scoperto) durante il medesimo periodo. La formazione serpentinosa, egli dice, segna il principio della storia continentale della penisola italiana.

Se con tali parole l'autore vuole esprimere il concetto di una vulcanicità subaerea delle serpentine, quanto ho esposto in questo scritto e quanto altri molto prima di me hanno osservato e gli stessi fatti e constatati dal signor De-Stefani, gli sono decisamente contrarî. Se invece colla frase « venute allo scoperto » vuole indicare la avvenuta denudazione della formazione ofiolitica, eocenica, allo scorcio di questo periodo, prima o durante la formazione elveziana, molto si accosterebbero le mie idee alle sue e mi lusingherei anzi di potere completamente accordarci per ulteriori osservazioni, tuttora necessarie.

Il signor Carlo Mayer, il quale erasi mantenuto sino allo scorso anno in un prudente riserbo circa alle rocce, che formavano una così vasta porzione del tratto d'Apennino da lui in questi ultimi anni dettagliatamente esplorato, in una relazione, che presentava ultimamente alla Società geologica di Francia e che veniva tradotta e riportata dal Bollettino geologico italiano, dichiara esplicitamente: che in base all'attento esame delle rocce serpentinose e dei loro contatti colle rocce stratificate dell'Apennino ritiene le serpentine aver dovuto essere in origine un fango caldo, che si espanse, ora a secco ora al fondo delle acque, in età le più diverse a seconda dei giacimenti. Le suppone già formate prima della deposizione del *Flysch* alpino; ma aggiunge che per nuove fusioni e per nuovi espandimenti, specialmente al contorno delle masse principali della liguria, si intercalò a parecchi livelli coi depositi del Tongriano, dell'Aquitaniano e del Tortoniano. Crede persino che la

[1] T. Taramelli, *Sul granito compreso nella formazione serpentinosa dell'Apennino pavese.* Rendiconto R. Istituto lombardo di scienze e lettere, anno 1878, seduta 31 gennaio.

intromissione delle serpentine a così recenti orizzonti terziarî abbia una certa connessione col ruscello di acqua bollente di Acqui, siccome quello di Dax si collega alle ofiti quivi presso affioranti. Conceduta in tal modo anche troppa larghezza all'idea della generazione e rigenerazione endogenà e quindi all'origine eruttiva delle serpentine, non intendo bene come l'esimio paleontologo mantenga eziandio l'altra idea dell'azione metamorfizzante, esercitata dalle serpentine sulla porzione più profonda del piano liguriano; sopra rocce cioè, che erano già come sono al presente oppur non erano ancora deposte nei varî periodi, ai quali egli assegna le eruzioni e le rifusioni delle serpentine. Nè esclude egli d'altronde che i disturbi meccanici, conseguenti a cotali metamorfismi, abbiano potuto determinare quelle molteplici curve della formazione eocenica superiore, le quali, a mio avviso, sono comuni con ogni fitta alternanza anche molto recente, purchè spostata, di strati eterogenei e poco potenti. Assai deploro che nella descrizione dei successivi piani terziarî, del cui valore cronologico egli è giudice tanto competente, non abbia un ritorno alla importante formazione ofiolitica; come si poteva attendere dalle esposte idee sulla moltiplicità di livelli della medesima. Perciò prima di persuadermi di questa molteplicità io attendo alcuni dati positivi, quali non mi sembrano forniti nemmeno dagli altri sostenitori della pluralità cronologica delle serpentine apenniniche. Confesso pertanto che ad onta di queste divergenze assai mi compiacio di aver trovato una certa analogia tra i risultati dello studio del signor Mayer in questa porzione della Liguria e quelli da me ottenuti nel rilievo della carta geologica dell'Apennino pavese e nelle escursioni nelle prossime località; analogie le quali si estendono con pari mia soddisfazione anche ai terreni più recenti della serie terziaria, quivi pure assai chiaramente caratterizzati ed a stratigrafia molto semplice.

Terminerò questo abbozzo di storia della questione che ci occupa, esponendo alcune comunicazioni epistolari che mi ebbi dal signor cav. Cosimo De-Giorgi e dal signor prof. Domenico Lovisato. Il primo mi avverte che le serpentine nella Basilicata e precisamente nel Lagonegrese formano una piccola zona nella formazione cretacea; ma non so quali sieno precisamente queste rocce e temo che non sieno i calcari, che nella regione circumadriatica costituiscono normalmente i piani superiori della creta. Il signor Lovisato mi informa come nella Calabria i serpentini di Gimigliano, di Lago ed Amantea e quelli ancora più sviluppati del Reventino, sieno associati a scisti cloritici ed a micascisti, ai quali si mantengono generalmente subordinati. Si tratta quindi di una vasta formazione di *pietre verdi,* confrontabile per epoca e per relazioni stratigrafiche a quella alpina e desidero ardentemente che l'egregio mio amico possa comprendere anche questa zona nel faticoso rilievo, che sta facendo di un vasto tratto di quella terra poco esplorata.

Le notizie poi che sulle rocce serpentinose si possono rinvenire nei trattati e specialmente in quelli, che mi sembrarono più diffusi a questo riguardo, del Naumann, del Bischof, del Pfaff e del Credner, sono sicuramente troppo note ai miei colleghi perchè io mi dilunghi anche solo nel rammentarle. Mi permetterò di osservare che esse riguardano quasi assolutamente le ofioliti paleozoiche, alle quali noi non possiamo così a priori associare le nostre dell'Apennino per tutte le ragioni, che sono venuto esponendo in questo mio lavoro.

Di quanto poi fu scritto riguardo alle formazioni ofiolitiche (pirosseniche piuttosto che serpentinose) dei Pirenei, non mi occuperò nemmanco. Non è perchè ignori o disprezzi gli studî molteplici, che quivi si fecero; ma perchè sembrami che quanto si può conchiudere da questi studî concorra a dimostrare che la maggior parte delle *ofiti* di quella catena sono, nè per epoca di lor formazione, nè per loro natura litologica simiglianti alle nostre *ofioliti*. E nemmeno mi afforzerò degli argomenti addotti dal signor Nogues ([1]) in appoggio dell'origine eruttiva di tali rocce; imperocchè la più parte riposano sulle loro condizioni litologiche, che non corrispondono a quelle delle nostre serpentine e pel rimanente son tratti dai supposti effetti di metamorfismo e di dislocazione, che io non ammetto sieno avvenuti nei Pirenei se non avvennero per alcun'altra catena di montagne. Piuttosto dell'origine eruttiva di quelle rocce mi persuade lo scarsissimo valore che hanno gli argomenti dei signori Violet d'Aoust e Garrigou, i quali scrissero ultimamente in sostegno della genesi per metamorfismo delle ofiti medesime. I quali argomenti, che qui mi permetto di ricordare, si riducono ai seguenti: le ofiti sono in strati facenti passaggio a rocce sedimentarie, e che si ponno ritenere pure esse metamorfosate; fatto tutt'altro che generale nei Pirenei e del quale abbiamo potuto apprezzare convenientemente il valore nell'Apennino. Sono le ofiti silicati prevalentemente idrati, abbondano di piriti, di interstrati di *sale* e di *gesso*, di quarzo, di banchi dolomitici; caratteri che certamente non ne escludono l'origine eruttiva più di quanto questa possa negarsi ai melafiri del Tirolo meridionale e del Bellunese, tra le due formazioni gessifere del Servino e del Raibliano e talora alternati con banchi dolomitici poco potenti e metalliferi. Alle ofiti mancano le scorie, le pomici, le vernici o parti superficiali vetrificate; caratteri, che mancano a tanti porfidi e a tanti basalti. Le ofiti dei Pirenei finalmente appartengono a parecchi, anzi a molti e molto distanti livelli geologici; e questo non vedo come possa essere argomento in favore della loro origine metamorfica, quando poi in realtà esse ofiti sono di composizione così varia che io ritengo sieno molto più analoghe tra loro in Italia le serpentine alpine con quelle apenniniche. D'altronde non è punto vero che anche esistendo tale costanza di caratteri litologici a più livelli geologici, con analogo accompagnamento di rocce, da questo fatto consegua la dimostrazione della origine metamorfica di una roccia cristallina o cristalloide. I basalti giuresi delle isole Ebridi sono analoghi agli eocenici e miocenici del Vicentino, ed i trappi della formazione carbonifera della Scozia non son molto diversi dai porfidi augitici del Trias alpino e dalle lave augitiche del Vesuvio. I porfidi del Permiano, i melafiri del Tirolo meridionale, le doleriti del Vicentino, e le stesse trachiti degli Euganei sono accompagnate da tufi gradatamente sfumantisi nelle rocce scistose, o marnose, od arenacee, o calcari, alternate con quelle rocce, della cui origine vulcanica io credo che nessuno possa ragionevolmente dubitare. Mi piace altresì ricordare come questi autori, dopo aver esposto tali obiezioni all'origine eruttiva delle ofiti, ammettano che in parecchi punti dei Pirenei come a s. Jusseth, a Luchon e specialmente a Berre, Gléon, Villesèque, Treilles e nella gola di Gléon, le ofiti attraversano con veri dicchi gli scisti siluriani ed i calcari del Lias. Tanto non possiam dire delle nostre serpentine apenniniche.

([1]) *Ophites des Pyrénées*. Lyon, 1865.

Ad onta quindi dell'appoggio, che potrei trarre dal confronto tra gli Apennini ed i Pirenei in sostegno di talune idee svolte in questo scritto, tuttavia me ne astengo; ritenendo per massima generale tali confronti di regioni lontane assai pericolosi e nel caso nostro essendomi poi convinto che di rocce come le ofiti dei Pirenei ne abbiamo nella serie alpina e prealpina quante ne desideriamo, tanto di eruttive, in dicchi evidentissimi, quanto di metamorfiche nelle formazioni precarbonifere. Non è con quelle rocce, nè sulle Alpi, nè sui Pirenei, che si risolveranno le questioni, che risguardano le serpentine eoceniche dell'Apennino.

Parte V.

Conclusioni riguardo alla storia geologica delle ofioliti apenniniche.

Dalle esposte osservazioni e dal breve sunto, che precede, il lettore avrà facilmente rilevato come emergano alcuni fatti, che o sono posti fuori di questione o ponno esserlo qualora altri fatti analoghi loro si aggiungano e ricevano conferma di analoga interpretazione da parte dei geologi. Io li formulerò brevemente, siccome conclusioni della presente Memoria e nel tempo stesso come tesi da discutersi da chi non ne fosse persuaso.

1. La zona ofiolitica dell'Apennino segna un livello geologico e non passa i confini dell'eocene. Questa tesi è contraria all'opinione della maggior parte degli autori che ho ricordato; eppure tra gli argomenti che le si ponno opporre non vedo quelli che più mi convincerebbero del contrario, cioè la precisa indicazione delle località e dei rapporti stratigrafici di serpentine apenniniche inferiori al piano nizzardo o superiori al piano liguriano. Vi sono bensì argomenti indiretti, apparentemente fortissimi, i quali si ponno trarre dalla molteplicità degli orizzonti delle argille scagliose, delle quali io stesso ammisi che la massima zona ricopre la zona ofiolitica. Ma io son ben lontano dall'escludere tale molteplicità di livello delle argille scagliose, che ritrovo nelle Alpi identiche nelle serie permiana e triasica a molti livelli, con gessi e con depositi metalliferi. Ma non complichiamo la questione dell'origine delle ofioliti con inopportuni rapporti, che in ultima analisi sono poco logici; non essendovi meno differenza tra le argille scagliose e le serpentine di quanto ve ne sia tra queste e gli alberesi o le arenarie del macigno.

Non vorrò certamente sostenere, con tal unità cronologica, l'assoluto parallelismo di tutte le masse ofiolitiche, dalla Liguria al capo Argentaro e dall'alta valle tiberina alla valle del Reno. Nell'area medesima da me esaminata, la zona serpentinosa con due o tre livelli di massimo sviluppo delle lenti ofiolitiche, misura talora oltre 500 metri di potenza. Anzi io non vorrei che si escludesse la possibilità che in taluni siti la zona ofiolitica possa rappresentare tutto od in parte il piano nizzardo. Ma di serpentine mesozoiche o mioceniche non credo che negli Apennini se ne siano scoperte; nè credo che se ne scopriranno in avvenire.

È inutile che insista sulla continuità stratigrafica di questa zona, la quale è perfetta; ove noi poniamo mente alle enormi abrasioni, che essa ed i sopraposti terreni

eocenici hanno subìte sin dal primo disegnarsi della attuale orografia, in epoca miocenica.

2. In questa zona serpentinosa le rocce ofiolitiche, cristalline o meno, sono foggiate a lenti stratiformi, ognuna delle quali presenta poca estensione e non grande potenza. Queste lenti sono generalmente separate da rocce dell'apparenza sedimentare la più comune, o per lo meno con tutti i caratteri del *Flysch a fucoidi,* nel cui seno esse lenti sono intercalate. Ad alcune di queste si può assegnare un' estensione di qualche chilometro colla massima potenza di 50 metri; nella Liguria occidentale queste misure sono probabilmente superate, ma nel rimanente dell'Apennino settentrionale e centrale sono raramente raggiunte.

3. Non solo gli interstrati, ma perfino gli *interclusi* calcari e scistosi, che si osservano nelle serpentine brecciate, nelle iperiti più o meno alterate e nei conglomerati granitico-cloritici, non hanno subìta profonda alterazione, nè chimica nè molecolare. Per questa ragione principalmente non possiamo ammettere che la zona ofiolitica siasi trovata in condizioni tali di profondità sotterranea e sottomarina da subire in posto quell'azione cristallogenica, che ha profondamente alterato le rocce protozoiche; tra le quali pur se ne contano talune identiche o molto simiglianti alle serpentine, *ma non si avverte alcun interstrato, che conservi l'abituale struttura dei sedimenti marini.* E se tanta analogia sussiste tra le serpentine di epoche così differenti, come sono analoghi per natura e per rocce concomitanti molti altri tipi di rocce emersorie, specialmente le basiche; ne potremo al più trarre la conseguenza che queste serpentine si mantennero poco alterabili dall'azione puramente metamorfica, appena che nella loro massa vennero a cessare le condizioni di temperie e di movimento cristallogenico, alle quali dovettero la loro formazione, la loro emissione come lave sottomarine e le modificazioni subìte appena dopo la loro emissione (1).

4. Gli interstrati dimostrano che le serpentine si formarono sul fondo di un mare non eccessivamente profondo, il quale era non si sa ancora il perchè, per amplissima estensione disabitato da animali fissi. Tanto prima che dopo la formazione della zona ofiolitica, le alternanze di depositi furono frequentissime e quindi tenuissima è la

(1) Certamente non si intende qui di parlare di una immediata successione di tali movimenti cristallogenici e meccanici, per loro natura lentissimi. Fatto sta che finita l'epoca tongriana, sollevato, infranto ed eroso il mantello dell'alberese e del macigno, le correnti, che trasportarono i materiali del conglomerato ofiolitico in epoca del miocene inferiore e medio, trovarono tutte le accennate varietà di rocce già bell'e formate, e solo si può dubitare che fosse o meno di già avvenuta la concentrazione dei filoni metalliferi o la iniezione degli amalgama ofiolitici. Dall'essere però il livello di tutti i giacimenti cupriferi e ferriferi inferiore alle rocce tongriane e per le strette relazioni, che essi presentano col gabbro e coi galestri, di formazione immediatamente posteriore a quella delle serpentine, io sarei portato a credere eocenico anche il fenomeno idrotermale della formazione di questi filoni. Rimangono poi i disturbi meccanici, a più riprese subìti dalle ofioliti, dai magma ofiolitici, dai filoni e dalle rilegature asbestoidi e steatitiche della formazione ofiolitica; ed anche di questi credo che i più importanti abbiano accompagnato il sollevamento posteocenico, che altri sieno avvenuti quando si abbozzò l'attuale orografia in epoca del plioceno antico, e che altri infine abbiano accompagnato le fratture sismiche, che precedettero ed accompagnarono lo stabilimento degli spiragli vulcanici da Radicofani al mare di Sicilia. Ma lo sviluppare conveniente questa tesi equivarrebbe quasi a scrivere la geologia della nostra penisola; nè io sono da tanto, nè reputo i tempi maturi per potere por mano a tale lavoro.

potenza media di cadauno strato; alla quale condizione si aggiunge la scistosità, prodotta dai successivi spostamenti e dalle pressioni esercitate secondo varie direzioni.

5. La zona ofiolitica è ricoperta da varia potenza di rocce, disposte a banchi molto più estesi che le singole lenti ofiolitiche, di rocce argillose, molto ossidate, poco magnesifere, che si vollero da taluni alterate dalle serpentine e da altri formate come queste per metamorfismo in posto, sotto l'effetto di correnti mineralizzanti provenienti dal basso. In fatto, tranne alcun evidente passaggio dalle iperiti al gabbro rosso, nulla ci autorizza a legare la spiegazione della genesi delle serpentine a quella delle dette roccie da cui sono ricoperte. Dobbiamo però riconoscere che anche queste si alternano con depositi prettamente sedimentarî. Anzi mi permetto di insistere sulla necessità di non esagerare l'idea della presenza in essi galestri e gabbri di interclusi; dovendosi ritenere invece che nella massima parte di casi essi ponno esser i frammenti degli interstrati, infranti, cementati o rimasti sciolti e dalla erosione superficiale ancora più confusi. La spiegazione più probabile di questi gabbri e galestri sembra esser quella di ritenerli fanghiglie eruttive rimestate; o quanto torna pressochè lo stesso, depositi marini, alterati, contemporaneamente alla loro formazione, per l'aggiunta di materiali di provenienza endogena. In questi gabbri e galestri, per concentrazioni di poco posteriori alla loro formazione, avvenne la concentrazione dei noti minerali, che in essi abbondano, sotto forma di ammassi generalmente poco estesi o di rognoni. Una tale origine hanno facilmente i gessi dei galestri, abbastanza diversi per la loro forma massiccia da quelli delle gessaie a filliti mioceniche di alcuni punti dell'Apennino settentrionale.

I rapporti della zona ofiolitica con tali rocce proteiformi, che ricordano le marne triasiche, non devono essere in ogni caso nè disconosciuti, nè esagerati. Non si deve negare la loro quasi costante associazione, intesa però nel senso che si è descritta; ma scendendo a dettagli, si vedono moltissimi siti, ove la zona ofiolitica, senza traccia di galestro o di gabbro rosso, riposa sotto e sopra i calcari e le arenarie a fucoidi; ed ancor molto maggiori estensioni di terreni con grande abbondanza di galestro e con qualche traccia di gabbro rosso e senza alcun affioramento serpentinoso. Delle varietà di gabbro rosso, quella che potrebbe definirsi un'iperite brecciata ed alterata, assai spesso metallifera, è compagna inseparabile delle masse ofiolitiche; le altre varietà diasprigne si affratellano a preferenza ai galestri e come questi si manifestano dalle serpentine meno dipendenti.

6. La presenza delle dette lenti di rocce ofiolitiche nella formazione liguriana dell'Apennino, non ne altera punto l'andamento stratigrafico; le accidentalità di dettaglio incurvano, rompono e spostano le masse ofiolitiche nè più nè meno che le altre rocce. Però al contatto delle masse compatte e più potenti delle serpentine cogli strati più plastici e più sottili, che le comprendevano, siccome si osserva in ogni alternanza molto contorta di rocce di assai diversa natura e di potenza molto differente, si osservano i massimi disturbi e fratture.

Per quanto profonde modificazioni molecolari e cristallogeniche ponno essere avvenute in seno a quelle lenti ofiolitiche, prima o durante o dopo la loro emissione, l'effetto dinamico di esse modificazioni non può aver avuto un'efficacia tuttora rilevabile nella posizione stratigrafica di quelle masse.

7. Almeno nella regione esplorata e pare anche nell'Apennino settentrionale non si è potuto constatare che esistano dicchi nè di serpentina nè di alcuna altra roccia ofiolitica, attraverso le rocce cretacee od eoceniche. Da qui la questione tuttora aperta dell'origine di queste roccie ofiolitiche. Ma per non protrarre indefinitamente tale questione, essendochè in tanto profondi disturbi subìti dalle formazioni mesozoiche o cenozoiche dell'Apennino ritengo che sarà cosa molto poco probabile la conservazione e meno ancora il riconoscimento dei dicchi se furono contorte ed infrante le colate; ed anche per non isolare le rocce ofiolitiche da altre rocce silicate, cristalline, intercalate in strati dell'epoca medesima, occorre studiarle nei loro proprî caratteri litologici e di mutue relazioni di parti. Alle induzioni di questo studio non potremo certamente negare quel valore, che si concede ad altre analoghe induzioni risguardanti altre rocce massiccie, come ad esempio i melafiri triasici delle prealpi e le trachiti di monte Amiata, delle quali noi pure non conosciamo le vie per cui si espansero, eppure non dubitiamo punto della loro origine eruttiva.

8. La parte quasi sempre prevalente nelle singole masse ofiolitiche è la serpentina diallagica, roccia porfiroide a pasta peridotica, idratata, con disseminazione di un pirosseno distintamente cristallizzato. Per quanto valore si dia ai fenomeni di concentrazioni cristallogeniche, queste non bastano sicuramente a spiegarci la comparsa di grosse lenti di tale roccia in mezzo a strati, rimasti nel loro originario stato di composizione chimica e di struttura molecolare. Notisi che si tratta di una serie eocenica e di rocce che erano già come sono al presente all'aurora dell'epoca miocenica. Della tenue profondità, alla quale questa serie si è trovata nei periodi successivi al suo deposito, forse non saranno disposti di far troppo calcolo i sostenitori del metamorfismo in posto; ma questa, io giudico, essere prematura fidanza nell'aspetto sotto il quale le future ricerche porranno la ipotesi laplaciana. Qualunque sia per essere la legge di progressione della temperatura terrestre dalla periferia al centro, rimarrà sempre insufficiente a produrre un metamorfismo in sito, esteso sopra un area così vasta, la profondità, alla quale si trovò la serie ofiolitica allo scorcio dell'eocene. Infatti, per le non dubbie prove dei sollevamenti preeocenici delle masse costituenti le Alpi, per l'indole litorale della formazione tongriana e pel fatto che la emersione della serie delle rocce eoceniche avvenne molto per tempo e quindi non dovette essere nè troppo potente nè formato in mare troppo profondo il mantello delle rocce tongriane, è molto se a questo possiamo assegnare la originaria potenza di sei a settecento metri ed una profondità quindi di poco superiore ad un chilometro sotto il livello marino, in epoca tongriana, della serie ofiolitica. Perciò le rocce cristalline che sono comprese in questa serie, se non hanno potuto formarsi in sito prima del miocene inferiore, dovettero comparire in seno a rocce marine che si depositavano in un mare poco profondo; e ciò in verun altro modo che per eruzioni sottomarine di magma magnesiani o feldispatici, nei quali possiamo anche ammettere una certa quale originaria differenza, per non essere costretti a dare troppo valore ai fenomeni di concentrazione.

9. Le eufotidi, la euritotalciti, le ranocchiaie, le quali hanno l'apparenza talora di dicchi (ma esclusivamente nelle rocce ofiolitiche) ma più spesso come amigdale limitate, devonsi probabilmente a concentrazione cristallogenica, avvenuta poco dopo

la eruzione dei magma magnesiani, nella cui massa esse rocce si generarono. Ma conviene pure ammettere che dovevano essere originariamente diversi i magma, in cui si formarono questi tipi più decisamente cristallini.

10. Anche le iperiti, le serpentine amorfe od oolitiche, le serpentine affanitiche, hanno con tutta probabilità un'origine eruttiva; specialmente quando formano potenti ammassi, omogenei, estesi, piuttosto uniformi; come si osserva nell'area esaminata a sud di Bobbio, presso Cà di Lago, al Ponte Organasco e presso Pietranera di Rovegno.

11. Le vene di crisotilo, di asbesto, di calcite rappresentano successive rilegature delle masse ofiolitiche, cui il sollevamento posteocenico andava gradatamente spostando, contorcendo ed infrangendo. Le ofisilici sembrano aver avuta una origine più antica.

12. Il conglomerato granitico-cloritico, passante alle serpentine ed alle iperiti, è sviluppatissimo nella porzione superiore della zona serpentinosa, forse in tutta la estensione dei suoi affioramenti. Non mancano interstrati di questo conglomerato nella zona delle argille scagliose. Nell'ipotesi di una genesi endogena delle ofioliti, la sua presenza può esser di lume nell'indagare la roccia, dalla quale (per processi chimici molto facilmente spiegabili e dimostrati dalla pseudomorfosi che il serpentino presenta in pressochè tutti i silicati alluminosi) a qualche migliaio di metri sotto il fondo marino, si potevano preparare i magma serpentinosi. Nel mentre che la spiegazione di tale conglomerato o se vuolsi anche di tale granito cloritico, nel seno delle lenti ofiolitiche e tra il gabbro e persino tra i banchi di galestro mi pare assai difficile. Che il macigno, metamorfosandosi in posto sotto l'azione di correnti sotterranee, possa aver dato origine ad una delle rocce alpine, dalle quali egli stesso provenne, attraverso il lavorìo delle forze esogene e dopo aver segregato i magma magnesiani! Mi pare un ciclo huttoniano un poco fantastico; assai bello, ma altrettanto sospetto per la sua stessa appariscenza.

Le quali conclusioni, se non sono erronee, si ponno comprendere nel definire le rocce ofiolitiche, siccome *quelle tra le rocce eruttive sottomarine, che subirono nella loro massa le più profonde modificazioni cristallogeniche, appena dopo il loro espandimento sul fondo dei mari, a seconda della varia natura chimica dei magma generalmente fangosi, più o meno magnesiaci e composti di minerali chimicamente idrati e quindi anche per questo incapaci di produrre per la emissione del vapor acqueo i più appariscenti fenomeni vulcanici, anche nel caso che fosse stata permessa tale emissione dalla non grande profondità marina.*

DESCRIZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

Questo schizzo geologico presenta una certa precisione per l'area esaminata nel testo, da Torriglia a Piacenza ed a Voghera; pel rimanente venne delineato in base alle osservazioni ed alle carte dei signori Pareto, Perazzi e Sismonda.

Si è pensato di segnare sfumati i contorni delle suddivisioni dell'eocene superiore, includenti la formazione ofiolitica, perchè realmente non si saprebbero con sicurezza segnarne i confini, pei passaggi litologici, coi quali esse suddivisioni si concatenano.

Anche per la delimitazione dei terreni pliocenici del Piacentino, i contorni sono approssimativi per la mancanza di rilievi di dettaglio.

Tavola II.

Nell'area meglio esplorata, si rilevarono gli spaccati disegnati in questa tavola e che furono ridotti dalla scala di 1:100000, nella quale venne fatto dallo scrivente il rilievo geologico della provincia pavese. Il primo spaccato è destinato a mostrare i rapporti della formazione serpentinosa colle rocce eoceniche, con essa concordanti e colla serie molassica, che l'una e le altre ricopre con discordanza. Anzi come discordano dalle rocce eoceniche le arenarie glauconiose di Serra e le puddinghe ofiolitiche di Castel del Groppo, così da queste discordano le molasse ed i conglomerati del pliocene inferiore e superiore e le marne gessifere, che volgono assai inclinate a nord-ovest.

Gli spaccati seguenti, nel delineare i quali ho procurato di attenermi il più possibile ai rilievi eseguiti, anche per le secondarie contorsioni, mostrano in modo evidente la posizione stratigrafica delle ofioliti nella serie liguriana. Si mantennero le tinte, le sfumature ed i segni convenzionali adoperati nella tavola precedente.

Tavola III.

Ho scelto i profili ed i dettagli più opportuni per dare ad un tempo l'idea di questo paesaggio apenninico, ove la generale monotonia orografica è interrotta dagli affioramenti ofiolitici; e per porre sott'occhio al lettore i più convincenti esempî della regolare stratificazione delle serpentine nei terreni dell'eocene superiore. Passiamoli rapidamente in rivista.

1. Il fatto qui rappresentato ha l'importanza di una forte analogia a quanto si può ragionevolmente ammettere che sia successo per adunamento molecolare in seno ai magma ofiolitici in proporzioni, s'intende, molto maggiori. È un'alternanza assai contorta di strati arenacei e marnosi, che si osserva lungo la via nazionale da Bobbio a s. Martino. Le marne sono ricoperte da efflorescenze saline; contengono numerosi rognoni calcari, a nucleo talora piritoso, più spesso calcareo-selcioso, frequentemente infranti e rilegati di spato come le septarie. È evidente che la formazione di questi arnioni, se fu posteriore al deposito delle marne nelle quali si sono formati, fu però precedente al sollevamento; essendochè essi pure sono spesso piegati e secondano colla loro disposizione nelle marne l'andamento degli strati di queste.

Analogamente le rocce tutte ofiolitiche, che troviamo far parte delle puddinghe ofiolitiche, del miocene inferiore e medio, devono essersi già formate e ridotte come al presente prima che i loro banchi fossero spostati e gradatamente incurvati ed infranti dal sollevamento posteocenico.

2. Scorgesi la duplice catena serpentinosa del monte Barberino (1) e dei monti di Gavi (4), presso i Gerbidi di Bobbio e dei monti Pietra Parcellera (6) e di Scabiazza (5 e 7 paese omonimo). La prima è la più antica e succede direttamente alle marne salate (9) ed ai calcari marnosi dei Gerbidi (10); incisa dalla Trebbia (8), riappare col dirupo di Degara (2) e continua quindi ai monti Pietra Corva e Sassi Neri, figurati nello schizzo quarto. La catena più settentrionale attraversa la Trebbia a cinque chilometri a monte del paese di Travo.

Lungo il sentiero dai Gerbidi a Scabiazza, si osservano le più chiare ed interessanti alternanze delle serpentine colle brecciole ofiolitiche, coi calcari marnosi e colle arenarie. Nella vallicola dei Gavi si osservano poi pressochè tutte le varietà di rocce ofiolitiche ricordate nella descrizione.

3. È uno dei mille esempî di contorsione degli scisti del Liguriano (2) in località ove mancano affioramenti ofiolitici. È un dirupo di quasi novanta metri lungo la Trebbia (3), a nord di Montebruno. La sponda opposta della valle è costituita da rocce alquanto più tenaci; cioè, dai calcari marnosi dei monti Carmo (2), Alfè e Lesima, le quali rocce si estendono quindi, con inclinazione verso il Mediterraneo, sin quasi a Genova.

4. La zona ofiolitica di monte Barberino si ripresenta quasi sfasciata in triplice zona di affioramenti serpentinosi presso il sentiero, che dalla via postale del monte Penice conduce a Romagnese, in valle del Tidone. Nei dossi di Pietra Corva (3) ed ai Sassi Neri, prevalgono le ofioliti poco diallagiche e molto ricche di crisotilo e di asbesto. Il monte Pamperdù (2), intermedio tra i primi e da essi separato da rocce sedimentari della più normale apparenza, è quasi completamente costituito da iperiti granulari e dal conglomerato granitico-cloritico, con bellissime varietà di rocce ortosiche ed oligoclasiche. I galestri ed i gabbri rossi si osservano a sprazzi tra le rocce eoceniche lungo la via dalla Cantoniera sin quasi a Varzi; sicchè si può dire che nel piano di essi è sculta questa culmina al pari di quella di Brallo, all'opposto versante del monte Penice.

L'affioramento ofiolitico, che attraversa la strada postale (6), si dirige così continuo e così ingombro di massi alla superficie sin verso la Vaccarezza, da sembrar una vera corrente di lava; le sue ultime propagini sporgono dal suolo a Cà Brugnoni, a breve distanza da Bobbio. Il dosso (4) che comprende questo affioramento è delle solite arenarie e marne galestrine del *Flysch*; mentre che il dosso più vicino (5) a sinistra è di calcari marnosi, compatti, a ricche geodi e filoncelli di calcite, e questa roccia, evidentemente inferiore alla zona serpentinosa, costituisce la massima parte del monte Penice.

5. Presi questa interessante veduta dal sentiero che conduce da Pietranera a Casanova, a sud di Ottone. Il sentiero attraversa i calcari marnosi stessi, che formano un piccolo rilievo (3) sul versante orientale del monte Castellazzo (2); analoghi a quelli del non molto discosto monte Alfè (6), sulla sponda opposta della Trebbia. Il paese di Pietranera, coi suoi ubertosi coltivi, è sul gabbro rosso, alternato con argilloscisti; ma movendo a ponente, verso Rovegno, il terreno si fa galestrino e brullo. Il paesello deve il suo nome al dirupo di ofiolite, che sporge in sua prossimità dal gabbro rosso e quivi presso è abbondantissimo il conglomerato cloritico-granitico, con ciottoli calcari, punto alterati. Il monte Castellazzo, elevato a 949^{m}, è costituito da iperiti, passanti al gabbro rosso ed alle ofisilici, con vaghe geodi di quarzo ematoide od ametistino. Al monte Veri (7) si sviluppano gli argilloscisti nodulosi normalmente inferiori alla zona serpentinosa.

6. Si prospetta da tramontana la catena serpentinosa di s. Stefano d'Aveto (1) e la sua continuazione coi monti di Roccabruna e Scorlighera e colle ofioliti di Borzonasca (2). Lontana, sulla sinistra, si scorge la vetta del monte Penna, di calcari marnosi a fucoidi. Profonde convalli, con versanti assai declivi ma discretamente imboscati, convergono nell'Aveto, che molto più a nord mette le sue acque nella Trebbia. Tutte queste valli sono sculte negli argilloscisti inferiori alle ofioliti.

7. Costeggiando il fiume Trebbia da Ottone a Ponte Organasco lungo la strada mulattiera (2), scorgonsi con ammirazione i dirupi del Corno d'Aquila (3) scolpiti in un fascio di banchi di iperite e di ofiolite pisolitica, saussurritica, alternati piuttosto fittamente con arenarie ed argilloscisti. Più in alto (4) serpeggia il sentiero, che conduce da Lozzo a Serra, Oneto a Cerignale, attraverso le ofioliti steatitose e gli stessi argilloscisti. Nello sfondo, sulla sinistra, si deprime la sella di Brallo, dalla valle di Collistano a quella della Staffora; essa è incisa nel galestro.

8. Continuando la via verso Bobbio, passato il paese e scesi al ponte della Trebbia (1), sotto Organasco, si osserva un altro fascio di banchi ofiolitici, quivi singolarmente continui e distinti dagli interstrati, elevarsi con forte inclinazione dal fondo della valle e muovere verso gli affioramenti serpentinosi di Cerignale (4). Le ofioliti (2) prevalgono nel superiore gradino; nel gradino intermedio (3) prevalgono le serpentine amorfe, brecciate, a copiosi interclusi calcari; più sotto (5) gli argilloscisti nodulosi ed i calcari marnosi mostrano le solite, bizzarrissime contorsioni e continuano sino alla foce del fiume Aveto.

Nel cumulo di massi giganteschi, sulla sinistra della Trebbia si raccolgono saggi di bella ofite

oligoclasica, con piriti e con interclusi argillosi. Lungo la parte illuminata del superiore affioramento ofiolitico, si tentarono ricerche in un giacimento cuprifero: ma senza risultati soddisfacenti.

9. Come tanti altri dirupi ofiolitici, si erge questo di Pregola (4) di una considerevole altezza (93^m) sulle ondulazioni del circostante terreno arenaceo-marnoso. Dietro alla massa principale scorgesene un' altra, colla prima allineata e riunita mediante secondarî affioramenti; e quivi prevalgono le ofioliti diallagiche, mentre a Pregola abbondano le omogenee, brecciate. Il dosso del Groppo di Pregola (3) che si erge sul davanti, pur esso allineato coi primi è quasi completamente formato di conglomerato granitico-cloritico, associato all' iperite granulare. Alcuni massi granitici, hanno oltre alla clorite, del talco; altri hanno una mica rossastra, assai alterata. Sul Groppo di Pregola ed alle poco lontane selle di Brallo, sviluppansi le argille scagliose, che seguitano sull' una o sull' altra sponda della valle della Staffora, sin quasi a Varzi e poi riappaiono nei pressi di Godiasco.

10. Questo schizzo, rilevato lungo il sentiero da Casanova a Fopiano, a sud di Ottone, è quanto si può desiderare convincente per dimostrare che le serpentine, quantunque distintamente diallagiche come quelle che formano il banco 2, non hanno esercitata la minima alterazione sulle rocce a contatto. Infatti, colle solite contorsioni, succedono alla detta ofiolite gli scisti argillosi, i calcari marnosi e degli strati non molto potenti di brecciole calcareo-ofiolitiche (4); mentre il gabbro rosso (5) e più a ponente, verso Rovegno, il galestro, assumono uno sviluppo straordinario, per gran tratto senza la presenza di ofioliti. Il banco di serpentina diallagica ha la potenza di otto metri e contiene arnioni steatitosi, che furono qualche anno fa estratti, come si scorge dalla cava segnata col numero 3. Questa ofiolite riposa regolarmente sopra un altro banco di conglomerato, a pasta serpentinosa e ad elementi calcari per nulla alterati; più sotto, altre ofioliti e gli argilloscisti nodulosi, normalmente inferiori alla zona ofiolitica.

11. È un profilo geologico, preso da un' altura a ponente di Volpedo (1) e combinato col primo spaccato della tavola precedente può dare sufficiente idea dei rapporti tra i varî membri della serie terziaria nell'Apennino pavese. Volpedo, sul Curone, Rivanazzano (2) sulla Staffora sono alle falde dei colli di Mombrizzone (5), Nazzano (3), Madonna del Monte (4) e monte s. Ambrogio (6); tutti costituiti da conglomerati e da molasse del pliocene inferiore (*Messiniano*) e questa serie continua (7), con direzione sud-ovest, a ponente del Curone sino alla Scrivia. A Mombrizzone e presso Cascinella (8) sono le più abbondanti località fossilifere di questa poco estesa ma interessantissima zona pliocenica.

Più a monte affiora il *Flysch*, discordante naturalmente dal pliocene e si trovano tracce di galestro alla costa della Forche (12) e nella valle della Staffora, ove assai potente e caratteristico questo terreno si stende nei pressi di Godiasco. A Cà di Bruno (13) si presenta la forma più normale delle marne ed arenarie a fucoidi; mentre a Zebedassi (14) e giù sino al letto del Curone, prevalgono i calcari marnosi, parimenti a fucoidi, colla loro costante inferiorità alla zona ofiolitica. Infatti questa (18) affiora tra Cà di Bruno e Zebedassi, con non grande spessore (circa 30 metri) ma con tutte le più importanti particolarità litologiche, compreso il conglomerato granitico-cloritico e con una continuità ragguardevole. È questo il più settentrionale degli affioramenti ofiolitici dell'Apennino, a levante della Scrivia.

Le vette del monte Penice (16), il Lesima (15) ed il Bogleglio (19), rappresentano la serie cronologica dei membri del piano liguriano, e la zona ofiolitica coi galestri affiora alla più volte ricordata sella di Brallo (17), tra la Staffora e l'Avagnone, confluente della Trebbia.

Nello spazio intermedio tra il Bogleglio e la costa della Forche, lo spartiacque tra il Curone e la Staffora è formato verso l' alto dalle arenarie glauconiose del monte Vallassa (11) e di Serra e dalle puddinghe ofiolitiche del Pozzol del Groppo (10); rappresentanti rispettivamente il miocene medio ed inferiore. Al monte Vallassa si raccolgono i fossili più abbondanti del primo di questi periodi.

12. Ancor meglio che al monte Pamperdù di Bobbio, rappresentato alla fig. 4, quest bellissimo dirupo di Cariseto (1), a sud di Cerignale in val d'Aveto, rappresenta la grande potenza che assume a volta il conglomerato granitico-cloritico, tra le arenarie del *Flysch*, a breve distanza dalle ofioliti (2 e 3), a levante ed a ponente del paese. Il dirupo, sotto i ruderi del colossale castello, misura 45 metri e continua a levante con uno sprone, scheggiato nelle più alpestri aguglie, lungo quasi mezzo chilometro. E molto più si estende verso mezzodì la vasta amigdale granitica; avvegnachè

più a ponente si ritrovi a Selva e sin quasi ad Ottone superiore. Quivi però la roccia ha apparenza di un' eurite porfiroide e la si direbbe identica a quella che nella valle del Coppa, a sud di Montalto, si alterna coi galestri e col conglomerato granitico-ofiolitico a cemento siliceo. Nessuna alterazione nelle rocce sedimentari accusa l' azione di questo agglomerato cristallino, che io ritengo eruttivo.

13 e 14. Disegnai queste sezioni come mi si presentarono, lungo la strada in costruzione da Lozzo a Ottone. Lascio al lettore di decidere se il conglomerato ofiolitico o dirò meglio la serpentina brecciata a frammenti calcari ed argillosi (3) sia sotto forma di dicco o si tratti di frammenti di amigdale o di banchi, dal sollevamento spostati e rotti, e confusi coi più tormentati calcari marnosi (1) e cogli ancora più contorti argilloscisti (2). E notisi che lungo questo tratto della valle di Trebbia le accennate rocce si giustapongono nel modo più bizzarro frequentissimamente, senza che la forma di dicco sia accusata sicuramente da una continuità delle masse serpentinose; nemmeno dove il loro nucleo è formato da ofiolite diallagica o da ofite oligoclasica, come appunto quivi presso si rimarca e più a sud di Ottone verso il ponte de' Corvi. Io mi dichiaro poco persuaso che sieno veramente dei dicchi, tuttochè convinto dell' origine eruttiva delle ofioliti; ma potrebbe essere che l' interessante località meglio studiata potesse somministrare prove più convincenti che realmente quivi appunto o poco discosto e specialmente alle falde del monte Alfè sieno state le serpentine injettate nella serie del Tongriano inferiore. Osserverò che è qui appunto, tra le fessure di questi scisti argillosi e dei calcari marnosi, laminati dalla distorsione, che si raccolgono i migliori campioni di quarzo aeroide, di calcite e di dolomite cristallizzati; ma questi minerali pure si raccolgono nelle fessure e nelle geodi della breccia serpentinosa.

15. Questa figura mostra la struttura della serpentina di Corno d'Aquila (fig. 7), ad arnioni pisolitici con nuclei saussurritici. Le sferule più decomposte e la massa che involge gli arnioni sono facilmente separabili in lamelle concentriche. Siccome questa struttura è presentata dalle porzioni superficiali della roccia, io penso si debba a basaltizzazione per idratazione ed ossidazione, dalla roccia stessa subìte tutto attorno ai formatisi adunamenti di feldispato amorfo. Quivi presso raccolsi anche delle serpentine affanitiche, omogenee e delle altre serpentine a piccoli noduli saussurritici, molto uniformemente distribuiti e questa roccia è identica a certe spiliti della formazione permiana e del gruppo del Verrucano in tutte le Alpi lombarde e venete.

16. L' ultima figura dimostra come sia la serie delle rocce, che ricopre la serpentina diallagica al Collegio, lungo la via più alta da Bobbio a Ponte Organasco. Qui, come alle cave di steatite di Casanova (fig. 10), si vede che i galestri sono a qualche distanza dalla ofiolite e che stanno frammezzo delle rocce sedimentari, la cui deposizione può ben ritenersi influenzata dalla presenza delle serpentine, ma che non ponno in alcun modo dirsi da queste o dalla formazione di queste, alterate posteriormente al loro deposito. La serie d' altronde in questo punto è poco disturbata dal sollevamento.

OSSERVAZIONE

Non dubito punto che saranno molti gli scritti, che non ho potuto consultare circa l'oggetto trattato in questa Memoria; ho potuto però, durante la correzione delle bozze, pigliar conoscenza dell'assai interessante lavoro dell' illustre signor Gastaldi « *Sugli elementi dei conglomerati miocenici del Piemonte* » (Atti Acc. R. di Torino, serie II XX, 1861). Vi appresi: come questi conglomerati appartengano a due livelli, nell'inferiore dei quali sono molto più abbondanti i calcari, leggermente marnosi, e così precisamente doveva essere durante la abrasione del mantello liguriano, ricoprente quasi ovunque la zona ofiolitica; come questi conglomerati contengano, non solo rocce apenniniche, ma rocce alpine, analoghe a quelle dei coevi di Lombardia e provenienti dalle valli di Ivrea e della Sesia; che l'egregio autore molto prima di me ha scorto la importanza della regione tra la Trebbia, la Scrivia ed il Bisagno, quale centro di partenza della maggior parte delle rocce di questi conglomerati nell'Apennino piemontese; che finalmente se un geologo volesse nella serie dei terreni cercare una formazione, che con grande probabilità possa riferirsi a deposito *marino-glaciale*, non potrebbe trovarla altrove che in questo orizzonte dei *conglomerati ofiolitici* del miocene inferiore e medio.

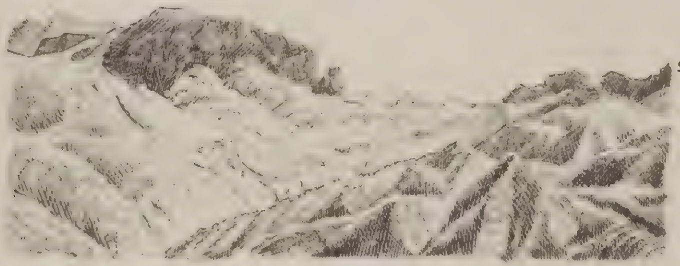
INDICE

Cenni preliminari . . . . Pag. 652
Parte I. *Andamento della formazione serpentinosa nell'area esaminata.* . . » 653
Parte II. *Composizione litologica della formazione serpentinosa dell'Apennino bobbiese* . . . . » 663
Parte III. *Rivista dei principali affioramenti serpentinosi dell' Italia settentrionale e centrale* . . . . » 671
Parte IV. *Breve riassunto dei lavori risguardanti le ofioliti apennine* . . » 678
Parte V. *Conclusioni riguardo alla storia geologica delle ofioliti apennine* » 699
Descrizione delle tavole. . . . . » 704

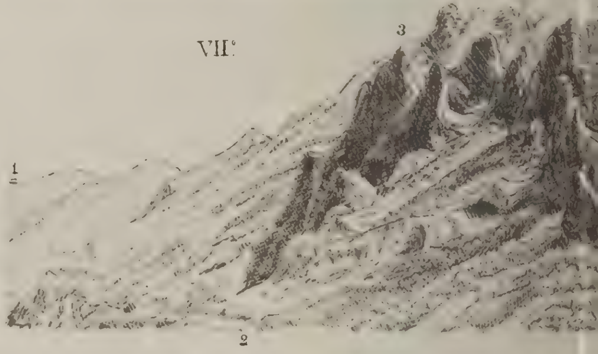
I°

IV°

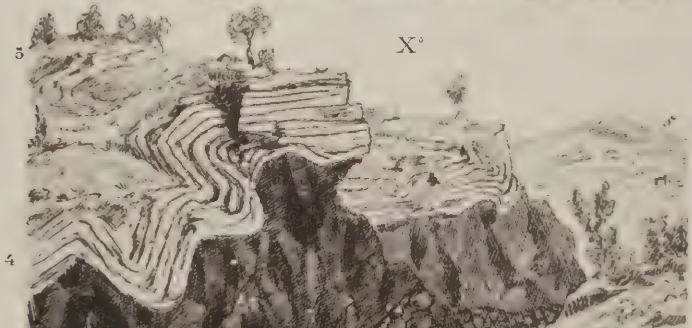
VI°



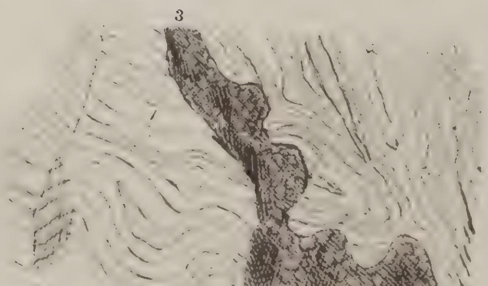
VII°



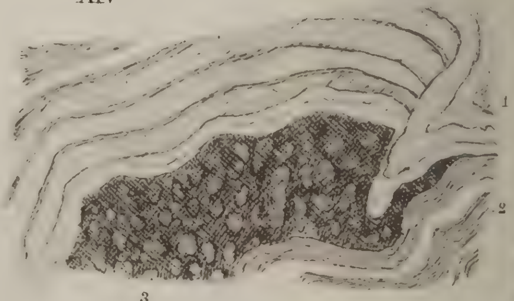
X°



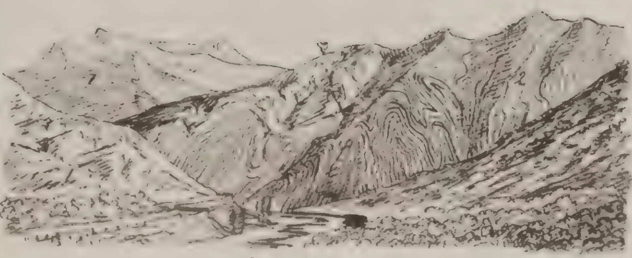
XIII°



XIV°

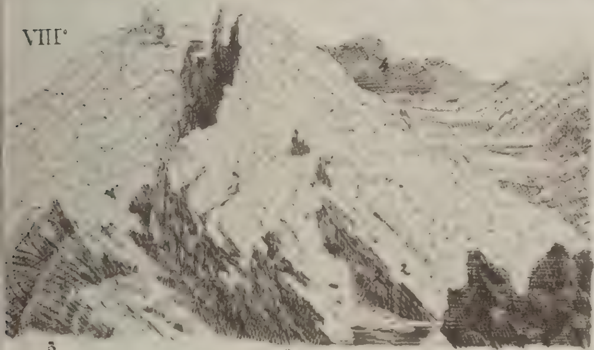


III°

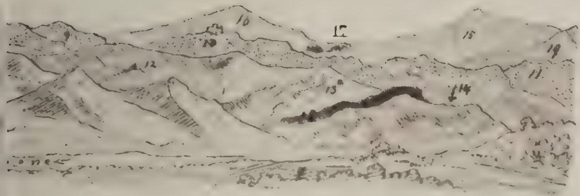


V°

VIII°

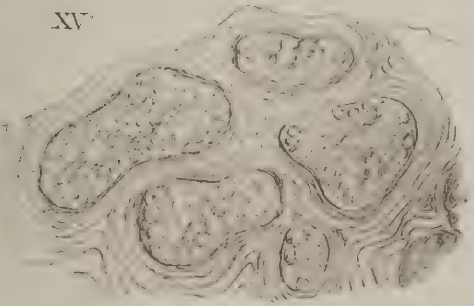


IX°



XII°

XV°

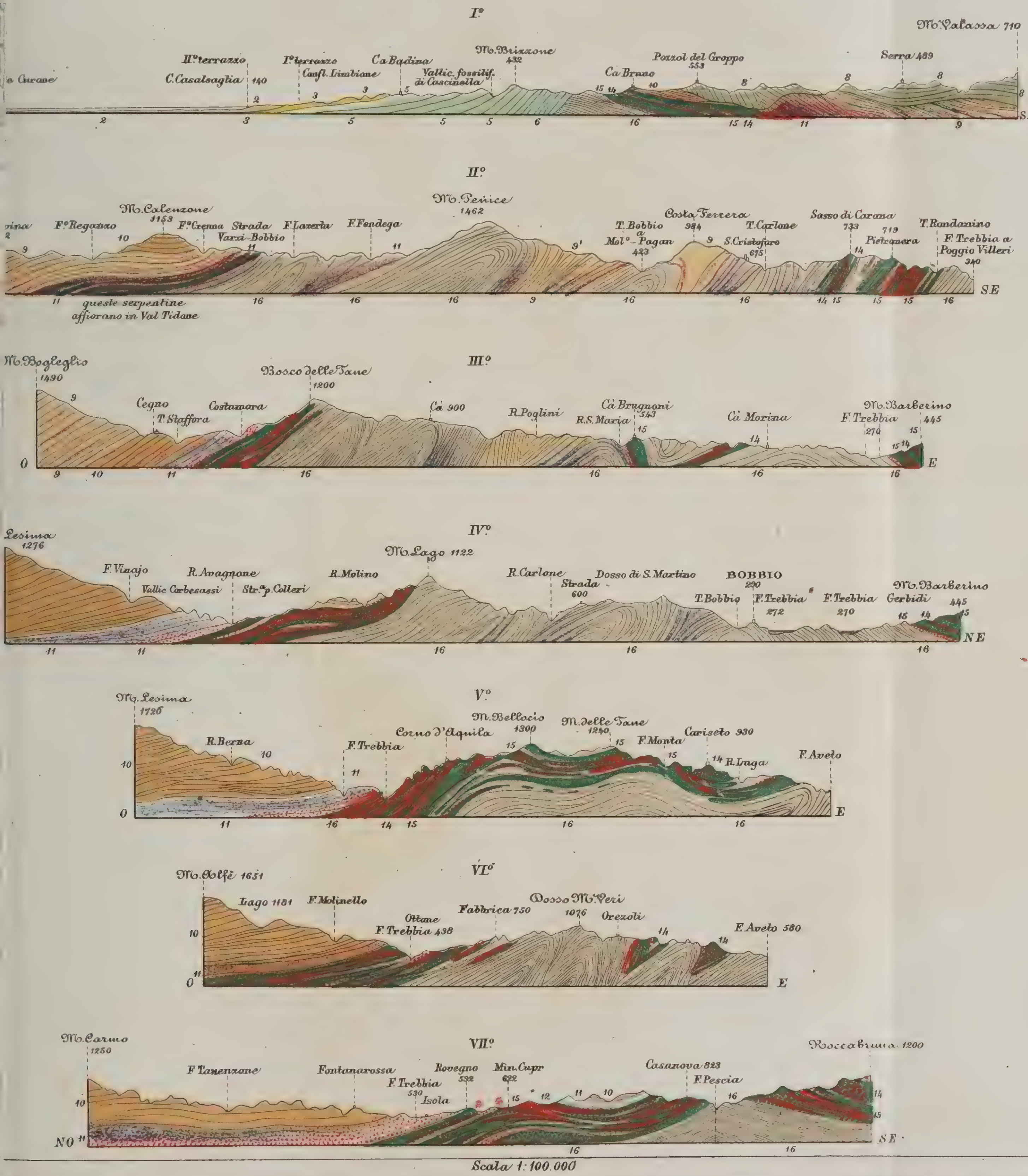


XVI°

T. Taramelli dis. 1878.

SPACCATI GEOLOGICI

attraverso la
Formazione serpentinosa
nello
Appennino pavese (Bobbio)



Scala 1:100.000

Cromolit. Bruno e Salomone, Roma

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

Le ossa fossili subapennine dei contorni di Roma.

Memoria del Socio G. PONZI

letta nella seduta del 5 maggio 1878.

Negli Atti del X Congresso degli scienziati italiani raccolti in Genova nell'anno 1846, io faceva di pubblica ragione un catalogo di animali vertebrati, le cui ossa fossili erano state raccolte presso Roma nei depositi alluvionali del Tevere e dell'Aniene. Da quel tempo io non ho più parlato di tali anticaglie se non per incidente nelle varie mie pubblicazioni. Ma non per questo ho mai desistito dal tener dietro a quella specie di scoperte, non tanto per arricchire le collezioni del gabinetto geologico di questa R. Università, quanto per farne soggetto di studio e contribuire ai progressi della italiana paleontologia.

Allorchè io scrissi sulle ossa fossili dei contorni di Roma non era ancora definita la scala delle assise subapennine, nè erano stati praticati tutti quegli studî che in questo lasso di tempo hanno arricchito lo scibile di tante cognizioni sugli avvenimenti cosmici, e sugli esseri loro contemporanei. Perciò ben si comprende che il fine di questo mio lavoro, è di far conoscere cotesti guadagni col correggere, aggiungere e riordinare il catalogo degli animali che seminarono la terra delle loro reliquie. Però devo avvertire che in cosifatta impresa mi vedo condotto a ripetere cose già dette nella mia *Cronaca subapennina* per dimostrare le relazioni che ebbe la vita coi fenomeni cosmici nello svolgimento delle epoche geologiche trascorse, o le modificazioni subìte nelle sue forme per cambiamenti climatologici. La qual cosa faccio volentieri colla maggior brevità e chiarezza che mi è possibile non solo per richiamare a memoria le cose dette, ritoccarle e correggerle, ma altresì per tesservi sopra la storia degli animali nel decorrere delle epoche geologiche, e di più per non obbligare il lettore ad andarle a cercare negli Atti dell' XI Congresso degli scienziati italiani, tenuto in Roma nell'ottobre del 1873.

La scala delle roccie subapennine si compone di tutte quelle sedimentazioni fatte dall'ultimo dei sollevamenti apennini, per rappresentare la lunga serie di secoli trascorsa fino a noi. Queste si possono comodamente studiare nei contorni di Roma: conciossiachè le oscillazioni a cui andò soggetto il nostro suolo, e il sollevamento per azioni cosmiche della fiancata destra del Tevere attraverso l'eterna città, mise allo scoperto le assise più antiche di sedimento marino, per modo che le prominenze del monte Mario e del monte Vaticano ci danno facilità a studiarle, mentre le più recenti ci si mostrano comprese entro le vallate dei fiumi maggiori. Laonde ci possiamo chiamar fortunati nel possedere in quella serie di roccie le rappresentanze di tutti i tempi trascorsi, e argomentare gli avvenimenti di natura che rendono così maravigliosa la storia subapennina.

Tutta questa serie di secoli pertanto trascorsa dall'ultima comparsa degli Apennini, fu dai geologi distinta in epoche terziarie e quaternarie: ma a dire il vero, oggi non mi sembra più sopportabile. Avvegnachè i progressi della scienza avendo fatto meglio conoscere il gran cataclisma vulcanico-glaciale passato sulla terra avanti l'epoca nostra, mi sembra che quella partizione dovrebbe essere più precisa ed esatta. Laonde sarei di opinione dividerla in tre periodi più razionalmente caratterizzati. Nel primo si comprendono le due epoche terziarie, miocenica e pliocenica, che tranquille precedettero e prepararono i grandi sconvolgimenti a cui andò soggetto il pianeta terrestre. Nel secondo la diluviale e la glaciale, ossia un periodo di azione cosmica, durante il quale si compì quel gran cataclisma, che mise a soqquadro tutto intero il globo, facendolo cangiare di forme geografiche, ed estinguere la più gran parte degli esseri che l'abitavano. Nel terzo l'epoca alluvionale, o di ripristinamento dell'ordine di natura, dopo quella grande fase colla restaurazione della vita, a cui fa seguito l'epoca moderna che tuttora corre tranquilla, recando seco le reminiscenze dei fatti compiuti.

Dato così un primo abbozzo di un quadro geologico dei tempi subapennini, ecco il programma di questa Memoria destinata a trattare delle ossa fossili subapennine dei contorni di Roma.

1. Passare in rivista la scala dei terreni subapennini, e con essa la serie dei tempi trascorsi avanti di noi, accusando le assise da cui sono state estratte le ossa fossili, e notando la loro qualità e giacitura;

2. Fare la storia degli animali o delle vicende a cui andarono soggetti per cambiamenti climatologici nell'attraversare la grande fase tellurica;

3. Distinguere le due faune che hanno figurato sulla terra: una prima del gran cataclisma, o la terziaria: l'altra posteriore, o quaternaria;

4. Dare i cataloghi degli animali, di cui si compongono, desunti dalle ossa fossili rinvenute;

5. Finalmente tirare delle deduzioni, e concludere su ciò che si è detto.

In tal modo messi quegli esseri in relazione coi fenomeni cosmici, e meglio conosciuto il posto che loro conviene nei fasti della terra, molti problemi verranno sciolti, e conciliate certe disparità di opinioni che tuttora ritardano il perfezionamento delle nostre cognizioni.

I.

Dobbiamo primieramente premettere che avanti il gran cataclisma compito sul nostro pianeta, i continenti non erano ancora emersi, e le pianure subapennine erano ancora fondi di mare. Dimodochè gli animali che respirano direttamente l'aria atmosferica, per necessaria conseguenza, doveano abitare le montagne, che, emergendo colle loro cime, facevano dell'Italia un lungo arcipelago. Laonde ne discende che le ossa fossili degli animali terrestri rinvenute nei sedimenti marini, discesero dalle prominenze apennine per trasporto delle acque e perciò sono erratiche, ma contemporanee.

PRIMO PERIODO

EPOCA MIOCENICA

PIANO SUPERIORE — *Tortoniano* Mayer.

I sedimenti riferibili a questa epoca sono costituiti dalle marne turchine inferiori alternate da un sabbione dello stesso colore, distese in grossi banchi regolari per indicare una deposizione tranquilla, e perciò le loro fenditure e salti derivano da oscillazioni del suolo sperimentate dopo la loro formazione. Queste assise si possono osservare alle radici dei monti Mario e Vaticano, entro la stessa Roma, ove tali marne mioceniche si osservano piene di fossili marini, molti dei quali appartengono a specie estinte. Dall'analisi fatta di essi, crediamo non errare nel riferirli al piano superiore del miocene, o al terreno tortoniano di Mayer.

Per quanto però io sappia non vi furono mai rinvenute ossa di vertebrati terrestri, ma solamente quelle di grossi cetacei, delle quali non si può con sicurezza definire la specie. Vi si trovano ancora impressioni di pesci cicloidi, con vertebre e denti di placoidi (1).

Nè si deve far meraviglia di tali mancanze; imperocchè nei terreni di quell'epoca mancano le breccie o i sedimenti di trasporto, entro le quali si sarebbero potute meglio rinvenire le ossa di animali terrestri. Ciò indica un'atmosfera secca senza pioggie generatrici di torrenti, conveniente ad un cielo subtropicale, sotto il quale le altitudini montane erano popolatissime di grossi pachidermi e di animali fatti per vivere sotto un cielo più caldo e sereno di quello che ora abbiamo sotto le nostre latitudini.

EPOCA PLIOCENICA

PIANO INFERIORE — *Zancleano* Seguenza.

Le stratificazioni che dovrebbero succedere alle marne inferiori mioceniche, mancano nella scala del monte Mario per combinazioni geologiche, e perciò conviene andarle a ricercare lungo il littorale tirreno, ove per sollevamento si vedono emergere sotto forma di piccole isole rilevate ad una certa distanza fra loro. Tali sono il capo d'Anzio, la costa di Palo, e la maggiore rappresentata dalla collina di Corneto. Sono costituite da calcari di una grossolana tessitura denominate Macco, biancastre o ferruginose, compatte o farinose in banchi regolari, e sollevati a circa 45° sull'orizzontale.

Sono ricchissime di fossili marini, e già dimostrano una decisa fisionomia pliocenica, se non che si distinguono per il loro grande sviluppo, specialmente di certe conchiglie come sono i pettini, e i balani associati ad altre specie ora perdute. Vi si osservano altresì molte foraminifere fino a costituire banchi interi di amfistegine.

La giacitura e la fisionomia di questa fauna, danno motivo a crederla rappresentare il pliocene inferiore o il terreno zancleano del Seguenza.

Anche in queste assise non si trovano ossa di animali terrestri, e perciò argomentiamo regnassero ancora quelle stesse condizioni climatologiche dell'epoca precedente.

(1) Ponzi, *I fossili del monte Vaticano.* Atti della R. Accad. dei Lincei, 1876.

Piano medio — *Piacentino* Mayer.

Conviene ora ritornare al monte Mario per riprendere la serie stratigrafica ascensiva delle assise costituenti il pliocene medio. Le marne turchine superiori sono analoghe alle inferiori, se non che i loro strati sono meno potenti, e alternano con sabbie argillose di colore giallastro.

Alla Farnesina sulle radici di quelle prominenze queste marne si mostrano piene di fossili, tutti di fauna marina e ben conservati. Però non vi si nota più quel gran sviluppo di specie gigantesche che abbiamo fatto osservare nel Macco. Il numero delle perdute è minore, e la loro fisionomia è quella che si riferisce al piano piacentino di Mayer.

In molti altri luoghi compariscono queste marne più o meno fossilifere, sempre destituite delle ossa di esseri terrestri. Se non che fa eccezione un intero scheletro di elefante rinvenuto presso Rignano sotto il monte Soratte, la cui integrità e giacitura dimostrano essere stato in quei tempi inquilino del prossimo monte Soratte, poi il suo cadavere caduto nel sottoposto mare venne sepolto nella deposizione delle marne (¹). In quelle stesse vicinanze fu altresì rinvenuta un'altra zanna elefantina insieme a conchiglie plioceniche e impressioni di fucoidi, certamente contemporanei.

Piano superiore — *Astiano* Mayer.

Le sabbie gialle di Brocchi risultanti di granellini calcarei e silicei, che sovraincombono alle precedenti marne, costituiscono una zona distesa e continua per mostrarsi ovunque alla superficie del suolo subapennino, dove non arrivarono le deposizioni dei conglomerati vulcanici, di data posteriore. Quasi per tutto vi si vedono agglutinamenti delle stesse arene sotto forme irregolari e capricciose sparsi nel loro seno.

Anche queste sabbie sono eminentemente fossilifere, e sotto questo rapporto si resero celebri le reliquie di esseri marini del monte Mario fin da remoti tempi quando si giudicavano scherzi di natura o i testimonî del diluvio noetico. Ora la scienza ritiene i fossili marini del monte Mario come fauna del pliocene superiore o piano astiano di Mayer. In queste assise sono state altresì rinvenute ossa fossili di quell'epoca. Sono varî anni che insieme al senatore Spada e prof. Orsini, sotto Ripatransone sulla costa adriatica, ne rinvenimmo un deposito, in cui si riconobbero elefanti, bovi cervi e cavalli. Brocchi e Riccioli vi trovarono mascelle elefantine, e sono pochi giorni che dalle medesime sabbie gialle venne estratto un dente dell'*Elephas antiquus* Falc. in occasione della costruzione di un fortino militare per la cinta di Roma sul monte Mario.

Quanto al clima conviene fare attenzione alla natura delle stesse sabbie, le quali altro non sono che un minuto detrito delle roccie apennine, portato giù da una debole forza traslativa di acque incapaci di convogliare materiali grossi e pesanti. Si argomenta da ciò che il cielo non era più sereno come nei tempi precedenti; ma per abbassamento di temperatura, e per condensamento di vapori già reso nebbioso e piovigginoso. E in verità, un confronto fatto colle faune plioceniche che abbiamo accennate ha ben dimostrato, che il numero delle conchiglie viventi sulle estinte

(¹) La storia di questo rinvenimento si può leggere nella *Cronaca subapennina* sopracitata.

cresce col decorrere dei tempi fino al punto che il clima subtropicale miocenico era presso a poco disceso al grado moderno. Wood fu il primo ad accorgersi di questa degradazione, che fu poi confermata da Lyell e da altri paleontologi inglesi e tedeschi. I fatti cosmici compiuti nelle epoche che a quella precedettero si aggiungono a dar prova di una tal verità: di modo che si può liberamente ritenere che durante i tempi pliocenici la terra ebbe a sperimentare un abbassamento termometrico.

SECONDO PERIODO VULCANICO-GLACIALE

EPOCA DILUVIALE — Diluvio apennino

Breccie e ciottoli ritondati dall' attrito di trasporto risultanti da un rimescolamento di frammenti di roccie apennine più meno grossi, senza traccie di sostanze vulcaniche, distesi in letti irregolari sulle precedenti sabbie gialle, e crescenti di potenza e di volume all'approssimarsi dei monti da cui discesero.

In questi depositi mancano i fossili marini, perchè la vita non era più possibile entro acque tanto agitate e tempestose. Vi si trovano invece ossa di mammiferi terrestri trascinate e travolte dal trasporto, spettanti a grossi pachidermi che vissero sui monti. Tali sono, a cagion d'esempio, una difesa elefantina scoperta in quelle medesime breccie alla salita di s. Maria in Valle per andare al convento dei Cappuccini di Subiaco, e i resti di un grande ippopotamo rinvenuti dal prete Rusconi di Monticelli alle radici del monte Gennaro.

A questa medesima epoca sarei di opinione riferire un deposito lacustre costituito di sabbie argillose giallastre, disteso immediatamente sulle arene plioceniche, da me visitato varî anni or sono presso Montoro, sulla sponda destra della Nera all'uscita di questo fiume dai monti di Narni. Entro tali assise si contenevano le reliquie di un mastodonte associato a grosse elici, altre conchiglie d'acqua dolce e vestigia di vegetabili terrestri. La giacitura di quelle ossa mi fece argomentare, avere esistito in quel luogo un discreto lago, sulle sponde del quale visse quel proboscidiano nell'epoca diluviale.

Per le ragioni, che in seguito andremo ad esporre, io credo altresì che in quest'epoca abbiansi a collocare i depositi ossiferi delle caverne. Numerose sono le spelonche sulle altitudini dei nostri monti, che sebbene poco esplorate, pure hanno dimostrato contenere reliquie di animali miste ad opere manufatte indicanti la presenza dell'uomo preistorico. Tali sono le ossa di cervi della grotta di Collepardo, quelle di jene e di cervi del Soratte e quelle parimenti di cervi associate ad un omero di orso gigantesco, estratte di recente da una caverna di Poggio Mojano sulla catena di Sabina (1).

Dagli stessi terreni rappresentanti questi tempi facilmente si argomenta che il raffreddamento terrestre era già così avanzato che pel condensamento sempre crescente dei vapori, l'atmosfera divenne la sede di tremende burrasche da cui derivarono immani pioggie le quali scaricandosi sulla terra diedero il carattere all'epoca diluviale.

(1) *Sopra un omero fossile di orso gigantesco ed ossa di cervi rinvenute a Poggio Mojano.* Nota del prof. G. Ponzi. R. Accad. dei Lincei, aprile 1878.

Così si generarono quei precipitosi torrenti, che trascinando una enorme quantità di ciottoli li stratificarono sulle sabbie gialle plioceniche.

Mentre sulle terre emerse si compivano questi maravigliosi fenomeni, sotto le acque di quel primitivo arcipelago, è logico, che si facessero sperimentare i primi forieri della vulcanicità che nella seguente epoca dovea spiegare tanta possanza. In principio leggeri convellimenti sismici dovettero scorazzare per ogni dove, ma per gradi facendosi più intensi si dovettero rendere così gagliardi da annunciare che il fuoco terrestre era prossimo ad erompere. Tale dovette essere l'aspetto della natura all'epoca diluviale.

EPOCA VULCANICO-GLACIALE — Periodo glaciale

Nella scala stratigrafica marina i sedimenti che rappresentano quest'epoca sono gli ultimi, e si compongono di conglomerati o tufi vulcanici risultanti da un impasto di scorie, lapilli, pozzolane, pezzi di lave ed altri minerali elaborati dal fuoco, misti a frammenti di roccie erratiche di diversa natura ed origine. Distesi in grossi banchi formano il soprasuolo delle pianure etrusche, latine, erniche, e di altre contrade lungo la costa del mare Tirreno. Di compattezza svariata costituiscono leggiere colline o un suolo largamente ondulato e orizzontale.

I tufi vulcanici formati sotto le acque marine non hanno fauna, imperocchè la vita non potea aver luogo nel seno di un mare nel quale ardevano incendî tremendi. Vi si trovano invece reliquie di esseri terrestri, trascinativi da intensi uragani concomitanti le più gagliarde eruzioni. Le ossa fossili non vi sono comuni, però quelle raccolte appartengono a grossi pachidermi, come nei depositi di data anteriore. Un grosso omero elefantino venne fuori dai tufi vulcanici della villa Pamfili presso Roma: una difesa parimenti elefantina si è rinvenuta nei tufi della vigna Silvani a Tiradiavoli nelle vicinanze di Bravetta: e dai tufi dell'Aventino a s. Prisca furono estratti quei resti di grossi animali, conservati nel Museo del Collegio romano ora trasferiti nel gabinetto universitario.

Il clima di quest'epoca fu il più rigido che abbia sperimentato la terra; imperocchè il raffreddamento incominciato nell'epoca pliocenica, e che nella diluviale giunse al condensamento dei vapori producendo dirotte pioggie, sceso al di sotto dello zero convertì le acque in nevi, dando così principio al periodo glaciale propriamente detto, e alle conseguenze che ne derivarono.

È logico credere che quello straordinario abbassamento di calorico, presa origine ai poli, scendesse attraverso le latitudini, per modo che mentre nelle regioni temperate incominciarono a farsi sentire i primi freddi, le estreme erano già agghiacciate. Humboldt considerava gli emisferi terrestri come due montagne riunite per le basi, perchè nell'ascendere le prominenze si ripete la medesima scala climatologica delle latitudini. Se ciò è vero, il freddo dovette calare dai più eccelsi cuspidi dei monti, ed ecco biancheggiare di nevi quelle altitudini, e un candido mantello di geli distendersi sulle loro chinate, e prolungarsi nelle convalli sotto forma di lunghi e vasti ghiacciai, recando seco immense morene e massi erratici spinti fino nel sottoposto mare. Se tutte le catene di montagne presentano le vestigia di questo singolare avvenimento cosmico, ne discende che il periodo glaciale fu sperimentato da tutto intero il pianeta ricuoprendolo di desolazione e di squallore.

Frattanto un gran nùmero di crateri si aprono su tutta la superficie terrestre per i quali irrompe il fuoco della terra per dare sfogo ad una interna congestione, probabilmente prodotta dalla contrazione della sua crosta solida. Ed ecco che fra ghiacci ardono tremendi vulcani, dai quali sono gettate fuori tutte quelle materie che diedero origine ai tufi sottomarini, diffusi sopra vasti spazî. Non v'ha contrada della terra che non sia seminata di gruppi di crateri vulcanici, per la maggior parte spenti, ma che per la loro contemporaneità dimostrano aver corso un periodo nella storia del globo, in cui la vulcanicità fece la più grande comparsa.

Nella nostra penisola una lunga zona di bocche eruttive corre lungo la costa tirrena disegnando un dislocamento parallello alla direzione degli Apennini, quasi tutti sottomarini. I vulcani Cimini, i Laziali, gli Ernici, la Rocca Monfina, la Somma, i Campi Flegrei, le isole Eolie, l'Etna, Pantellaria, sono tutti glaciali. Da essi furono vomitati i materiali dei tufi i quali non poco contribuirono all'innalzamento del fondo marino.

Ma è pur da notare che lungo quella gronda apennina i terreni morenici o mancano del tutto o sono rari. La ragione di questo difetto a mio credere potrebbe essere derivata dallo stesso vulcanismo, che irraggiando enorme quantità di calorico servì a moderare gli effetti del freddo, e temperando l'ambiente impedì sulle pendici apennine la formazione dei ghiacciai. Vedremo in seguito quali servigi rese alla vita questa circostanza, e quali ne furono i risultati.

Altri effetti, oltre i citati, si aggiunsero a rendere più grave il cataclisma vulcanico-glaciale. I più sfrenati terremoti concomitanti le eruzioni dovettero manomettere tutta intiera la superficie del globo, facendolo totalmente cangiare nell'aspetto geografico. Fu allora che emersero i continenti, si aprirono gli stretti di Gibilterra e dei Dardanelli e tanti altri mutamenti di scene, che non possono essere attribuiti ad altri cosmici avvenimenti. In Italia il lento e generale sollevamento di tutta intera la penisola fece scomparire il primitivo arcipelago: si separò la Sicilia convertendosi in un'isola: si sprofondò il monte Pisano, e presso Roma si rilevò la sponda destra del Tevere per rendere prominenti i monti Mario e Vaticano. Così tutta la faccia della terra prese la fisionomia geografica che tuttora mantiene. Fu quello adunque il gran cataclisma che segna una data speciale nei fasti del pianeta terrestre avanti l'epoca nostra.

TERZO PERIODO POST-GLACIALE

EPOCA ALLUVIONALE

Le grandi operazioni compiute dalla natura in quel grande perturbamento cosmico avrebbero dato certamente risultati anche maggiori, e forse sarebbero riusciti fatali allo stesso pianeta se la depressione del calorico avesse progredito. Ma per buona sorte giunta ad un certo grado di depressione si arrestò e con lentissimo cammino si fece retrograda. Laonde, il clima rialzandosi e riguadagnando il calorico perduto, si determinò la fusione delle nevi sulle montagne, che gradatamente si fece generale. Così si produssero immani correnti che diedero il carattere all'epoca alluvionale. La scena del mondo era cangiata perchè il fondo del mare subapennino messo in secco si distendeva in vaste pianure, sulle quali le acque dolci prendevano possesso, trascorrendole con nuovi fiumi per raggiungere il mare ancora in ritirata. Ma grandi e

imponenti fenomeni si doveano ancora compiere su queste distese: l'acqua ed il fuoco doveano ancora dare prove della loro possanza, imperocchè l'alluvionale fu un' epoca di restaurazione nell'ordine di natura. Laonde i depositi che rappresentano quei tempi si distinguono in marini, di acqua dolce e terrestri.

A) *Depositi marini.*

I sedimenti delle onde marine dell'epoca alluvionale si compongono di letti di sabbie ferruginose limitati ad una zona lungo il lido tirreno elevata ad un livello a cui le acque moderne non giungono più. È questo un fatto che accenna ad un'ulteriore e lento sollevamento in virtù di azioni telluriche non ancora del tutto spente e perciò furono distinte dal Risso col nome di spiaggie emerse.

I fossili che si contengono in questi depositi marini, sono già quelli stessi che ora vivono nel mare Mediterraneo, e la regolarità delle assise, che li contengono, dimostra avere già la natura ripresa la sua calma normale dopo aver tanto operato.

B) *Depositi di acqua dolce.*

I terreni che si riferiscono alle acque dolci si distinguono in fluviali e lacustri, alla formazione dei quali concorsero cause diverse. Ai primi appartengono i ciottoli e i conglomerati di breccie trasportati dalle fiumane e rimaneggiati nel cammino, costituiti dai detriti delle roccie apennine siliceo-calcari, miste a pezzi di tufo e lave vulcaniche rotondati per l'attrito. Questi materiali rappresentano un rimescolamento di tutto ciò che incontrarono lungo la via. Giacciono in grossi banchi irregolarmente stratificati e intercalati da sabbie fine, per indicare le piene e le magre a cui andarono soggette le acque. Sono distesi sul fondo di quegl'immensi alvei fra i quali serpeggiano i moderni fiumi, scavati dalle imponenti masse di acqua scese dai monti durante la fusione delle nevi glaciali.

In questi depositi si rinviene il più gran numero delle ossa fossili, e da essi uscirono per la maggior parte le copiose collezioni che si conservano nei gabinetti paleontologici. Se non che conviene fare una distinzione fra le ossa che giacciono nelle breccie e quelle comprese nelle sabbie fine, fornite di caratteri diversi. Le ossa delle prime appartengono evidentemente ad una fauna più antica, ossia alla terziaria, logorate e disperse dal trasporto sofferto. Al contrario nelle sabbie si trovano le ossa nella loro integrità o in interi scheletri spettanti ad animali contemporanei allo stesso deposito e che dopo la catastrofe glaciale vivevano sulle sponde di quei grandi fiumi.

Dalle cave di breccie aperte per usi economici, nella valle tiberina al ponte Milvio e a Tor di Quinto: in quella dell'Aniene al monte Sagro e alla Rebbibia: in quella dell'Arone a Castel di Guido ed in altre località: vengon fuori tuttodì una quantità di ossa di vertebrati terrestri di diversa specie le quali hanno principalmente fornito questa nostra Università di una ricca collezione. Sono veri cimiteri di elefanti, ippopotami, rinoceronti, bovi, cervi, cavalli, orsi, jene, cani, uccelli, ecc. anche misti a selci tagliate dalla mano dell'uomo di cui terremo parola.

Nei depositi di sabbie sottili poi furono rinvenuti, qualche gatto con tassi, lepri, rane, anguille associate a conchiglie d'acqua dolce e ad impressioni di foglie e tronchi di piante terrestri.

Nella valle del Turano entro un sabbione fu scoperta la testa di un ippopotamo, e nel bacino del Sacco presso Ceprano si rinvenne un deposito di ossa, fra le quali era una magnifica testa intiera del bue primigenio, difese elefantine, vertebre e ossa di altri pachidermi. Potrebbero essere citati altri luoghi di rinvenimento, ma queste notizie ora bastano per avere un criterio, cosa sono le breccie alluvionali in questi nostri paesi.

Passando ora alle formazioni dei laghi ci si presentano i travertini, o le calcarie depositate dalle acque dolci nei loro bacini, o sulle dilatate sponde dei fiumi. Formano grossi banchi, specialmente dove sorgenti calcarifere ne somministrarono i materiali, come si vede in quelli che sono ancora in via di formazione, sebbene le antiche sedimentazioni si distinguano per maggior potenza e compattezza miste a produzioni alabastrine.

I travertini sono vere miniere di fossili, perchè ne contengono in quantità prodigiose, tutti nella loro integrità e posizione normale, senza alcun segno di trasporto, meno qualche eccezione per combinazione locale. Laonde chiaramente apparisce che in queste assise si contiene la vera fauna alluvionale alla quale conviene riferire altresì i fossili delle sabbie fine, che abbiamo vedute interposte alle breccie.

La fisionomia presentata dall'insieme dei fossili dei travertini è ben diversa da quella che offrono le reliquie organiche di questi esseri che vissero avanti il cataclisma vulcanico-glaciale. Però ha molta analogia colla fauna moderna perchè da quella discesa, e modificata in qualche parte da semplici cambiamenti climatologici.

Il Tevere presso Orte e Fiano è fiancheggiato da potenti banchi di quella pietra piena di fossili; l'Aniene sotto Tivoli e Monticelli, lo è egualmente, e il Sacco fra Anagni e Ferentino ne depositò gran copia. In tutti questi luoghi sono estratti per uso edilizio, come pietra da taglio, e per tutto vengon fuori sempre conchiglie d'acqua dolce, vegetabili e resti di animali terrestri: ossa bovine, di cervi, porci, cani, jene, roditori, uccelli, frammiste ad elici, limnei, paludine, planorbi, e piante che tuttora vivono nelle adiacenti contrade. Una grossa testuggine d'acqua dolce fu rinvenuta nei depositi dell'Aniene prossimi al ponte della ferrovia sulla Salaria, con altre ossa e coproliti indeterminabili. Dai travertini del Castellano il prof. Orsini di Ascoli tirò fuori tanta quantità di queste reliquie da fornire molti gabinetti d'Europa. Esaminati, li trovai perfettamente identici ai nostri del piovente tirreno, di modo che possiamo con sicurezza ritenere che quella è la vera fauna alluvionale, e dell'epoca post-glaciale.

C) *Depositi terrestri.*

A questi si riferiscono i terreni vulcanici del Lazio, costituiti da quei materiali eruttati dai crateri dopo l'emersione delle pianure subapennine, e dopo l'estinzione dei vulcani Cimini. Si compongono di lave, scorie, lapilli, ceneri ed altre sostanze avventizie eruttate dalle loro bocche sotto forma di roccie erratiche.

Anche in questi si contengono ossa fossili di vertebrati terrestri, e specialmente vi sono stati rinvenuti, resti di cervi con impressioni di piante. Ricoperto dalla lava di Capo di Bove rinvenni un dente del *Cervus elaphus*, semiabbrustolito per accennare che questo animale vivea ancora nel Lazio durante le sue prime conflagrazioni, e quelle avvenute nell'epoca alluvionale [1].

[1] Ponzi, *Storia dei vulcani Laziali*. Atti della R. Accad. dei Lincei, 1875.

Ma la rielevazione di temperatura all'epoca alluvionale si dovette arrestare al punto in cui raggiunse l'equilibrio col calorico dello spazio ambiente al pianeta. Conciossiachè fu allora che dovette diminuire e sospendere la fusione dei ghiacci, e la fissazione della linea oscillante delle nevi perpetue all'altezza in cui oggi si mantiene, nello stesso tempo che fece sosta il ritiro dei ghiacci polari. Perciò le grandi fiumane alluvionali si ridussero ai fiumi attuali, e così tutto prese l'aspetto presente, e l'epoca moderna ebbe principio.

EPOCA MODERNA

I depositi in via di formazione sono quei medesimi dei tempi pregressi, ma in una scala molto minore e scemata, accennando alla tranquillità di natura, e a più piccola quantità di forze impiegate. Sulle coste italiane si depositano fine sabbie che le protraggono sotto forma di spiaggie sottili, ad eccezione delle sporgenze, costituite da roccie scogliose, le quali vengono perennemente flagellate dal moto ondoso del mare.

I fiumi maggiori per diminuita violenza traslatrice presto lasciano le più grosse e pesanti materie, per condurre finalmente al mare leggiere bellette o fine argille.

Peraltro conviene notare che in questa epoca eziandio non mancarono di manifestarsi fenomeni di perturbata natura. Imperocchè i vulcani del Lazio, continuando la loro operosità, per due volte si riaccesero prolungando la loro vita fino ai tempi storici. La prima di queste all'esordire dei tempi moderni o tradizionali, per i quali argomentiamo la riattivazione del cratere albano, e la vasta espansione dei peperini, entro i quali fu rinvenuto un corno di cervo ancora inquilino di quelle contrade (¹). Al declinare della vita del vulcano di Albano si deve la catastrofe di Albalunga capitale dei popoli latini, ossia la sua prima distruzione per opera di natura. Finalmente l'ultima eruzione del fuoco terrestre fu quella del monte Pila all'epoca di Roma reale, di brevissima durata, imperocchè il fuoco si trasferì nelle regioni inferiori dell'Italia non lasciando nel Lazio che il ricordo dei terremoti moderni.

I fossili contenuti nei terreni di moderna formazione sono identici a quelli che tuttora vivono nel paese e perciò entrano nel dominio della zoologia e della botanica.

Laonde conviene rivolgere l'attenzione ad un altro problema di gravissima importanza quale è quello che nel ripristinamento dell'equilibrio planetario, da cui prese principio l'epoca moderna, la temperatura della terra non tornò più al grado da cui era discesa. Se si faccia un confronto fra la fauna miocenica indicatrice di un clima molto più caldo, e quella dei giorni nostri si noterà una sensibile differenza in meno, o una ingente perdita di calorico. E qui conviene rammentare l'intensità manifestata del fuoco terrestre nel periodo del massimo freddo e la quantità di calorico planetario raggiato nello spazio, perduto per sempre. Laonde influenza maggiore dei raggi solari, e variabilità continua di climi, fino ad assumere l'aspetto attuale. Così l'epoca moderna fu definita per restare come una eredità degli avvenimenti pregressi.

Alcuni geologi hanno opinato che la terra ripristinata nell'equilibrio collo spazio si rese stabile, per non andar più soggetta a nuovi sconvolgimenti. In verità, con buona pace di costoro, io non mi sentirei inclinato ad accettare una tale sentenza,

(¹) Lucidi, *Memorie storiche dell'Ariccia*, cap. V pag. 50.

nè saprei darmi ragione come un essere vivente, quale è il globo terrestre, possa arrestarsi nel suo corso, per mettersi nello stato d'inerzia equivalente alla morte. In natura tutto è moto, e nella stessa terra l'enorme quantità di calorico che erompe dai moderni vulcani, dalle scaturigini termali, e dalle emanazioni gassose sparse su tutta la sua superficie, manifesta bastantemente l'interno fuoco pronto a suscitarsi e risorgere a nuove e più gagliarde operazioni qualora l'equilibrio in cui si trova il pianeta venisse per qualunque causa turbato. Tutte quelle perdite di calorico nello stato attuale, per quanto non alterino l'equilibrio, pur mi si dovrà concedere che col lungo andare dei secoli una qualche modificazione devono portare nelle condizioni climatologiche, e perciò sulla vita, pronta a risentirne i cambiamenti. Laonde tutto prova che in natura niente è fisso, ma tutto è operosità e vita.

II.

Al cospetto di tanti e così stupendi fenomeni compiuti sulla terra nelle trascorse epoche geologiche, qual fu la sorte degli animali, specialmente dei terrestri, tanto soggetti a risentirne l'influenza e gli effetti? Conviene farne la storia per rispondere a questo grande problema.

Oggi è a cognizione di tutti che numerose vestigia di animali giganteschi si trovano sparse in ogni regione del globo. La Russia, l'Inghilterra, la Francia, la Spagna, l'Italia, la Svizzera, la Germania, la Grecia, e perfino l'Asia e l'America sono piene di resti di elefanti, mastodonti, ippopotami, rinoceronti, dinoterî, tapiri, e tanti altri ora scomparsi. Dunque vi fu un tempo in cui tutta la terra era popolata da quegli inquilini, il cui insieme presenta un aspetto molto diverso dallo stato presente. Che se poi si rivolga l'attenzione alla giacitura di quegli avanzi organici, presto si vedrà che la maggior parte di essi sono contenuti in terreni di trasporto alluvionale, vale a dire che sono di più vecchia data, della roccia continente. Quale adunque sarà quest'epoca a cui riferire tali reliquie? Un confronto coi resti dei mammiferi fossili di altre località, dimostrando l'identità delle specie, fa scorgere che le nostre ossa fossili sono anteriori al gran cataclisma vulcanico-glaciale cioè si riferiscono ai tempi terziarî. Al declinare dell'epoca miocenica o al cominciare della pliocenica, dovea regnare nella natura una tranquillità tanto propizia alla vita. Un profondo mare spinto da leggiera brezza a lambir dolcemente le radici dei monti nutriva nel suo seno miriadi di esseri; mentre sulle emerse sporgenze passavano l'età dell'oro, numerose mandrie di animali terrestri, sotto un'atmosfera calda, limpida e serena.

Una fauna, così ricca di quelle specie che abbiamo citate, fa scorgere a colpo d'occhio, una grande analogia colle regioni meridionali, e perciò non dubitiamo attribuire a quei remoti tempi un clima analogo a quello che oggi regna nelle contrade subtropicali. Cosicchè chi volesse ripristinarlo, converrebbe che facesse risalire tutta la scala climatologica verso il polo, fino al punto che la zona torrida raggiungesse la temperata. In questo modo ritornerebbe nei nostri paesi il clima d'allora simile presso a poco a quello della Nubia o dell'Africa centrale. Per tale ragione non esistevano ancora le nevi sulle più rilevate cime dei monti, nè le regioni polari erano

ingombre di ghiacci inospitali. Gl'interi cadaveri di elefanti e rinoceronti che si rinvengono sulle sponde dell'Obi, della Lena, e del Yenissei nella Siberia settentrionale, sui quali tanto si discusse all'epoca della loro scoperta, sono una prova evidente della loro propagazione spinta fino a quelle estreme regioni. Laonde non è più lecito dubitare che al declinare dei tempi mioceni fu il regno dei grandi pachidermi, la cui dominazione si diffuse su tutta la superficie del globo.

Lo stato beato di quest'epoca non dovette essere breve a giudicare dalla quantità di reliquie, giunte colla sua fauna fino a noi: anzi sembra che durasse anni e secoli. Però giunse il tempo in cui incominciò a declinare, perchè le sorti del pianeta volgevano ad un cambiamento. La stessa natura sotto quelle belle sembianze già da lungi e segretamente preparava il gran periodo vulcanico-glaciale che dovea mettere a soqquadro tutta intera la terra. Nell'epoca pliocenica un lento abbassamento di temperatura incominciò a decorrere, e questo fu immediatamente avvertito dalla vita. Molti esseri scompariscono; altri sorgono a sostituirli. Fenomeno che si fa sempre più marcato fino al punto che al declinare di quei tempi terziarî il clima avea già raggiunta la fisionomia moderna. Quegli stessi elefanti di Siberia, che abbiamo detto compresi nei ghiacci, sono rivestiti di pelo e di criniera per dimostrare che la provvida natura li fornì di un mezzo di difesa contro il freddo incalzante. Ma questo neppure bastò, giacchè alla fine dovettero cedere ai più formidabili nemici, freddo e fame. Così i loro cadaveri restarono compresi nei ghiacci polari.

Che all'epoca pliocenica il primo raffreddamento si facesse sentire ai poli e da questi scendesse sull'equatore ben fu veduto da Lartet, quando nelle sue speculazioni scientifiche avvertiva una generale emigrazione di animali da nord a sud e poi un ritorno verso le loro native contrade. Dai quali traslocamenti risultò, secondo quel distinto paleontologo, che molti si estinsero, altri restarono nei paesi invasi, altri rimpatriarono. Questa dottrina riuscì gradita ai geologi, perchè è naturale che sotto l'influsso di un cielo fatto nemico alla vita si risvegliasse l'istinto innato alla propria salvezza. In verità ancor io l'accettai di buon grado; ma poi considerando che i continenti non erano ancora emersi, e gli animali terrestri doveano essere abitatori d'isole intercettate da tratti di mare, incominciai a dubitare, e, riconosciuta l'emigrazione impossibile, mi sembra che gli animali terrestri dovettero restare ove si trovavano, per attendere la grande catastrofe che in seguito ne fece macello.

Però non potrei negare le emigrazioni parziali, ove poterono compiersi; conciossiachè ce ne dà esempio l'elefante africano. Si credeva che gli avanzi di questo proboscidiano fossero esclusivi della Sicilia; ma dopo che dal barone Anca e da me furono riconosciuti i denti di questa specie fra i fossili romani, convien credere che nei tempi pliocenici rimontasse fino nell'Italia centrale (¹). A quell'epoca pare che l'Italia fosse in comunicazione coll'Africa per mezzo del banco dell'Avventura, e per lo stretto di Messina non peranche aperto. Laonde è probabile che l'elefante insieme ad altri animali seguissero quella via per condursi in Africa. Ma dopo che la Sicilia fu fatta una isola e sprofondato il banco dell'Avventura per effetto dei terremoti concomitanti il

(¹) Anca, *Sull'elefante africano rinvenuto fra i fossili post-pliocenici presso Roma*. Atti della R. Accad. dei Lincei, 9 giugno 1872.

vulcanismo glaciale, all'epoca della ristaurazione, quando cioè sarebbe dovuta avvenire la contro-migrazione, l'elefante non potè più ritornare in Europa, e perciò si fece africano, e inquilino delle regioni tropicali.

Nell'epoca diluviale succeduta alla pliocenica, quando cioè incominciavano a manifestarsi i primi effetti di un freddo sempre più crescente, e il condensamento dei vapori determinava sulle altitudini dei monti tremende burrasche, ognuno può imaginare in quale stato dovettero trovarsi quei vetusti abitatori. Avvolti nella bufera, negata loro l'emigrazione, dovettero scender giù per le chine erranti alla ricerca di un rifugio. Una fenditura nella rupe, una sporgenza rocciosa, e specialmente una caverna, dovettero essere cercate con grande avidità. Ed ecco propagato un generale movimento di costernazione: ecco suscitate lotte sanguinose per la conquista di una tana: ecco le più feroci belve restarne vincitrici, prenderne il possesso, e difendersi dalle sopravenienti aggressioni. Le scoperte fatte in questo genere di ricerche, la natura delle ossa, e la loro giacitura, e gli oggetti rinvenuti, tutti si accordano a dimostrare ciò che avvenne all' epoca delle grandi tempeste atmosferiche, alle quali si dovette eziandio trovare anche l'uomo già comparso sulla terra. Così la storia delle caverne trova il suo posto nei fatti del pianeta, e le tante osservazioni sono armonizzate e rischiarate da più giuste e naturali spiegazioni.

Finalmente, giunta l'epoca del più gran freddo, la scena del mondo si fa tremenda. Compariscono i ghiacci polari che si avanzano verso il mezzogiorno attraverso le latitudini, le montagne biancheggiano per nevi e per geli, e uno sfrenato vulcanismo s'impossessa di tutta la terra, erompendo su tutti i punti della sua superficie: di modo che nello stesso tempo è preda del ghiaccio e del fuoco. Fu quello il più grande avvenimento che abbia subìto il pianeta avanti l'epoca nostra che riuscì fatale alla vita. Imperocchè la fauna terziaria fu talmente manomessa, che gli animali dovettero per la maggior parte soccombere, e il regno dei pachidermi inesorabilmente scomparire. Una immensa quantità di cadaveri restò sulle altitudini montane involta e sepolta nei geli, come fu degli elefanti del polo sulle sponde del mar glaciale. In questa universale catastrofe non si salvarono neppure i rifugiati nelle caverne; imperocchè coll'andare dei tempi dovettero ancor essi un dopo l'altro perire di freddo e di inedia. Lo stato di natura prese un aspetto tremendo, e su tutta la faccia del globo si diffuse lo squallore e la miseria per la mancanza della vita.

E qui occorre fare una osservazione che a prima vista sembra contraddire al fatto della distruzione degli esseri. Abbiamo già avvertito che varie specie, che facevano parte della fauna preglaciale, si vedono comprese nella posteriore e molte di esse vivono ancora presso di noi. Dunque non tutti perirono: dunque vi fu chi superò la tremenda fase e così protrasse la propria esistenza. In questo caso sono i due elefanti asiatico e africano, il rinoceronte delle Indie, la jena, il castoro, il cervo, ed altri, ora diversamente distribuiti sulla superficie del globo. A spiegare questo fenomeno, io credo che senza invocare l'emigrazione, come fece Lartet, nella stessa vulcanicità possa rinvenirsi una sufficiente ragione, e capace di sciogliere così interessante problema. Se si presti attenzione alla linea dei crateri italiani, lungo la costa tirrena; alla vastità delle loro bocche, indicatrici di grandi incendî; alla mancanza dei terreni morenici su quel piovente apennino, avremo un motivo a credere che, tanta fu

l'emissione del calorico terrestre, e tanta la sua irradiazione da moderare nei distretti vulcanici gli estremi rigori del freddo, e soccorrere la vita in tanta calamità. Così la stessa natura avrebbe procurato un mezzo di salvezza, o un asilo a quegli esseri viventi, che per buona sorte vi s'incontrarono. Questa dottrina mi sembra giusta, però non l'impongo; giacchè credo possa ritenersi finchè una migliore non venga a sostituirla.

Ma l'epoca del gran cataclisma glaciale ebbe un fine allorquando la temperatura si arrestò nella discesa, e incominciò a rielevarsi dando principio all'epoca alluvionale. In quella la demarcazione di una linea fra la fauna terziaria o preglaciale, che finisce, e la quaternaria o post-glaciale che risorge e incomincia a decorrere. Abbiamo detto che per effetto di grandi terremoti concomitanti lo sfrenato vulcanismo, i continenti erano già emersi, e l'Italia pel sollevamento dei subapennini avea già presa la forma di una penisola. Allora fu che una generale fusione delle tante nevi accumulate sui monti si diffuse, e immense masse d'acqua si precipitarono per generare fiumane sterminatrici, che gettandosi sulle nuove pianure messe in secco, le inaffiarono; mentre il sole, squarciate le nubi, tornava a rianimarle coi suoi raggi vivificanti. Sotto tali condizioni geografiche e meteorologiche, riscossa l'intera natura, la vita dava opera ad una universale restaurazione. Le pianure si rivestono di un erboso tappeto, e sulle montagne le antiche foreste riprendono vigore per preparare nutrimento e stanza alla rigenerazione animale. Cosicchè un nuovo e giovanile movimento vitale si fa generale, diffondendosi per ogni dove. Gli avanzi della vecchia fauna sono chiamati a ripopolare la terra, modificando i loro organismi, mentre sorgono nuove forme proporzionate ai tempi che corrono. Così si riordina la vita sulla terra assumendo una fisionomia propria e diversa dalla preglaciale distrutta e scomparsa.

Abbiamo già fatto notare che nei depositi alluvionali prodotti dalle acque dolci si trovano due faune: una nei terreni di trasporto, l'altra nei depositi contemporanei rappresentati dai travertini, e di più abbiamo detto che non conviene confondere queste due faune. Conciossiachè quella delle breccie è più antica e derivata dai monti da cui discesero i materiali costituenti i loro depositi. Le specie animali che la compongono, lo stato dei loro avanzi, e la stessa giacitura chiaramente accennano a quei cadaveri dei tempi terziarî, che involti nei ghiacci vi restarono fino alla loro fusione o alla discesa delle grandi fiumane quaternarie che le rimaneggiarono nel trasporto. Carattere che non si osserva nei fossili dei travertini, perchè ancora giacenti presso a poco sul posto ove vissero, e perciò sono quelli che veramente rappresentano la fauna alluvionale. Era necessario far rimarcare questa distinzione per rettificare le epoche a cui attribuire la quantità di fossili che si raccolgono nelle assise di quell'epoca, sovente da taluni confusi.

Ma la temperie terrestre nel risalire non tornò più al grado da cui era discesa, perchè l'equilibrio del calorico collo spazio ambiente si fissò ad un grado inferiore; laonde l'influenza solare si rese maggiore, e le linee isotermiche si determinarono più sentite e nette. La conseguenza di questo fatto cosmico non solo fu l'aspetto diverso che prese la nuova fauna, ma altresì la distribuzione geografica degli esseri viventi sulla terra. Le regioni polari ingombre di ghiacci limitarono la parte abitabile del globo a più ristretti confini, e i grandi pachidermi che regnarono per tutto nei tempi preglaciali si dovettero confinare alla zona equatoriale, chiamati dal clima più

confacente alla loro natura. Cosicchè un nuovo ordine di cose fu stabilito per dare l'impronta all'epoca post-glaciale o quaternaria alla quale fa seguito la moderna.

Dal cataclisma glaciale il pianeta non è andato più soggetto a grandi sconvolgimenti cosmici, per modo che possiamo dire che i tempi moderni corrono tranquilli e pacifici. Pur tuttavia se si ponga a calcolo la perenne perdita di calorico che fa la terra nello stesso suo stato di equilibrio, non è possibile che coll'andare dei secoli non risenta qualche modificazione nelle sue condizioni climatologiche. E di fatti osserviamo la scomparsa di alcuni animali, l'emigrazione o la decadenza di altri. Al principiar dell'êra nostra vivea ancora il bue primigenio, che fu sostituto dal thur o bue moderno. Quella specie di piccolo gatto o guepard, del quale ci hanno data conoscenza le sabbie del ponte Milvio, è scomparsa insieme ad altre specie fra le quali forse anche il diornis. Fra gli animali in via di estinzione devesi annoverare il bufalo, ristretto a vivere su certe spiaggie del mare Tirreno sostenuto dalla umana speculazione. Così anche il ristretto numero di certi animali accenna al loro deperimento, come sono la lince che, sebbene raramente, nondimeno resta qualche volta vittima dei cacciatori di lupi: la camozza di cui pochi anni indietro se ne conosceva un piccolo branco sul gran Sasso d'Italia, soggetto alle insidie dei pastori tendenti a farne sterminio: e lo stesso orso un dì più frequente sulle montagne del centro apennino ora fatto raro. Fra gli emigrati abbiamo il cervo, comunissimo nei nostri paesi tanto prima che dopo il periodo glaciale sino a farsi domestico dell'uomo preistorico, come fanno fede le sue reliquie associate alle umane dell'età neolitica. Oggi si trova confinato nel nord dell'Europa, come la renna francese sua contemporanea si portò nella Lapponia. Io non intendo comprendere in queste variazioni quelle avvenute per opera umana, imperocchè anche l'uomo coi mezzi che possiede fa di tutto per distruggere ciò che fece natura per il suo benessere. Colla caccia esercita una guerra inesorabile contro tutti gli animali salvatici, e per la caccia andranno a scomparire tante specie, che per proprio vantaggio dovrebbe mantenere.

Dato alla meglio un abbozzo storico degli animali, nel decorrere le epoche subapennine, non mi sembra aver pienamente soddisfatto al fine proposto senza aggiungere una parola sull'uomo e sugli animali domestici che insieme agli altri lasciarono le vestigia della loro alta antichità. Le più vetuste traccie dell'umana presenza in queste nostre contrade, sono varî anni che vennero estratte in occasione che si fece la strada che monta al Gianicolo. Allora fu che nel demolire gli strati di breccie diluviali sovrastanti alle sabbie gialle plioceniche si rinvennero varî pezzi di focaia scheggiati evidentemente dalla mano dell'uomo, indicando che già esisteva sulla terra, al princicipiare del gran periodo vulcanico-glaciale (¹). Simili anticaglie sono state eziandio rinvenute in altri luoghi nelle stesse breccie per confermare la prima scoperta. Raccolte in un terreno di trasporto, è chiara la loro preesistenza a quei depositi, altrimenti non si sarebbero potute convogliare cogli altri materiali mobili. Laonde ne risulterebbe che l'uomo fu pliocenico, e compreso nella fauna terziaria, come i fossili del Valdarno, e secondo l'opinione di alcuni perfino miocenico.

(¹) Ponzi, *Sulle selci tagliate rinvenute in Acquatraversa e nel Gianicolo.* Nota negli Atti della pont. Accad. dei nuovi Lincei, 4 decembre 1860.

Ma in qualunque modo voglia accettarsi il giudizio, egli è certo che all'epoca del diluvio apennino l'uomo dovea essere già abitatore delle montagne, non essendo ancora messe in secco le pianure subapennine, cosa creduta anche dagli antichi, che lo dissero aborigene, cioè generato dai monti. Se queste deduzioni sono logiche, deve essere compreso nella storia delle caverne, essendosi trovato nelle stesse condizioni degli altri animali, e deve aver preso parte alla lotta suscitata per guadagnarne il possesso. Le scheggiature delle breccie diluviali ricordano l'età archeolitica, o della pietra rozza, e perciò crediamo non errare ritenendolo nomade e scorridore di foreste, menando una vita errante e selvaggia all'epoca delle grandi pioggie.

Nei tufi vulcanici dei contorni di Roma sono state altresì rinvenute le stesse scheggie residui di lavorazione, che sebbene rare, pure mostrano la presenza dell'uomo nel decorrere della grande catastrofe glaciale, e la sua salvazione per effetto dell'irraggiamento del calorico terrestre. Ben si comprende che a quest'epoca sotto l'incubo di una sconvolta natura, tali furono le umane sofferenze che, non potendo sviluppare le sue facoltà dovette mantenersi errante e brutale.

Ma passato il periodo del massimo freddo, all'epoca della restaurazione, si vede l'uomo scendere dai monti e prender possesso delle pianure di recente scolate e messe in secco. Quivi sotto un cielo fatto più benigno potè raccogliere la sua famiglia, e colle sue mani costruirle un ricovero, che fu l'origine dell'umano consorzio. Le numerose armi in pietra lavorate con maggior diligenza e ridotte a regolare disegno per minute scheggiature, che si raccolgono seminate sul suolo subapennino, ne fanno fede. Talvolta riunite in certi punti accennano ad un centro d'industria, ed essere giunta l'età neolitica in cui l'uomo si costituì in società. Fu allora che il cane spinto dal suo istinto spontaneamente vi concorse, si unì all'uomo, e facendo vita comune si rese domestico prima degli altri.

Conosciuta col cane l'utilità degli animali domestici è naturale che l'uomo si dirigesse alla conquista degli altri più facili alla riduzione. Fra questi troviamo il cervo non ancora emigrato, il bue, il porco. I rinvenimenti di umane vestigia associate ai resti di quelli animali riferibili all'epoca alluvionale avvalorano un tale giudizio. Nelle tombe preistoriche di Cantalupo Mandela associate a scheletri umani furono osservate ossa di quegli animali lavorate dalla mano dell'uomo, evidentemente succedute al cane [1]. Ma non basta perchè quei cadaveri fanno scorgere due razze d'uomini: una brachicefala di bassa e tarchiata statura; l'altra dolicocefala a membra più sottili e svelte. Questo fatto di grave importanza fa scorgere una immigrazione di gente straniera, forse quella medesima che portò in Italia l'uso del bronzo. Io non parlo delle palafitte o delle abitazioni lacustri che in altre contrade hanno tanto contribuito a far conoscere il progresso sociale, non avendole mai fin qui osservate nel nostro paese. Però posso dire che i nostri ritrovati si accordano perfettamente con quelli fatti altrove. Laonde mi sembra giusto attribuire all' epoca alluvionale la data del grande avanzamento sociale dell'uomo, e con esso la riduzione alla domesticità degli accennati animali. In altre regioni della terra forse cedettero al suo

(1) Ponzi, *Sulle tombe preistoriche, rinvenute presso Cantalupo Mandela, sulla via Valeria.* Atti della pont. Accad. dei nuovi Lincei, tom. XX 20 maggio 1867.

potere altri esseri, ma di questi non ci occupiamo perchè estranei all' argomento preso a trattare.

Al principiare adunque dell'epoca moderna nel senso geologico, ci sembra poter riferire lo stabilimento definitivo della società, e con essa il compimento delle conquiste sugli animali, assoggettandone quanti ne potè al suo dominio. Fra questi troviamo la capra e la pecora con i solipedi cavallo e asino, dal cui connubio ottenne il mulo tanto utile alla pastorizia e all'agricoltura. Niente possiamo argomentare del gatto: ma siccome non si può considerare come assolutamente addomesticato, così sembra sia stato l'ultimo a seguire l'uomo quando vi trova il suo interesse.

Arricchito di questi potenti soccorsi l'essere intelligente si alleggerì del grave fardello delle umane miserie che già gravitava sulle sue spalle, e fatto più coraggioso ed ardito potè lanciarsi nella vita civile, farsi conquistatore, e spingersi al sommo grado di sua dominazione sulla terra, della quale neppure è contento.

III.

La vita è così subordinata alle condizioni climatologiche che al variare di queste le forme organiche si modificano entro certi limiti, al di là dei quali la specie si estingue. Se non esistesse questa legge nel grande ordine dell'universo, non vi sarebbe distribuzione geografica degli esseri viventi: non si compirebbero le periodiche migrazioni degli uccelli, nè vi sarebbe scopo alcuno nei nostri giardini di acclimatazione. Se si riportasse l'elefante indiano sulle sponde del mar glaciale, che sembra sia stata la sua culla, non vi potrebbe più vivere. Una scimia condotta sotto latitudini temperate perde subito le sue facoltà generative, e benchè l'individuo si adatti a vivere sott'altro cielo, nondimeno la sua progenie è perduta. Sotto questo punto di vista fa d'uopo ora prendere in considerazione la nostra paleontologia.

Abbiamo veduto che tutto il tempo trascorso dall'ultimo sollevamento delle montagne fino a noi, conosciuto comunemente col nome di subapennino, rapporto ai fenomeni cosmici compiuti sulla terra si divide in tre periodi: pre-glaciale, vulcanico-glaciale e post-glaciale. Questa distinzione sotto i rapporti climatologici non può reggere: conciossiachè in tutta quella serie di secoli si dimostra un generale abbassamento di temperatura il quale viene seguìto da una rielevazione, e per conseguenza si divide naturalmente in due parti, fra loro distinte dall'intercorrente cataclisma glaciale, che come una linea di demarcazione separa le epoche terziarie dalle quaternarie. E di fatti le stesse roccie coi loro fossili contenuti fanno chiaramente conoscere che al principiare dei tempi subapennini dovea regnare sulla terra un clima quasi tropicale, il quale, in virtù di cause straordinarie, gradatamente discese al massimo freddo, da cui quindi risalì fino al ripristinamento dell'equilibrio planetario, dove fissandosi ebbe principio l'epoca moderna. Per tali fatti compiuti ben si scorge che gli esseri che popolarono il globo abbiansi a dividere in due faune corrispondenti alle diverse condizioni climatologiche, cioè una terziaria pre-glaciale, l'altra quaternaria o post-glaciale. Si comprende altresì che il periodo glaciale propriamente detto, non potè avere una fauna propria: imperocchè fatale alla vita distrusse gli esseri terziarî

depauperando il pianeta dei suoi abitatori. A meno che non vogliansi considerare come glaciali quegli esseri. che ebbero la fortuna di passare la trafila per combinazioni geologiche.

Da questa storia di fatti risulta che durante il periodo terziario, le condizioni climatologiche gradatamente cangiando per raffreddamento, la vita dovette risentirne gli effetti. I cangiamenti nelle forme organiche dovettero modificare le abitudini e costumi degli esseri abitatori della terra. La scarsezza delle ossa fossili nei terreni miocenici e pliocenici non ci permette seguire quei lenti cambiamenti. Ma se si faccia attenzione alle reliquie di questa fauna raccolte nei depositi di trasporto delle grandi correnti alluvionali, sebbene rimescolate, pure un diligente esaminatore vi rinviene differenze e passaggi di struttura organica, i quali per me non possono riferirsi che alle variazioni di clima avvenute durante la loro esistenza. I denti degli elefanti a cagion d'esempio sono così variati nello sviluppo, nella forma e larghezza delle lamine, nella grossezza dello smalto e nella quantità di cemento, che spesso sono la causa d'incertezze nella definizione delle specie.

Le sole ossa delle caverne di epoca diluviale si trovano in posto, perchè conservate in cavità sotterranee che le sottrassero alle fiumane alluvionali. Ebbene in queste si riscontra ancora la fisionomia terziaria, però quale dovea essere a quell'epoca, cioè già modificata dal decorrere dei tempi.

Peraltro, se vogliamo farci una idea generale sulle ossa dei vertebrati fossili determinate e conservate nei gabinetti paleontologici dei tempi terziarî, ci sarà facile scorgere una preponderanza dei grandi pachidermi e specialmente di elefanti, sia per il numero delle specie, la maggior parte perdute, sia per la quantità degli individui, i quali come abbiamo dimostrato accennano ad un clima più caldo dell'attuale e proprio delle regioni meridionali. A questi succedono i ruminanti per il loro gigantesco sviluppo, come sono il bue primigenio e i cervi, fra i quali quello a corna gigantesche, e l'elafo che sembra lo stipite del cervo moderno. Sieguono i carnivori orsi e jene, di cui ci danno indizî i ritrovati delle caverne. Tutti questi animali terrestri dovettero tenere loro stanza nelle foreste montane, mentre nei profondi mari sottostanti fra miriadi di conchiglie e zoofiti scorazzavano sterminati cetacei e pesci di ogni genere. Al quale stato di cose pose un fine la grande catastrofe vulcanico-glaciale.

Peraltro dovette cangiare scena allorchè al ritorno del calorico incominciò a decorrere il periodo quaternario: questo fu un'antitesi col pregresso terziario; imperocchè se in quello la temperatura quasi tropicale si abbassò fino al massimo freddo, con detrimento e scomparsa degli esseri, il posteriore da questo estremo si rialzò colla restaurazione della vita. E qui si cammina più al sicuro, perchè i fossili spettanti alla fauna post-glaciale trovansi inalterati nei depositi che non subirono trasporto, anzi si trovano ancora per più gran parte nelle loro normali posizioni.

La geografia italiana era cangiata colla scomparsa del primitivo arcipelago, i raggi solari per diminuzione del calorico esercitavano più gagliarda influenza sullo sviluppo vitale, mentre un generale scioglimento di nevi inondava per fertilizzare le pianure.

Nel periodo post-glaciale pertanto si vedono scomparsi i grandi pachidermi, ad eccezione di quelli che vivono ancora. Gli elefanti indiano e africano, il grande ippopotamo, il rinoceronte, i cavalli, cervi, bovi, cani ed altri che sebbene modificati dalle

influenze climatologiche, tuttavia si devono considerare come un'eredità dei tempi che precedettero il gran cataclisma. Però fra questi sono i ruminanti che sostituiscono i pachidermi, facendo in questa fauna la prima figura. I loro resti diffusi per tutto ne fanno fede, e specialmente il cervo, fino a scendere nei secoli moderni.

Così all'epoca delle grandi alluvioni fu ripopolata la terra sotto altre forme e l'equilibrio termometrico fu ristabilito. Ma dall'ultima catastrofe vulcanico-glaciale che pose fine alle epoche terziarie, non essendo andata più soggetta la terra a cosmici perturbamenti, raggiunto l'equilibrio planetario, le cose restarono quali erano e la fauna da quaternaria si fece moderna. È vero che anche questa è andata soggetta a qualche modificazione per influenze climatologiche, però non gravi, conservando tuttora i caratteri della sua derivazione.

E qui mi vedo arrestato, perchè uscendo dalla provincia geologica, entrerei nelle dominazioni della botanica e della zoologia alle quali è affidato lo studio della fauna regnante, e delle modificazioni subìte nel decorso dei secoli nostri.

IV.

Ma oramai è tempo di raccogliere le sparse membra, e far conoscenza più precisa colle specie riordinando il catalogo dei nostri fossili.

La collezione delle ossa conservate nel gabinetto paleontologico di questa R. Università, a cui venne associata quella del Collegio romano, hanno per la maggior parte fornito il materiale occorrente, riunendo copiosi resti di vertebrati. Però non sono tutti quelli che potrebbero essere per la frequenza dei ritrovati, giacchè ordinariamente vengon dispersi dagli operai. Tuttavia sono tali da somministrare un sufficiente criterio delle epoche trascorse avanti di noi.

FAUNA TERZIARIA PREGLACIALE

Elefanti.

Cinque specie di questi pachidermi sono state fin qui rinvenute fossili nelle nostre contrade. Due spettano al sottogenere *Loxodon* di Falconer: cioè l'elefante meridionale e l'africano: gli altri si riferiscono all'*Euelephas* dello stesso autore che sono l'elefante antico, il primigenio e il maltese.

1. *Elephas meridionalis* Nesti. — Frammenti di teste, zanne, denti molari e ossa di ogni età e sesso.

Sono state raccolte nelle breccie alluvionali, entro le vallate dei fiumi maggiori, del Tevere al ponte Milvio, e in quella dell'Aniene al monte Sagro, come in altre località. È il più grande degli altri. La quantità di queste reliquie accenna alla grande propagazione dell'elefante meridionale sulle terre emerse costituenti le isole del primitivo arcipelago italiano, come il logoramento e dispersione delle loro ossa, al trasporto alluvionale a cui andarono soggette per opera delle grandi correnti.

2. *Elephas africanus* Lin. — Due soli denti molari.

Raccolti nei depositi alluvionali del Tevere, al monte Pincio, entro la stessa città

di Roma. Si crede identico a quello che tuttora vive nel continente africano. La scarsezza di questi resti sembra possa attribuirsi alla poca quantità d'individui allorchè visse nell'Italia centrale.

3. *Elephas antiquus* Falc. — Denti molari, difese e ossa di ogni specie.

Un dente molare fu raccolto nelle sabbie gialle plioceniche del monte Mario, e un intero scheletro venne disotterrato dalle marne superiori di Rignano sotto il Soratte. Tutti gli altri sono sparsi nelle breccie alluvionali. È uno dei più comuni. È forse la specie più variabile nella forma dei denti.

4. *Elephas primigenius* Blum. — Denti e ossa di ogni specie.

Sono frequentissime nei suddetti depositi di trasporto alluvionale. La specie è meno comune della precedente. Variabile nella struttura dei denti, e sovente offre difficoltà nella definizione della specie. È identico all'elefante di Siberia o Mammouth dei Russi, e alcuni paleontologi lo credono stipite del moderno elefante indiano. Però offre certe modificazioni, subìte forse coll'andare dei tempi per influenze climatologiche.

5. *Elephas melitensis* Falc. — Varî denti di diverse età.

Nelle solite breccie alluvionali. Non comune. È il più piccolo di tutti, non misurando i suoi denti molari che 8-10 centimetri di lunghezza i quali si distinguono altresì per le loro lamine curve e striate.

A queste reliquie elefantine si devono aggiungere tutte quelle altre ossa rinvenute erratiche nelle assise subapennine di cui non si può determinare la specie: cioè la difesa elefantina rinvenuta da Pentland nelle marne superiori sotto il Soratte; quella del monte di Subiaco nelle breccie diluviali; l'omero nei tufi della campagna romana, ed altri. I quali tutti si associano a dar prova evidente della quantità di quegli animali, e della loro dominazione nell'Italia centrale nel decorrere delle epoche terziarie o preglaciali.

Mastodonti.

Per quanto io sappia una sola specie di mastodonti è stata fin qui rinvenuta, e questa è il mastodonte dell'Overnia, spettante al sottogenere *Tetralophodon* di Falconer.

6. *Mastodon arvernensis* Croiz. et Job. — Denti molari e un pezzo di difesa, insieme a varî frammenti di ossa spettanti allo stesso individuo.

Estratto da un deposito di sabbie lacustri, probabilmente di epoca diluviale, presso Montoro. Sono i soli avanzi di mastodonti rinvenuti presso di noi, e perciò lo stimiamo più raro abitatore dei nostri Apennini che in quelli di Toscana ove i rinvenimenti sono più frequenti.

Ippopotami.

Varie specie d'ippopotami possiamo citare rinvenuti nei nostri depositi alluvionali. Però tutti si riportano al sottogenere *Tetraprotodon* di Falconer, fra i quali la maggior figura fa il grande ippopotamo.

7. *Hippopotamus major* Cuv. — Pezzi di mascelle, denti e ossa di ogni specie.

Erratiche nelle breccie alluvionali. Comunissime. Animale di gran mole, non meno numeroso degli elefanti. Si ritiene come lo stipite dell'ippopotamo africano moderno. Si trovano per tutto.

8. *Hippopotamus Pentlandi?* Mey. — Tre denti molari conservati nel gabinetto universitario con tal nome. Di provenienza incerta, forse del ponte Milvio.

Sono più piccoli della specie precedente, però così logorati dall'attrito del trasporto da non offrire caratteri chiari, perciò gli ho posto l'interrogativo, in attesa di nuovi rinvenimenti.

9. *Hippopotamus sp.?* — Tutti i denti di un giovane individuo.

Estratti da un sabbione biancastro alluvionale sotto il paese di Vallinfreda nel bacino nel Turano nella valle del Cavaliere. Dovea essere una testa intiera distrutta dai contadini per estrarne i denti. È un *tetralophodon* di Falconer, diverso dal grande ippopotamo. Lo credo una specie non descritta per i seguenti caratteri. Denti incisivi inferiori della stessa forma di quello però finissimamente striati: i canini hanno una curva alquanto più stretta colle docciature più sentite. Gl'incisivi inferiori parimenti non presentano altra differenza che nella grandezza minore del grande ippopotamo. I denti molari hanno tutti le colline più strette ed elevate, colla superficie zigrinata e solcata, perciò le faccie trituranti più anguste. A dire il vero non ho voluto azzardare dargli il nome sopra denti sciolti, perciò la faccio conoscere per meglio definirla dopo ulteriori rinvenimenti e studî.

Rinoceronti.

Una sola specie è stata fin qui rinvenuta e questa è il rinoceronte a narici aperte.

10. *Rhinoceros leptorhinus* Cuv.; *Rh. megarhinus* Christ. — Denti sciolti, mascelle e ossa.

Nelle solite breccie alluvionali dei fiumi maggiori. Un poco meno frequente degli elefanti e degli ippopotami.

Cavalli.

Gli equini fin qui conosciuti fossili sono tre: il cavallo comune, lo stenoniano e un ipparione.

11. *Equus caballus* Lin. — Denti e ossa diverse.

Raccolte come tutte le altre erratiche nelle breccie alluvionali. Non raro.

12. *Equus Stenonis* Cocchi. — Un pezzo di mascella inferiore sinistra con quattro denti molari anteriori, e ossa di estremità.

Questa mascella venne estratta da un deposito di ossa di elefanti e cervi, nelle sabbie gialle plioceniche alla salita di Ripatransone sul piovente adriatico. Avanzi di questo cavallo non sono stati ancora rinvenuti nei depositi di trasporto alluvionale.

13. *Hipparion gracile* Kaup. — Un solo osso del metacarpo.

Nelle breccie del ponte Milvio: sebbene logorato dal trasporto tuttavia conserva bene i suoi caratteri che lo fanno riferire a questa specie per noi molto rara.

Bovi.

Annoveriamo due specie di bovi fossili, fra le anticaglie paleontologiche dei contorni di Roma: il bue primigenio e il bufalo.

14. *Bos primigenius* Boj. — Teste intiere, denti e ossa di ogni specie.

Nelle solite breccie di epoca alluvionale. La taglia di questo animale è maggiore

del bove moderno da cui differisce per caratteri specifici. Il gran numero di questi avanzi indica la diffusione di tali ruminanti sugli Apennini nelle epoche terziarie.

Nel gabinetto universitario fra le tante corna spettanti al bue primigenio, si notano quattro cranî interi colle loro armature ben differenti, ma che mi sembrano non oltrepassare i limiti di semplici varietà. Due di esse hanno le corna grosse e robuste, o trococere; una invece le porta sottili e allungate; la quarta sembra oltrepassare i confini di semplice varietà per divenire mostruosa. Porta le corna sottili, ma così allungate e rivolte in basso da descrivere due semicerchi attorno la faccia, e perciò inette alla difesa. Questa testa era conservata nel museo del Collegio romano, e proviene da Montalto nel ducato di Castro.

15. *Bos bubalus* Lin. — Un mezzo cranio sinistro col rispettivo corno.

Raccolto negli strati superiori dei depositi di breccie del ponte Milvio, insieme ad un corno di daino. Non sono interamente tranquillo nel riferire questo fossile alla fauna terziaria perchè contenuto nelle assise superficiali di quei sedimenti. Ve l'ho posto perchè non si sono mai vedute ossa di bufali nei travertini quaternarî. Ulteriori rinvenimenti potranno dissipare un tal dubbio.

Cervi.

Quattro cervi fossili sono stati fin qui rinvenuti nei depositi alluvionali riferibili ai tempi preglaciali: il cervo a corna gigantesche, l'elafo, il daino e il capriolo, e di questi il primo soltanto rappresenta una specie perduta.

16. *Cervus megaceros* Cuv. — Quella stessa testa figurata da Cuvier nella sua opera: *Sur les ossements fossiles,* che rinvenne e studiò nel museo del Collegio romano, si trova ora nel gabinetto di questa nostra Università. Un'altra testa di quella specie è poco tempo che fu disotterata dai terreni di trasporto. Questa fu da me definita e confrontata; ma non potei venirne al possesso. Nondimeno la cito come facente parte dei nostri fossili terziarî. È meno comune dell'elafo.

17. *Cervus elaphus* Lin. — Teste, corna e ossa di ogni specie.

Si estraggono continuamente e in gran numero non solo dai soliti depositi di breccie alluvionali, ma altresì dalle caverne diluviali insieme ad altri animali spelei. Sono frequentissimi nelle ghiaie del ponte Milvio e del monte Sagro; come nelle caverne di Collepardo, e di Poggio Mojano, insieme ad ossa di orsi e jene. È più grande dell'elafo moderno e presenta gli stessi caratteri; però nelle sue corna si osserva il ramo basilare, ora semplice ora doppio: ma questo potrebbe considerarsi come una semplice varietà.

18. *Cervus dama* Lin. — Un solo corno.

Raccolto insieme al semicranio di bufalo che abbiamo citato, e perciò anche questo lascia dubbio sull'epoca a cui riferirlo. Non presenta differenze col daino moderno.

19. *Cervus capreolus* Lin. — Corna, mascelle, denti e ossa.

Nei soliti depositi alluvionali. Più raro dell'elafo. Analogo anche in grandezza al moderno capriolo.

Carnivori.

Scarse sono le specie di questi animali nella nostra fauna terziaria. Vi si rinviene un solo gatto, insieme ad un cane, una jena e al grande orso delle caverne.

20. *Felis spelaea* Gold. — Un pezzo di mascella inferiore destra con il secondo e terzo molare.

Rinvenuto nelle assise di trasporto a Magognano nel Viterbese, che sebbene a rigore non sia dei contorni di Roma, pure lo cito come facente parte della fauna preglaciale. Era fra le ossa fossili del museo del Collegio romano, e venne descritto dal gesuita Pianciani in una Memoria *sulle ossa fossili di Magognano*, attribuendolo ad un leone [1]. Però fattine i confronti, a me sembra possa riferirsi alla *Felis spelaea* Gold. di una statura maggiore al più grande leone moderno.

21. *Cynotherium fossile.* — Mascelle con denti e ossa.

Giacciono nelle solite assise di trasporto alluvionale. Non raro. Non v'ha animale che presenti tante varietà come il cane, le quali dimostrano quanto sia suscettibile modificare l'organismo sotto le influenze climatologiche.

22. *Hyaena spelaea* Gold. — Mascelle con denti, ossa e coproliti.

Logorate e disperse nelle breccie alluvionali, del ponte Milvio e dell'Aniene al monte Sagro. Meglio conservate nelle caverne del Soratte, associate ad ossa dell'elafo. Più rare degli orsi, e meno comuni dei cani terziarî.

23. *Ursus spelaeus* Blum. — Un mezzo omero ben conservato di un vecchio individuo e di colossale statura.

Rinvenuto con resti di elafo in una spelonca della catena sabina presso Poggio Mojano. Raro.

Roditori.

Il solo castoro può essere annoverato fin qui nella nostra fauna terziaria.

24. *Castor fiber.* — Una mezza mascella con denti. Proveniente dalle breccie del ponte Milvio.

Sebbene logorata dal trasporto pure mostra chiaramente i caratteri di analogia col castoro vivente. Rara.

Cetacei.

Le ossa dei cetacei terziarî, balene e delfini, ci sono pure somministrate dai depositi subapennini di sedimentazione marina.

25. *Balaenotus sp.?* — Frazioni di grandi ossa indeterminabili.

Nelle marne del monte Vaticano. Forse spettanti a qualcuna di quelle specie di *Balaenotus* citate dal Capellini nei depositi miocenici. Le sole fin qui rinvenute.

26. *Delphinus sp.* — Una vertebra.

Nelle marne superiori del Gianicolo o pliocene medio, rinvenuta nelle escavazioni dei figulinari. Rara.

Uccelli.

Diverse specie di uccelli compariscono nelle ossa erratiche delle breccie alluvionali logorate dal trasporto, e riferibili alla fauna terziaria.

27. *Grallae.* — Queste ossa contengono dei tarsi di uccelli da riva, riconoscibili per la loro lunghezza, senza poter determinare la specie. Non rare.

(1) Opuscoli scientifici. Bologna, 1818.

Rettili.

Si rinvengono anche traccie di rettili dell'ordine dei lacertini.

28. *Lacerta sp.?* — Una piccola testa.

Raccolta dall'ab. Rusconi insieme a molluschi terrestri e impressioni di foglie di vegetali dicotiledoni nei tufi vulcanici di epoca glaciale sotto il paese di Monticelli. Rara. È l'unico fossile di rettile rinvenuto fin qui nei contorni di Roma.

Pesci.

I pesci sono meglio rappresentati nei depositi terziarî coi resti di placoidi e cicloidi.

29. *Lamna sp.?* — Un pezzo di colonna vertebrale e vertebre sciolte di mediocre grandezza.

Nelle marne mioceniche del monte Vaticano. Non comuni.

30. *Oxyrhina hastalis* Agas. — Varî denti nelle suddette marne. Rari.

31. *Clupea sp.?* — Impressioni di scheletri della lunghezza circa 10 centim. Nelle marne superiori del pliocene medio al monte delle Crete, continuazione del monte Mario. Rara.

Le ossa fin qui enumerate sono soltanto quelle di cui possiamo dar conto sicuro. Nelle quisquiglie risultanti dalla lavatura dei terreni subapennini si fanno scorgere frantumi di ossa riferibili ad altre specie di animali vertebrati dei quali non possiamo dir niente. Sono però indicatrici di quelle che di quando in quando i lavori di escavazione mettono a giorno, e risorgono a rendere più manifesta la ricchezza della fauna che precedette il gran cataclisma vulcanico-glaciale.

FAUNA QUATERNARIA POST-GLACIALE

Suini.

Questa famiglia di pachidermi viene rappresentata fino ad oggi nei depositi quaternarî da una sola specie del genere *Sus*.

1. *Sus sp.?* — Mascelle con denti, denti sciolti ed altre ossa.

Comprese nei travertini alluvionali dell'Aniene alle cave dette le Caprine sotto Monticelli, e in quelli depositati dall'Arone alla Bottaccia sulla via Aurelia, dai quali vennero estratte estremità intiere. Questa specie fin qui poco studiata sembra diversa dal porco vivente, perciò gli ho posto l'interrogativo perchè sia il soggetto di nuove investigazioni.

Solipedi.

A questi appartiene il solo cavallo.

2. *Equus caballus* Lin. — Denti sciolti e ossa di ogni specie.

Nei travertini delle Caprine. Non raro. La specie sembra identica a quella che tuttora esiste domestica presso di noi, e perciò si considera come discesa dalla fauna terziaria.

Ruminanti.

Varie specie di ruminanti entrano nel catalogo della fauna quaternaria, e questi sono il bue primigenio e diversi cervi, in grande numero d'individui.

3. *Bos primigenius* Boj. — Denti e ossa d'ogni specie.

Negli stessi depositi di sabbie quaternarie o alluvionali. Comunissimo. Non differisce dalla specie terziaria, perciò derivato da quella: ma scomparsa avanti l'epoca moderna.

4. *Cervus megaceros* Cuv. — Uno scheletro le cui ossa non logorate dall'attrito di trasporto formano un gruppo.

Rinvenuto dal dott. Seghetti nei travertini dell'Aniene presso Subiaco, e donato a questo R. gabinetto universitario. Si distingue chiaramente dalle sue corna sebbene frazionate. Della grandezza di un bue. Anche questo è un animale terziario estinto nei tempi post-glaciali.

5. *Cervus elaphus* Lin. — Teste, corna, denti e ossa di ogni specie.

Compariscono per tutto. Queste reliquie sono state rinvenute nei depositi dell'Aniene e dell'Arone: alle Caprine, alla Bottaccia, e in ogni luogo ove si scavano i travertini. Denti e ossa di questa specie sono state estratte altresì nei depositi vulcanici del Lazio dentro le ceneri o anche ricoperti dalla lava. È così comune da far credere la sua grande diffusione all'epoca delle grandi correnti alluvionali. È più grande dell'elafo vivente, ora emigrato dai nostri paesi.

6. *Cervus capreolus* Lin. — Denti ed ossa. Rinvenute nei soliti depositi lacustri. Meno frequente dell'elafo. È identico al moderno capriolo.

7. *Cervus sp.?* — Tre piccoli denti.

Rinvenuti dall'ab. Rusconi nei travertini delle Caprine. Gli unici rinvenuti. Ne posseggo soltanto la plastica, trovandosi gli originali nella raccolta dell'inventore. È una specie molto piccola di cervo la quale non si è potuta ancora studiare e definire; però a quanto sembra non riferibile ad alcuna delle cognite.

Carnivori.

Si conoscono fino ad ora quattro specie di carnivori spettanti alla fauna postglaciale e di diversa famiglia. Tali sono un gatto, una jena, un cane ed un tasso.

8. *Felis sp.?* — La parte posteriore di uno scheletro, però mancante del piede destro e della coda; ossa delle estremità anteriori, vertebre, coste e metà di mascelle con denti, tutte frazionate, spettanti allo stesso individuo.

Estratto dalle sabbie fine nei depositi di breccie del ponte Milvio. Unico rinvenuto. Nessun indizio di trasporto e perciò sepolto in quelle assise nella sua integrità all'epoca delle grandi alluvioni. Per la inondazione del Tevere 1870, vennero molto danneggiate le collezioni del nostro gabinetto universitario e fra queste quella delle ossa fossili. Peraltro prima che ciò avvenisse si vedevano nelle estremità posteriori di questa specie le unghie semiretrattili, e perciò non dubitiamo riferirla ad un guepard.

9. *Hyaena spelaea* Gold. — Mascelle con denti e ossa diverse.

Nei travertini delle Caprine. Non comune. È identica alle jene delle caverne e delle breccie alluvionali della fauna terziaria sopra descritta.

10. *Cynotherium fossile?* — Denti sciolti. Nei travertini delle Caprine.

Non frequenti. Sono così pochi questi fossili e così chiusi nella roccia da non poter distinguere a quale specie di cani appartengano, perciò ho distinto la specie coll'interrogativo.

11. *Meles antediluvianus* Schmerl. — Una testa intiera con ambedue le mascelle e tutti i denti nella loro perfetta integrità. Con essa erano altresì le vertebre e parte delle ossa delle estremità del medesimo scheletro, colle loro più delicate apofisi.

Nei banchi di sabbia interposti alle breccie alluvionali del ponte Milvio. Questo gruppo di ossa, indicante un individuo, era vicino a quello del gatto o guepard citato di sopra e perciò nelle medesime condizioni, accennanti la loro contemporaneità di esistenza. Unico rinvenuto. La specie è evidentemente identica a quello che ora vive in quelle contrade.

Insettivori.

Non abbiamo di questi mammiferi che il solo riccio.

12. *Erinaceus europaeus* Lin. — Mascelle con denti e ossa.

Fra gli strati dei travertini delle Caprine. Raro. È la medesima specie che al presente vive presso di noi.

Roditori.

Circa tre specie di roditori anche non ben definiti possiamo accusare fra i fossili quaternarî. Questi sono la lepre, lo scoiattolo e un sorcio.

13. *Lepus timidus* Lin.—Mascelle con denti e ossa nei soliti travertini delle Caprine.

Non rare. Presentano tutti i caratteri della lepre moderna.

14. *Sciurus sp.?* — Qualche mascella con denti.

Estratta dall'ab. Rusconi di Monticelli dai riempimenti tartarosi di certe fratture scorrenti nelle calcarie liassiche di quel paese. Cito questi fossili per prenderne nota e perchè li ho veduti nella collezione di quel prete, non avendoli potuti studiare per determinare la specie. Però sembra identico, o almeno molto assomiglia al moderno scoiattolo.

15. *Mus sp.?* — Mascelle con denti in gran numero.

Rinchiuse ancor esse nei tartari dei sopradetti filoni. Mi è sembrato il nostro *Mus decumanus* Lin. però non ne sono sicuro, non avendolo mai potuto determinare. Laonde prendo nota anche di questi perchè siano in cognizione della scienza.

Uccelli.

Fra gli animali conosciuti della fauna quaternaria, gli uccelli sono quelli che fanno la più meschina figura, riducendosi ad un solo osso e anche indefinibile.

16. Uccello della famiglia dei conirostri. — Un becco.

Rinvenuto nei travertini delle Caprine.

Rettili.

Una testuggine d'acqua dolce.

17. *Emys sp.?* — Uno scheletro intiero.

Nei travertini tartarosi dell'Aniene presso il ponte della via Salaria, rinvenuto

da un padre dottrinario. È l'unico fossile comparso sin qui della classe dei rettili. Le ossa erano così chiuse dai tartari, che a gran pena potei estrarne i pezzi componenti il piastrone o lo sterno. Avendolo dovuto riconsegnare al proprietario e non sapendo se sia stato pubblicato prendo nota anche di questo, per annoverarlo nella fauna post-glaciale. La grandezza di questo piastrone di cui conservo la plastica nel gabinetto universitario, misura 18 centimetri in lunghezza e 11 in larghezza. La specie è veramente spettante al genere *Emys*, e credo non errare se l'accuso come fin qui non conosciuta.

Amfibî.

Fossili spettanti alla famiglia delle rane.

18. Ossa di rane.

Nelle sabbie calcari depositate dalla corrente alluvionale del Tevere a Grotta rossa sulla via Flaminia e in qualche altra località. Non rare. Furono rinvenute e citate anche da Brocchi nel catalogo delle roccie italiane, insieme a conchiglie di acqua dolce.

Pesci.

Anche di questi fa testimonianza un pesce d'acqua dolce.

19. *Anguilla sp.?* — Un pezzo di questo animale della lunghezza di 20 centim., nel quale si fece scorgere la colonna vertebrale.

Scoperta nelle fine sabbie intercalate alle breccie alluvionali del ponte Milvio, e associata a conchiglie disfatte del genere *Unio*, e a tronchi di vegetabili parimenti decomposti. Rara perchè l'unica fin qui rinvenuta. Le vertebre furono disperse.

CONCLUSIONE

In verità le liste di queste faune non sono copiose, e molte delle loro specie attendono ancora di essere meglio studiate e definite. Tuttavia quelle che fin qui si conoscono, soccorse da un confronto coi fossili del Valdarno, della vallata del Po, e di altre località, sono già sufficienti a formarci un criterio dei tempi subapennini, e a condurci a qualche conclusione. Esse sono una prova di ciò che abbiamo esposto in questa Memoria nel passare in rassegna i terreni che le contengono, e le vicende a cui andarono soggetti gli animali per cause cosmiche. Esse presentano i diversi aspetti relativi alle variate condizioni dei tempi trascorsi prima e dopo il gran cataclisma vulcanico-glaciale. Laonde, sia per la specie degli animali che contengono, sia per il numero, sia per la giacitura dei loro fossili possiamo trarre le seguenti cognizioni.

1. Che la fauna terziaria o pre-glaciale chiaramente accenna ad un clima subtropicale, e perciò lo sviluppo di tanta quantità di grandi pachidermi: elefanti, mastodonti, ippopotami, rinoceronti ecc. diffusi sulla terra.

2. Che la sede degli animali terrestri furono i monti, non essendo ancor emerse le pianure subapennine.

3. Che la maggior parte delle ossa fossili spettanti a questa fauna non si rinviene nei depositi contemporanei, ma trasportata dalle grandi correnti alluvionali nei terreni post-glaciali.

4. Che le sole ossa delle caverne si trovano in posto, perchè fin dall'epoca diluviale conservate in cavità sotterranee.

5. Che il gran cataclisma vulcanico-glaciale distrusse la fauna terziaria, ad eccezione di quegli animali, che per combinazioni geologiche poterono attraversare la trafila del freddo massimo, sperimentato dal pianeta terrestre e scendere a far parte della fauna post-glaciale.

6. Che nella restaurazione dell'ordine di natura per la rielevazione della temperatura, e per le variate condizioni climatologiche, la fauna post-glaciale prese una fisionomia diversa dalla precedente.

7. Che nella fauna surriferita si osservano cinque specie di animali derivati dalla fauna precedente: cioè il bue primigenio, i tre cervi ancora viventi (l'elafo, il capriolo e quello a corna gigantesche ora estinto) ed un cane.

8. Che nell'epoca quaternaria fanno la prima figura i ruminanti, e specialmente i cervi, vedendoli comparire per tutto come i pachidermi terziarî.

9. Che al principiare dell'epoca moderna scomparve il cervo a corna gigantesche, e il bue primigenio estinto venne sostituito dal moderno toro; come la renna francese e l'elafo si confinarono nel nord d'Europa.

10. Che finalmente, la terra non essendo andata più soggetta ad altri gravi perturbamenti cosmici, la fauna quaternaria per graduali modificazioni si fece moderna sotto la influenza dei cambiamenti climatologici.

Questa Memoria non è altro che una notizia dei nostri rinvenimenti per contribuire all'incremento della paleontologia italiana. Io mi sono guardato di entrare nel dedalo delle questioni dirette a conoscere l'età e contemporaneità degli animali terziarî. Conciossiachè credo che il rimescolamento delle loro ossa fatto dal trasporto delle grandi correnti alluvionali, abbia distrutti i mezzi di riconoscimento, e perciò nessun risultato avrei potuto ottenere da tali investigazioni. In fine io non ho voluto fare altro che una esposizione delle cose come ora si trovano nei contorni di Roma, perchè consegnata alla scienza e fatta di pubblica ragione altri l'adoperi come vuole.

Sulla pretesa esistenza dell'acqua ossigenata nell'organismo delle piante.

Ricerche del prof. GIUSEPPE BELLUCCI.

Memoria approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del 16 giugno 1878.

(Laboratorio chimico dell'Università di Perugia).

In occasione del XII Congresso degli scienziati italiani tenuto in Palermo nel settembre del 1875 (1) comunicai alcune riflessioni sopra una Nota di J. Clermont con la quale l'autore intendeva dimostrare l'esistenza dell'acqua ossigenata nel succo delle piante, e formulava un'opinione sulla genesi del perossido d'idrogeno nell'organismo delle piante medesime (2).

Essendosi da poco tempo pubblicata la Nota di Clermont e non avendo potuto istituire ricerche speciali sull' argomento, mi limitai in quel tempo a contradire l'autore dal punto di vista teorico, poichè egli riguardava la produzione dell' acqua ossigenata nelle piante come un fenomeno parallelo a quello della produzione dell'ozono, ed ammetteva che si effettuasse durante la funzione detta di respirazione nelle piante stesse. Clermont accettava pertanto come corrispondenti alla verità le idee tanto contradette di Schönbein e Meissner sull'ozono e l'antozono. Promisi però in quell' incontro di verificare i risultamenti dell'esperienze di Clermont ed ove fosse stato necessario, divisai fin d'allora d'istituirne delle nuove, onde chiarire la quistione.

È appunto il risultamento di queste ricerche, riprese ed abbandonate più volte, ch'espongo ora in questa Memoria.

I.

Per l'interesse istorico della quistione ricorderò anzi tutto che Schönbein prima di ogni altro ammise che durante la respirazione degli animali e dei vegetali si produceva acqua ossigenata (3); cosichè J. Clermont non ha fatto a tal riguardo che condividere l'opinione precedentemente sostenuta da Schönbein, la quale, per quanto è a mia conoscenza, non fu finora esaminata in maniera da potersene dichiarare l'accettazione, o da respingerla.

Clermont ammise che la polarizzazione elettrica dell' ossigeno e la suddivisione

(1) Gazzetta chimica italiana, vol. V anno 1875 pag. 405.
(2) Comptes rendus de l'Académie des Sciences 1875, tom. LXXX pag. 1591.
(3) Journal für praktische Chemie, tom. XCII pag. 167.

di questo in ozono ed antozono succedesse nel corpo stesso dei vegetali, cosichè ammettendo con Scoutetten ed altri che l'ozono fosse emesso dalle parti verdi delle piante, ne veniva come conseguenza la dimanda, dove andasse a terminare l'antozono; avrebbe servito forse quest'ultimo stato di particolare attività chimica dell'ossigeno a produrre acqua ossigenata? Questa fu la dimanda che indirizzò a se stesso Clermont, il quale desideroso di dare una risposta a siffatto quesito, iniziò particolari ricerche, che alla fine gli fornirono, secondo la sua maniera di vedere, risultamenti positivi, e tali da confermare le conclusioni teoriche ch'egli stesso aveva formulate.

Secondo il concetto di Clermont l'acqua ossigenata, una volta ammessa la sua formazione come conseguente dall'antozono, doveva trovarsi nel succo esistente nelle piante; per verificare pertanto se vi esistesse realmente, Clermont estrasse questo succo, pestando in un recipiente le piante o le parti di esse con un poco di acqua, per trascinare il liquido intracellulare in esse contenuto, e poi lo saggiò direttamente col reattivo proposto da Schönbein, formato di ioduro potassico, di amido e di un sale ferroso. Stando a ciò che ci dice Clermont, in sulle prime egli non avrebbe ottenuto quei risultati positivi ch'ebbe dipoi, e la differenza sarebbe stata dipendente, dacchè non adoperò nel primo caso e succo delle piante e reattivo, recentemente ottenuti. Ponendosi però in condizioni opportune e valendosi sempre del reattivo suddetto, potè constatare dipoi l'esistenza dell'acqua ossigenata in un gran numero di piante tra le quali citò il tabacco, la vite, l'insalata (?!), molte labiate.

Avendo preso a sperimentare nelle medesime condizioni in cui operò Clermont e valendomi sempre di succo vegetale e di reattivo recentemente preparati, ottenni risultati identici nella maggior parte dei casi a quelli segnalati da Clermont; ma facilmente mi accorsi che l'identità dei risultati ottenuti non era che apparente, poichè potevano essere determinati da una causa che non aveva a far nulla con quella a cui Clermont aveva creduto riferirli. Questa causa da me intraveduta, dando luogo difatti nelle condizioni in cui sperimentò Clermont ad un risultato apparentemente conforme a quello che sarebbesi avuto, se il succo delle piante avesse in realtà contenuto perossido d'idrogeno, fece concludere a Clermont con troppa precipitazione, che nelle piante esistesse acqua ossigenata, mentre dai risultati delle ricerche da esso istituite col solo sussidio del reattivo di Schönbein, non poteva trarsi nessun argomento sicuro per ammetterne l'esistenza.

Nella prima serie delle mie ricerche adoperai i succhi delle piante seguenti, alcune delle quali corrispondono a quelle impiegate da Clermont: *Salvia officinalis; Eucalyptus globulus; Pelargonium zonale var.; Rosmarinum officinale; Tusillago fragrans; Vitis vinifera; Solanum lycopersicum; Nicotiana tabacum; Salvia splendens; Lactuca virosa; Laurus nobilis; Vicia faba; Anethum foeniculum; Triticum repens.* Il succo recentemente ottenuto da queste piante trattato con il reattivo Schönbein dette luogo in alcuni casi ad un cambiamento immediato di colore, prodotto da un precipitato azzurrastro, che a prima giunta sarebbesi potuto prendere per ioduro di amido e ritenersi indizio della presenza del perossido d'idrogeno. I succhi della *Vitis*, della *Nicotiana*, della *Salvia splendens*, della *Lactuca*, del *Solanum*, del *Triticum*, della *Vicia*, dell'*Anethum* non presentarono però reazione immediata con l'aggiunta del reattivo suddetto, e non fu che successivamente che la reazione stessa andò

effettuandosi con maggiore o minore rapidità. Questo primo risultato mi dette a conoscere che la modificazione subìta dal reattivo nel caso dei succhi che presentarono reazione immediata, non doveva esser dipendente dal perossido d'idrogeno che si ammise fosse in essi contenuto, poichè se realmente vi esisteva, e la sua produzione rappresentava un effetto che doveva verificarsi nell'organismo di tutte le piante, la medesima reazione sarebbesi ottenuta adoperando qualunque succo, mentre dalle mie prime esperienze già risultava che otto succhi sopra quattordici, non davan luogo alla reazione caratteristica dell'acqua ossigenata.

Facendomi a studiare la ragione di questa differenza nei risultati ottenuti, mi accorsi che il succo di quelle piante che dava col reattivo Schönbein una reazione immediata, l'offriva pure, benchè in taluni casi un poco meno sensibile, con la sola aggiunta del solfato ferroso; mentre il succo di quelle piante che non presentava con il reattivo Schönbein che una reazione lenta e successiva, non si alterava punto, ovvero richiedeva parecchie ore di tempo per alterarsi, con l'aggiunta del solo solfato ferroso. Dedussi da ciò, e mi pare con ragione, che il tannino contenuto nel succo di alcune piante col concorso dell'ossigeno atmosferico ed anche di quello che in conseguenza della lacerazione dei tessuti delle piante andava a trovarsi disciolto nel succo stesso, aveva una parte significante nella reazione che si presentava, allorchè si aggiungeva il reattivo Schönbein al succo vegetale; di modo che il precipitato azzurrastro che in tal caso producevasi, non era costituito come sarebbesi creduto a prima giunta dall'amido iodurato, ma rappresentava una copia non piccola di tannato ferrico (1). Là dove il succo della pianta non conteneva tannino, la reazione non presentavasi immediatamente, aggiungendo il reattivo Schönbein, ma si faceva lenta e successiva di mano in mano che lo ioduro potassico ed il solfato ferroso reagivano tra loro col concorso dell'ossigeno, e conseguendo da ciò l'isolamento dello iodo si originava ioduro di amido azzurro.

Volli anche effettuare un'esperienza di confronto, il risultato della quale convalidò quelle conclusioni che potean trarsi dalle ricerche precedenti. A tutti i succhi delle piante precedentemente indicate aggiunsi acqua ossigenata diluita nell'acqua ordinaria (5 per cento) acidulata con acido solforico al 500°, e poscia il miscuglio di sostanze costituenti il reattivo Schönbein; verificai in tutti i casi la produzione immediata di un precipitato azzurrastro, più sensibile però in quei succhi, che l'esperienze precedenti mi avevan dimostrato contenere tannino. Se pertanto il perossido d'idrogeno fosse stato naturalmente contenuto nel succo delle piante, l'aggiunta del reattivo Schönbein al succo medesimo doveva in tutti i casi dimostrarne l'esistenza, e non già come erasi verificato nelle mie precedenti ricerche, in alcuni incontri dar luogo ad una sua reazione caratteristica, in altri rimanere inalterato.

(1) La maggiore sensibilità della reazione nel caso dell'aggiunta al succo di una pianta contenente tannino, dello ioduro potassico, del solfato ferroso e dell'amido, in confronto di quello che si verifica con la sola aggiunta del solfato ferroso, può essere attribuita a che nel primo incontro il tannino reagisce sullo ioduro ferroso, tanto più facilmente decomponibile del solfato, e poi al fatto che contemporaneamente a questa reazione s'isola dello iodo, che va a formare ioduro di amido, il quale accresce la copia del precipitato azzurrastro di tannato ferrico, rendendo così più sensibile la reazione effettuatasi.

Il miscuglio di ioduro potassico, colla di amido e solfato ferroso, rappresenta veramente il reattivo che più di ogni altro è sensibile per scoprire tracce tenuissime di perossido d'idrogeno; secondo Schönbein si può ancora riconoscere per suo mezzo la presenza di $\frac{1}{10000000}$ di acqua ossigenata [1]. Ma nello stesso tempo che siffatto reattivo per la sua squisitissima sensibilità riesce d'un impiego sicuro e prezioso quando si adopera a discoprire l'acqua ossigenata, che si sa esistere in un liquido in proporzioni anche tenuissime, esso è d'altra parte di un impiego incerto e fallace quando si adopera per stabilire, se in un liquido di costituzione complessa esista o no acqua ossigenata. Condizioni facilissime ad avverarsi nei saggi di questi liquidi complessi valgono difatti a determinare sullo stesso reattivo una modificazione, identica nel risultato a quella che vi determinerebbe l'acqua ossigenata.

Difatti secondo Weltzien [2] la reazione che il perossido d'idrogeno determina sul reattivo Schönbein è fondata sulla doppia decomposizione che innanzi tutto si verifica tra il solfato ferroso e lo ioduro potassico

$$\text{(A)}\quad FeSO^4 + 2KI = K^2SO^4 + FeI^2$$

e poi sulla decomposizione ulteriore dello ioduro ferroso formatosi, operata dall'acqua ossigenata

$$\text{(B)}\quad 2FeI^2 + 3H^2O^2 = Fe^2H^6O^6 + 2I$$

dalla quale seconda reazione ottenendosi iodo allo stato di libertà, ne consegue, per la presenza dell'amido, la formazione dello ioduro di amido azzurro, che indirettamente rivela l'esistenza dell'acqua ossigenata.

Ma egli è chiaro che anche indipendentemente dalla presenza del perossido d'idrogeno la mescolanza delle due soluzioni di ioduro potassico e solfato ferroso darà sempre luogo alle reazioni espresse dall'equazioni A e B, poichè l'ossigeno atmosferico disciolto nei liquidi, condurrà, sebbene con una rapidità minore di quella che si effettua in presenza dell'acqua ossigenata, al medesimo risultato, isolandosi iodo e formandosi ioduro di amido azzurro

$$\text{(C)}\quad 4FeI^2 + 3H^2O + 3O = Fe^2I^6 + Fe^2H^6O^6 + 2I.$$

Questa reazione, che si effettua già con una certa facilità col solo concorso dell'ossigeno atmosferico, rimane oltremodo favorita quando nel miscuglio dei liquidi sia contenuta una copia di ossigeno superiore all'ordinaria. E questa circostanza si verifica appunto nel caso speciale del succo delle piante, nel quale si discioglie quell'ossigeno che per la lacerazione dei tessuti va a trovarsi allo stato di libertà.

Da tutto ciò consegue che il reattivo Schönbein formato di ioduro potassico, solfato ferroso e colla di amido non può essere impiegato con sicurezza di successo a discoprire se nel succo delle piante esista o no acqua ossigenata; prima di tutto perchè contenendosi nel succo di diverse piante tannino disciolto e nel medesimo tempo ossigeno, l'aggiunta di un sale ferroso trova condizioni opportune per trasformarsi rapidamente in tannato ferrico, producendosi in tal caso un precipitato di colore azzurrastro, che può benissimo confondersi, in un liquido torbido e verdastro, come è il

(1) Journal für praktische Chemie, tom. LXXIX pag. 66.

(2) Bull. de la Soc. chim. de Paris 1866, tom. V pag. 267.

succo di una pianta, con lo ioduro di amido; in secondo luogo perchè verificandosi nel succo delle piante condizioni che valgono ad isolare lo iodo dallo ioduro potassico, si può originare per tal causa ioduro di amido, indipendentemente dalla presenza dell'acqua ossigenata. La formazione dello ioduro di amido in quest'ultimo caso non è certo così immediata come avverrebbe, se nel liquido esistesse perossido d'idrogeno, ma è però abbastanza sollecita, in qualche caso specialmente, da poter far dubitare dell'esistenza di quest'ultimo corpo.

Da questa prima serie di ricerche risultarono pertanto infirmate le conclusioni a cui Clermont pervenne e l'esistenza supposta dell'acqua ossigenata nel succo delle piante rimase contradetta non solo dal lato teorico, facendo conseguire Clermont la formazione del perossido d'idrogeno nel succo delle piante dalla pretesa e combattuta esistenza dell'antozono, ma anche dal lato sperimentale, poichè i risultati delle ricerche da esso istituite non furono confermati da quelli delle indagini da me intraprese, che li dimostrarono anzi erronei per inesatta interpretazione.

II.

In seguito dei risultati di questa prima serie di ricerche poteva riguardare come esaurita la questione, abbandonando le indagini istituite in questo indirizzo come inutili e senza scopo; pensando peraltro ad una possibile obiezione per parte di qualcheduno, intesi proseguire le mie esperienze, mirando a dimostrare con prove convincenti e porre fuori dubbio il principio, che realmente l'acqua ossigenata non esiste affatto nell'organismo delle piante.

L'obiezione che mi si poteva formulare contro la conclusione fondata sui risultati delle mie esperienze, sarebbe stata la seguente: dallo avere dimostrato che il reattivo Schönbein non può, per cagione della sua fallacia, essere utilmente impiegato per risolvere la quistione, se nel succo delle piante esista o no acqua ossigenata, non può logicamente dedursi che il perossido d'idrogeno non faccia parte di cotesto succo; per coloro che ritengono come vera la dottrina dell'ozono e dell'antozono, per coloro che ammettono che l'ozono venga esalato dalle piante e che il carattere più pronunciato dell'antozono sia quello di formare coll'acqua perossido d'idrogeno, la produzione dell'acqua ossigenata nell'organismo delle piante è una conseguenza diretta e logica; e se l'impiego del reattivo Schönbein può condurre a risultati erronei, ciò non toglie che un altro reattivo, che non sia come quello fallace, varrà a dimostrare l'esistenza del perossido d'idrogeno nel succo delle piante. Le vostre esperienze, mi si potrebbe dire, contradicono pertanto quelle di Clermont, ma non valgono a combattere la possibilità dell'esistenza dell'acqua ossigenata nel succo delle piante, fondata sopra principî teorici ancora da parecchi sostenuti, i quali ammettono l'esistenza dell'ozono e dell'antozono.

Quantunque avessi la convinzione che siffatta possibilità fosse soltanto fondata sopra un complesso di teorie sbagliate e di fatti erroneamente interpretati, quantunque alcune delle indagini da me istituite si opponessero già ad ammettere siffatta possibilità, poichè se fosse stato vero che nel succo delle piante esistesse acqua ossigenata,

non avrei dovuto verificare che taluni succhi rimanevano inattivi verso il reattivo Schönbein, nondimeno mi accinsi ad istituire una seconda serie di ricerche, dalle quali ottenni risultamenti che mi sembrano interessanti e che ora mi farò ad esporre.

Prima di tutto mi occorre avvertire come i differenti procedimenti suggeriti per mettere in evidenza le più piccole quantità di acqua ossigenata esistenti in un liquido, possono difficilmente applicarsi alla ricerca del perossido d'idrogeno nel succo delle piante. La natura complessa di questo succo, il suo colore verde più o meno intenso danno al succo stesso i caratteri di un mezzo tutt'altro che acconcio per stabilirvi delicate reazioni chimiche. I reattivi suggeriti dai diversi sperimentatori svelano la presenza del perossido d'idrogeno o mercè l'apparizione di un colore speciale o al contrario mercè la scomparsa del colore possieduto dal reattivo. L'esistenza della clorofilla nel succo estratto da una parte di una pianta qualsiasi impedisce però completamente di poter trarre partito di uno dei due modi particolari di sopra indicati, con cui il perossido d'idrogeno sarebbe posto in evidenza mercè un saggio qualitativo; cosichè per riuscire nell'intento, vidi la necessità di sperimentare sul succo di una pianta, allontanando precedentemente la clorofilla ed assicurandomi poi con ricerche dirette ed indirette, che il perossido d'idrogeno, ove realmente fosse stato contenuto nel succo vegetale, non si sarebbe distrutto durante le operazioni preliminari.

A tal fine mi son valso in alcune esperienze del metodo suggerito da Schlösing (¹) per l'analisi dei vegetali, consistente nell'immersione delle piante o delle parti di esse nell'etere etilico; questo liquido sposta i succhi contenuti nei tessuti, di guisa che per tale sostituzione, quelli escono dalle cellule in cui stanno raccolti e si radunano separati dall'etere nel fondo del recipiente. Questo metodo però, che per se stesso è eccellente, ha il difetto di richiedere troppo tempo perchè con esso possa raccogliersi una certa quantità di succo vegetale; nel caso in quistione poi può anche far supporre, che il perossido d'idrogeno esistente naturalmente nel succo di una pianta si decomponga durante il tempo occorrente, perchè l'etere sostituisca gradualmente i succhi vegetali e questi si raccolgano a parte. Vedremo più oltre che quest'obiezione non ha realmente ragione di esistere, ma finchè per altra via non venga dimostrato che i succhi vegetali contenenti o no clorofilla, non valgono a decomporre il perossido d'idrogeno, almeno rapidamente, l'obiezione suddetta potrebbe ritenersi logica, ed infirmare quelle conclusioni, che in base all'esperienze istituite col solo metodo di Schlösing sarebbero state formulate.

L'altro procedimento che ho seguìto nella maggior parte delle mie esperienze, e che alla più grande semplicità e sollecitudine nella sua attuazione riunisce il vantaggio di dare risultati concludentissimi, è quello che ora vado a descrivere.

Il succo vegetale viene estratto lacerando i tessuti delle foglie e dei fusti delle piante erbacee mercè rapida contusione in un mortaio, coll'aggiunta di una piccola quantità di acqua; il succo, addizionato dipoi con un triplo volume di etere etilico ed agitato fortemente, abbandona a questo tutta la clorofilla che conteneva e si converte in un liquido alcune volte limpido, altre volte leggermente biancastro o lattescente, opportunissimo però, senza che si richiegga altra operazione, per esaminare

(¹) Comptes rendus 1877, tom. LXXXV pag. 230.

se in esso sia o no contenuto perossido d'idrogeno. Per le qualità fisiche apparenti, questo liquido corrisponde completamente a quello che si ha col metodo di Schlösing; cosichè anche quest'ultimo è opportuno, astraendo pel momento dall'obiezione di sopra indicata, per ricercare direttamente se contenga o no acqua ossigenata.

Il reattivo da me impiegato di preferenza per scoprire il perossido d'idrogeno fu quello suggerito da Bareswill (¹), rappresentato dall'anidride cromica, che forma in presenza del perossido d'idrogeno un composto solubilissimo nell'etere, di un colore azzurro più o meno intenso, costituito di anidride percromica Cr^2O^7, secondo Bareswill, di acido percromico $Cr^2O^8H^2$ secondo Weltzien (²).

Ed il reattivo suddetto devesi davvero ritenere come il più caratteristico dell'acqua ossigenata, dal momento che il prodotto della reazione che è il composto del cromo al massimo di ossidazione, non si è potuto finora realizzare che col mezzo del perossido d'idrogeno.

L'impiego pertanto del reattivo di Bareswill oltre ad offrire una squisitissima sensibilità, poichè col concorso dell'etere si rende assai facile l'apprezzamento della reazione a cui può andare incontro per opera del perossido d'idrogeno, riesce nel caso in quistione opportunissimo ed è anzi il solo da raccomandarsi, trattandosi di mezzi di ricerca, in cui le sostanze di natura e proprietà differentissime che sono in essi contenute, agiscono nel più dei casi identicamente al perossido d'idrogeno su tutti gli altri reattivi finora proposti per discoprirlo, rendendoli per tal guisa fallaci ed inutili.

Ottenuto il liquido spoglio completamente di clorofilla per mezzo di uno qualunque dei due modi disopra indicati, ne ho preso in ogni ricerca un volume di cinque o dieci centimetri cubici, vi ho aggiunto un egual volume di etere etilico e poscia tre o quattro centimetri cubici di soluzione di anidride cromica ad $^1/_{100}$. Ho agitato fortemente il miscuglio dei liquidi, ma in nessuna dell'esperienze da me istituite ho constatato mai mercè il reattivo di Bareswill la presenza del perossido d'idrogeno nel succo delle piante arboree ed erbacee. E si noti che ne ho fatto ricerca in un numero di piante considerevole, superiore a duecento, delle quali darei le indicazioni precise, se i risultamenti delle mie ricerche fossero stati positivi, oppure ne avessi ottenuto qualcheduno non identico agli altri.

Il non avere constatato mai la presenza del perossido d'idrogeno nel succo dei vegetali mercè il reattivo di Bareswill rappresenta pertanto un risultato sperimentale, che non solo esclude direttamente l'esistenza del perossido d'idrogeno nel succo delle piante, ma accordandosi con i risultati della prima serie delle mie ricerche, conferma la conclusione già da me formulata per lo innanzi, intorno ai risultati dell'esperienze intraprese da Clermont, che riguardai erroneamente interpretati.

(¹) Ann. de Chimie et de Phys., 3ª serie tom. XX pag. 364.
(²) Bull. de la Soc. de Chimie de Paris 1866, tom. V pag. 328.

III.

I risultati di queste due prime serie di ricerche mi sembrano abbastanza concludenti e validi per sostenere, che coloro i quali o teoricamente, o mercè vedute teoriche apparentemente fondate su risultati sperimentali, ammisero l'esistenza dell'acqua ossigenata nel succo delle piante, caddero in errore. Ad evitare peraltro ogni obiezione ed a convalidare vieppiù i risultamenti dell'esperienze, riferiti nelle due parti precedenti, volli anche istituire alcune indagini comparative, che ora mi farò ad esporre.

Quantunque alcune esperienze di Schönbein (¹) confermate da quelle istituite più tardi da Weltzien (²) abbian dimostrato che l'acqua ossigenata non deve riguardarsi a tutto rigor di termine come una sostanza ossidante, e sebbene si conosca, che per suo mezzo possono effettuarsi parecchi fenomeni di riduzione, nondimeno tenendo conto delle reazioni che d'ordinario essa presenta, suolsi generalmente ammettere, che il carattere più spiccato dell' acqua ossigenata sia quello di determinare con molta facilità ossidazioni di sostanze elementari e composte. Indipendentemente poi dai fenomeni di ossidazione che il perossido d'idrogeno produce, si conosce ancora una serie abbastanza numerosa di fatti che addimostrano la facilissima alterabilità di tale composto per cause diverse, tra le quali la presenza di sostanze che lo decompongono, senza che il perossido d'idrogeno determini in tali incontri alcuna ossidazione.

Non conoscendosi peraltro esperienze particolari dirette a dimostrare quale fosse la maniera di comportarsi del perossido d'idrogeno sia di fronte al succo delle piante, sia di fronte ai diversi principî immediati dell' organismo vegetale, era necessario di stabilire ricerche particolari per chiarire siffatto punto ancora oscuro dei caratteri del perossido d'idrogeno.

I risultati di quest' esperienze, alcune delle quali sono ancora in corso, saranno particolareggiatamente esposti in un altro lavoro; mi limiterò ora ad esporre soltanto quelli, che possono interessare la quistione della presenza o dell'assenza del perossido d'idrogeno nel succo delle piante.

Ho adoperato i succhi delle quattordici piante nominate di sopra, estratti mercè lacerazione dei tessuti in un mortaio, con l'aggiunta di tale quantità di acqua, da rendere quanto fu possibile i succhi stessi egualmente diluiti. Ho aggiunto poscia ad un dato volume di un succo così preparato un volume eguale di acqua contenente $^5/_{100}$ di acqua ossigenata ed $^1/_{500}$ di acido solforico. In seguito dell' aggiunta del perossido d'idrogeno diluito in acqua leggermente acidulata, ho notato che il succo delle piante perdeva il color verde più o meno intenso che naturalmente possiede, e col tempo, dopo 24 ore almeno, si trovava trasformato in un liquido torbidiccio, contenente sospesi grumi e fiocchi di sostanze color foglia morta, rappresentanti le materie albuminoidi, la clorofilla e gli altri principî immediati, ch' esistevano nel succo e che rimasero alterati, sia per quella trasformazione che deve in essi conseguire per essere stati sottratti dall'organismo vegetale di cui facevan parte, sia per l'azione dell'acido solforico,

(¹) Journ. für praktische Chemie, tom. LXXIX pag. 88.
(²) Bull. de la Soc. chimique de Paris 1866, tom. V pag. 323.

e forse anche dell'acqua ossigenata. Indagini particolari difatti mi addimostrarono che il succo delle piante addizionato di un volume eguale di acqua contenente $^1/_{500}$ di acido solforico, subisce col tempo quella stessa alterazione che incontra con l'aggiunta di questo liquido e del perossido d'idrogeno. D'altra parte numerose esperienze mi hanno fatto persuaso, che il perossido d'idrogeno si decompone a contatto dei principî immediati contenuti nel succo estratto mercè la lacerazione dei tessuti delle piante, e che la clorofilla ne risente in modo principale l'azione; siffatta decomposizione però si verifica con notevole lentezza, cosichè può ammettersi che l'alterazione offerta dai succhi delle piante alcune ore dopo essere stati mescolati ad una soluzione leggermente acidulata di perossido d'idrogeno, devesi a quel complesso di cause di sopra esposte, tra le quali figura, benchè in grado debolissimo, anche l'azione del perossido d'idrogeno.

Per constatare poi la presenza del perossido d'idrogeno aggiunto ai succhi delle piante, il procedimento da me seguìto fu semplicissimo. Se il succo conteneva ancora clorofilla inalterata, lo agitava con un volume eguale di etere etilico, per cui mezzo tutta la clorofilla veniva separata dal liquido acquoso, sul quale reagiva poi direttamente col reattivo di Bareswill; se invece le sostanze contenute nel succo avevan subìto un'alterazione completa in conseguenza del prolungato contatto con la soluzione di perossido d'idrogeno leggermente acidulato, il liquido acquoso veniva filtrato e sul filtrato limpidissimo reagiva col reattivo di Bareswill.

Procedendo in tal guisa ho constatato la presenza dell'acqua ossigenata aggiunta a bella posta ai succhi vegetali, non solo qualche ora dopo effettuato il miscuglio, ma in alcuni casi anche uno o due giorni dopo; tenendo poi separata la clorofilla dal liquido acquoso per mezzo di uno strato sopranotante di etere, ho avuto occasione di constatare in alcuni succhi vegetali la presenza dell'acqua ossigenata aggiuntavi, anche tre mesi dopo dall'effettuato miscuglio. Il limite a queste ricerche mi fu d'ordinario imposto dall'esaurimento del liquido in cui doveva istituire la reazione col reattivo di Bareswill; in alcuni casi peraltro notai la scomparsa assoluta del perossido d'idrogeno mescolato al succo vegetale, prima ancora che avessi terminato la quantità di liquido su cui poteva istituire ulteriori ricerche. Da quest'ultimo fatto e da quello che le proporzioni dell'acqua ossigenata andavano sensibilmente diminuendo ogni volta che tornava ad esaminare il liquido primitivo, dedussi che il perossido d'idrogeno aggiunto ad un succo vegetale in soluzione acquosa debolmente acidulata, lentamente ma continuamente si decompone sino alla sua completa distruzione.

Conoscendo quanto influisca sulla stabilità del perossido d'idrogeno la presenza di un acido, e come le reazioni ch'esso può determinare vengano modificate completamente, se il mezzo in cui si effettuano sia acidificato, indagai ancora il modo di comportarsi dell'acqua ossigenata neutra (¹) sul succo delle piante, evitando così una obiezione, che avrebbe potuto mettere in dubbio l'importanza, che per la quistione

(¹) L'acqua ossigenata neutra fu preparata aggiungendo BaH^2O^2 alla soluzione acquosa del perossido d'idrogeno acidulato con H^2SO^4 sino a saturazione perfetta; precipitato il solfato baritico fu decantato il liquido e titolato di nuovo.

dell'assenza del perossido d'idrogeno nel succo delle piante, mi sembra che abbiano i risultati sperimentali testè riferiti.

Mescolai pertanto ad un volume di tutti i succhi delle piante sopra indicate, un volume eguale di soluzione acquosa neutra contenente $^{5}/_{100}$ di perossido d'idrogeno, ed aggiungendo poscia etere per separare la clorofilla, ritrovai in tutti i casi il perossido stesso mercè il reattivo di Bareswill aggiunto al liquido acquoso. Notai peraltro che l'acqua ossigenata neutra posta a contatto del succo delle piante non offriva punto quel notevole grado di stabilità offerto dall'acqua ossigenata acida, e se fu possibile ritrovarla qualche ora ed in alcuni casi anche un giorno dopo l'effettuato miscuglio, non riuscì mai a constatarne la presenza dopo parecchi giorni di tempo.

Acidificando debolmente i succhi delle piante e poi aggiungendo ad essi il perossido d' idrogeno in soluzione acquosa neutra, verificai quella medesima stabilità nell'acqua ossigenata aggiunta, che le precedenti ricerche mi avevan già dimostrato; e constatai la presenza del perossido d'idrogeno anche due giorni dopo che l'aveva aggiunta al succo acidificato di una pianta.

Ulteriori ricerche dimostreranno a qual principio immediato vegetale devesi la decomposizione lenta e successiva dell' acqua ossigenata aggiunta al succo di una pianta. Da quanto ho potuto conoscere finora, siffatta decomposizione devesi attribuire ad uno dei principî immediati della clorofilla: in tal caso però è a riflettersi, che questa sostanza non esiste veramente nel succo naturale di una pianta, ma si trova meccanicamente trascinata, in conseguenza della lacerazione dei tessuti, in quel liquido che si ottiene mercè contusione delle foglie e dei fusti erbacei delle piante, sul quale vennero istituite l'esperienze nelle condizioni riferite in questa Memoria.

Dall'insieme di queste ricerche mi sembra poter concludere: 1° che l'acqua ossigenata neutra aggiunta al succo di una pianta si decompone con una certa facilità, ma si può sempre riscontrarla anche qualche ora dopo ch'essa fu mescolata al succo di una pianta, mercè i processi di sopra indicati; 2° se al succo di una pianta acidulato al titolo di $^{1}/_{500}$ con acido solforico si aggiunge perossido d'idrogeno in soluzione acquosa neutra, ovvero se si aggiunge al succo di una pianta un volume di acqua di già acidulata contenente perossido d'idrogeno, si procura in tali incontri a questo corpo una notevole stabilità, e la presenza di esso nel liquido può constatarsi anche qualche giorno dopo; se si ha poi l'avvertenza di tener separata la clorofilla mercè uno strato di etere che la discioglie, il perossido d' idrogeno può rendersi palese nel liquido acquoso sottostante qualche mese ancora dopo l'effettuato miscuglio; anche in questo incontro però il perossido d'idrogeno subisce una decomposizione lentissima e successiva, per cui mezzo scompare alla fine dal liquido in cui era stato posto. Per quanto può dedursi dalle ricerche già istituite l'ossigeno proveniente dalla decomposizione del perossido d'idrogeno viene assorbito da qualcheduna delle sostanze contenute nel succo vegetale esaminato e probabilmente da uno dei componenti della clorofilla.

Se ora tragghiamo partito di queste conclusioni per valercene siccome elementi di discussione nella questione dell'ammessa esistenza del perossido d'idrogeno nel succo delle piante, ognuno facilmente scorge di quale valido appoggio esse possono risultare, per la risoluzione della quistione stessa. Invero le ricerche testè esposte

addimostrano, che se il succo delle piante contenesse naturalmente perossido d'idrogeno, mercè i procedimenti disopra indicati sarebbe facilissimo il metterlo in evidenza. I risultati di questa terza serie di ricerche sono pertanto di valido controllo a quelli esposti nella seconda; quelli addimostrarono che con un procedimento di ricerca altrettanto esatto quanto sensibile, l'acqua ossigenata non esisteva nel succo estratto dalle piante, questi hanno dimostrato che se il perossido d'idrogeno viene artificialmente aggiunto al succo vegetale, lo stesso mezzo d'indagine in quelle impiegato serve egregiamente a svelarne l'esistenza. I risultati esposti in queste ultime due serie di ricerche concordano poi con quelli riferiti nella prima, e tutti insieme contradicono in modo assoluto l'opinione, che nel succo delle piante sia contenuto perossido d'idrogeno.

Riepilogando ora quanto in questa lunga Memoria son venuto esponendo, dirò come le ricerche da me istituite ed esposte nella prima parte di questo lavoro addimostrano, che i risultati dell'esperienze di J. Clermont furono dall'autore erroneamente interpretati; poichè il reattivo di Schönbein da esso adoperato, ben lungi dall'essere stato impressionato dal perossido d'idrogeno, lo fu invece, come mi risultò comprovato da ricerche dirette e comparative, dal concorso simultaneo del tannino e dell'ossigeno disciolto nei succhi vegetali impiegati. Per siffatta ragione le ricerche di J. Clermont non comprovano punto la conclusione da esso formulata, che nel succo delle piante esista perossido d'idrogeno.

Accertato pertanto che a cagione della fallacia del reattivo di Schönbein, Clermont fu condotto in errore, rimaneva ad esaminare se impiegando mezzi di ricerca più esatti e cautelandosi contro tutte quelle cause che potevan condurre a commettere errori, l'acqua ossigenata esistesse o no nel succo delle piante. Egli è vero che tenendo conto del modo con cui Clermont dette ragione della genesi del perossido d'idrogeno nell'organismo vegetale, escludeva già *a priori* che siffatta sostanza vi potesse esistere e rendeva perciò inutili ulteriori ricerche; poichè essendo già validamente contradetta e combattuta la teoria dell'ozono e dell'antozono e dimostrata erronea l'opinione che dalle parti verdi delle piante venga esalato ozono (1), anche l'esistenza dell'acqua ossigenata nel succo delle piante che sarebbe stata una conseguenza della suddetta teoria in generale, ed in particolare del principio teorico che le piante sviluppassero ozono, si sarebbe trovata per cosifatte ragioni ugualmente combattuta.

Nondimeno allo scopo di chiarire vieppiù una quistione che poteva rimanere per alcuni sempre incerta, intrapresi una serie di ricerche, nelle quali valendomi del reattivo di Bareswill convenientemente applicato e cautelandomi contro gli errori possibili, indagai se l'acqua ossigenata fosse realmente contenuta nel succo estratto dai vegetali. I risultati di queste ricerche, esposte nella seconda parte del mio lavoro, furono tutti negativi e dimostrarono perciò l'assenza del perossido d'idrogeno nel succo delle piante.

(1) Vedi l'esperienze di Cloez (Annales de Chimie et de Physique 1857, tom. L pag. 80), di Houzeau (*Sur l'ozone atmosphérique* Paris, Gauthier Villars 1872) e quelle da me istituite (Gazzetta chimica italiana 1873, tom. III pag. 1).

Allo scopo di controllare l'esattezza del procedimento di ricerca seguìto nella seconda serie di esperienze, ne intrapresi pure una terza, aggiungendo ai succhi delle piante soluzioni titolate di perossido d'idrogeno acidificato o neutro. Seguendo lo stesso metòdo di ricerca già impiegato nella seconda serie di esperienze, ebbi modo di riscontrare la presenza del perossido d'idrogeno in tutti i liquidi in cui l'aveva aggiunto, risultato concludente, che vale a dimostrare, che se il perossido d'idrogeno fosse stato naturalmente contenuto nei succhi vegetali, col metodo di ricerca seguìto non si sarebbe decomposto durante le operazioni preliminari e facilmente sarebbe stato posto in evidenza. I risultati della terza serie di ricerche concordano esattamente con quelli della seconda e nell'insieme escludono l'esistenza del perossido d'idrogeno nel succo delle piante ammessa prima di altri da Schönbein e sostenuta poi recentemente da J. Clermont.

Sui Complessi e sulle Congruenze di 2° grado.

Memoria del dott. ETTORE CAPORALI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 2 giugno 1878.

L'oggetto di questo lavoro è lo studio sistematico della rappresentazione geometrica di un complesso di rette di 2° grado sui punti dello spazio ordinario. Le formole della più semplice corrispondenza univoca fra le rette di un complesso di di 2° grado e i punti dello spazio, sono dovute a Klein e furono pubblicate per la prima volta da Nöther alla fine di una breve Nota *Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexer Variabeln* (1). Ma da allora in poi, per quanto so, nessuno ha fatto soggetto di studio questa corrispondenza, la quale può essere utilizzata anche per la ricerca delle proprietà del complesso. Soltanto un caso speciale, quello del complesso tetraedrale, fu per la sua importanza più volte considerato (2).

In questo lavoro la rappresentazione viene dedotta sinteticamente; ed il punto di partenza è la rappresentazione delle rette di una congruenza di 2° grado sui punti di un piano, la quale benchè possa facilmente essere dedotta da cose note, abbiamo voluto trattare con qualche estensione.

§ 1.

Congruenze di 2° grado. Loro rappresentazione piana.

1. Una congruenza di 2° grado è il sistema Φ delle rette comuni ad un complesso lineare L e ad un complesso di 2° grado S. Per un punto qualunque dello spazio passano due rette della congruenza, e due ve ne sono in un piano qualunque. Una congruenza di 2° grado contiene però, com'è noto, 16 fasci di rette, vale a dire possiede 16 punti singolari P (centri dei fasci) e 16 piani singolari Π (piani dei fasci). In ogni piano Π vi sono 6 punti P; cioè, fra le rette della congruenza passante per un punto singolare, ve ne sono cinque che contengono un altro punto singolare: i sei punti singolari situati in uno stesso piano sono sopra una conica. Correlativamente, per ogni punto P passano sei piani Π, i quali toccano un cono di 2° grado. Un piano Π è incontrato dagli altri quindici, secondo le quindici rette che congiungono due a due i 6 punti P situati su quel piano.

(1) Nachrichten di Gottinga, 1869.

(2) Reye, *Die Geometrie der Lage* II, 1868. — Weiler, *Eine Abbildung des tetraedralen Complexes auf den Punktraum.*

2. Un complesso lineare qualunque dello spazio sega la congruenza Φ secondo una superficie gobba Θ del 4° ordine (la superficie comune a quel complesso e ai complessi L ed S): le superficie Θ debbono considerarsi come le forme fondamentali ad una dimensione, contenute nella congruenza. Queste superficie sono anche le intersezioni del complesso S colle congruenze lineari contenute nel complesso L; perciò esse formano un sistema quadruplamente infinito di superficie, tale, che quattro rette arbitrarie di Φ ne determinano una. Due superficie Θ hanno in comune quattro rette (le rette comuni ai complessi L ed S e a due altri complessi lineari) le quali appartengono ad infinite altre superficie Θ ([1]).

3. Un complesso lineare qualunque dello spazio, contiene una retta di ciascuno dei 16 fasci appartenenti alla congruenza Φ: perciò le superficie Θ passano per i punti singolari di Φ e toccano i suoi piani singolari. Una di queste superficie sega un piano Π secondo una retta passante pel corrispondente punto P e secondo una curva del 3° ordine passante per gli altri 5 punti singolari.

4. Le generatrici di una superficie Θ ammettono due trasversali comuni, le quali, se la superficie si consideri come luogo di punti, sono doppie per la superficie medesima: queste due rette sono le direttrici della congruenza lineare (vedi n. 2) determinata dalla superficie. Si può assumere ad arbitrio una direttrice: l'altra sarà la retta reciproca della prima rispetto al complesso L che contiene la congruenza di 2° grado.

5. Fra le superficie Θ ve n'è un numero doppiamente infinito che si spezzano in un piano singolare Π e in una superficie gobba del 3° ordine Γ. Infatti per ottener ciò basta assumere per una direttrice di Θ una retta qualunque passante pel punto singolare P corrispondente a quel piano; l'altra direttrice dovrà essere nel piano Π; il fascio di rette della congruenza di 2° grado contenuto in Π si staccherà dalla superficie Θ la quale diverrà una superficie gobba Γ del 3° ordine la cui direttrice doppia passa pel punto P mentre la direttrice semplice è situata nel piano corrispondente Π. Riassumendo, una congruenza di 2° grado contiene 16 sistemi doppiamente infiniti di superficie gobbe Γ del 3° ordine: ciascun sistema è coordinato ad uno dei piani singolari della congruenza. Le generatrici di una superficie Γ incontrano il piano singolare ad essa coordinato in punti situati sopra una retta (direttrice semplice di Γ).

6. La congruenza Φ può essere immediatamente rappresentata sopra un piano, qualora si scelga come rappresentativo uno dei piani singolari della congruenza ([2]). Sia Π questo piano, P il punto singolare corrispondente, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 gli altri cinque punti singolari situati in Π e c la conica che essi determinano. Ad una retta R

([1]) Le due superficie, considerate ciascuna come luogo di punti, hanno inoltre in comune una curva gobba del 12° ordine.

([2]) Per una rappresentazione delle rette di una congruenza di 2° grado sui punti di una superficie del 3° ordine, ovvero sui punti di una superficie del 4° ordine dotata d'una conica doppia, veggasi Cremona, *Sulla corrispondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie.* Atti della R. Accad. dei Lincei, vol. III serie 2ª.

della congruenza si faccia corrispondere il punto M nel quale essa incontra il piano rappresentativo: reciprocamente, preso un punto M del piano, per esso passano due rette di Φ; una è la MP situata in Π e l'altra sarà la retta R corrispondente ad M.

7. Ad una superficie appartenente alla congruenza corrisponde *in generale* una curva luogo delle tracce delle generatrici della superficie sul piano Π. Così (3) alle superficie Θ corrispondono le curve del 3° ordine (che diremo curve θ) passanti pei cinque punti a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Inoltre (5) alle superficie cubiche Γ del sistema coordinato al piano Π corrispondono le rette del piano rappresentativo.

8. È facile riconoscere come siano rappresentati i 16 fasci di Φ. Una retta qualunque di Π (rappresentante una superficie Γ) e la linea rappresentante il fascio della congruenza situato in Π debbono costituire insieme un luogo di 3° ordine appartenente al sistema θ: dunque al fascio PΠ corrisponde la conica c determinata dai cinque punti fondamentali.

Ai cinque fasci che hanno il centro rispettivamente nei punti fondamentali, corrispondono questi medesimi punti.

Agli altri 10 fasci di Φ corrispondono (1) le 10 rette che congiungono due a due i punti fondamentali.

I sedici fasci possono essere rappresentati coi simboli

$$a_1\,,\quad a_2\,,\quad a_3\,,\quad a_4\,,\quad a_5$$
$$b_{12}\,,\quad b_{13}\,,\quad b_{14}\,,\quad b_{15}\,,\quad b_{23}\,,\quad b_{24}\,,\quad b_{25}\,,\quad b_{34}\,,\quad b_{35}\,,\quad b_{45}$$
$$c$$

9. Si possono formare dei gruppi di 8 punti singolari della congruenza tali che siano situati (per coppie) su quattro raggi (e quattro soli) della congruenza: infatti, per es., gli otto fasci di rette che hanno per immagini

$$a_1\,,\; c\,;\; b_{23}\,,\; b_{45}\,;\; b_{24}\,,\; b_{35}\,;\; b_{25}\,,\; b_{34}\,,$$

si distribuiscono in quattro coppie, due fasci di ciascuna coppia avendo in comune un raggio della congruenza. Un gruppo di 8 punti singolari così disposti lo diremo un'*ottupla*. Si vede facilmente per mezzo del piano rappresentativo che due punti di un' ottupla i quali siano congiunti da un raggio della congruenza, determinano gli altri sei. Le ottuple sono in numero di dieci. I sedici punti singolari si possono in cinque maniere diverse separare in due ottuple; le 10 ottuple sono perciò coniugate due a due.

Analoghe considerazioni possono farsi per i piani singolari.

10. La congruenza contiene 10 sistemi semplicemente infiniti di iperboloidi: essi sono rappresentati dai cinque fasci di rette e dai cinque fasci di coniche determinati dai punti fondamentali; dimodochè possono essere indicati coi simboli

$$a_1 \qquad a_2 \qquad a_3 \qquad a_4 \qquad a_5$$
$$a_2 a_3 a_4 a_5\,,\quad a_3 a_4 a_5 a_1\,,\quad a_4 a_5 a_1 a_2\,,\quad a_5 a_1 a_2 a_3\,,\quad a_1 a_2 a_3 a_4\,.$$

Ogni sistema di iperboloidi è coordinato ad un'ottupla, per modo che tutti gli iperboloidi di un sistema passano per otto punti singolari costituenti un'ottupla e

toccano gli otto piani singolari corrispondenti: infatti si vede subito nel piano rappresentativo che 8 dei fasci della congruenza hanno in comune rispettivamente un raggio con un iperboloide.

Due iperboloidi coordinati a due ottuple coniugate hanno in comune due raggi della congruenza. Due iperboloidi coordinati a due ottuple non coniugate hanno in comune una retta della congruenza. Due iperboloidi appartenenti allo stesso sistema non hanno in comune nessuna retta della congruenza.

11. I sedici sistemi di superficie cubiche Γ sono rappresentati dal sistema delle rette del piano Π (7) dalle 10 reti di coniche determinate dai punti fondamentali presi tre a tre e dalle 5 reti di cubiche determinate da uno dei punti fondamentali come doppio e dai rimanenti come semplici.

§ 2.

Formole della rappresentazione.

Quantunque non sia necessario per lo scopo che ci siamo prefissi, non sarà inutile di esporre analiticamente la rappresentazione già ottenuta.

12. Indichiamo con $x_1 x_2 x_3 x_4$, $y_1 y_2 y_3 y_4$ le coordinate di due punti d'una retta, con $u_1 u_2 u_3 u_4$, $v_1 v_2 v_3 v_4$ le coordinate di due piani passanti per la medesima retta e con p_{23}, p_{31}, p_{12}, p_{14}, p_{24}, p_{34} le coordinate tetraedriche della retta stessa: dimodochè porremo

$$\begin{aligned}
p_{23} &\equiv x_2 y_3 - x_3 y_2 \equiv u_1 v_4 - u_4 v_1 \\
p_{31} &\equiv x_3 y_1 - x_1 y_3 \equiv u_2 v_4 - u_4 v_2 \\
p_{12} &\equiv x_1 y_2 - x_2 y_1 \equiv u_3 v_4 - u_4 v_3 \\
p_{14} &\equiv x_1 y_4 - x_4 y_1 \equiv u_2 v_3 - u_3 v_2 \\
p_{24} &\equiv x_2 y_4 - x_4 y_2 \equiv u_3 v_1 - u_1 v_3 \\
p_{34} &\equiv x_3 y_4 - x_4 y_3 \equiv u_1 v_2 - u_2 v_1
\end{aligned}$$

e si avrà identicamente

$$p_{23} p_{14} + p_{31} p_{24} + p_{12} p_{34} = 0 . \tag{1}$$

L'equazione di un complesso generale di 2° grado, la scriveremo nella maniera seguente

$$\left\{\begin{aligned}
S \equiv\ & 2p_{23}(a_{11} p_{14} + a_{12} p_{24} + a_{13} p_{34}) + 2p_{31}(a_{21} p_{14} + a_{22} p_{24} + a_{23} p_{34}) \\
& + 2p_{12}(a_{31} p_{14} + a_{32} p_{24} + a_{33} p_{34}) \\
& + b_{11} p^2_{23} + b_{22} p^2_{31} + b_{33} p^2_{12} + 2b_{23} p_{31} p_{12} + 2b_{31} p_{12} p_{23} + 2b_{12} p_{23} p_{31} \\
& + c_{11} p^2_{14} + c_{22} p^2_{24} + c_{33} p^2_{34} + 2c_{23} p_{24} p_{34} + 2c_{31} p_{34} p_{14} + 2c_{12} p_{14} p_{24} = 0.
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

13. Rammentiamo che s'intende per retta doppia di un complesso, secondo Plücker (¹), una retta *singolare* tale che ogni suo punto sia un *punto singolare* e che ogni piano

(¹) Plücker, *Neue Geometrie des Raumes* II, n. 307.

passante per essa sia un *piano singolare*. Un complesso in generale non possiede alcuna retta doppia. Le coordinate di una retta doppia debbono soddisfare le eguaglianze

$$\frac{1}{p_{23}}\frac{dS}{dp_{14}}=\frac{1}{p_{31}}\frac{dS}{dp_{24}}=\frac{1}{p_{12}}\frac{dS}{dp_{34}}$$
$$=\frac{1}{p_{14}}\frac{dS}{dp_{23}}=\frac{1}{p_{24}}\frac{dS}{dp_{31}}=\frac{1}{p_{34}}\frac{dS}{dp_{12}}$$

dove $S=0$ è l'equazione del complesso (¹).

Così, in particolare, affinchè pel complesso (2) sia doppia la retta.

$$p_{23}=0$$

deve aversi

$$a_{12}=a_{13}=b_{11}=b_{12}=b_{31}=0$$

vale a dire debbono mancare nell'equazione del complesso tutti i termini contenenti la p_{23} eccetto quello in cui entra insieme alla sua coniugata p_{14}: quest'ultimo termine si può allora fare sparire per mezzo della identità (1).

14. Se nella (2) fosse soltanto

$$b_{11}=0\,,$$

la retta $p_{23}=0$ sarebbe una retta ordinaria del complesso S.

15. Ciò posto una congruenza di 2° grado Φ sia determinata dal complesso S e da un complesso lineare L che abbia l'equazione

(3) $$L=\lambda_1 p_{23}+\lambda_2 p_{31}+\lambda_3 p_{12}+\lambda'_1 p_{14}+\lambda'_2 p_{24}+\lambda'_3 p_{34}=0.$$

Vogliamo in primo luogo che il piano

$$x_4=0$$

(che chiameremo Π) sia un piano singolare della congruenza e che il vertice opposto del tetraedro fondamentale, sia un punto singolare della congruenza medesima.

Se

$$u_1 x_1+u_2 x_2+u_3 x_3=0$$

è l'equazione di una retta qualunque del piano Π, le coordinate di questa retta, saranno

$$p_{23}\equiv u_1\,,\quad p_{31}\equiv u_2\,,\quad p_{12}\equiv u_3$$
$$p_{14}=0\,,\quad p_{24}=0\,,\quad p_{34}=0\,.$$

Sostituendo questi valori nelle equazioni (2) e (3) se ne hanno le equazioni

(4) $$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3=0$$

(5) $$b_{11}u^2_1+b_{22}u^2_2+b_{33}u_3+2b_{23}u_2u_3+2b_{31}u_3u_1+2_{12}u_1u_2=0$$

le quali rappresentano le rette di ciascuno dei complessi L ed S situate nel piano Π. Se questo piano deve essere singolare per la congruenza, bisogna che la conica rappresentata dalla (5) si decomponga in due fasci, uno dei quali sia quello rappresentato dalla (4). È facile vedere che le condizioni perchè ciò avvenga sono

(6) $$\begin{aligned} b_{33}\lambda^2_2+b_{22}\lambda^2_3+2b_{23}\lambda_2\lambda_3&=0\\ b_{11}\lambda^2_3+b_{33}\lambda^2_1+2b_{31}\lambda_3\lambda_1&=0\\ b_{22}\lambda^2_1+b_{11}\lambda^2_2+2b_{12}\lambda_1\lambda_2&=0\,. \end{aligned}$$

(¹) L. c. n. 300.

Analogamente si troverebbe che affinchè il punto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ sia singolare per la congruenza Φ, deve aversi

$$(7)\qquad \begin{aligned} c_{33}\lambda'^2_2 + c_{22}\lambda'^2_3 + 2c_{23}\lambda'_2\lambda'_3 &= 0 \\ c_{11}\lambda'^2_3 + c_{33}\lambda'^2_1 + 2c_{31}\lambda'_3\lambda'_1 &= 0 \\ c_{22}\lambda'^2_1 + c_{11}\lambda'^2_2 + 2c_{12}\lambda'_1\lambda'_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

16. Lasciando invariata la congruenza Φ, si può al complesso S sostituire uno qualunque dei complessi rappresentati dall'equazione

$$S + L\,(h_1 p_{23} + h_2 p_{31} + h_3 p_{12} + h'_1 p_{14} + h'_2 p_{24} + h'_3 p_{34}) = 0$$

dove le h sono costanti arbitrarie.

Assumendo per le h i valori seguenti

$$h_1 = -\frac{b_{11}}{\lambda_1}\,, \quad h_2 = -\frac{b_{22}}{\lambda_2}\,, \quad h_3 = -\frac{b_{33}}{\lambda_3}$$

$$h'_1 = -\frac{c_{11}}{\lambda'_1}\,, \quad h'_2 = -\frac{c_{22}}{\lambda'_2}\,, \quad h'_3 = -\frac{c_{33}}{\lambda'_3}$$

e tenendo conto delle condizioni (6) e (7), l'equazione precedente diviene

$$(8)\qquad \begin{aligned} p_{23}\,(a_{11} p_{14} + a_{12} p_{24} + a_{13} p_{34}) + p_{31}\,(a_{21} p_{14} + a_{22} p_{24} + a_{23} p_{34}) \\ + p_{12}\,(a_{31} p_{14} + a_{32} p_{24} + a_{33} p_{34}) = 0\,. \end{aligned}$$

Dunque senza diminuire la generalità della congruenza Φ, per l'equazione del complesso S si può assumere la (8).

17. La particolarità del complesso rappresentato dalla equazione (8), consiste nell'esistenza di 6 rette doppie. Infatti se si scrivono le condizioni perchè una retta di coordinate

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ 0,\ 0,\ 0,$$

(situata nel piano Π) sia doppia pel complesso (8), si trova (13)

$$\frac{a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + a_{31} u_3}{u_1} = \frac{a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + a_{32} u_3}{u_2} = \frac{a_{13} u_1 + a_{23} u_2 + a_{33} u_3}{u_3}\,.$$

Queste equazioni sono soddisfatte in generale da tre sistemi di valori delle u: dunque nel piano Π vi sono tre rette le quali sono doppie pel complesso (8). Analogamente si dimostrerebbe che il complesso possiede altre tre rette doppie uscenti dal punto

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0\,.$$

Assumiamo come rette doppie del complesso (8) precisamente le rette d'intersezione del piano Π coi tre piani

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = 0\,, \quad x_3 = 0\,;$$

allora nell'equazione (8) dovrà essere (13)

$$a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0\,.$$

Dunque senza diminuire la generalità della congruenza Φ, si potrà ritenerla determinata dai due complessi

$$(9)\qquad \begin{cases} L \equiv \lambda_1 p_{23} + \lambda_2 p_{31} + \lambda_3 p_{12} + \lambda'_1 p_{14} + \lambda'_2 p_{24} + \lambda'_3 p_{34} = 0 \\ S \equiv a_1 p_{23} p_{14} + a_2 p_{31} p_{24} + a_3 p_{12} p_{34} = 0 \end{cases}$$

il secondo dei quali è il noto complesso tetraedrale.

18. I ragionamenti fatti in questo paragrafo si possono riassumere come segue:

Data una congruenza generale di 2° grado, se si prendono ad arbitrio un suo punto singolare e un suo piano singolare (non congruenti), questi determinano un complesso tetraedrale che contiene la congruenza e pel quale quel punto e quel piano sono un vertice e la faccia opposta del tetraedro fondamentale.

Questa proprietà sarà completata più innanzi (26) ([1]).

19. Siano x_1, x_2, x_3, 0, le coordinate del punto nel quale una retta qualunque della congruenza Φ incontra il piano Π e siano y_1, y_2, y_3, y_4, le coordinate di un altro punto qualunque di quella retta: per le coordinate della retta medesima si avranno le espressioni

$$\begin{array}{ll} p_{23} \equiv x_2 y_3 - x_3 y_2 & p_{14} \equiv x_1 y_4 \\ p_{31} \equiv x_3 y_1 - x_1 y_3 & p_{24} \equiv x_2 y_4 \\ p_{12} \equiv x_1 y_2 - x_2 y_1 & p_{34} \equiv x_3 y_4 . \end{array}$$

Se questi valori si pongono nelle equazioni (9) della congruenza, si ottengono le equazioni

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda_3 x_2 - \lambda_2 x_3) y_1 + (\lambda_1 x_3 - \lambda_3 x_1) y_2 \\ + (\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2) y_3 - (\lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \lambda'_3 x_3) y_4 = 0 \\ (a_2 - a_3) x_2 x_3 y_1 + (a_3 - a_1) x_3 x_1 y_2 + (a_1 - a_2) x_1 x_2 y_3 = 0 \end{array} \right.$$

le quali rappresentano (nelle y) due piani contenenti una retta della congruenza: per mezzo di questi due piani, si possono formare di nuovo le coordinate della retta stessa (12) e si trova

$$\begin{array}{l} p_{23} \equiv a' \; (\lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \lambda'_3 x_3) \, x_2 x_3 \\ p_{31} \equiv a'' \; (\lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \lambda'_3 x_3) \, x_3 x_1 \\ p_{12} \equiv a''' \; (\lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \lambda'_3 x_3) \, x_1 x_2 \\ p_{14} \equiv -(a' \lambda_1 x_2 x_3 + a'' \lambda_2 x_3 x_1 + a''' \lambda_3 x_1 x_2) \, x_1 \\ p_{24} \equiv -(a' \lambda_1 x_2 x_3 + a'' \lambda_2 x_3 x_1 - a''' \lambda_3 x_1 x_2) \, x_2 \\ p_{34} \equiv -(a' \lambda_1 x_2 x_3 + a'' \lambda_2 x_3 x_1 + a''' \lambda_3 x_1 x_2) \, x_3 \end{array}$$

dove per brevità si è posto

$$(11) \qquad a' = a_2 - a_3 , \quad a'' = a_3 - a_1 , \quad a''' = a_1 - a_2 .$$

Poniamo ancora per brevità

$$\begin{array}{l} R = \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \lambda'_3 x_3 \\ C = a' \lambda_1 x_2 x_3 + a'' \lambda_2 x_3 x_1 + a''' \lambda_3 x_1 x_2 , \end{array}$$

([1]) Si potrebbe dimostrare la proprietà seguente la quale però è estranea al nostro argomento. Una congruenza di 2° grado è contenuta in un numero 6 volte infinito di complessi di 2° grado: fra questi vi sono 16 sistemi triplamente infiniti di complessi i quali contengono un piano rigato. Questo piano è il medesimo per tutti i complessi di un sistema ed è uno dei 16 piani singolari della congruenza. Ogni complesso del sistema possiede tre rette doppie in quel piano: il triangolo di queste tre rette è inscritto nella conica determinata dai sei punti singolari della congruenza, situati in quel piano.

ed allora le formole

$$(12)\qquad p_{23}:p_{31}:p_{12}:p_{14}:p_{24}:p_{34}= \\ = a'\,\mathrm{R}x_2\,x_3 : a''\,\mathrm{R}x_3\,x_1 : a'''\,\mathrm{R}x_1\,x_2 : -\mathrm{C}x_1 : -\mathrm{C}x_2 : -\mathrm{C}x_3$$

corrispondono a quella rappresentazione delle rette della congruenza Φ sui punti del piano Π che abbiamo effettuato sinteticamente al § 2.

20. La superficie rigata comune alla congruenza Φ e al complesso lineare

$$k_1\,p_{23}+k_2\,p_{31}+k_3\,p_{12}+k'_1\,p_{14}+k'_2\,p_{24}+k'_3\,p_{34}=0$$

è rappresentata sul piano Π da una curva del 3° ordine la cui equazione si ottiene sostituendo nell'equazione precedente i valori (12): essa è dunque

$$\mathrm{R}\,(k_1\,a'\,x_2\,x_3+k_2\,a''\,x_3\,x_1+k_3\,a'''\,x_1\,x_2) \\ -\mathrm{C}\,(k'_1\,x_1+k'_2\,x_2+k'_3\,x_3)=0\,.$$

Risulta da ciò che i cinque punti fondamentali della rappresentazione sono i punti

$$x_2=x_3=0\,,\quad x_3=x_1=0\,,\quad x_1=x_2=0$$

e i due punti comuni alle linee

$$\mathrm{R}=0\,,\qquad \mathrm{C}=0\,.$$

21. Dunque ogni vertice ed ogni faccia del tetraedro fondamentale del complesso S è un punto e un piano singolare per la congruenza Φ. Abbiamo già veduto che uno di tali tetraedri è determinato da un suo vertice e dalla faccia opposta. Siccome preso un piano singolare, vi sono 10 punti singolari all'infuori di esso, così ogni piano singolare determina 10 di quei tetraedri: perciò essi saranno in tutto $\dfrac{10\,.\,16}{4}$.

Dunque: *Una congruenza generale di 2° grado è contenuta in 40 complessi tetraedrali*; o, in altre parole, *coi punti e coi piani singolari della congruenza si possono formare 40 tetraedri, ciascuno dei quali è incontrato secondo un rapporto anarmonico costante da ogni retta della congruenza.*

§ 3.

Rappresentazione del complesso di 2° grado. Enti lineari ed elementi fondamentali dei due spazi.

22. Proponiamoci di rappresentare un complesso di 2° grado sui punti di uno spazio ordinario, in modo che ai piani di questo corrispondano nel complesso congruenze di 2° grado che diremo φ. Per semplicità di discorso chiameremo primo spazio, lo spazio di punti rappresentativo e secondo spazio quello che contiene il complesso. Le congruenze φ dovranno formare un sistema triplamente infinito come quello dei piani che rappresentano: e siccome tre piani s'incontrano in un punto, tre congruenze φ qualunque dovranno avere in comune una sola retta che non sia comune a tutte.

Un piano qualunque del 1° spazio contiene una doppia infinità di rette, due qualunque delle quali s'incontrano in un punto. Perciò una congruenza φ dovrà

essere intersecata dalle altre congruenze del sistema, secondo superficie variabili di una serie doppiamente infinita e tale che due superficie qualunque abbiano in comune una sola retta variabile.

Riportando la cosa ad un piano rappresentativo di una congruenza φ, avremo su di esso le curve del 3° ordine passanti per cinque punti fissi, le quali sono immagini delle superficie *enti lineari* della congruenza: or bene, per quel che s'è detto, bisognerà staccare una parte fissa comune a tutte quelle curve in modo che le curve variabili rimanenti costituiscano una rete omoloidica ([1]). Il modo più semplice di ottenere lo scopo è quello di assumere come rete omoloidica quella delle rette del piano rappresentativo: ciascuna di esse insieme alla conica c dei cinque punti fissi, costituisce l'immagine dell'intersezione completa della congruenza φ con un'altra congruenza qualunque della stessa famiglia. Ora siccome la conica c rappresenta un fascio di rette se ne conclude che: le congruenze di 2° grado φ contenute in un complesso di 2° grado e che hanno in comune un fascio di rette, costituiscono un sistema triplamente infinito e tale che due congruenze qualunque hanno in comune ulteriormente una retta e che tre rette del complesso determinano in generale una ed una sola congruenza: perciò queste congruenze si possono far corrispondere al sistema dei piani di uno spazio ordinario.

Il fascio comune alle congruenze φ, lo diremo *fascio fondamentale* e lo chiameremo F; indicheremo con O il centro e con ω il piano del fascio.

23. Importa di considerare subito le congruenze di 2° grado contenute nel complesso ma alle quali non appartiene il fascio fondamentale: costituiscono un sistema cinque volte infinito (come i complessi lineari) e corrisponderà loro nel primo spazio un sistema lineare cinque volte infinito di superficie che diremo S.

Siano P e P' due piani del 1° spazio ai quali corrispondano due congruenze φ e φ' e sia la S la superficie corrispondente ad un'altra congruenza Φ qualunque: le tre congruenze φ, φ' e Φ hanno in comune tre rette, come puo vedersi facilmente per mezzo del piano rappresentativo di φ o di φ'. Perciò le superficie P, P' ed S, hanno in comune tre punti. Dunque:

Le superficie S che corrispondono alle congruenze del complesso non contenenti il fascio fondamentale, sono superficie del 3° ordine.

24. È noto che nel complesso di 2° grado sono contenuti dei fasci di rette in numero doppiamente infinito i cui centri (punti singolari) hanno per luogo una superficie di Kummer. Il fascio F è fra questi e perciò la superficie dei punti singolari passa per O e tocca il piano ω. In questo piano vi è un numero semplicemente infinito di punti singolari, centri di fasci di rette, i quali hanno tutti un raggio variabile in comune col fascio F. Uno qualunque di questi fasci non ha in comune colle congruenze φ nessun raggio al di fuori del fascio fondamentale, perchè il raggio che hanno in generale in comune un fascio e una congruenza di 2° grado (in un complesso di 2° grado) appartiene in questo caso ad F. Ne segue che ad uno

([1]) Cremona, *Sulle trasformazioni razionali nello spazio.* Annali di Mat., serie 2ª tomo V.

qualunque di quei fasci non corrisponde una linea, ma un punto: e alla serie di quei fasci corrisponde una curva la quale sarà fondamentale per il primo spazio.

Anzi questa curva sarà del 5° ordine, perchè il numero dei suoi punti situati in un piano è dato dal numero dei fasci di una congruenza φ che hanno un raggio in comune col fascio F.

Riassumendo: vi è una serie semplicemente infinita di fasci di rette del complesso, ciascuno dei quali ha un raggio in comune col fascio fondamentale: ad ognuno di questi fasci corrisponde nel primo spazio un punto; il luogo di questi punti è una curva gobba del 5° ordine: la chiameremo curva Q.

Un fascio corrispondente ad un punto di Q ha in comune con una congruenza Φ un raggio: perciò il punto apparterrà alla superficie S corrispondente. Vale a dire: le superficie S hanno tutte in comune la curva Q.

25. Tre congruenze di 2° grado appartenenti ad un complesso di 2° grado hanno in comune quattro rette. Applicando questa osservazione a due congruenze Φ e ad una congruenza φ se ne deduce che: due superficie S hanno in comune una curva variabile del 4° ordine. Perciò la curva Q è la sola curva fondamentale nel primo spazio.

26. Ai raggi del fascio fondamentale, perchè appartiene a tutte le congruenze φ, corrisponderanno non punti, ma linee ciascuna delle quali non deve incontrare in punti non fondamentali le superficie S. D'altra parte considerando un raggio uscente da O e situato nel piano ω, poichè esso incontra in altri tre punti la superficie dei punti singolari, ne segue che è comune a tre di quei fasci (24) ai quali corrispondono punti della curva Q: perciò la linea corrispondente ad un raggio di F incontra in tre punti la curva Q; e poichè non deve incontrare fuori di Q le superficie S, si conclude che ai raggi del fascio fondamentale corrispondono nel primo spazio le rette trisecanti della curva Q.

Il luogo di queste trisecanti è evidentemente una superficie del 2° ordine, perchè mentre ad una congruenza qualunque Φ corrisponde una superficie S del 3° ordine, quando la congruenza contiene il fascio F, quella superficie degenera in un piano. Dunque al fascio fondamentale corrisponde una superficie T del 2° ordine che contiene la curva fondamentale Q.

Una superficie S ha in comune colla superficie T, oltre alla curva Q, una retta trisecante di Q.

27. Alla serie dei punti d'una retta R del primo spazio corrispondono nel secondo spazio le generatrici d'una superficie rigata. Siccome la R incontra una superficie S in tre punti, la superficie corrispondente ad R ha tre rette comuni con una congruenza Φ: inoltre questa superficie conterrà due raggi del fascio F perchè la retta incontra in due punti la quadrica T. Dunque alle rette del primo spazio corrispondono nel secondo le supeficie gobbe del 3° ordine che contengono due raggi del fascio fondamentale: la direttrice doppia d'una di queste superficie passa per O e la direttrice semplice è situata sopra ω (5).

28. Se la retta R si appoggia in un punto alla curva Q, dalla superficie corrispondente si stacca il fascio che corrisponde a quel punto. È facile dedurre che:

Alle rette che incontrano la curva Q corrispondono superficie del 2° ordine che contengono un raggio di F (passanti per O e toccate da ω). Alle corde della curva fondamentale Q corrispondono nel 1° spazio fasci di rette.

29. Data una curva nel primo spazio, se ne trova subito la superficie corrispondente; basta rammentare che l'ordine della superficie è dato dal numero delle intersezioni, non situate sopra Q, della curva con una superficie S qualunque, e il numero dei raggi che la superficie ha in comune col fascio fondamentale è dato dal numero delle intersezioni, non situate sopra Q, della curva colla quadrica T. Si possono allora stabilire le proprietà seguenti:

Il complesso di 2° grado contiene un sistema doppiamente infinito di fasci, i quali sono rappresentati dalle corde della curva Q; tra questi, quelli che hanno un raggio comune col fascio fondamentale sono rappresentati dai punti di Q.

Il complesso contiene un numero quattro volte infinito di iperboloidi che sono rappresentati dalle coniche che incontrano quattro volte la curva Q; fra questi quelli che contengono un raggio di F, sono rappresentati dalle rette appoggiate una volta a Q.

Vi è un numero sei volte infinito di superficie cubiche le quali corrispondono alle cubiche gobbe appoggiate sei volte alla curva Q: se però contengono un raggio di F sono rappresentate dalle coniche appoggiate tre volte a Q; e se contengono due raggi di F corrispondono alle rette del primo spazio.

Ecc. ecc.

30. Abbiamo veduto che ad ogni punto della curva Q corrisponde nel secondo spazio un fascio di rette: i fasci corrispondenti a tutti i punti di Q costituiscono un sistema di raggi del quale siamo in grado di stabilire qualche proprietà. Poichè un iperboloide del complesso è rappresentato da una conica sulla quale sono quattro punti di Q ne segue che quell'iperboloide contiene quattro raggi del sistema. Dunque il sistema di raggi che corrisponde ai punti della curva Q è del 4° grado. Ma se l'iperboloide contiene un raggio di F, esso non ha più che un altro raggio comune col sistema (n. prec.); dimodochè si può dire che i raggi del fascio F sono tripli pel sistema suddetto.

§ 4.

Proprietà della curva Q. Punti e piani dello spazio del complesso.

31. Abbiamo veduto che la curva Q è del 5° ordine e giace sopra una superficie del 2° ordine T: essa può definirsi come la curva d'intersezione della quadrica con una superficie del 3° ordine (superficie S) passante per una generatrice G della quadrica stessa. Perciò la curva incontra tre volte tutte le generatrici del sistema al quale appartiene G e due volte le generatrici dell'altro sistema.

Se si proietta la curva da un punto qualunque della superficie T, il cono proiettante del 5° ordine possederà una generatrice doppia e una generatrice tripla (situate su T) e perciò sarà del genere due: quindi la curva Q è del genere due. Per la generatrice doppia del cono si possono condurre al cono stesso altri otto piani tangenti e per la generatrice tripla se ne possono condurre sei. Ne segue che fra le generatrici di T bisecanti per la curva Q, ve ne sono sei che la toccano e fra le generatrici trisecanti ve ne sono otto tangenti alla curva Q.

Dalla nozione del genere per relazioni note, segue la proprietà che per un punto dello spazio si possono condurre quattro corde alla curva Q.

32. La proiezione della curva Q fatta da un punto qualunque dello spazio sopra un piano qualunque è una curva del 5° ordine con quattro punti doppî. Seguendo i metodi ordinarî, vale a dire mediante le formole di Cayley si trova che:

La sviluppabile osculatrice delle curve Q è del 12° ordine.

Da un punto qualunque dello spazio si possono condurre 21 piani osculatori e 32 piani bitangenti alla curva Q. Da un punto della curva si possono condurre 18 piani osculatori e 16 piani bitangenti.

La curva Q possiede 32 piani stazionarî.

33. Sia data una corda C della curva Q: qual'è il luogo delle corde della curva che incontrano la retta C? Per un punto di C si possono condurre tre altre corde alla curva: dunque la retta C è tripla pel luogo cercato. Un piano passante per C incontra ulteriormente il luogo secondo le tre rette che congiungono due a due gli altri tre punti d'incontro del piano colla curva: perciò il luogo cercato è una superficie gobba del 6° ordine. Per un punto di Q si possono condurre due corde ad incontrar C in punti diversi dai suoi due punti d'appoggio: dunque la curva Q è doppia per la superficie. Una corda qualunque della curva incontra la superficie ulteriormente in due punti per ciascuno dei quali passa una generatrice della superficie. Se ne conclude che date due corde di Q, vi sono altre due corde della curva, che si appoggiano alle due prime: o in altre parole un quadrilatero storto formato con quattro corde della curva Q è determinato in modo unico da due lati opposti. Si troverà più innanzi una applicazione di questa proprietà.

34. I punti della curva Q sono congiunti due a due: diremo che due punti sono coniugati quando la retta che li congiunge è una generatrice della quadrica T che non incontra ulteriormente la curva. Le coppie di punti coniugati formano una involuzione semplice la quale ha 6 punti doppî. Vedremo fra poco qualche proprietà delle coppie di punti coniugati.

35. Il punto O è centro di due fasci di rette del complesso, uno dei quali è il fascio F; l'altro lo diremo fascio F_1. Il piano ω contiene due fasci del complesso uno dei quali è F; l'altro lo chiameremo F_2. I fasci F_1 ed F_2 avendo ciascuno un raggio in comune con F, sono rappresentati nel primo spazio da due punti della curva Q: siano X_1 e X_2. Questi due punti hanno una grandissima importanza nella rappresentazione.

Sia f la curva del quart' ordine luogo dei punti singolari situati sul piano ω (24). I fasci F ed F_1 hanno in comune un raggio che è la tangente in O alla curva f: a questo raggio corrisponde la trisecante (26) della curva Q passante per X_1.

Il piano ω essendo tangente alla superficie dei punti singolari, la curva f ha un punto doppio. Perciò da O si possono condurre otto raggi di F tangenti altrove ad f: a questi raggi corrispondono nel primo spazio le 8 trisecanti tangenti di Q (31).

Il centro del fascio F_2 è il punto d'ulteriore intersezione colla curva f della retta che congiunge O al punto doppio di f: a questa retta corrisponde la trisecante della curva Q che passa per X_2.

36. Ogni punto del 2° spazio è vertice di un cono di 2° grado generato da rette del complesso: ogni piano contiene una conica inviluppata da rette del complesso. Questi coni e queste coniche non sono che casi particolari degli iperboloidi che abbiamo già ritrovato nel complesso.

Consideriamo un piano del secondo spazio passante per O: fra le tangenti della conica del complesso situata su questo piano, vi sono un raggio del fascio F e un raggio del fascio F_1. Poichè la conica-inviluppo e il fascio fondamentale hanno in comune un raggio, alla conica corrisponderà nel primo spazio una retta appoggiata alla curva Q: e poichè la conica ha fra le sue tangenti un raggio di F_1, la retta corrispondente si appoggerà a Q precisamente nel punto X_1. Dunque: alle coniche del complesso il cui piano passa per O, corrispondono nel primo spazio le rette uscenti dal punto X_1.

Consideriamo un cono del complesso che abbia il vertice sul piano ω: fra le sue generatrici vi è un raggio del fascio fondamentale e vi è un raggio del fascio F_2: perciò ragionando come nel caso antecedente si può stabilire che ai coni del complesso che hanno il vertice sul piano ω corrispondono le rette uscenti dal punto X_2.

Si verificherebbe in modo analogo la proprietà più generale che ad una curva del primo spazio passante r volte per X_1 corrisponde una superficie gobba per la quale il punto O è r-plo; e ad una curva passante r volte per X_2 corrisponde una superficie per la quale il piano ω è tangente r volte.

37. Agli iperboloidi del complesso corrispondono nel primo spazio le coniche appoggiate in quattro punti alla curva Q: a quale altra condizione deve soddisfare una di queste coniche, per rappresentare un cono o una conica del complesso?

La conica C rappresenti un cono del complesso. Ogni piano (del 2° spazio) passante per O e pel vertice del cono sega il cono secondo due generatrici che sono tangenti della conica del complesso contenuta in quel piano: ciò vuol dire che vi sono infinite coniche situate in piani passanti per O, ciascuna delle quali ha due raggi comuni col cono. Nel primo spazio ciò equivale a dire che vi sono infinite rette uscenti da X_1 (36) ciascuna delle quali ha due punti comuni colla conica C: perciò la conica C deve essere situata in un piano passante per X_1. I coni del complesso sono rappresentati dalle coniche appoggiate in quattro punti alla curva Q e il cui piano passa per X_1.

Si farebbe un ragionamento simigliante al precedente, per dimostrare che le coniche del complesso sono rappresentate dalle coniche appoggiate quattro volte a Q e il cui piano passa pel punto X_2.

38. Dai ragionamenti del numero precedente discendono anche queste conseguenze:

a tutte le coniche del complesso situate sui piani di un fascio il cui asse passa per O, corrispondono nel primo spazio i raggi di un fascio col centro in X_1 (36); a tutti i coni che hanno i vertici sopra una retta del piano ω, corrispondono i raggi di un fascio col centro in X_2.

39. Come caso particolare di un cono del complesso si ha il sistema di due fasci che hanno lo stesso centro; e come caso particolare di una conica del complesso si ha il sistema di due fasci situati nello stesso piano. È evidente che due corde della curva Q rappresentano due fasci collo stesso centro quando sono in uno stesso piano passante per X_1 e rappresentano due fasci posti in uno stesso piano, quando sono in un medesimo piano passante per X_2.

40. Si consideri un fascio del complesso corrispondente ad un punto di Q, vale a dire un fascio che abbia centro su ω e il cui piano passi per O. L'altro fascio che ha lo stesso centro ha un raggio comune col fascio F_2 e l'altro fascio situato nello stesso piano col primo, ha un raggio comune col fascio F_1. Se ne deduce: le rette che proiettano la curva Q dal punto X_1 corrispondono ai fasci del complesso il cui piano passa per O senza che abbiano il centro su ω: le rette che proiettano Q dal punto X_2 rappresentano i fasci che hanno il centro sopra ω senza che il loro piano passi per O.

§ 5.

Proprietà diverse.

41. Abbiamo veduto che due corde della curva Q contenute in un piano passante per X_1 rappresentano due fasci di rette aventi lo stesso centro. Se il centro è in uno dei punti doppî della superficie di Kummer luogo dei punti singolari, i due fasci coincidono, e perciò le due corde diventano infinitamente vicine e il loro piano diviene bitangente alla curva Q. Dunque le corde di contatto dei 16 piani bitangenti che si possono condurre alla curva Q dal punto X_1, corrispondono in certo modo ai 16 punti doppî della superficie di Kummer luogo dei punti singolari pel complesso. Analogamente si trova che le corde di contatto dei piani bitangenti che si conducono alla curva Q dal punto X_2 corrispondono in certo modo ai 16 piani tangenti doppî della superficie di Kummer suddetta.

Dalla nota proprietà della superficie di Kummer che per ogni suo punto doppio passano 6 piani tangenti doppî e in ognuno di questi piani vi sono sei punti doppî risulta la seguente interessante proprietà della curva Q: i due gruppi di corde di contatto dei piani bitangenti condotti alla curva dai punti X_1 e X_2, sono tali che ogni corda di un gruppo ne incontra sei dell'altro gruppo.

Questa proprietà mostra che i punti X_1 e X_2 non sono due punti indipendenti

fra loro sulla curva Q: vedremo più innanzi che essi formano una coppia di punti coniugati (34).

42. La proprietà che per un punto qualunque del primo spazio passano quattro corde della curva fondamentale corrisponde alla proprietà che ogni retta del complesso appartiene a quattro fasci di raggi del complesso; il che equivale a dire che la superficie dei punti singolari è del 4° ordine e della 4ª classe.

43. È noto che si chiamano rette singolari d'un complesso i raggi comuni a due fasci del complesso che hanno lo stesso centro, ovvero, che è lo stesso, i raggi comuni a due fasci che sono sullo stesso piano. Una retta singolare è tangente alla superficie dei punti singolari: dei quattro fasci ai quali appartiene, due hanno lo stesso centro e gli altri sono sullo stesso piano. Nel primo spazio il punto corrispondente ad una retta singolare sarà tale che delle quattro corde da esso condotte alla curva Q, due saranno in uno stesso piano col punto X_1 e le altre due in uno stesso piano col punto X_2. Si può anzi enunciare il teorema che *se una delle facce di un quadrispigolo formato da quattro corde della curva Q passa pel punto X_1, la faccia opposta passa pel punto X_2*: teorema che costituisce un'altra interessante proprietà delle coppie di punti coniugati sulla curva fondamentale.

44. È proprietà conosciuta che le rette singolari di un complesso di 2° grado costituiscono la completa intersezione di questo con un altro complesso di 2° grado. Perciò un fascio di rette del complesso conterrà due rette singolari, un iperboloide ne conterrà quattro, una superficie cubica sei, ecc.

Questo fatto ci fa conoscere che nel 1° spazio sopra una retta qualunque vi sono sei punti corrispondenti a rette singolari, sopra una retta appoggiata alla curva fondamentale ve ne sono quattro, sopra una corda di Q ve ne sono due, ecc.

Dunque *la superficie luogo dei punti del primo spazio che corrispondono alle rette singolari del 2°, è del 6° ordine e contiene come doppia la curva fondamentale*.

Fra le rette singolari del complesso vi sono il raggio comune ai fasci F ed F_1 ed il raggio comune ai fasci F ed F_2: perciò (35) *la superficie suddetta contiene le due trisecanti della curva Q che passano rispettivamente pei punti X_1 e X_2*. Queste due rette e la curva fondamentale, costituiscono la completa intersezione della superficie colla quadrica T.

45. Tutte le rette del complesso che incontrano una retta qualunque del secondo spazio, costituiscono una particolare congruenza di 2° grado: di queste congruenze speciali ve n'è un numero quattro volte infinito (ogni retta dello spazio ne determina una). A qual condizione deve soddisfare una superficie S del primo spazio, affinchè corrisponda ad una congruenza speciale?

Fra le rette del complesso che incontrano una retta qualunque R del secondo spazio, vi sono tutte quelle situate nel piano che congiunge O ad R le quali inviluppano una conica e vi sono quelle passanti pel punto d'intersezione di R col piano ω, le quali generano un cono del complesso. Perciò il luogo dei punti del primo spazio corrispondenti a tutte le rette che incontrano R conterrà una retta passante per X_1 e una retta passante per X_2. Dunque *se fra le rette di una superficie S ve n'è una passante per X_1 e* (per conseguenza) *una passante per X_2*,

la superficie corrisponde alla congruenza di tutte le rette del complesso che incontrano una medesima retta dello spazio.

46. Enunciamo le seguenti proprietà che non è difficile di stabilire: preso un punto M del 1° spazio si conducano per esso le corde alla curva Q e le rette MX_1 ed MX_2: queste sei rette e la curva fondamentale sono sopra una medesima superficie S che ha un punto doppio in M e che rappresenta il sistema delle rette del complesso che incontrano una stessa retta R del complesso stesso (quella che corrisponde ad M). Se la R è una retta singolare, il punto doppio in M diventa biplanare.

Per quattro corde della curva fondamentale concorrenti in uno stesso punto M e per la curva stessa, passano le superficie S di un fascio: esse corrispondono alle congruenze comuni al complesso e ai suoi complessi lineari tangenziali lungo la retta corrispondente ad M.

47. Si consideri un quadrilatero storto formato con quattro corde di Q (33). I suoi lati rappresentano quattro fasci del complesso, i quali, pei raggi che hanno in comune due a due, son tali che il tetraedro dei loro centri coincide col tetraedro dei loro piani. Si ha perciò un tetraedro inscritto e circoscritto alla superficie dei punti singolari.

Fissati due vertici di uno di questi tetraedri, ad essi corrispondono due coppie di corde di Q; le quali corde combinate due a due, servono a determinare quattro quadrilateri storti. Dunque: vi è un numero quattro volte infinito di tetraedri inscritti e circoscritti alla superficie singolare (di Kummer), i quali sono rappresentati dai quadrilateri storti i cui lati sono corde della curva Q: vi sono quattro di questi tetraedri che hanno due dati vertici o due date facce.

§ 6.

Formole della rappresentazione.

48. Siano

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$$

sei variabili omogenee, coordinate di una retta nella maggior generalità del concetto. Un complesso di 2° grado è rappresentato nel modo più generale per mezzo di due equazioni omogenee quadratiche nelle p. Noi supporremo che due di queste variabili, per es. p_5 e p_6 si trovino al primo grado nelle due equazioni: questo equivale soltanto a sei condizioni, che possono essere in infiniti modi soddisfatte per mezzo di una trasformazione lineare di variabili: perciò la supposizione che facciamo non diminuisce la generalità delle considerazioni.

Le equazioni del complesso siano dunque

$$ap_5 + bp_6 + \varphi = 0 \tag{1}$$

$$\alpha p_5 + \beta p_6 + \psi = 0 \tag{2}$$

dove le a, b, α, β sono funzioni lineari delle p_1, p_2, p_3, p_4 e le φ e ψ sono funzioni del 2° grado nelle medesime variabili.

Si ponga

$$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 = x_1 : x_2 : x_3 : x_4$$

ossia

$$p_1 = Hx_1 \qquad p_3 = Hx_3$$
$$p_2 = Hx_2 \qquad p_4 = Hx_4$$

dove H è un fattore che determineremo opportunamente. Questi valori posti nelle equazioni (1) e (2) danno gli altri

$$p_5 = \frac{b\psi - \beta\varphi}{a\beta - b\alpha} H \qquad p_6 = \frac{\alpha\varphi - a\psi}{a\beta - b\alpha} H :$$

dove nelle a, b, α, β, φ, ψ s' intendono sostituite le x in luogo delle p, dimodochè posto

$$H = a\beta - b\alpha$$

si potrà scrivere

$$(3) \quad \begin{aligned} p_1 &\equiv (a\beta - b\alpha)\, x_1 \\ p_2 &\equiv (a\beta - b\alpha)\, x_2 \\ p_3 &\equiv (a\beta - b\alpha)\, x_3 \\ p_4 &\equiv (a\beta - b\alpha)\, x_4 \\ p_5 &\equiv \alpha\varphi - a\psi \\ p_6 &\equiv -(\beta\varphi - b\psi). \end{aligned}$$

Se le x si considerano come coordinate tetraedrali di un punto d'un altro spazio, le formole (3) forniscono analiticamente la rappresentazione delle rette del complesso sui punti dello spazio.

49. Le equazioni del numero precedente comprendono molti speciali sistemi di coordinate di rette. Se si pone per esempio

$$\alpha = p_2, \quad \beta = p_3, \quad \psi = p_1 p_4$$

la (2) diventa

$$p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$$

e si ricade nell' ordinario sistema di coordinate tetraedrali: supporremo perciò

$$(4) \quad \begin{aligned} p_1 &\equiv y_1 z_4 - y_4 z_1 \\ p_2 &\equiv y_2 z_4 - y_4 z_2 \\ p_3 &\equiv y_3 z_4 - y_4 z_3 \\ p_4 &\equiv y_2 z_3 - y_3 z_2 \\ p_5 &\equiv y_3 z_1 - y_1 z_3 \\ p_6 &\equiv y_1 z_2 - y_2 z_1 \end{aligned}$$

dove le y e le z sono coordinate di due punti riferiti ad un tetraedro fondamentale; ovvero

$$(5) \quad \begin{aligned} p_1 &\equiv u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ p_2 &\equiv u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ p_3 &\equiv u_1 v_2 - u_2 v_1 \\ p_4 &\equiv u_1 v_4 - u_4 v_1 \\ p_5 &\equiv u_2 v_4 - u_4 v_2 \\ p_6 &\equiv u_3 v_4 - u_4 v_3 \end{aligned}$$

dove le u e le v sono coordinate di due piani riferiti al medesimo tetraedro.

Le formole (3) si cambiano nelle altre

$$(6)\quad \begin{aligned} p_1 &\equiv (ax_3 - bx_2)\, x_1 \\ p_2 &\equiv (ax_3 - bx_2)\, x_2 \\ p_3 &\equiv (ax_3 - bx_2)\, x_3 \\ p_4 &\equiv (ax_3 - bx_2)\, x_4 \\ p_5 &\equiv \varphi x_2 - a x_1\, x_4 \\ p_6 &\equiv - \varphi x_3 + b x_1\, x_4 \,. \end{aligned}$$

Son queste le formole che furono pubblicate da Noether [1].

50. Alla congruenza comune al complesso dato e al complesso lineare

$$\lambda_1\, p_1 + \lambda_2\, p_2 + \lambda_3\, p_3 + \lambda_4\, p_4 + \lambda_5\, p_5 + \lambda_6\, p_6 = 0\,,$$

corrisponde la superficie S

$$(ax_3 - bx_2)\,(\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 + \lambda_3\, x_3 + \lambda_4\, x_4) + \lambda_5\,(\varphi x_2 - a x_1 x_4) + \lambda_6\,(b x_1\, x_4 - \varphi x_3) = 0.$$

Ora è facile verificare che la quadrica

$$ax_3 - bx_2 = 0$$

e la superficie

$$\lambda_5\,(\varphi x_2 - a x_1 x_4) + \lambda_6\,(b x_1\, x_4 - \varphi x_3) = 0$$

s' incontrano secondo la retta

$$\lambda_5\, x_2 - \lambda_6\, x_3 = 0$$
$$\lambda_5\, a - \lambda_6\, b = 0$$

e secondo una curva del quinto ordine la cui determinazione è indipendente dai valori di λ_5 e λ_6; è *la curva fondamentale* Q.

51. Se il complesso lineare è semplicemente

$$\lambda_1\, p_1 + \lambda_2\, p_2 + \lambda_3\, p_3 + \lambda_4\, p_4 = 0$$

si ha come corrispondente il piano

$$\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 + \lambda_3\, x_3 + \lambda_4\, x_4 = 0\,.$$

Ora la particolarità di questo complesso consiste nel contenere tutti i raggi pei quali

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0\,;$$

e questi raggi sono quelli situati sul piano $y_4 = 0$ e uscenti dal punto

$$y_2 = y_3 = y_4 = 0\,,$$

i quali sono anche contenuti nel dato complesso: essi costituiscono il fascio fondamentale.

Il punto O è dunque il vertice

$$y_2 = y_3 = y_4 = 0$$

e il piano ω è la faccia

$$y_4 = 0\,.$$

52. Sostituendo nelle formole (6) per le p i loro valori (4) ed eliminando le z, si hanno le equazioni

$$\begin{aligned} y_2\, x_3 - y_3\, x_2 + y_4\, x_4 &= 0 \\ y_4\,(b x_1\, x_4 - \varphi x_3) + (y_3\, x_1 - y_1\, x_3)\,(ax_3 - bx_2) &= 0 \\ y_4\,(\varphi x_2 - a x_1\, x_4) - (y_2\, x_1 - y_1\, x_2)\,(ax_3 - bx_2) &= 0 \end{aligned}$$

[1] Noether, l. c.

delle quali due sole sono indipendenti. Secondochè si considerino come coordinate correnti le y o le x, si ha la linea corrispondente ad un punto qualunque del primo o del secondo spazio.

Dalle ultime due equazioni, moltiplicando la prima per a, la seconda per b e sommando, si deduce l'altra

$$y_1(ax_3 - bx_2) + y_2 bx_1 - y_3 ax_1 + y_4 \varphi = 0 .$$

Quest'equazione e l'equazione

$$y_2 x_3 - y_3 x_2 + y_4 x_4 = 0$$

rappresentano, ritenendo costanti le y, la conica che corrisponde al cono del complesso che ha il vertice nel punto y: come si vede il piano della conica passa costantemente pel punto

$$x_2 = x_3 = x_4 = 0 :$$

questo è dunque il punto X_1.

53. Analogamente sostituendo nelle formole (6) in luogo delle p i valori (5) ed eliminando le v, si hanno le equazioni

$$u_1(bx_1 x_4 - x_3 \varphi) + (u_4 x_3 - u_2 x_4)(ax_3 - bx_2) = 0$$
$$u_1(\varphi x_2 - ax_1 x_4) - (u_6 x_2 - u_3 x_4)(ax_3 - bx_4) = 0$$

dalle quali si ricava l'altra

$$u_1 \varphi + u_2 ax_4 - u_3 bx_4 - u_6(ax_3 - bx_2) = 0 ,$$

e si ha l'equazione

$$u_1 x_1 - u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 .$$

Queste due ultime equazioni, ritenendo costanti le u, rappresentano la conica corrispondente alla conica del complesso situata nel piano u. Si vede che il piano della conica passa pel punto

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 :$$

questo è dunque il punto X_2.

54. I punti X_1 e X_2 sono situati sulla retta

$$x_2 = x_3 = 0 ,$$

la quale appartiene alla quadrica fondamentale

$$a x_3 - bx_2 = 0 .$$

Dunque (41): i punti X_1 e X_2 costituiscono una coppia di punti coniugati.

§ 7.

Sovrapposizione dei due spazi.

55. La rappresentazione di un complesso sui punti dello spazio dà luogo ad altre ricerche quando invece di supporre distinti lo spazio rappresentativo e lo spazio del complesso, si suppongano coincidenti.

Si consideri una retta qualunque r: il luogo delle rette del complesso corrispondenti ai suoi punti è una superficie gobba del 3° ordine (27): tre generatrici di

questa superficie incontrano la retta r. Perciò sopra una retta qualunque vi sono tre punti le cui rette corrispondenti incontrano la retta medesima.

Qual' è la classe dell' inviluppo dei piani che congiungono i punti di una retta r alle rette corrispondenti? Per la retta r passano tre piani tangenti della sviluppabile, che sono quelli che contengono le tre rette del teorema precedente: inoltre per un punto qualunque della retta passa il piano che lo congiunge alla retta corrispondente. Dunque l'inviluppo dei piani determinati dai punti di una retta e dalle rette corrispondenti, è una sviluppabile della quarta classe.

56. Siano dati un punto P e una retta R: sulla retta vi sono quattro punti tali che i piani che determinano colle rette corrispondenti passano per P (n. prec.) Ne segue che dato un punto P, il luogo di un punto tale che il piano che lo congiunge alla retta corrispondente passi per P è una superficie del quart' ordine: la chiameremo Π. Vi è un sistema triplamente infinito di superficie Π corrispondenti ai punti dello spazio.

57. Presi tre punti m_1, m_2 ed m_3, questi punti e le rette corrispondenti, determinano rispettivamente tre piani che s' incontrano in un punto P. La superficie Π corrispondente al punto P passerà per m_1, m_2 e m_3 e sarà la sola che gode di tale proprietà. Perciò le superficie Π formano un sistema lineare.

Dato un piano E e due punti m_1 e m_2, i piani che congiungono questi due punti alle rette corrispondenti e il piano E, s' incontrano in un punto P: fra i punti del piano E è questo il solo la cui superficie Π corrispondente passi per m_1 ed m_2. Dunque le superficie Π corrispondenti ai punti di un piano formano una rete.

In modo analogo si dimostrerebbe che le superficie Π corrispondenti ai punti di una retta formano un fascio.

58. Le rette corrispondenti ai punti di un piano formano una congruenza di 2° grado: perciò su quel piano vi sono due di queste rette. In un piano qualunque vi sono due punti le cui rette corrispondenti giacciono in quel piano.

59. Qual' è il luogo dei punti tali che i piani che li congiungono alle rette corrispondenti passino per una data retta r?

I tre punti della retta le cui rette corrispondenti incontrano r, appartengono al luogo: oltre a ciò sopra un piano passante per r vi sono altri due punti del luogo, quelli le cui rette corrispondenti giacciono in quel piano. Dunque il luogo di un punto tale che il piano che lo congiunge alla retta corrispondente passi per una data retta r, è una curva gobba del 5° ordine per la quale la r è una trisecante: la diremo una curva ρ. Vi è un sistema quattro volte infinito di curve ρ corrispondenti alle rette dello spazio.

60. Per due punti dello spazio passa in generale una sola curva ρ.

61. Si considerino la superficie Π corrispondente ad un punto qualunque P ed un

punto M della curva fondamentale Q. Ad M corrispondono gl' infiniti raggi di un fascio e fra i piani che congiungono questi raggi ad M, ve n' è uno passante per P. Dunque la superficie Π corrispondente al punto P passa per M: vale a dire che tutte le superficie Π contengono la curva Q.

62. Le superficie corrispondenti a due punti P e P′, hanno in comune la curva Q e la curva ρ corrispondente alla retta PP′: esse si segano ulteriormente secondo una curva del 6° ordine. Un punto di questa curva congiunto alla retta corrispondente deve dare un piano passante per P e per P′: ma poichè quel punto non appartiene nè alla curva Q nè alla curva ρ, affinchè ciò avvenga, il piano che esso determina colla retta corrispondente deve essere indeterminato: vale a dire il punto deve giacere sulla retta corrispondente. Dunque il luogo dei punti situati sulle rette corrispondenti è una curva gobba H del 6° ordine la quale giace sopra tutte le superficie Π.

63. Le superficie Π corrispondenti ai punti di un piano, hanno in comune, oltre alle curve Q ed H, i due punti di quel piano le cui rette corrispondenti giacciono nel piano medesimo.

64. Siano dati un punto P e una retta r: la superficie Π e la curva ρ corrispondenti s' incontrano in 20 punti. Sul piano determinato dalla retta r e dal punto P, vi sono due punti le cui rette corrispondenti giacciono in esso: questi sono i soli due punti comuni a Π e ρ che non siano situati sulla curva Q o sulla H. Perciò una curva ρ si appoggia complessivamente in 18 punti alle due curve Q ed H.

Strumenti litici e brevi cenni geologici sulle provincie di Catanzaro e di Cosenza.

Memoria del dott. DOMENICO LOVISATO

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del 16 giugno 1878.

(Continuazione della Memoria: *Di alcune azze, scalpelli* ecc. Trieste, 1878).

Lunghe e replicate escursioni nella parte superiore della provincia di Catanzaro ed in tutta la provincia di Cosenza; ordinamento di roccie, di minerali e di fossili in queste raccolti; smaltimento di febbri e di reumi acquisiti nelle faticose passeggiate, ed occupazioni scolastiche mi distolsero così, che appena ora posso mettere assieme alcuni appunti sulle preziose reliquie dell'epoca preistorica, che in queste regioni ho potuto raccogliere e continuarne per tal modo la illustrazione, come prometteva nella mia prima Memoria (1), nella quale 27 pezzi furono descritti.

Ma se da un lato il desiderio di soddisfare alle richieste, che mi vennero indirizzate da molti miei colleghi e specialmente da qualche insigne cultore degli studî di paleoetnologia e di mineralogia in ordine a pubblicazioni sull'epoca preistorica in Calabria, mi dà coraggio e mi spinge a presentare in una seconda Memoria novelle notizie su questo argomento, non posso tacere, che non m'è possibile mantenere la promessa come vorrei, avuto riguardo specialmente ai mezzi, che mi mancano per continuare con profitto in questi miei studî prediletti.

Dissi già in quella mia Memoria come la determinazione delle sostanze, che compongono la maggior parte delle armi di pietra, è molto difficile, sia per la cattiva conservazione, sia anche per quella impronta, che vi lasciarono come qualche cosa di venerando i secoli che passarono. Ora devo aggiungere che quanto più procedo in questi studî e tanto più mi convinco delle difficoltà per avere giuste diagnosi, e per potere con esattezza determinare le materie di cui son composte le armi del primo uomo, di quell'uomo che non conoscendo ancora i metalli, dovea lavorare la pietra.

Per una diagnosi giusta occorre assolutamente lo studio microscopico dei minerali e delle roccie; ed in questo ultimo decennio queste investigazioni hanno fatto passi così rilevanti, che oggigiorno non vi può essere alcun mineralogo, nè alcun petrografo, che ne disconoscano l'immensa utilità, per non dire necessità.

Come il zoologo ed il botanico, così anche il mineralista prepara i suoi oggetti per lo studio microscopico; incontra però difficoltà di gran lunga maggiori, non essendo

(1) *Di alcune azze, scalpelli, martelli e ciottoli dell'epoca della pietra trovati nella provincia di Catanzaro.* Trieste, tipografia del Lloyd austro-ung., 1878.

tanto facile ottenere piastre così sottili da sottoporle allo strumento. A rimediare a questo inconveniente si è costruito secondo i dati del signor dottor K. Vrba un apparato, che può essere usato come macchina da segare e da lisciare, e che di oggetti adattati può dare piastrelle polite dello spessore di mezzo millimetro ed anche di un terzo. Qui in Calabria, dove alle abbondanti armi preistoriche, che continuamente si van diseppellendo, si aggiungono le roccie dure più varie, sarebbe indispensabile un tale strumento. E sono veramente dolente che i signori di questa Deputazione provinciale, per ragioni che non so quali possano essere state, abbiano creduto rispondere con un diniego ai buoni ufficî fatti dalle autorità scolastiche locali per fornire di un tale apparato il gabinetto di questo liceo. Per esso soltanto, io o qualch'altro investigatore potrebbe studiare le Calabrie anche nei rispetti della mineralogia, prima che gli stranieri, ai quali i mezzi non difettano, vengano, come spesso avviene, ad illustrare le nostre ricchezze scientifiche.

Dovetti quindi prendere la determinazione eroica di rompere col martello pezzi delle più interessanti fra le mie azze ed i miei strumenti preistorici, non solo per vedere la frattura fresca, ma per farne fare ancora delle piastre polite per lo studio microscopico. Anche per la preparazione di queste sottili laminette devo professarmi riconoscente verso l'illustre professore dottor Leopoldo Enrico Fischer, che, con una cortesia e bontà che non hanno riscontro, venne in mio aiuto, dedicandomi tanto del suo tempo prezioso. Così quel chiarissimo e dotto signore, vero padre degli studî preistorici, mi fornì mezzo di poter esaminare le sostanze delle mie più importanti armi esotiche al microscopio, di cui mercè le incessanti cure di queste autorità scolastiche e delle eccellenti disposizioni ministeriali s'è potuto provvedere il liceo.

L'archeologo ed il paletnologo, che non sempre vanno d'accordo col mineralogo, grideranno a questa mia profanazione, ma abbiano un po' di pazienza e si persuadano, che senza di ciò, colle difficoltà che s'incontrano ad ogni pie' sospinto, non si potrebbe ottenere una diagnosi esatta di quegli avanzi preziosi. Ben sovente, per non dire quasi sempre, si potrà confondere un gneis con una diorite, specialmente se questa sia micacea; un basalto con una dolerite e con qualche roccia amfibolica, e queste colla diorite stessa. Dirò di più che anche l'osservazione della frattura fresca è troppo poco per poter alle volte distinguere una roccia dall'altra; e questa osservazione, che è pure della maggior importanza, non si deve risguardare che come uno studio semi-scientifico: il più delle volte sarà necessario ricorrere allo studio microscopico d'una piastrella polita. È vero che in generale le azze nere o nero-brunazze possono consistere di basalto, di dolerite, di schisto argilloso; ma variando molto il peso specifico di queste roccie, non avremo in esso un criterio sicuro per la determinazione esatta di queste: infatti mentre la densità della dolerite va da 2,7142 a 2,9641, quella dello schisto argilloso ascende fino a 2,940 e quella del basalto fino a 3,50 passando per gradi molto inferiori.

Anche l'altro criterio di ungere la superficie polita delle azze con un po' di vernice, non sarà sufficiente, sebbene nei basalti e nelle doleriti si osserveranno dopo ciò le lineette bianche di feldispato fra le brunazze di pirossene e le nere di magnetite, che per nulla si potran vedere negli schisti argillosi. Ma allora potrà sorger

dubbio, se la prima o la seconda specie di roccia sia una diorite, il cui peso specifico va da 2,6 a 3,08, sebbene nell'ultima le particelle bianche si mostrino in maggior numero, essendo il feldispato in maggior quantità che nei basalti e le particelle di amfibolo più verdetto-nere, e tanto più appariscono nericcio-verdette, quanto più predomina l'amfibolo in confronto del feldispato. Ma potrà l'occhio anche armato di ottima lente distinguere bene questi colori, misurare le proporzioni degli elementi, che poi nelle dioriti porfiriche sono all'incirca in bilico? La necessità dello studio microscopico si fa sempre più manifesta e dei pochi risultati da me ottenuti sugli oggetti litici, che ho potuto studiare, ne farò cenno in altra Memoria assieme alla illustrazione di parecchi pezzi, che ancora non ho determinato.

Nel presente abbozzo darò maggior peso ed importanza alla descrizione dei pezzi di sostanza esotica, riducendo ad una semplice enumerazione quelli di diorite o di roccie ad essa affini, risparmiando così al cortese lettore la noia della descrizione di ciascun strumento e specialmente delle misure degli oggetti della mia abbastanza ricca collezione. Questa sarebbe stata assai più abbondante, se altri non fossero sorti a raccogliere per conto loro le pregevoli reliquie, non so se allo scopo di venderle o di tenerle come amuleti, con pregiudizî fors'anco maggiori di quelli che può avere il popolino, il quale verso la provincia di Reggio chiama *cugni di lampo* anzichè *di truono* le nostre azze.

E ritornando ancora una volta sulle credenze popolari, dirò che per causa di questi ricercatori e compratori di fulmini, in qualche luogo il prezzo di ciascun strumento litico s'elevò a *cinque* lire ed anche a *dieci*, mentre in altre località ormai è impossibile poterne avere, perchè colle loro insistenti ricerche costoro aumentarono i pregiudizî del popolo ignorante, che ora tiene un'azza come un tesoro e la nasconde, convinto che un giorno o l'altro avrà a trasformarsi in un vero pezzo d'oro!

M'è avvenuto di trovare persona attempata e sufficientemente istruita, la quale fece abbattere un vecchio muro e scavare sotto questo per qualche metro di profondità per ritrovare un fulmine, avendo udito da qualcuno che tempo addietro era caduta una saetta. Interrogato da me un suo messo, se il padrone avea ancora trovato il fulmine, con una serietà e convinzione degne di miglior causa, mi rispose, che non s'era ancora potuto trovare, perchè gli scavi erano arrivati appena a pochi palmi di profondità, ma stavano sicuri di rinvenirlo appena fossero arrivati alla profondità di 6 palmi, essendo passato un anno circa dalla caduta.

Nè il lettore si meraviglierà di questi pregiudizî e di altri più strani, che lascio di ricordare, quando saprà che nel mio giro per le Calabrie passai dovunque per pazzo; per *cioto*, che in buon italiano equivale ad ebete, per stregone ed in prova di questo potrei citare le donne della maggior parte dei paesi da me attraversati, le quali dopo aver sputato la iettatura, facevano le corna contro di me con tutte due le mani, recitando il loro storico *benedica, benedica*.......... Non si meraviglierà quando pensi che in parecchi luoghi m'ebbi gli urli ed i fischi dell'intiera popolazione o di buona parte, per l'unica ragione che vedeano me abbattere roccie, ed osservare bussola od aneroide per istudiare quelle località. E fu certo gran ventura che non mi toccasse di peggio.

Gli oggetti litici delle provincie calabresi possonsi dividere in due categorie, in

quella di roccia indigena e per lo più calabrese, e nell'altra di sostanza esotica, cioè di eclogite, di nefrite, di cloromelanite, di giadeite, di sillimanite, di glaucofano, di fibrolite, di variolite ecc. La prima comprende il maggior numero delle armi preistoriche di Calabria e consta per lo più di diorite, di diorite schistosa, di diorite micacifera e di gabbro, essendovene taluna soltanto di diorite-sienite e di sienite e poche di schisto argilloso, di quarzo, di porfido con mica e di qualche altra roccia granitoide, nessuna di vero granito, nè di serpentino, fatto curiosissimo in regioni che tanto abbondano di queste rocce.

Di *diorite* sono 16 azze (28-43) trovate:

1 a Soveria Mannelli; 1 ad Albi; 1 a Sorbo s. Basile; 1 presso il confine della provincia verso Cosenza; 2 a Tiriolo; 1 a Borgia; 1 a Marcellinara; 1 a Feroleto; 3 a Vena (compreso un martello); 1 a Davoli; 1 a Cicala; 1 a Conflenti; 1 a Platania.

Di *diorite micacifera* sono 27 azze (44-70) trovate:

1 nel Cosentino; 1 a Fossato; 1 a Soveria Mannelli; 4 a Cicala; 2 a Longobucco; 2 ad Olivadi; 1 a Nicastro; 1 a Conflenti; 1 a Davoli; 2 nelle vicinanze di Platania; 3 a Tiriolo; 1 ad Albi; 4 a Magisano e Vincolise; 1 a Sorbo s. Basile; 1 a Taverna; 1 d'ignota provenienza.

Una (71) di *diorite schistosa*, comperata a Borgia per mezza lira.

Una (72) di *schisto di diorite*, comperata a Luzzi: è piccola, taglientissima, presenta il 6° grado di durezza con alquante scabrosità sulle due superficie ed anche sui lati, ma col taglio magnificamente conservato: è compattissima e la pasta mostra un colore azzurro cupo con grani finissimi.

Quattro (73-76) che oscillano fra la *diorite* ed il *gabbro*, avrebbero la provenienza: 2 dal confine della provincia catanzarese con quella di Cosenza; 1 da Cicala ed 1 d'Albi.

Due (77-78) di *gabbro* una dal confine, l'altra da Belcastro.

Quattro di *diorite-sienite* (79-82) trovate: 1 a Borgia; 1 a Cicala; 1 martello a Platania; 1 azza-scalpello a Gimigliano.

Otto (83-90) di *sienite* rinvenute: 1 a Sorbo s. Basile; 2 a Filadelfia; 2 ad Olivadi; 1 a s. Fili; 1 a Magisano; 1 a s. Biase, la più bella di tutte che debbo all'egregio maestro don Alfonso Governa.

Due (91 e 92) di *granito amfibolico* trovate: 1 a Cicala; 1 a Vena.

Due (93 e 94) di *porfido con mica* trovate a Cicala.

Una (95) di *quarzite*, stupendo esempio d'azza-ciottolo, avuto a Girifalco per centesimi quindici.

Una (96) di *schisto argilloso con quarzo* di Maranise ed altra (97) di vero *schisto argilloso*, comperata a Luzzi per cinquanta centesimi da un briccone che domandava 10 lire.

La maggior parte dei pezzi enumerati e degli altri, che saranno ricordati nella presente Memoria, ha le due superficie principali o faccie maggiori lievemente convesse od anche piane, colle costole talvolta appianate, il più spesso tondeggianti, offrendo così grande rassomiglianza con quelle raccolte nelle abitazioni lacustri della Svizzera. Buon numero ha la forma di cono schiacciato, così da dare per sezione

un'ellisse cogli assi poco differenti fra loro: la base n'è dolcemente assottigliata per formare il tagliente dell'azza o dell'azza-scalpello.

Dalla enumerazione stessa si vede come abbondi negli oggetti litici calabresi la diorite ed in particolare quella micacea. Infatti ricchissime ne vanno le Calabrie, cominciando da Catanzaro, dove essa è porfirica fino a s. Demetrio Corone, sulla sponda destra del Crati nella parte superiore della provincia di Cosenza, da un lato ed a s. Caterina Albanese e Mongrassano nella catena littorale dall'altro.

Troviamo la diorite porfirica analoga a quella delle fiumarelle di Catanzaro alla base del monte di Tiriolo, sotto la borgata di Martirano, sotto il monte Chiane tra Ajello e s. Pietro d'Amantea e nella Sila fra Corigliano Calabro e Longobucco. Di questa sostanza sono formati solo 3 pezzi della mia collezione.

La diorite in generale, a grana più o meno fina, abbonda nella Sila e la cima stessa del monte Nero (1880 m.), il punto più elevato del superbo gruppo delle Alpi calabresi, ne offre diverse specie, che servirono all'uomo preistorico di queste regioni per fabbricare le sue armi ed i suoi utensili. Ricca di dioriti va la sponda destra del Crati a cominciare dai monti di Luzzi, dove esse alternano coi magnifici gneis, che costituiscono l'ossatura principale del colosso silano. Compariscono però nel loro massimo sviluppo a s. Demetrio Corone e più ancora fra questa località e s. Sofia d'Epiro. Qui alternano coi gabbri più superbi, colle kinzigiti più ricercate, colle amfiboliti, coi graniti, colle pegmatiti, e sembra in quella zona, che sale poi verso Acri, natura abbia voluto far sfoggio di tutti i colori della sua tavolozza coi varî elementi che costituiscono quelle roccie, che mostrano ancora i più bei granati.

Non inferiori in bellezza ed in potenza sono i gabbri della catena littorale. Anzi qui hanno essi il loro dominio e si mostrano fra i gneis assieme alle dioriti ed a qualche sienite nei monti fra Marano e s. Agata d'Esaro da una parte e s. Lucido e Belvedere Marittimo dall'altra.

Dioriti, alquanto differenti dalle mentovate, ma in grandi masse si trovano nel gruppo a nord del monte Reventino fra Soveria Mannelli, la Motta s. Lucia, Conflenti, Martirano, Decollatura e formano ancora tutto lo spartiacque fra l'Alli ed il Corace nelle vicinanze di Pentone.

Siccome per ogni contrada basta determinare le roccie predominanti che si trovano a formare le sue montagne, e comparare con piastrelle polite di queste le sostanze delle quali sono formate le armi preistoriche, così mi sono messo all'opera di dare succinta narrazione delle principali roccie di tutta la Calabria Citra e di quella parte della Ulteriore 2ª, che sta a nord dell'istmo terziario.

E spero raggiungere l'intento colle collezioni da me fatte, che in frammenti si trovano nel gabinetto di questo liceo ed in campioni maggiori nelle sale del Comitato geologico a Roma, e pubblicare in breve la litologia calabrese.

Le Calabrie per tutto ciò che ho raccolto di armi preistoriche hanno confermato una volta di più la esperienza fatta dai paleoetnologi intorno all'esame degli oggetti litici di tutte le parti della terra, che furono preferite dai primi uomini le roccie di colore *oscuro*, che generalmente sono le roccie più tenaci per la tessitura criptocristallina dei loro componenti, quindi le dioriti, i gabbri, le sieniti, le eclogiti, ecc. e più raramente i porfidi, i graniti, i gneis, gli schisti argillosi, ecc. In prima linea

metteremo le armi fabbricate con minerali omogenei, come nefrite, giadeite, saussurite, cloromelanite, fibrolite, ecc. ed è del maggiore interesse per la scienza la comparsa nell'Italia meridionale di oggetti preistorici della più parte di queste sostanze, specialmente di cloromelanite, la cui provenienza è dappertutto incognita e di nefrite, delle varietà più belle che si possano trovare nel Thibet e nella Siberia.

Bisogna tener conto ancora che in seguito allo studio fatto sulle molte azze raccolte in tutte le parti della terra, si trovò che oltre alle roccie summentovate, altre, come molto tenaci e criptomere, venivano scelte dai primi uomini come le roccie amfiboliche, le eufotidi, i basalti, le doleriti, ecc.

La cloromelanite, di patria incognita dappertutto, è così rara, che il Direttore del « British Museum » in Londra pagherebbe qualche sterlina per avere alcuna delle mie 4 azze di quella sostanza: nè sarebbe indifferente alle 7 di nefrite, che al certo sono le più interessanti della mia collezione.

La durezza e la densità, che sono maggiori nella cloromelanite che nella nefrite, assieme ai prodotti della fusione, sono buoni segni di distinzione fra le due sostanze cotanto rare. Le azze di nefrite sono pellucide, quando anche sieno grosse alcuni centimetri. Un po' pellucide sono ancora le giadeiti, che hanno presso a poco la durezza del quarzo e fanno forti scintille all'acciaio, ma non le confonderemo con le nefriti, il cui peso specifico va da 2,957 a 3,18, mentre per le giadeiti esso va da 3,32 a 3,38. La cloromelanite le supera tutte due in durezza ed in peso specifico.

Strano è certamente il fatto di non aver trovato alcun oggetto litico di serpentino in queste regioni, che tanto abbondano delle roccie ofiolitiche. E mi sorprende tanto più ora, che avendo girato tutta la Sila, la valle del Crati e la catena littorale, posso ricordare tutte le formazioni delle roccie serpentinose delle Calabrie.

Monte Reventino coi suoi satelliti è una massa serpentinosa ricoperta dalle oficalci, più raramente a nord-ovest dalle ofisilici, che sopportano i cloroschisti e gli schisti micacei. Dal lato di Conflenti si mostrano queste formazioni nella loro maggiore bellezza: raggiungono il Savuto sotto s. Mango e sulla sua sponda destra, ma molto addentro ricompariscono a formare l'altipiano di Lago, a sud-sud-est del monte Cocuzzo, presentandosi prima, sebbene con minor potenza ai così detti scogli di Corica ad un'ora d'Amantea, a sud di questa borgata, prima d'arrivare al fiume Oliva. La infinità di scoglietti bersagliati da quel mare infido, è per la massima parte di cloroschisto. Le oficalci, che anche qui ricoprono i serpentini, si tengono più addentro.

Sopra Grimaldi al di là di monte s. Lucerna presentasi pure piccola massa di serpentino ed altre analoghe fra s. Marco Argentaro e s. Agata d'Esaro, che trovano le loro corrispondenti dall'altra parte della catena littorale sul versante tirreno verso la Serra della Contessa sopra Cetraro ed in quel gruppo di elevazioni, che da monte Montea scendono a questa borgata, specialmente in alcuni punti dell'avvallamento nel quale sta s. Angelo. Mancano le oficalci, anche i cloroschisti, sostituiti talvolta da schisti verdognoli; le masse sono invece accompagnate da bellissime dioriti oscure e da gabbri superbi, che assieme alle prime interrompono qua e là il calcare giurese apenninico. Più notevoli, più interessanti e molto più potenti di queste ultime sono le formazioni serpentinose sopra il collegio di s. Demetrio Corone, dove formano il nucleo del dosso Mundo e sotto lo stesso collegio nella località Bellezza, che sta alla

sinistra della strada, che, dalla veramente pittoresca borgata sopra nominata, scende alla valle per condurre poscia a Corigliano Calabro. Qui oltre i gabbri e le dioriti, abbiamo colla formazione serpentinosa, belle amfiboliti e magnifici amfiboli cristallizzati di color verde cupo ed altri quasi neri.

Eppure in mezzo a tante roccie serpentinose, non trovai neppure un oggetto litico di queste sostanze. Che l'uomo preistorico calabrese commerciasse gli oggetti litici di serpentino e riavesse in cambio le nefriti, le cloromelaniti, le eclogiti, le fibroliti, ecc. roccie estranee a queste contrade? Ma perchè non trovare neppure un'azza, un martello, un amuleto di questa sostanza?

Nel prospetto sinottico fatto dal signor Giustiniano Nicolucci degli oggetti preistorici di Calabria da lui posseduti, trovo notata una sgorbia di serpentino, rinvenuta a Gizzeria ed un'accetta in roccia serpentinosa di Decollatura. Non nascondo che mi venne l'acquolina in bocca a quella lettura. Mi rallegro col dotto signore, che tanto concorre a far progredire gli studî di paletnologia, per questi suoi possessi e per le sue progredite collezioni. Infatti mentre nella sua prima relazione gli oggetti litici calabresi erano 38, nella nuova sono ascesi a 58, e trovo ancora modificato il giudizio secondo le mie previsioni, perchè mentre su 38 pezzi 17 erano notati di sienite, su 58 vedo accennato soltanto a 14. E chi sa che rompendo qualche frammento, una diagnosi più minuta non modifichi ulteriormente il secondo giudizio, restringa ancora il numero delle sieniti, cambi le serpentine in nefriti o cloromelaniti, sapendo come la sienite è roccia poco diffusa nelle Calabrie, avendo invece la diorite, e specialmente la micacea, un'estensione immensa. Nuovamente domando perdono ai paleoetnologi, ma ripeto, sono persuaso che senza questa specie di profanazione non si possono studiare daddovero le armi dei primi popoli e solo con questa si potranno riempire tante lacune e venire a conclusioni giuste ed importanti sui primi abitatori d'Italia.

Fra i 70 pezzi sopra cennati di roccie indigene, ritenni 8 di sienite, 4 di diorite-sienite e 2 di granito amfibolico: mi si permetterà però su questi un po' di riserva e quindi di poter ritornare su tali pezzi un'altra volta con miglior agio, con maggiore comodità ed in luoghi, che mi somministrano mezzi da studiare, e che qui mi mancano assolutamente.

Dissi già precedentemente che maggior importanza e più grande interesse presenta per ora lo studio delle roccie esotiche.

Convien fissare l'attenzione anche sopra il peso specifico dei graniti, che va da 2,593 a 2,652: nessun granito finora arrivò colla sua densità a 2,66, motivo per cui lasciai in sospeso la diagnosi del ciottolo n. 13 nella mia prima Memoria, non possedendo un pezzo brutto di quella sostanza. Ora compiuta la diagnosi dopo aver infranto un frammento, e, confrontato con altri di roccie cristalline trovate in posto, posso dire essere la sostanza una diorite micacifera a grana molto minuta, e non infrequente tanto nella Sila, quanto nella catena littorale.

Non posso dire ancora nulla sul ciottolo levigatissimo ricordato nella stessa Memoria col n. 17 (Fig. 8), non essendomi imbattuto in una roccia affine o che per lo meno rassomigliasse a quel pezzo.

Esaminai gli altri ciottoli, che mi sembravano degni di qualche studio e pei quali promisi di ritornare sopra.

In generale essi presentano la forma ellittica, tanto caratteristica delle alluvioni, ma havvene ancora di forma discoidale molto schiacciata, che così bene e con tanta sicurezza ci attesta il littorale del mare o dei grandi laghi e moltissimi di forma cilindrica. Essi sono per la massima parte di granito, di granito amfibolico, di quarzo, di quarzo ferrifero (forse diabasio?), di serpentino, di schisto argilloso, di arenaria, di calcare. Esaminati colla lente non presentano alcun segno della mano dell'uomo. Uno solo fermò la mia attenzione ed è uno grossissimo, rassomigliante ad un'azza informe di *porfido con mica*, regalatomi dai signori Mancusi di Cicala. Su questo pezzo anche senza lente si vedono strie, che sono sicuramente fatte dall'uomo, ma se dall'uomo preistorico o da un altro nulla si potrebbe stabilire senza conoscere le circostanze nelle quali il pezzo fu trovato. Pur troppo esso giaceva da molto tempo allo stato di *fulmine*, a proteggere la casa di un contadino; quindi a nulla si può arrivare di definito, se non si vuole tener conto della circostanza favorevole, d'aver trovato nella stessa località un'azza alquanto grossa della medesima sostanza, della quale posseggo una piastra polita per l'esame al microscopio.

Non dobbiamo confondere i ciottoli non lavorati con pietre, che hanno già una forma simile ad un'azza, ma hanno provato solamente un lavoro scarso per potere poi servire come armi, come sarebbe l'azza-ciottolo di Girifalco, e che fra i pezzi enumerati è la quarzite col peso specifico = 2,62. Quest'azza-ciottolo è splendida testimonianza del fatto ricordato, che la maggior parte degli strumenti e delle armi dell'epoca della pietra di tutto il mondo presentano nelle loro superficie l'aspetto del ciottolo di fiume o di torrente.

I ciottoli intatti hanno una superficie, sulla quale anche con lenti di fortissimo ingrandimento non si vedono strie, ma solamente un piano fino non lucente; se l'uomo fece una pulitura, avrà dovuto certamente confricare una pietra sopra un'altra della medesima durezza o di durezza maggiore e di superficie ruvida: in tal caso noi vedremo colla lente le strie della fregatura, cioè scorgeremo con sicurezza in qual modo l'uomo abbia lavorato, o in linee diritte o in linee circolari: ma l'uno o l'altro modo di striatura noi dovremo vedere in un pezzo lavorato. Ed è del pari assai interessante l'osservare come la natura produca una superficie liscia per confricazione nelle acque di roccie di durezza molto diversa, superficie però sulle quali non si vedono i risultati della durezza differente delle pietre, ma solamente il consumo maggiore o minore per opera della politura.

È vero che posseggo pochi apparecchi e che le mie lenti non presentano forti ingrandimenti, ma mi sembra che nessuno fra i moltissimi ciottoli, che mi furono regalati o venduti come *cugni di truono*, porti i segni di un lavoro per parte dell'uomo preistorico.

La selce piromaca pure formò oggetto speciale di mia attenzione in tutte le escursioni, e posso dire che in Calabria non fa difetto questo minerale.

Lo rinvenni nel miocene, nell'eocene e nel giurese, punto nel cretaceo.

Trovai la selce piromaca del miocene in due punti: lungo la strada che da Strongoli va a Verzino, passando fra Casabona e s. Nicola dell'Alto e sotto Zinga, e nella zona che si estende fra la Fiumarella ed il Trionto nella provincia di Cosenza, e che deve attraversare chi da Calopezzati voglia andare a Longobucco su pel Trionto od anche semplicemente voglia portarsi a Cropalati.

Quella del miocene catanzarese si trova in vene, in straterelli od in arnioni in un calcare marnoso, senza fossili, di color bianco, rosso, verde, cenerognolo, ecc. deposto in straterelli variamente ripiegati ed alternante con argille scagliose e con sabbie silicee di un colore grigio, formate in alcuni luoghi quasi interamente da orbitoidi che qui caratterizzano il miocene inferiore ([1]).

La selce piromaca dell'altra zona nominata, cioè del miocene cosentino, è in generale più candida e si trova in quantità maggiore, mostrandosi talvolta in filoncelli di 20 e più centimetri di spessore. Il superbo calcare, che la contiene, presenta un numero maggiore di tinte dell'altro ed è di grana più fina. Esso è perfettamente identico a quello del lias superiore delle montagne d'Assisi e della catena del Gran Sasso, motivo per cui benissimo si potrebbe con quello confondere, se le relazioni litologiche e stratigrafiche locali non lo designassero in un piano assai più recente. Esso sopporta il miocene superiore ed è stratificato sopra il nummolitico. Ma non crederei di commettere grave errore ascrivendolo all'eocene superiore cogli alberesi,

([1]) Questo calcare che sarebbe qui l'ultimo membro del miocene inferiore sopporta i gessi e solo in alcuni punti fra Strongoli e s. Nicola dell'Alto, e da Zinga al fiume Lese troviamo fra questi ed il calcare una marna calcare ad ittioliti, consimile al tripoli sottostante alla marna bianca silicea di Catanzaro, che passa sotto il nome di tufo calcare. In ogni modo sappiamo che questo tripoli segna chiara la separazione fra il miocene superiore e gli altri depositi di quel periodo. I gessi che formano le due sponde del burrone dello Steccato, e di là si dirigono a quello della Prateria, formando ancora i mammelloni fra s. Nicola dell'Alto e Strongoli sono molto potenti, molto puri, di struttura saccaroide e d'un colore candido nella parte superiore, facendosi più compatti, grigi o cinerei nella parte inferiore. I primi potrebbero lavorarsi come alabastro gessoso, se non fossero attraversati da vene e piccoli filoncelli di cristalli di selenite e da cristallini non infrequenti di zolfo. Per dare un'idea della potenza di questi gessi basta ricordare che la grotta così detta dello Steccato sotto Casabona è una galleria scavata nel gesso, della lunghezza di 100 e più metri. Non si sa a quale epoca rimontino quegli scavi, ma a quale scopo siano stati fatti, si potrebbe arguire dall'acqua sulfurea che in quella galleria trovasi, sebbene in piccola quantità e da alcune traccie di zolfo che di quando in quando scorgonsi nelle pareti e nella volta.

Le sorgenti solforose che trovansi nel seguito dello stesso burrone all'Acquadolce sono certamente in relazione colle miniere di zolfo che si lavorano a s. Domenica, territorio di Melissa, dove i gessi ricompariscono dopo essere stati ricoperti da argille marnose. Qui un povero briscale appalesa il minerale di zolfo, che secondo me sarà facile ad esaurirsi. Furono aperte quelle solfare il 15 novembre 1876 e verso la metà di ottobre dello stesso anno si abbandonò l'altra di s. Giuseppe nella stessa contrada di s. Domenica per mancanza di minerale. Presentemente una compagnia messinese, di residenza a Cotrone, lavora quelle miniere, e dicesi con qualche utilità. Credo che in altri punti si potrebbe trovare il minerale di zolfo, avendo osservato in parecchi luoghi affioramenti di briscale.

Alla superficie delle sorgenti solforose, ricoperte da molti insetti morti, si forma continuamente in pellicole *zolfo termogene*, che mano mano che ingrossa precipita al fondo per lasciar posto alla formazione d'altre, ed ogni cosa all'intorno è da esso ricoperta. La presenza forse degli insetti morti alla superficie può giustificare quella formazione, agendo col loro organismo sul solfato di calce disciolto, sgorgando quelle acque dalle potenti formazioni gessose locali. Dirigendo invece il passo sotto Zinga alle Manche dell'Acquadolce e procedendo verso il Lese, nelle argille del miocene inferiore troviamo numerose acque cariche di salmarino, alcune delle quali formano vere saline, delle quali le principali sono: Ogliastri, Petraro, Timpa, Mortela, Solfato, Mandra Vecchia, Rosso Mano e Canne dipendenti dalla luogotenenza doganale di Belvedere di Spinello e Neto, Basilica, Stilo, Calderazzi, Santo Jane da quella di Caccuri. A nord da Cropalati a Rossano ne abbiamo altre, ma tutte queste sono vere immagini lillipuziane in confronto del ricco deposito di Lungro.

essendovene di cotale nell'Apennino dell'Umbria: potrebbe corrispondere a quegli strati che i geologi chiamano dell'oligocene e forse ad un vero piano tongriano.

La zona, sulla quale ci troviamo, è delle più interessanti dal lato geologico. Le roccie granitoidi sopportano un calcare radiolitico, analogo a quello che si trova nell'Istria, negli strati inferiori al massimo sviluppo delle rudiste, probabilmente del *cenomaniano*: sopra questo abbiamo il nummolitico, i calcari a selce piromaca, il miocene superiore rappresentato dalla marna bianca (tufo calcare di Catanzaro) e dai gessi, e nelle parti basse anche il pliocene colle sabbie ricche di fossili.

La selce piromaca eocenica trovasi nella breccia nummolitica sopra il giurese della contrada di Bannifora (272 m.) tra Casaletto (s. Nicola Arcello) (110 m.), e la marina di Praja, pria di prendere la discesa all'isola di Dino. È però in frammenti e disseminata in piccola quantità nella formazione nummolitica, della quale mai vidi la più bella, e la più ricca in fossili sia in qualità che in quantità. Questa silice è probabilmente dovuta alla distruzione di un piano superiore del giurese che la conteneva.

Al giurese ascrissi le oscure, le grigie, le rossigne e le bianche di poco o di nessuna trasparenza che trovai in istraterelli spessi ed abbastanza grossi nel calcare del monte Cifòlo (non Cifuolo) (840 m.) sopra la borgata di Tortora (349 m.) al confine della provincia di Cosenza con quella della Basilicata. L'ascrissi al giurese perchè l'analoga si trova nel calcare semicristallino di quell'età tra Mormanno e Morano nei monti che circondano il bel bacino di Campo Tenese (la Taverna è 974 m.). Sulle impressioni che mi fece questo bacino per la sua favorevole posizione, come sede forse di una palafitta, sulle pochissime reliquie in esso finora raccolte, sulle breccie ossifere con selci piromache impastate e sulle caverne riempite d'alluvione marina, che ho potuto vedere ed esaminare nelle mie telegrafiche passeggiate, mi occuperò in altra occasione.

La mancanza assoluta di fossili in quella località purtroppo non mi permise di vedere i rapporti di questo calcare a selce piromaca col calcare sottostante, e fissare perciò con sicurezza l'orizzonte geologico. Preferisco quindi lasciare in dubbio la determinazione assoluta di questa formazione, anzichè ritirarla domani per aver conosciuto l'errore, e tanto più sono indotto a ciò per aver trovato gli stessi straterelli di schisto argilloso calcare fra gli strati a selce del monte Cifòlo e come linea di separazione fra il giurese e l'eocene di Bannifora.

In ogni modo con queste nulla hanno che fare le selci piromache giuresi trovate nella trincea della nuova strada di Squillace, le altre sul ciglio dello sperone gneisgranitico di Stalletti, già ricordate nella mia precedente Memoria e le nuove, che recentemente raccolsi nel piano inclinato, che forma il bell'avvallamento sotto Squillace e sale alla Coscia di Stalletti. Devono quindi esse derivare o da una formazione giurese esistente nelle Serre, che non conosco per nulla, o da una formazione distrutta, o furono importate e quindi avrei argomento maggiore a crederle di rifiuto.

Visitai tutti i corsi d'acqua piccoli e grandi, che mettono nel Savuto, andai fino alla foce del fiume, l'attraversai in piena per poter esaminare anche la sua sponda destra, correndo pericolo d'imitare la fine poco lusinghiera di re Enrico, il figlio più sedizioso dell'imperatore Federico II, che nel 1242 s'annegò in quel fiume! Ma non

rinvenni un solo pezzo di selce piromaca. Sulla sponda destra dello stesso fiume abbiamo numerose masse calcari, ma di calcari cristallini primitivi. Non trascurai di esaminare scrupolosamente anche quelle masse nel dubbio, che qualcuna fosse di *calcare cornifero*, analogo al devoniano del Nord-America, e che riceve questo nome dalle masse di selce ch'esso contiene, che in inglese dicesi *hornstone* e che noi traduciamo con *pietra cornea* [1]. Ma nulla rinvenni di analogo, e non nascondo che provai un senso, che non sapea niente di riconoscenza verso quel signore cosentino, che mi assicurava come un piccolo corso d'acqua, il quale confluisce nel Savuto, porti molti nuclei di silice piromaca. Pur troppo qui in Calabria dobbiamo lamentare assieme ad altro la mancanza assoluta di buone informazioni.

Il cretaceo, sparso in piccoli lembi, non contiene assolutamente la piromaca. È per lo più il calcare a *rudiste* del monte di Tiriolo (849 m.) e che in moltissimi punti troviamo e nella provincia di Cosenza ed in quella di Catanzaro. Dissi già nella mia precedente Memoria che la formazione cretacea del monte di Tiriolo si spinge ancora più ad est e sud: infatti abbiamo la comparsa dello stesso cretaceo in piccola massa all'Abate ad ovest della strada di s. Leonardo, che da Catanzaro conduce a Ponte grande, mezz'ora dalla città; più avanti lo troviamo quasi all'origine della Fiumarella a formare quasi coltello di separazione fra due burroncelli; s'eleva, si stende attraverso la strada che da Pontegrande sale a Pentone, e con bella interruzione si mostra più sviluppato a Galamione (482 m.), con interruzione maggiore lo troviamo, in linea retta coll'ultima massa e con quella di Tiriolo, sulla sponda sinistra dell'Alli, a formare il cappello di monte Pergolacci (511 m.) fra Crichi e Sellia, in prossimità di quest'ultima borgata, ed in altro punto più basso sulla stessa sponda, dove scompare sotto le formazioni terziarie più recenti. Più potente si mostra a Martirano, ove, sostenendo buona parte del paese, scende fino al fiume di Mota s. Lucia e procede per buon tratto su pel fiume Sasso, mostrandosi magnificamente anche sulla sponda destra, dove forma la parte anteriore del dosso Petra Piana. Questa massa arrivava altra volta fino alla sponda destra del fiume di s. Lucia, l'attestano i frammenti staccati, e dovea avere qualche diramazione, trovando noi piccole masse dirigendo il passo da Martirano a s. Mango, fra le quali ricorderemo la piccola formante la cima di un dosso pria di giungere all'ultima borgata.

Il Savuto che qui segna il confine fra Catanzaro e Cosenza non interrompe il calcare della creta dell'Apennino, e noi lo vediamo formare la cresta di Grassullo? (435) fra vallone Arche e vallone Calcato sopra Amantea, ed il potente cappello di monte Chiane, sulla sponda destra del fiume Oliva, in faccia al bel paese d'Ajello. Quest'ultima massa cretacea è ricchissima in fossili, noverando specie che non ho potuto trovare al monte di Tiriolo.

Al cretaceo sarei pur tentato d'ascrivere la parte superiore del monte a cavaliere di s. Donato di Ninea e buona parte delle falde del Cozzo Pellegrino (1985 m.), perchè molto somigliante alla *creta inferiore* di parecchi luoghi. Ma come fidarsi a lontani paralleli in presenza ad una roccia che somministra generi di fossili quali le

[1] È ricca di sporangi di Desmidee, simili alle Diatomee, e, come esse organismi secretori di selce, nonchè spiculi silicei di Spongiari. Stoppani, *Corso di Geologia*, vol. II pag. 241.

encriniti e le *natiche*, che vanno dal devoniano ai mari attuali? Rimando perciò le conclusioni a tempi migliori non avendo sicuri livelli, notando di più che a prima vista quel calcare della Cava (¹) sopra s. Donato di Ninea non si dovrebbe avere alcun dubbio a prenderlo per un *triasico ad encriniti*.

E sarà giurese la massa, che lo sopporta, quel colosso, per la massima parte calcare fetido, che dal Salernitano si continua fino agli scogli di Cirella, formante anche le belle isole di Dino e di Cirella; quel calcare del quale troviamo tante masse staccate, come quelle di Diamante, di Cetraro, di s. Angelo, della Contessa, di Aquappesa, di Guardia Piemontese dalla parte del Tirreno e di Malvito e di Mongrassano verso la valle del Crati? Affermeremo questo principio pel calcare fetido del monte s. Lucerna (1258 m.) a cavaliere di Grimaldi e di Malito e per l'altra pittoresca massa che forma il cappello del monte Cocuzzo (1550 m.), che mandò due rampolli nel mare d'Amantea a formare gli scogli d'Isca? Io ritengo del Giura tutto questo calcare, ma non affermerò certamente questo principio per una formazione, che dopo avermi resistito per tanto tempo senza mostrarmi le sue reliquie, me le appalesò finalmente, ma tali che non sono sicuramente le caratteristiche del giurese finora conosciute, come le belemniti, le ammoniti, ecc., ma tali che non trovai descritte in alcun trattato di conchiologia. Le numerose impronte, da me trovate nel calcare semicristallino della marina di Praja, rassomiglierebbero ad una *Pleurotomaria*, fossile che per alcune specie dal siluriano va alla creta nell'Europa, nell'Australia e nel Nord-America, e per altre dall'oolite inferiore alla creta. Altro calcare nero, molto esteso da Tortora a Mormanno ed a Campo Tenese, e da Ajetta ad Orsomarso e fino alla Mula (1930 m.) contiene una infinità di fossili, irriconoscibili, e che credo corrispondano a quelli che Costa (²) battezzò col nome di *Nodosarie*, riservando il nome di *Trochus Mormanni* per una specie pure indefinibile rinvenuta nella contrada Fiumicello fra Lajno e Papasidero. Certamente che dinanzi a tanta roba, la fretta ad affermare principî potrebbe essere pericolosa.

Ma per ora facciamo ritorno alle armi del primo uomo, delle quali nella tavola si trovano designate 7, compreso un martello.

La Fig. 1 corrisponde ad un'azza scalpello, regalo del bravo maestro Daniele Levato, che l'ebbe da Magisano. Appartiene al gruppo delle 16 dioriti, della lunghezza di millimetri 115, della larghezza quasi uniforme di 39 e della grossezza di 28. È bianchiccia, molto scabra, particolarmente nella parte superiore.

Di diorite micacifera è un martello, ritrovato nelle sabbie di Vena, nel mandamento di Maida, dall'egregio signore Gaetano Bocca ed a me regalato dal distinto medico signor Filippo Coppoletti: esso è di dimensioni minori dell'altro (Fig. 2 e 3) favoritomi dall'egregio signor cons. Pasquale Nicotera di Nicastro e che fu trovato nelle vicinanze di Platania. Esso è di diorite-sienite, di dimensioni abbastanza colossali, presentando la lunghezza di 135 millimetri, la larghezza sopra la scanalatura verso la penna di 78 e la grossezza massima di 64.

La forma di questi martelli calabresi è veramente originale, e tale che non ha

(¹) È il nome dei dossi sopra s. Donato di Ninea.

(²) Memoria negli Atti dell'Istituto d'incoraggiamento di Napoli, 1864.

riscontro che con quella dell'America settentrionale e della Nuova Zelanda. Fra il capo e la penna, di cui la maggior parte van muniti, essendovene solo taluni che finiscono in cono, havvi il collo, parte per la quale lo strumento veniva introdotto nel manico.

In una lettera dell'8 febbraio p. l'illustre prof. Fischer mi dicea che anche la Germania possedeva martelli di quella forma, ma non provenienti dall'Europa, e che, in quanto alla maniera d'attaccarli al manico, egli la conosceva dall'America e dall'Australia, dove essa era perfettamente eguale. Appunto sopra una descrizione fattami da quel gentilissimo signore, che riceveva poco prima uno di quei martelli, attaccato ancora al manico assieme ad una bellissima collezione di oggetti degli Indiani dell'America Settentrionale, delle nazioni di Sioux (Siù o Dacota?), di Chiroquees (Cherokees?) ecc. ho potuto rappresentare il martello armato (Fig. 3). Il manico di legno è un po' fesso ed incavato nella parte superiore; i due rami abbracciano lo strumento e gli danno già un po' di sostegno; è assicurato poi nella fessura per mezzo di cerchi di legno flessibile, che s'avvolgono anche intorno al manico.

I martelli stessi variano anche per la forma: alcuni sono di forma ovale accorciata: altri d'ovale allungata e terminati a scure od a punta nella parte tagliente: altri sono quadrangolari nel capo, dal quale cominciano ad assottigliarsi fino a formare la penna tagliente: altri sferici od emisferici nel capo, ma con altra forma sui lati, dove presentano una depressione considerevole: alcuni hanno la scanalatura superiormente e lateralmente, altri invece tutto all'intorno del martello. Ne vidi uno di sostanza calcare, che non ho potuto esaminare perchè non mio.

L'azza (Fig. 4 e 5) è compresa fra le 8 di sienite. Essa è di grana molto fina, della lunghezza di 96 millimetri, della larghezza di 39 e della grossezza massima di 32, a sezione circolare nella parte estrema superiore ed ellittica in tutto il resto, col taglio inclinato sotto un angolo di 70° circa. Per quest'ultima particolarità volli figurare quest'azza che mi venne regalata dal signor Michele La Gala e che fu trovata a Filadelfia.

È un bellissimo gabbro con abbondante pirite l'azza schiacciata (Fig. 6 e 7), che mi fu gentilmente favorita dal signor Antonio Ciaccio di Belcastro, al quale vado riconoscente altresì per una superba collezione di *Clypeaster* [1]. Il peso specifico di quest'azza, ben levigata, è 3,05 e la durezza da 5 a 5,5, colla parte superiore rotta e con alcune incavature sopra una delle faccie, dovute probabilmente alla decomposizione della pirite, che non è distribuita uniformemente nella massa, ma concentrata più in un punto che nell'altro. Il colore è verde-porro e verde-oliva, con numerose macchie rosse. Le dimensioni sarebbero: 81 mill. di lunghezza, 54 di larghezza e 18 di grossezza.

[1] I *Clypeaster* si possono risguardare come i fossili caratteristici del terziario medio, perchè colle loro varie forme e molto ben distinte e col grande numero di varietà ci offrono mezzo di determinare ciascun periodo del miocene. Sono estesi a tutte le pendici meridionali, orientali e settentrionali della Sila, avendoli trovati: a Catanzaro (nelle sabbie); sulle sponde dell'Alli (nel conglomerato); a Belcastro (nelle sabbie); a Verzino (nel conglomerato); a Caccuri (nelle sabbie e nelle arenarie); a Rossano (in un'arenaria compattissima); a Tarsia (nel conglomerato); punto nella valle del Crati ed alle pendici della catena littorale.

L'altra azza di gabbro rinvenuta al confine fra Catanzaro e Cosenza presenta una grande quantità di feldispato, e piccola quantità della pasta augitica (pirossenica) e piccolissimi punti d'una sostanza metallica. Il peso specifico di questo pezzo regalatomi dal signor Giuseppe Marini, ex-sindaco di Pentone, è = 2,98.

Di superba levigatura è l'azza di diorite schistosa, comperata a Borgia assieme ad un'altra per una lira e mezzo da una donna di s. Vito. Il suo peso specifico è 2,95, di color verde cupo con vene più chiare: mostra in due punti il ciottolo di fiume.

Per le dimensioni ricorderò l'azza di schisto argilloso, perchè raggiunge la lunghezza di 183 millimetri. È quella per la quale mi si richiesero 10 lire.

98. A Girifalco comperai per 35 centesimi un'azza d'*amfibolo* del peso specifico = 3,11; è quasi infusibile, sembra quindi nello stadio di una metamorfosi in serpentino.

99. D'*amfibolite*, trascorrente forse in serpentino è altra azza con vene verdiccie e del peso specifico = 3,07, che assieme a molte altre mi venne regalata dal mio carissimo ex-discepolo Gregorio Badolisani, che l'ebbe dai signori Turrà di Olivadi.

100. Della stessa provenienza è l'azza d'*amfibolite* con magnetite ed un'altra

101. di *glaucofano* col peso specifico = 3,14. Isola di Sira in Grecia.

102. Piccola azza di color nero-brunazzo, che lascia pensare alle roccie oscure di basalto, di dolerite od anche ad alcune amfiboliche. Il peso specifico di questo strumentino, proveniente da Filadelfia è = 3,05. Siccome tengo altre armi della medesima o di sostanza affine, così mi permetterò di ritornare sopra un'altra volta.

103. La sostanza dell'azzina (Fig. 8 e 9), avuta da Vena, mi sembra essere una *tremolite,* quindi materia rara per un'azza, anzi che mi comparisce per la prima volta fra le armi dell'uomo dell'epoca della pietra. È d'un verde chiarissimo, apparendo talvolta lionato chiaro nella frattura fresca e compare in questa sotto la lente abbastanza bene la tessitura radiato-fibrosa. La densità è = 2,91; la durezza da 5,5 a 6; la lucentezza un po' perlacea; la lunghezza di 53 millimetri differisce poco dalla larghezza 48, la massima grossezza essendo 17. Le faccie principali piane divengono alquanto convesse verso le costole, pure appianate.

La tremolite, esotica finora per la Calabria, trovasi in belli esemplari a Campolongo nel s. Gottardo e nella valle di Tremola in Piemonte, inclusa nella dolomite granulare in masse bacillari, in cristalli striati e divergenti. In analogo giacimento si trova e nelle roccie calcaree cristalline nel Vallese, nella Baviera, nella Transilvania, nel Banato, nel Tirolo, negli Stati Uniti ecc. Si trova ancora fra i micaschisti del Tirolo e della Scozia e nelle miniere di ferro della Svezia (Norberg, Finbo e Gellivara) (1).

104. Di *fibrolite* è una superba azzina, di magnifica levigatura e con taglio conservatissimo, ch'ebbi dal sig. Giuseppe Levato, e proveniente da Sersale alle pendici meridionali della Sila. Le dimensioni relative sono 48,32 e 9 millimetri; la durezza 7; biancastra con lucentezza sericea e pellucida; la densità = 3,163. Di solito la si riferisce alla sillimanite, ma ne differisce da essa per la maggior durezza, per la trasparenza, per la lucentezza, oltrechè per altre proprietà fisiche e per trovarsi

(1) Bombicci, *Corso di Mineralogia*, vol. II parte 2ª pag. 744.

in Tirolo, in Moravia, in Baviera, ecc. mentre la sillimanite si è trovata finora soltanto in America ([1]). Io la trovai anche in Calabria, ma solo come elemento componente una superba roccia nuova, contenente assieme alla sillimanite, quarzo, mica e granato.

Sarà bene notare a proposito di questa ultima roccia, che il signor Descloizeaux in Parigi riuniva assieme la sillimanite e la bucholzite in seguito ad osservazioni ottiche, da lui fatte su queste sostanze; e che in seguito a questo fatto i mineraloghi tedeschi non fanno più distinzione fra le due roccie, che pur differiscono fra loro per tante proprietà fisiche e chimiche. La fibrolite trovasi pure nel granito (Delaware), Stati Uniti ecc.

105. A Girifalco fu trovata bellissima azzina, rotta nella parte superiore, che però dovea aver la lunghezza non maggiore di 39 millimetri, colla larghezza di 28 e la grossezza di 6. La ebbi in cambio dall'egregio sig. dottor Giovanni Luino, provveditore agli studî per altra di diorite. È di *variolite* verosimilmente, corrispondente quindi ad un diabasio del Fichtelgebirge e di Voigtland (Sassonia) o ad un gabbro della Durance, della quale ultima roccia qualche mineralista deve aver dato la definizione microscopica. Sembra la nostra corrisponda, per quanto gentilmente mi riferisce in proposito il dottissimo professore Fischer, alla prima modificazione che appartiene al diabasio. Molti confondono la variolite colla diorite ([2]) e ne fanno quindi una specie detta diorite orbicolare, che è la roccia di Sartene in Corsica. Ma ciò non può essere anche per la composizione chimica. Presentemente questa roccia è annoverata fra le daciti perchè composta di plagioclasio, quarzo, amfibolo. Predominando poi nella roccia di Sartene il plagioclasio che si chiama anortite (come lo dimostrò il Delesse appoggiato dalle analisi) ([3]), ne venne per questa roccia, nella quale l'amfibolo verde cupo spicca nettamente dalla massa cristallina biancastra di essa, il nome di *corsite*, che confonderemo per nulla colla così detta *pietra di Napoleone* (Napoleonstein, o Napoleonporphyr), che corrisponde alla vera *piromeride* e che pur si trova in Corsica. Infatti questa appartiene al porfido, di cui è una varietà, che contiene concrezioni della medesima sostanza come i magmas, donde trassero origine i porfidi propriamente detti, ma con tessitura concentrica e nello stesso tempo sovente radiata. Infatti i cristalli feldispatici vi sono aggruppati in forma sferoidale raggiata, di guisa che le sezioni, praticate nella roccia, presentano superficie disegnate a bei rosoni di particelle poligone e biancheggianti in campo rosso-bruno, o giallastro ([4]). Nella corsite invece i tre elementi sono disposti in fitti sferoidi con 2 o 3 centimetri di diametro, formati per concentrazione cristallina, con un aggregato centrale di particelle di plagioclasio, alle quali si coordinano eleganti zone, alternanti e concentriche, di color grigio chiaro e verde carico, formate dai tre minerali componenti. Le sezioni ne presentano bellissimi rosoni. Il suo peso specifico è $= 3{,}08$ e la sua durezza fra 6 e 7: d'un bel verde chiaro sporco con vene e macchie più oscure e talora d'un

([1]) Bombicci, *Corso di Mineralogia*, vol. II parte 2ª pag. 688-9 e 700.
([2]) Omboni, *Elementi di Storia Naturale*.
([3]) Bombicci, *Corso di Mineralogia*, vol. I pag. 497.
([4]) Bombicci, *Corso di Mineralogia*, vol. I pag. 508.

bel fulvo. Ha il taglio acutissimo ben conservato, alquanto incurvato ad unghia. La frattura fresca nella sua parte superiore è tale da farla rassomigliare ad una nefrite.

106. Azza chiara, avuta dal mio bravo ex-discepolo Benedetto Mancusi, da Cicala, alle pendici della Sila: molto bene conservata, di colore biancastro con macchie più oscure, del peso specifico = 2,782, lunga 67 millimetri, larga 34 e grossa 18. Nella parte inferiore cioè nel taglio presentasi la pasta prevalentemente verde con granulazioni bianche, ma specialmente rossigne. È un *conglomerato di porfido*, appartenente alla formazione *diassica*, al *Todtliegendes*, su cui faremo il seguente breve cenno.

In Russia, in Irlanda, nell'Inghilterra settentrionale ed in Germania la natura litologica ed i fossili permisero di formare un gruppo ben distinto tra gli strati del carbonifero e l'arenaria variegata. Il signor Marcou chiamò questo gruppo *dyas*, quindi ne venne il *dyassico* o *diassico*, che egli riunisce al trias. I fossili però rinvenuti in quel gruppo di terreni appartengono ai generi del carbonifero: quindi per questo dato positivo la generalità dei geologi lo comprese nella serie paleozoica e da Murchison ricevette il nome di *permiano*, dalla contrada di Perm in Russia, dove questo terreno è molto esteso occupando un' area eguale a due volte la Francia [1] e ricchissimo di fossili: e questo nome fu universalmente accettato.

William King in una monografia dei fossili permiani d'Inghilterra, divide il sistema permiano in sei membri, dei quali trova gli equivalenti a Mansfeld nella Turingia in Germania. Il primo membro, costituito da grès e sabbie, con marne rosse e gesso, porta il nome di *rothes Todtliegendes*, di *Rothtodt-liegendes* o più brevemente *Rothliegendes* o *Todtliegendes* e corrisponde al nostro grès inferiore variegato e all'antica arenaria rossa degli Inglesi.

Ed ebbero questi strati il nome di *Rothtodt-liegendes*, che significa rossi-morti-strati, dai minatori turingi, perchè il rame ossia la pirite cuprea in essi si perde, vi muore.

Il cemento di questa arenaria è rosso, prevalendo l'ossido di ferro: la grossezza dei grani cambia sempre: resti organici molto rari, spesso non se ne trovano affatto.

In questo gruppo del *Todtliegendes* troviamo frequenti breccie e conglomerati porfirici, composti di solito di ciottoli arrotolati, porfirici, in sabbie e fanghi porfirici [2], ma talora anche con elementi così piccoli da prendere la roccia per vero porfido antico, dai frammenti della decomposizione del quale queste breccie e questi conglomerati debbonsi essere formati.

Nelle mie escursioni per le Calabrie non trovai il conglomerato di porfido, ma rinvenni un *conglomerato di granito*, una delle roccie così dette nettuniche, forse della stessa formazione diassica o del *Todtliegendes*, nell'altipiano sopra s. Fili, prima di raggiungere la vetta presso la strada che conduce a Paola.

107. È la più bella fra le azze e la più rara quella ch'ebbi da Davoli (Fig. 10 e 11) dal mio carissimo scolaro Gregorio Badolisani. È una *nefrite*, di colore bianco verdiccio con macchie fulve; lunga 41 millimetri, larga 22 e grossa $8\frac{1}{2}$; il suo peso specifico è = 2,97; la durezza = 6. Fu segata nella parte superiore per poter fare

(1) Stoppani, *Corso di Geologia*, vol. II pag. 284.
(2) Stoppani, *Corso di Geologia*, vol. III pag. 79.

piastre polite per l'illustre Fischer e per me. Il dotto professore mi comunica che nel Museo di Friburgo si possiede una varietà del tutto simile di nefrite, che secondo la schedula pare provenga dalla Siberia, e mi dice che questa mia azzina è la prima che abbia veduto, la cui nefrite sia decisamente una varietà siberica, quindi la scoperta del massimo interesse. Il dotto professore non conosceva ancora la altre mie preziose nefriti, pur di specie siberica. Contiene molta magnetite, che si è potuta estrarre dalla sua polvere mediante la calamita.

108. Di *nefrite* o di sostanza ad essa assolutamente affine è un'azza spezzata, discretamente informe di Borgia, che debbo alla gentilezza del signor Cesare Opipari. Il suo peso specifico è = 2,9812; la sua durezza minore del 6° grado; la sua pasta verde, dappertutto omogenea, per quanto si può vedere colla lente.

109. Piccola azza comperata a Borgia per 35 centesimi. Sembra essere una *nefrite* ed in ogni modo rassomiglia a quella che fu trovata come materiale di un'azza di Irkutsk. Questa sostanza è illustrata nella Tavola I, fig. 5 del prezioso libro dell'illustre Fischer (1). Egli potè avere un frammento di quella sostanza da Pietroburgo, come proveniente da Tomsk in Siberia; ma questa provenienza fu in seguito corretta dal medesimo corrispondente e mutata in Irkutsk, quindi sempre proveniente dalla Siberia. La figura illustrata rappresenta una parte oscura verdiccio-giallastra-rossa, che è la polita, ed una parte chiara, che rappresenta la frattura come polverosa. Difatti in questa qualità di nefrite la frattura fresca è sempre più polverosa che nelle altre provenienti dalla Siberia, dove si trovano anche le nefriti di colore smeraldino. Della stessa sostanza, solo di color più chiaro, sembra essere una grossa azza degli Alëuti (Asia orientale), che si trova al Museo di Mineralogia di Berlino. La durezza di questa sostanza è sotto quella del quarzo cioè fra 6 e 6,5; la densità = 2,97. Il colore è verdiccio-giallastro con belle vene verdi; il taglio molto bene conservato, levigatissima. L'analisi quantitativa di questa qualità di nefrite manca ancora. Abbiamo però l'analisi qualitativa del sig. dottor Röderer, che diede per lo meno i componenti della nefrite. Fonde e colorisce la fiamma in giallo.

110. Azza levigatissima e molto bene conservata, che comperai a Zagarise, alle pendici della Sila per 40 centesimi. Il suo peso specifico è = 3,10 ed è composta verosimilmente della medesima sostanza della precedente, quindi di *nefrite* di Irkutsk nella Siberia; come pure della stessa sostanza è l'azza

111. comperata a Fossato, nel mandamento di Taverna per 50 centesimi. La densità è 3,06 ed è veramente interessante per gli studî, che si potranno fare in seguito, la comparsa in questa ultima parte dell'Italia meridionale di azze, la sostanza delle quali è assolutamente conforme a quelle di nefrite di Irkutsk. È molto larga, schiacciata, di forma quasi rettangolare ed abbastanza bene conservata anche nel taglio. Il colore è verde cupo, con qualche macchia di verde più chiaro, tendente al gialliccio e rossigno, come fanno talvolta alcuni diallagi.

112. Graziosa azzina pure di *nefrite*, di superba levigatura, con macchie metalliche, di densità = 3,07; regalatami dall'egregio maestro Giuseppe De Gattis al quale vo riconoscente di molti altri pezzi fra i primi enumerati, ch'egli potè avere a Sorbo

(1) *Nephrit und Jadeit, nach ihren mineralogischen Eigenschaften*, etc. Stuttgart, 1875.

s. Basile nel mandamento di Taverna. La durezza è fra 6,5 e 7, e fa forti scintille. A principio sembravami una fibrolite, ma la densità 3,07 cancellava quel mio primo giudizio, avvalorato anche dalla tessitura ovunque densa, non fibrosa. È fusibile e sembra proprio una nefrite con pirite. Una delle faccie principali, che presenta levigatura migliore, è verde cupo, quasi nero con macchiette verdi più chiare; l'altra superficie è alquanto più chiara, a bizzarro disegno con due verdi diversi. È lunga 55 millimetri, larga 24, grossa 10.

118. Azza regalatami da don Luigi de Fazio, distinto delegato scolastico pel mandamento di Soveria Simeri. Sembra una *nefrite* a frattura normale e dappertutto identica colla precedente. Questa sorta di nefrite rassomiglia ad una qualità del Thibet, e va quindi messa assieme con quella, della quale è fabbricato il manico di pugnale del Museo di Berna, che è figurato nel mai abbastanza lodato libro sulle nefriti e giadeiti del dotto professore dell'Università di Friburgo. Da questo ricavo la seguente analisi quantitativa secondo il signor Fellenberg per questa nefrite:

Silice	55,877
Magnesia	17,36
Calce	12,93
Ossido di ferro	11,75
Ossido di manganese	0,32
Allumina	0,90
Acqua	1,40
	100,537

Fra le nefriti è quella che contiene la maggior quantità di ferro. La durezza è = 6; il peso specifico per la mia = 3, per quella analizzata dal signor Fellenberg sarebbe = 3,08656.

Il tempo ha impresso a questo strumento tal vernice, che congiunta all'alterazione che si stende su tutta la superficie della roccia ed alla profondità di 2 millimetri e mezzo, impedirebbe la diagnosi senza spezzare l'azza.

114. Azza di *cloromelanite* (Fig. 12) comperata a Borgia per 80 centesimi. Il peso specifico è 3,4; la durezza 7; il colore verde cupo. Mostra in 4 punti il ciottolo di fiume: nella parte superiore finisce in punta acuta, ed il taglio per la preparazione fatta è conservatissimo. La lunghezza è di 136 millimetri, la larghezza 49, la grossezza massima 23.

115. Frammento d'azza di *cloromelanite*, ricchissima di pirite cuprea, mostrata dalla frattura fresca. Devo la parte inferiore di questo bel pezzo e precisamente il taglio, assieme ad altre azze, al mio scolaro Mariano Coschi: è proveniente da Albi nel mandamento di Magisano. La densità è = 3,40. Dovea far parte di grossissima azza, della quale si possono dedurre la larghezza di 48 millimetri e la grossezza di 24. Il colore è molto più oscuro della precedente.

116. Superba azza di *cloromelanite*, che comperai per una lira e proveniente da Serra s. Bruno; colla densità 3,40. Contiene piriti, ma in minor quantità della precedente, e fa alquanto scintille all'acciaio. È d'un superbo verde oliva, colle

superficie levigatissime, ma il taglio è alquanto rovinato da mano barbara, che forse volea estrarre l'oro. È lunga 100 millimetri, larga 46, grossa 22.

I pezzi descritti alla fine di questa mia breve Memoria credo dovranno riuscire di grande interesse pei cultori di paletnologia, ma senza dubbio della massima importanza saranno per ognuno le ultime 10 reliquie di *nefrite* e di *cloromelanite*, roccie tanto rare e che troviamo estese in istrumenti dell'epoca della pietra fino nella Calabria.

Non posso trattenermi dall'esporre quanto mi dia a pensare questa importantissima circostanza della quantità di tali roccie esotiche nella mia piccola collezione calabrese di arnesi litici, giacchè se qualche dubbio può lasciare forse la loro precisa determinazione, non ne lascia alcuno il fatto della nessuna loro corrispondenza colle roccie locali.

La loro provenienza da luoghi lontani e per lo meno dall'Asia settentrionale ed interiore, come porterebbe il mio primo apprezzamento, da taluno si potrebbe legare ad un caso fortuito o ad una serie di fortuite combinazioni. Ma ciò che si potrebbe accettare per qualche caso separato, diventa improbabile dinanzi ai molti oggetti di tal natura da me posseduti e studiati, e questa improbabilità va aumentando, quanto più cresce il numero degli oggetti preistorici di queste sostanze esotiche.

Dobbiamo allora pensare ad un regolare commercio coi luoghi d'origine, quindi coll'Asia settentrionale e colla media. Ma questo commercio per tali distanze ai tempi nei quali convien rimontare, quando l'uomo si serviva di questi oggetti, sembra quasi impossibile, sia pel presunto stato sociale di coteste e delle intermedie popolazioni, sia pel probabile enorme costo di simili arnesi di pietra col difficile trasporto, costo che non avrebbe potuto forse paragonarsi colla effettiva loro utilità, essendo poi anche possibile il supplirvi con materiali assai più alla mano.

Eppure noi dobbiamo pensare ad un commercio delle prime popolazioni calabresi con altre, e non d'oltremonte, ma d'oltremare alla vista in queste contrade di tali roccie esotiche, che, se si rinvengono in forma di armi e di strumenti dell'epoca della pietra nell'Italia settentrionale per non parlare di altre contrade di Europa, mancano, per quanto mi sappia, quasi assolutamente nell' Italia media, nè so se finora in essa fu rinvenuto alcun pezzo di nefrite. Ora o queste nefriti e queste cloromelaniti esistono nell'Italia media o non esistono. Nel primo caso è forza concludere che le diagnosi non furono fatte esattamente: nel secondo invece ammettere un commercio marittimo dei primi popoli della Calabria con altri più o meno lontani, e forse considerare come proveniente d'oltremare la gente che prima abitò questo estremo lembo di Italia continentale; quindi che questi oggetti così rari sieno qui pervenuti per mezzo di questo effettivo commercio, oppure li abbiano qui portati addirittura quei primi trasmigratori dalle regioni da loro prima abitate.

Si potrebbe forse assegnare a queste reliquie una più vicina provenienza. Gli argomenti storici ci spingerebbero a cercarla sulle più vicine coste d'Affrica, quindi nella Tunisia, ma le nozioni geologiche, che si hanno di codesti luoghi, non autorizzano ad ammettere per quelle contrade le roccie di natura nefritica e le cloromelaniti, la cui patria come sappiamo è dappertutto ignota, nè le verificazioni sarebbero ora tanto facili a farsi. In difetto di altri argomenti per tale provenienza le

considerazioni geologiche e di vicinato indurrebbero a guardare come a faro di salvezza verso la Sardegna, dove le roccie primitive, non difettando, potrebbero offrire varietà analoghe od affini a quelle in questione.

Del massimo interesse per la scienza sarebbe il confrontare le sostanze rare dei miei strumenti litici cogli svariatissimi prodotti di quell' isola, che, se furono illustrati dall' immortale A. Lamarmora, che solo finora si occupò tanto seriamente della geologia della Sardegna, non furono però completamente ancora classificati secondo la moderna nomenclatura.

In ogni modo credo che gioverà immensamente alla scienza chi porterà elementi sufficienti per risolvere la questione della presenza in Calabria di numerosi oggetti di roccie esotiche e particolarmente di nefrite e di cloromelanite.

D Renda dis

Lit. Marie Roma

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Sopra i piani ed i punti singolari della superficie di Kummer.

Memoria del dott. ETTORE CAPORALI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 2 giugno 1878.

Un recente lavoro del prof. Cremona che ha per titolo: *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal*, mi ha spinto alle ricerche che ora presento. In quella Memoria è mostrato come partendo da un sistema di 15 rette situate tre a tre in 15 piani si giunge ad una figura le cui parti sono per così dire connesse insieme per mezzo di un esaedro che è come la base del sistema. Si vedrà nel presente lavoro, come si possa giungere a quel medesimo esaedro anche partendo da una figura di 10 piani passanti quattro a quattro per 15 punti. Nella superficie di Kummer se si separano sei piani singolari passanti per un medesimo punto singolare rimangono appunto altri 10 piani singolari disposti nel modo suddetto: in ciò sta la ragione del titolo di questo lavoro.

Anche dalle semplici proprietà stereometriche che saranno esposte più innanzi, scaturiscono i teoremi sull'esagrammo di Pascal. Alcuni di questi teoremi sparsi qua e là pel lavoro, parranno, credo, nuovi: vorrebbero, però, essere studiati più al minuto, cosa che non avrei potuto fare senza allontanarmi dall'oggetto principale.

1. È noto che una superficie di Kummer possiede 16 punti doppî e 16 piani tangenti doppî, in modo che per ogni punto passano 6 piani (tangenti ad un cono di 2° grado) e sopra ogni piano giacciono 6 punti (situati in una conica): li diremo piani e punti fondamentali. Rammentiamo anche l' importante proprietà che questo sistema è reciproco di se stesso in 6 sistemi polari differenti determinati da sei complessi lineari in involuzione due a due (¹).

Si indichi col simbolo 0 uno dei piani fondamentali e coi simboli 1, 2, 3, 4, 5, 6 i sei punti fondamentali situati su di esso: allora si sa che gli altri 15 piani fondamentali possono essere rappresentati coi simboli binarî 12, 13, 23, ecc.; e che gli altri 10 punti fondamentali si possono rappresentare colle coppie di simboli ternarî.

$$\binom{123}{456},\ \binom{124}{356},\ \binom{125}{346}, \text{ecc.}$$

Con questa notazione si possono riconoscere agevolmente le relazioni fra i diversi elementi della figura. Per es. per il punto fondamentale $\binom{123}{456}$, passano i piani fondamentali 12, 13, 23, 45, 46, 56: pel punto 1 passano i piani 0, 12, 13, 14, 15, 16: sul piano 12 giacciono i punti 1, 2, $\binom{123}{456}$, $\binom{124}{356}$, $\binom{125}{346}$, $\binom{126}{345}$, ecc. ecc.

(¹) Klein, *Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades.* Math. Ann. II.

2. I 16 punti fondamentali sono congiunti due a due da $\frac{16.15}{2} = 120$ rette che chiameremo rette R. Le rette R sono nello stesso tempo anche le rette determinate dai piani fondamentali presi due a due. Per es. i due punti $\binom{123}{456}$, $\binom{124}{356}$ sono contenuti simultaneamente nei due piani 12, 56.

Le rette R, considerate rispetto ad un piano fondamentale, per es. rispetto al piano 0, si dividono in tre categorie: 15 sono quelle che congiungono due a due i punti fondamentali del piano, e si indicheranno coi simboli $\binom{1}{2}$, $\binom{1}{3}$ecc.; 60 congiungono i punti del piano ai 10 punti situati fuori: le rimanenti 45 congiungono due a due questi ultimi 10 punti. La retta R comune ai piani 12, 13 si indicherà col simbolo $\binom{12}{13}$, la retta comune ai piani 12, 34, col simbolo $\binom{12}{34}$, ecc. Le 60 rette della 2ª categoria si distinguono da quelle della 3ª, perchè nel loro simbolo vi è un indice ripetuto. Analogamente si distribuiscono le rette R rispetto ad un punto fondamentale.

3. I punti fondamentali presi tre a tre determinano dei piani non fondamentali che diremo piani Π [1]: siccome ogni piano fondamentale contiene sei punti e perciò assorbe 20 combinazioni ternarie dei punti fondamentali, i piani Π sono $\frac{16.15.14}{2.3} - 16.20 = 240$.

Analogamente i piani fondamentali presi tre a tre determinano un certo numero di punti P non fondamentali: i punti P sono 240.

4. Presa una retta R, essa contiene due punti fondamentali: i due piani fondamentali che passano per essa contengono ciascuno altri quattro punti fondamentali: ne rimangono fuori 6 i quali evidentemente determinano colla R altrettanti piani Π.

Analogamente, per due punti fondamentali passano 10 piani fondamentali distinti: ne rimangono altri 6 i quali incontrano la retta che congiunge i due punti in altrettanti punti P. Dunque i piani Π passano 6 a 6 per le rette R e i punti P vi giacciono 6 a 6. Per es. si consideri la retta $\binom{12}{34}$ determinata dai piani fondamentali 12, 34, ovvero dai punti fondamentali $\binom{125}{346}$, $\binom{126}{345}$: per essa passano 6 piani Π che la congiungono i punti

$$5,\ 6,\ \binom{135}{246},\ \binom{136}{245},\ \binom{145}{236},\ \binom{146}{235}:$$

e su di essa esistono 6 punti P determinati dai piani 0, 13, 14, 23, 24, 56.

5. Viceversa è evidente che le rette R passano tre a tre pei punti P e giacciono tre a tre sui piani Π.

Indicheremo i piani Π mediante le rette R che contengono. Così i tre punti $\binom{125}{346}$, $\binom{126}{345}$, $\binom{135}{246}$ i quali determinano un piano Π (n. prec.), sono congiunti dalle rette $\binom{12}{34}$, $\binom{15}{46}$, $\binom{35}{26}$ e perciò danno il piano Π

$$\binom{12}{34}\binom{35}{26}\binom{46}{15}.$$

[1] Veggasi Klein, l. c.

Indicheremo i punti P per mezzo dei piani fondamentali che li determinano: così al numero precedente si avevano i punti P (12. 34. 0), (12. 34. 13) ecc.

6. Un piano fondamentale e una retta R che congiunga due punti non appartenenti al piano, si incontrano in un punto P: analogamente un punto fondamentale e una retta R intersezione di due piani non passanti per quel punto determinano un piano Π. Quindi i punti P sono situati 45 a 45 nei piani fondamentali; e i piani Π passano 45 a 45 pei punti fondamentali.

7. Rispetto ad un piano fondamentale (per es. il piano 0), i piani Π si distribuiscono in tre categorie: 1° 90 piani i quali passano sei a sei (4) per le 15 rette R (2) situate nel piano fondamentale; 2° 90 piani Π determinati da un punto del piano fondamentale e da due punti fuori di esso: di questi piani ne passano 15 per ogni punto fondamentale del piano; infatti per uno di questi punti passano 45 piani Π (n. prec.) dei quali 30 appartengono alla 1ª categoria; 3° 60 piani Π determinati dai 10 punti situati fuori del piano fondamentale. Questi 60 piani li diremo coordinati al piano fondamentale.

8. Anche i 240 punti P si dividono in tre categorie rispetto ad un piano fondamentale. Si hanno: 1° 45 punti P situati sul piano fondamentale; 2° 15 punti P per ciascuno dei quali passano tre rette R della 3ª categoria (2); 3° 180 punti per ognuno dei quali passano due rette della 2ª categoria e una della 3ª.

I 15 punti del 2° gruppo (rispetto al piano 0) sono quelli, come (12. 34. 56) nel cui simbolo si trovano tutti sei gli indici. I 240 punti P si distribuiscono in 16 gruppi di 15 punti ognuno, ciascun gruppo essendo coordinato ad uno dei piani fondamentali.

In modo simile si vedrebbe che tolti i 6 piani fondamentali passanti per uno stesso punto fondamentale, i 10 piani rimanenti determinano tre a tre 60 punti P, e due a due 45 rette R situate tre a tre in 15 piani Π (¹).

9. Tornando all'esempio del n. 4, si vede che i 6 piani Π passanti per le rette $\binom{12}{34}$, si ottengono congiungendola a 6 punti fondamentali che si dividono, come segue, in tre coppie

$$5,\ 6;\ \binom{135}{246},\ \binom{136}{245};\ \binom{145}{236},\ \binom{146}{235}$$

le quali determinano le 3 rette R

$$\binom{5}{6},\ \binom{13}{24},\ \binom{14}{23}:$$

e si vede anche che i 6 punti P giacenti sulla medesima retta $\binom{12}{34}$ si ottengono mediante 6 piani fondamentali, i quali si dividono nelle tre coppie

13, 24; 14, 23; 0, 56,

che determinano le medesime tre rette R.

In questo modo da una retta R se ne deducono altre tre: ed è facile vedere che le quattro rette

$$\binom{12}{34},\ \binom{13}{24},\ \binom{14}{23},\ \binom{5}{6}$$

(¹) Si vedrà più innanzi che uno di questi gruppi di 15 piani gode di tutte le proprietà dei *piani di Plücker* nelle ricerche del prof. Cremona.

sono tali che da *una qualunque* di esse, si deducono le altre tre nel modo anzidetto. Quattro rette così fatte le diremo una quaterna di rette R. Le rette d'una quaterna non s'incontrano. Le 120 rette R si separano in 30 quaterne.

10. Le rette d'una quaterna, godono della proprietà che se sopra tre di esse si prendono rispettivamente tre punti fondamentali, essi determinano sempre un piano fondamentale il quale incontra la quarta retta anche in un punto fondamentale: vi sono perciò otto piani fondamentali i quali segano le rette d'una quaterna in punti fondamentali. Per es. per la quaterna data al numero precedente, gli otto piani fondamentali sono i seguenti

15, 25, 35, 45
16, 26, 36, 46.

Essi, come si vede, si separano in quattro coppie le quali danno quattro rette R

$$\binom{15}{16},\ \binom{25}{26},\ \binom{35}{36},\ \binom{45}{46}$$

che costituiscono un'altra quaterna.

Se il medesimo procedimento si applicasse a questa seconda quaterna, si ritroverebbe la prima. Dunque le 30 quaterne di rette R sono coniugate due a due.

Le 8 rette di due quaterne coniugate non s'incontrano, vale a dire due qualunque di esse non passano per un medesimo punto fondamentale, nè giacciono in uno stesso piano fondamentale; dimodochè si può concludere che colle rette R si formano 15 gruppi di otto rette, tali che le rette di un gruppo contengono tutti i punti fondamentali e per esse passano tutti i piani fondamentali (¹).

Sopra un piano fondamentale, per es. sul piano 0, vi sono 6 punti fondamentali 1, 2, 3, 4, 5, 6, vertici di un esagono completo: i 45 punti d'incontro delle coppie di lati non consecutivi, sono evidentemente i punti P situati su quel piano (8), vale a dire le tracce delle 45 rette R della 3ª categoria (2).

11. Ora, i 10 punti fondamentali situati fuori del piano 0, determinano tre a tre (7) 60 piani Π ciascuno dei quali contiene tre rette R che incontrano il piano fondamentale in tre punti P. Dunque i 45 punti P di un piano fondamentale (di un esagrammo) sono situati tre a tre sopra 60 rette. Le diremo rette di Pascal, per conservare le denominazioni già adottate nella teoria dell'esagrammo. I 240 punti P sono situati tre a tre su 60.15=960 rette di Pascal. Una retta di Pascal è l'intersezione di un piano fondamentale con un piano Π.

12. Analogamente se si congiunge un punto fondamentale ad uno dei 60 punti P ad esso coordinati, si ottiene una retta che diremo K, la quale insieme alle tre rette R passanti pel punto P, ci dà tre piani Π. Dunque i 45 piani Π passanti per un punto fondamentale si segano tre a tre in 60 rette K. I 240 piani Π passano tre a tre per 960 rette K. Una retta K congiunge un punto fondamentale ad un punto P.

13. Sopra il piano 0 si unisca un punto fondamentale qualunque ad un punto P

(¹) Klein, l. c.

alla cui costruzione non abbia concorso quel punto fondamentale (11): facendo questa operazione in tutti i modi possibili, si ottengono 90 rette a (1) le quali passano 15 a 15 pei punti fondamentali e due a due pei punti P del piano 0. Queste rette sono evidentemente le tracce dei 90 piani Π della 2ª categoria (7). Vedremo più innanzi alcune proprietà di queste rette, che mi paiono nuove.

L'intersezione di un piano fondamentale con un piano Π è una retta R, ovvero una retta a, ovvero una retta di Pascal. Si può osservare che i 90 piani Π della 2ª categoria rispetto al piano 0, sono costituiti dai 6 gruppi di 15 piani l'uno (8), rispettivamente coordinati ai 6 punti fondamentali del piano 0.

È facile ancora di vedere che le rette che congiungono i punti fondamentali ai punti P, sono rette R, ovvero rette K, ovvero rette a.

14. Pàssiamo a studiare quelli degli elementi già considerati i quali esistono sopra uno stesso piano Π: e per fissare le idee consideriamo il piano $\binom{12}{34}\binom{35}{26}\binom{15}{46}$. Esso contiene tre punti fondamentali $\binom{126}{345}$, $\binom{125}{346}$, $\binom{135}{246}$, i quali sono congiunti da tre rette R $\binom{12}{34}$, $\binom{35}{26}$, $\binom{15}{46}$. Nel piano sono contenuti 18 punti P, sei per ciascuna delle tre rette R.

È facile vedere come si diportano, rispetto a questo piano, i piani fondamentali. Tre coppie di essi passano rispettivamente per le tre rette R e sono nel nostro caso i piani

$$12,\ 34;\ 35,\ 26;\ 15,\ 46.$$

Oltre a questi, per ogni punto fondamentale del piano Π passano altri due piani fondamentali: così pel punto $\binom{126}{345}$ passano i piani 16, 45; pel punto $\binom{125}{346}$ passano i piani 25, 36; pel punto $\binom{135}{246}$ i piani 13, 24. Questi sei piani determinano sul piano Π altrettante rette a. Finalmente i quattro piani fondamentali rimanenti

$$0,\ 23,\ 14,\ 56,$$

segano il piano Π secondo altrettante rette di Pascal (11).

Se si considera il triangolo dei punti fondamentali, le due rette a passanti per un vertice, incontrano il lato opposto in due punti P: si hanno in questa maniera 6 punti P: gli altri 12 sono le intersezioni delle tre rette R colle quattro rette di Pascal.

Le rette che congiungono un punto fondamentale ai punti P nei quali il lato opposto è incontrato dalle rette di Pascal, sono rette K.

Riassumendo, abbiamo che: in un piano Π vi sono 6 rette a passanti due a due pei tre punti fondamentali e quattro rette di Pascal; il piano medesimo contiene 18 punti P dei quali 6 sono situati uno ad uno sulle rette a e gli altri sono distribuiti tre a tre sulle quattro rette di Pascal. Ogni piano Π contiene 12 rette K passant quattro a quattro pei tre punti fondamentali.

Come si vede, dei 18 punti P di un piano Π, sei si comportano diversamente

(1) Veggasi Veronese, *Nuovi teoremi sull'exagrammum mysticum*. Atti della Reale Accademia dei Lincei, serie 2ª vol. I.

dai rimanenti: questo si poteva prevedere rammentando la dualità accennata al n. 1: avremo occasione di ritornare su questo argomento.

15. La dualità suddetta permette di stabilire immediatamente le seguenti proprietà. Per un punto P passano 6 rette a, situate due a due nei tre piani fondamentali, e quattro rette K: per lo stesso punto passano 18 piani Π dei quali 6 contengono una ad una le rette a e gli altri 12 sono quelli determinati dalle tre rette R e dalle quattro rette K passanti pel punto P. Per ogni punto P passano dodici rette di Pascal situate quattro a quattro sui tre piani fondamentali che determinano quel punto.

È importante, per ciò che seguirà, questa separazione delle rette di Pascal in tante quaterne quanti sono i piani Π e delle rette K in quaterne coordinate ai punti P.

16. Esaminiamo il modo di comportarsi delle rette K rispetto ad un piano fondamentale, per es. al piano 0. Rammentiamo che una retta K si ottiene congiungendo un punto fondamentale ad un punto P determinato da tre piani fondamentali diversi da quelli che passano pel primo punto. Si abbia ancora presente la divisione dei punti P in tre categorie rispetto ad un piano fondamentale (8). Allora si riconoscerà subito come le rette K si dividano in quattro gruppi, come segue:

1° rette K che contengono un punto fondamentale del piano 0. Il punto P che contiene una di tali rette non può essere evidentemente nel piano 0, nè può essere uno dei 15 coordinati al piano medesimo (8), perchè i tre piani fondamentali che determinano uno di questi punti contengono tutti 6 i punti fondamentali del piano 0. Le rette K di cui si tratta sono dunque quelle che uniscono i punti fondamentali di 0 ai punti P della 3ª categoria: siccome per ogni punto fondamentale passano 60 rette K (12), *si avranno in questo primo gruppo* 360 *rette K* passanti due a due pei 180 punti P della 3ª categoria;

2° rette K che contengono un punto P del piano 0: siccome per ogni punto P passano quattro rette K (15), questo gruppo si comporrà di $45 \times 4 = 180$ rette K;

3° rette K passanti per uno dei 15 punti P coordinati al piano 0 (della 2ª categoria. Queste rette saranno in numero di $15 \times 4 = 60$;

4° rette K passanti per uno dei 180 punti P della 3ª categoria: per ognuno di questi punti passano quattro rette K delle quali due appartengono al primo dei gruppi che stiamo numerando: il gruppo attuale si comporrà quindi di $180 \times 2 = 360$ rette K passanti due a due pei punti P della 3ª categoria.

17. I due ultimi gruppi meritano di essere esaminati attentamente. Le 60 rette K del terzo gruppo escono dai 15 punti P coordinati al piano 0: da questi medesimi punti escono tre a tre le 45 rette (8) che congiungono due a due i 10 punti fondamentali situati fuori del piano 0. Ne segue che i tre piani Π passanti per una qualunque delle rette K, sono fra i 60 piani coordinati al piano 0 (7). Dunque i sessanta piani Π coordinati ad un piano fondamentale passano tre a tre per sessanta retta K: e considerandone le tracce sul piano fondamentale, abbiamo che nell'esagrammo le sessanta rette di Pascal passano tre a tre per 60 punti. Questi punti (tracce di rette K) sono i *punti di Kirkman.*

Per un punto P della 3ª categoria passa soltanto una retta R che contenga due punti fondamentali non appartenenti al piano 0 (8); le altre due rette R passanti per esso incontrano il piano 0 ciascuna in un punto fondamentale. Quindi per una retta K del quarto gruppo passano due piani Π della 2ª categoria (7) ed un piano Π della 3ª. Considerando le tracce sul piano 0, abbiamo che nel piano dell'esagrammo vi sono 360 punti per ciascuno dei quali passano due rette a e una retta di Pascal. Questi punti li chiameremo punti O (¹).

18. Se si considera una retta K, si vede subito che 6 piani fondamentali la incontrano nel punto fondamantale che essa contiene, tre altri la incontrano nel punto P su di essa esistente, un piano fondamentale la interseca in un punto di Kirkman: i sei piani fondamentali rimanenti la intersecano per conseguenza in altrettanti punti O. Dunque ogni retta K contiene un punto di Kirkman e 6 punti O.

19. Nel piano dell'esagrammo i punti O sono distribuiti 6 a 6 sulle rette di Pascal e 8 ad 8 sulle rette a.

20. Riesce importantissimo in questo argomento ricercare le diverse specie di tetraedri che si possono formare coi punti o coi piani fondamentali.

Preso un piano fondamentale e su di esso ad arbitrio tre punti fondamentali, per essi, presi due a due, passano tre altri piani fondamentali che s'incontrano in un punto fondamentale: si ha così un tetraedro formato con piani e punti fondamentali. Evidentemente un piano fondamentale è faccia di 20 di questi tetraedri, i quali due a due hanno il vertice opposto a quella faccia coincidente.

Si hanno dunque $\frac{16 \cdot 20}{4} = 80$ tetraedri che hanno per vertici e per facce punti e piani fondamentali.

21. Si prenda un piano fondamentale per es. il piano 0: ad esso sono coordinati 15 punti P (8): uno qualunque di questi punti è determinato da tre piani fondamentali i quali insieme al piano 0 formano un tetraedro che ha per vertici quattro punti P. È facile vedere che col piano 0 si possono formare questi soli tetraedri di tal natura: ogni piano fondamentale appartiene a 15 tetraedri che hanno per facce piani fondamentali e per vertici punti P. Vi sono in tutto $\frac{15 \cdot 16}{4} = 60$ tetraedri che godono di questa proprietà.

22. Si hanno per dualità anche le proprietà seguenti: Si possono formare dei tetraedri i quali abbiano per vertici dei punti fondamentali e e per facce dei piani Π: di questi tetraedri ve ne sono 60: ogni punto fondamentale appartiene a 15 di essi.

23. Chiameremo rispettivamente tetraedri di 1ª e di 2ª specie quelli dei n. 21 e 22: essi hanno sempre per spigoli rette R. Un piano Π appartiene ad un solo tetraedro di 2ª specie.

(¹) Veggasi Veronese, l. c.

Se si prende per es. il piano $\binom{12}{34}\binom{35}{26}\binom{15}{46}$, (14), esso contiene i punti fondamentali

$$\binom{126}{345}, \binom{125}{346}, \binom{135}{246}$$

pei quali, presi due a due passano i piani fondamentali

12, 34; 35, 26; 15, 46:

ora questi piani contengono gli altri punti fondamentali

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \binom{123}{456}, \binom{124}{356}, \binom{134}{256}, \binom{145}{236}, \binom{146}{235}, \binom{156}{234}$$

per ognuno dei quali passano due di quei piani. Rimane fuori soltanto un punto fondamentale $\binom{136}{245}$, il quale è vertice opposto al piano Π assunto, nel solo tetraedro di 2ª specie che si può formare con questo piano.

Analogamente con un punto P si può formare un solo tetraedro di 1ª specie.

24. Il tetraedro del numero precedente, ha dunque per vertici i punti $\binom{136}{245}$, $\binom{126}{345}$, $\binom{125}{346}$, $\binom{135}{246}$ e per facce i piani Π

$$\binom{12}{34}\binom{35}{26}\binom{15}{46};\quad \binom{36}{25}\binom{13}{24}\binom{15}{46},\quad \binom{16}{45}\binom{13}{24}\binom{35}{26},\quad \binom{16}{45}\binom{36}{25}\binom{12}{34}:$$

per ciascuno dei 6 spigoli passano due piani fondamentali dimodochè rimangono altri quattro piani fondamentali i quali non contengono nessun vertice del tetraedro di 2ª specie: nel nostro caso essi sono

0, 14, 23, 56.

Si vede subito che questi quattro piani fondamentali sono facce di un tetraedro di 1ª specie (21). D'altronde poichè essi non contengono nessun vertice del dato tetraedro di 2ª specie incontrano ciascuna delle sue facce secondo quattro rette di Pascal (14).

Partendo invece dall'ultimo tetraedro (di 1ª specie), i vertici del 1° sono i quattro punti fondamentali che non sono situati su nessuna delle facce del 2°: e perciò un vertice qualunque del 2° è congiunto ai vertici del 1° mediante rette K. Da tutto questo si conclude che: ad ogni tetraedro di 1ª specie è coniugato un tetraedro di 2ª specie e viceversa, in modo che le facce dei due tetraedri s'incontrano secondo 16 rette di Pascal e i loro vertici sono congiunti da 16 rette K. In questo modo tanto le rette di Pascal, quanto le rette K, si trovano separate in 60 gruppi di 16 ciascuno.

25. Si prenda un piano Π il quale seghi un dato piano fondamentale secondo una retta di Pascal: quel piano appartiene ad un tetraedro di 2ª specie: e per quel che s'è già detto, le altre tre facce del tetraedro determineranno sul piano fondamentale altre tre rette di Pascal. Da questa considerazione risulta che i 60 piani Π coordinati ad un piano fondamentale, si separano in 15 quaterne che costituiscono altrettanti tetraedri di 2ª specie: questi tetraedri corrispondono uno per uno ai 15

punti P coordinati al piano fondamentale, perchè i quindici tetraedri coniugati sono quelli che hanno per faccia comune il piano fondamentale (21).

26. Abbiamo veduto che ad un piano fondamentale sono coordinati un gruppo di 60 piani Π e un gruppo di 60 rette K (16). I piani e le rette si corrispondono uno ad una: infatti preso un piano Π esso determina un tetraedro di 2ª specie di cui è faccia; a questo tetraedro ne è coniugato uno di 1ª specie il quale ha per una faccia il piano fondamentale: ora i due vertici che sono, nei due tetraedri, rispettivamente opposti alle due facce suddette, determinano, congiunti, una retta K. Viceversa da un retta K si giunge ad un piano Π. Se ne deduce, segando col piano fondamentale, che nell'esagrammo le rette di Pascal e i punti di Kirkman si corrispondono una ad uno.

27. Se si prende (25) un punto P della 3ª categoria rispetto al piano 0, gli altri tre vertici del tetraedro di 1ª specie che esso determina sono situati sul piano 0. Ne risulta che se uno dei vertici di un tetraedro di 1ª specie è un punto P della 2ª categoria (rispetto al piano 0) anche gli altri tre lo saranno. Vale a dire: i centottanta punti P di 2ª categoria rispetto ad un piano fondamentale, sono vertici di 45 tetraedri di 1ª specie.

28. Riprendiamo lo studio dei punti P situati sopra un piano Π. Al n. 14 abbiamo veduto che sopra un piano Π vi sono tre rette R e quattro rette di Pascal le quali si incontrano in 12 punti P: così (14) nel piano Π

$$\binom{12}{34}\binom{35}{26}\binom{15}{46}$$

vi sono quattro rette di Pascal date dai piani fondamentali

0, 23, 14, 56

e su di esse i punti P seguenti

0 . 12 . 34	0 . 35 . 26	0 . 15 . 46
23 . 12 . 34	23 . 35 . 26	23 . 15 . 46
14 . 12 . 34	14 . 35 . 26	14 . 15 . 46
56 . 12 . 34	56 . 35 . 26	56 . 15 . 46 .

Osservando questo quadro si scorge subito che fra questi punti ve ne sono tre coordinati al piano 0 (8) e sono

(α) 56 . 12 . 34, 14 . 35 . 26, 23 . 15 . 46.

Se ne conclude che i dodici punti P situati sulle rette di Pascal di un piano Π sono tre a tre coordinati ai quattro piani fondamentali che determinano quelle rette di Pascal.

Consideriamo i 3 punti (α): oltre le tre rette R del piano P, escono da essi le sei rette R qui sotto scritte

$$\binom{12}{56}\quad\binom{14}{35}\quad\binom{23}{15}$$
$$\binom{36}{56}\quad\binom{14}{26}\quad\binom{23}{46}$$

dove quelle poste su d'una stessa colonna escono dallo stesso punto P. Ora le tre rette della prima linea, si incontrano due a due nei punti fondamentali

$$\binom{124}{356},\binom{123}{456},\binom{145}{236}$$

e sono perciò in un medesimo piano Π: e così si dica delle 3 della 2ª linea. Dimodochè i tre punti (α) sono situati in linea retta e per questa retta passano tre piani Π. Queste nuove rette le diremo rette S. Si può dunque concludere che i dodici punti P situati sulle rette di Pascal di un piano Π sono allineati tre a tre sopra a quattro rette S: per ogni retta S passano tre piani Π.

Perciò siccome i piani Π sono 240, il numero delle rette S è $\frac{240 \,.\, 4}{3} = 320$.

29. Siccome sopra una retta S vi sono tre punti P e per essa passano tre piani Π, le ricerche correlative a quelle del numero precedente condurrebbero ancora alle medesime rette S. Quindi si può enunciare che i dodici piani Π passanti per le rette K che escono da un punto P, sono tre a tre coordinati ai quattro punti fondamentali che determinano quelle rette K: i tre piani di una terna passano per una medesima retta S: per ogni punto P passano quattro rette S.

30. Si prendano ad arbitrio un punto fondamentale e un piano fondamentale non passante pel punto: per es. il piano 0 e il punto $\binom{123}{456}$. Tolti i piani fondamentali passanti pel punto scelto, rimangono i 9 piani fondamentali seguenti

$$14,\ 15,\ 16,\ 24,\ 25,\ 26,\ 34,\ 35,\ 36$$

coi quali si possono formare soltanto 6 punti P coordinati al piano 0 e sono i seguenti

$$(\beta)\qquad \begin{matrix} 14\,.\,25\,.\,36, & 15\,.\,26\,.\,34, & 16\,.\,24\,.\,35 \\ 14\,.\,26\,.\,35, & 15\,.\,24\,.\,36, & 16\,.\,25\,.\,34 \end{matrix}$$

disposti sopra due linee in modo che su ciascuna linea vi sono tutti nove i punti fondamentali.

Analogamente, tolti i punti fondamentali situati sul piano 0, rimangono i nove punti fondamentali seguenti

$$\binom{124}{356},\ \binom{125}{346},\ \binom{126}{345},\ \binom{134}{256},\ \binom{135}{246},\ \binom{136}{245},\ \binom{145}{236},\ \binom{146}{235},\ \binom{156}{234}$$

coi quali si possono formare soltanto sei piani Π coordinati al punto $\binom{123}{456}$: e sono i seguenti disposti in due linee in modo che pei tre piani d'una stessa linea siano adoperati tutti nove i punti fondamentali:

$$(\gamma)\qquad \begin{matrix} \binom{14}{25}\binom{26}{34}\binom{16}{35}, & \binom{14}{36}\binom{15}{26}\binom{24}{35}, & \binom{25}{36}\binom{15}{34}\binom{16}{24} \\ \binom{14}{26}\binom{15}{36}\binom{25}{34}, & \binom{14}{35}\binom{24}{36}\binom{16}{25}, & \binom{26}{35}\binom{15}{24}\binom{16}{34} \end{matrix}$$

Ora i punti P della 1ª terna (β) sono contenuti nei piani Π della 1ª terna (γ) e i punti P della 2ª terna (β) sono situati sui piani Π della 2ª terna (γ). Perciò le due terne (γ) sono situate sopra due rette S le quali sono quelle stesse che vengono determinate dalle due terne (γ).

Così un punto ed un piano fondamentale determinano una coppia di rette S: e siccome si possono fare $16 \times 10 = 160$ coppie di un punto ed un piano fondamentale (non passante pel punto) si ritrovano così tutte le $160 \times 2 = 320$ rette S.

Dunque le rette S sono coniugate due a due: ogni coppia

di rette S coniugate è coordinata ad un punto e ad un piano fondamentale.

31. Il piano 0 è faccia di 15 tetraedri di 1ª specie (21): i 15 tetraedri coniugati di 2ª specie hanno i loro vertici nei 10 punti fondamentali che sono fuori del piano 0: ognuno di questi punti è vertice di sei di tali tetraedri. Dunque il piano 0 e il punto $\binom{123}{456}$ del numero precedente appartengono rispettivamente a sei coppie di tetraedri coniugati. Ora si può verificare direttamente che i sei piani Π opposti nei sei tetraedri di 1ª specie al piano 0 sono i piani (γ) e i sei punti P opposti nei sei tetraedri coniugati di 2ª specie al punto $\binom{123}{456}$ sono i punti (β).

Ne segue la proprietà che *presi due tetraedri coniugati, le facce del tetraedro di 1ª specie e i vertici di quello di 2ª specie determinano* (come al n. prec.) *16 coppie di rette S le quali sono precisamente quelle situate sulle facce del tetraedro di 2ª specie e quelle passanti pei vertici del tetraedro di 1ª specie*: precisamente alle quattro rette S situate sopra una faccia del tetraedro di 2ª specie sono coniugate quattro rette S passanti rispettivamente pei vertici del tetraedro di 1ª specie, e alle quattro rette S passanti per un vertice del tetraedro di 1ª specie sono coniugate quattro rette S situate rispettivamente sulle facce del tetraedro di 2ª specie.

32. Sia P_p un vertice di un tetraedro di 1ª specie e sia p la faccia opposta (piano fondamentale): sopra ogni faccia del tetraedro coniugato (di 2ª specie) vi sono tre punti P coordinati al piano p e allineati sopra una retta S che è coniugata ad una retta S passante per P_p. Ma d'altra parte, fra i 24 punti P d'intersezione degli spigoli (rette R) del tetraedro di 2ª specie colle facce del tetraedro di 1ª specie ve ne saranno soltanto sei coordinati al piano p, poichè un punto P non è nello stesso tempo coordinato a più di un piano fondamentale. Dunque questi sei punti P situati uno sopra ogni spigolo del tetraedro di 2ª specie, sono punti comuni a quattro rette S, situate una per faccia, prese due a due. In altri termini *se quattro rette S passano per un medesimo punto P, le quattro rette S coniugate sono situate in un medesimo piano*. Lo diremo un piano Σ.

Le 16 rette S situate sulle facce di un tetraedro di 2ª specie, giacciono quattro a quattro sopra quattro piani Σ.

I piani Σ corrispondono uno per uno ai punti P: essi sono 240.

33. Colle considerazioni correlative si dimostrano anche le proprietà seguenti:

Se quattro rette S sono situate in un piano Π, le quattro rette S coniugate concorrono in uno stesso punto: lo chiameremo un punto Θ.

Le 16 rette S che passano pei vertici di un tetraedro di 1ª specie concorrono quattro a quattro in quattro punti Θ.

I punti Θ corrispondono uno ad uno ai piani Π: essi sono 240.

34. *Ogni retta S contiene tre punti Θ: e per ognuna di esse passano tre piani Σ.*

Si potrebbero anche dimostrare i due enunciati seguenti:

Ogni piano Π contiene 6 punti Θ che sono i vertici del quadrilatero formato colle rette S.

Per ogni punto P passano sei piani Σ che sono le facce del quadrispigolo delle rette S.

35. Torniamo alle considerazioni del n. 28. Abbiamo veduto che sopra un piano Π vi sono quattro rette S ciascuna delle quali contiene tre punti P. Una retta S incontra tre delle quattro rette di Pascal del piano Π in punto P e la quarta in un punto che diremo punto di Steiner per la ragione che fra poco vedremo. Sopra ogni retta di Pascal esiste un punto di Steiner. Viceversa quando si hanno tre piani Π passanti per una retta S, essi sono coordinati ad un medesimo piano fondamentale il quale incontra quei tre piani in rette di Pascal e la retta S in un punto di Steiner: dimodochè per ogni punto di Steiner passano tre rette di Pascal.

I punti di Steiner sono 320, poichè le rette di Pascal sono 960.

Sopra ogni retta S vi è un punto di Steiner e viceversa per un punto di Steiner passa una retta S.

36. Sopra un piano Π si hanno quattro rette S e quattro rette di Pascal, vale a dire due luoghi del 4° ordine i quali si incontrano in 16 punti che sono dodici punti P e quattro punti di Steiner: ora i primi dodici punti sono situati quattro a quattro su tre rette R, vale a dire giacciono sopra un luogo del 3° ordine: dunque gli altri quattro debbono essere sopra una retta. Cioè: i quattro punti di Steiner che giacciono sopra un piano Π, sono sopra una stessa retta. La diremo una *retta J*.

Sopra ogni piano Π v'è una retta J: per ogni retta J passa un piano Π: le rette J sono 240.

Le rette J corrispondono una per una ai piani Π e quindi anche ai punti Θ.

Siccome per ogni retta S passano tre piani Π ciascuno dei quali contiene una retta J, ne segue che per un punto di Steiner passano tre rette J.

37. Correlativamente dato un punto P, passano per esso quattro rette K e quattro rette S: i piani determinati da una retta S e rispettivamente dalle rette K, sono tre piani Π ed un nuovo piano che diremo piano C. Per ogni retta K passa un piano C e inversamente sopra un piano C vi sono tre rette K, perchè dati tre punti P situati sopra una retta S, essi sono coordinati ad uno stesso punto fondamentale il quale coi punti P determina tre rette K e colle rette S determina un piano C.

I piani C sono 320: per ogni retta S passa un piano C e viceversa sopra ogni piano C vi è una retta S.

E colle considerazioni reciproche di quelle del numero precedente si dimostrerebbe anche che i quattro piani C passanti per un punto P, si tagliano in una medesima retta: la chiameremo una *retta I*.

Per ogni punto P passa una retta I: sopra ogni retta I vi è un punto P: le rette I sono 240.

Le rette I corrispondono una per una ai punti P e quindi anche ai piani Σ.

Sopra un piano C vi sono tre rette I.

38. Siccome le rette S sono coniugate due a due ne segue che anche i punti di Steiner sono coniugati due a due: e così pure i piani C. Chiamando coniugati due punti di Steiner quando sono situati sopra due rette S coniugate e chiamando coniugati i piani C passanti per queste rette.

39. Un piano Σ (32) contiene quattro rette S che sono le intersezioni del piano medesimo colle facce d'un tetraedro di 2ª specie: su ciascuna retta S vi è un punto di Steiner: questi quattro punti di Steiner sono dati da quattro rette di Pascal che si ottengono segando le facce del tetraedro suddetto col piano fondamentale che nel tetraedro coniugato di 1ª specie è opposto al vertice P corrispondente (32) al piano Σ che si considera. Dunque i quattro punti di Steiner situati sopra un piano Σ sono in una stessa retta: la chiameremo retta di Steiner per la ragione che or ora vedremo. Una retta di Steiner è intersezione di un piano fondamentale con un certo piano Σ. Le rette di Steiner sono tante quanti i piani Σ cioè 240.

Quattro punti di Steiner situati sopra una retta J hanno i loro coniugati sopra una retta di Steiner.

40. Correlativamente si avrebbe che i quattro piani C passanti per un punto Θ si segano secondo una medesima retta che contiene un punto fondamentale: ogni piano C contiene tre di queste rette.

41. Non sarà ora difficile d'esaminare come si comportino tutti i nuovi elementi qui sopra introdotti, rispetto ad uno dei piani fondamentali: ne dedurremo nuove proprietà dell'esagrammo di Pascal.

In primo luogo, rammentiamo che sopra un piano Π vi sono sei rette a e chiamiamo punti α, i punti comuni a queste rette e alle rette S del piano medesimo: allora si vede subito che una retta S è incontrata da un piano fondamentale o in un punto P o in un punto di Steiner o in un punto α. Ciò posto è facile riconoscere che le rette S, rispetto ad un piano fondamentale, si distribuiscono nel modo seguente:

1° Il piano fondamentale e rispettivamenti i 10 punti fondamentali fuori di esso determinano (30) dieci coppie coniugate di rette S le quali incontrano il piano fondamentale in punti di Steiner.

2° Per ognuno dei 45 punti P situati sul piano fondamentale passano quattro rette S, si hanno così $45 \cdot 4 = 180$ rette S.

3° Le rimanenti 120 rette S incontrano il piano fondamentale in punti α: per ciascuna di esse passano tre piani Π della 2ª categoria e sopra ognuna sono situati tre punti P della 3ª categoria.

Da ciò si deducono le seguenti proprietà:

Nell'esagrammo le rette di Pascal concorrono tre a tre in venti punti di Steiner coniugati due a due.

Le 90 rette a concorrono tre a tre in 120 punti α: sopra ogni retta a vi sono quattro punti α.

42. Si prenda un punto fondamentale del piano 0 per es. il punto 6 e si prenda un piano fondamentale per es. il piano 24. se si ripete il procedimento tenuto al n. 30,

si trova che le due rette S che sono determinate da quel punto e da quel piano, sono quelle che contengono le seguenti terne di piani Π

$$\binom{12}{13}\binom{14}{15}\binom{23}{45},\quad \binom{31}{34}\binom{32}{35}\binom{14}{25},\quad \binom{51}{52}\binom{53}{54}\binom{12}{34}$$
$$\binom{12}{15}\binom{13}{14}\binom{25}{34},\quad \binom{31}{32}\binom{34}{35}\binom{12}{45},\quad \binom{51}{54}\binom{52}{53}\binom{14}{23}.$$

Ora questi 6 piani segano tutti il piano 0 secondo rette a. Ne segue che *i 120 punti α sono coniugati due a due e perciò si separano in 60 coppie: queste si dividono in 6 gruppi di 10 coppie ciascuno, ed ogni gruppo è coordinato ad uno dei punti fondamentali del piano.*

Esaminando l'esempio portato si riconosce anche che il gruppo di punti α coordinato ad un punto fondamentale si forma colle rette a alla cui costruzione non ha concorso il punto fondamentale di cui si tratta (13).

43. I piani Σ essendo coordinati uno ad uno ai punti P, si divideranno, rispetto al piano 0, in tre categorie come i punti P medesimi: per vedere la natura delle loro rette d'intersezione col piano fondamentale, consideriamo dapprima un determinato piano Σ: esso contiene quattro rette S che s'incontrano due a due in punti P (32). Le diagonali di questo quadrilatero sono tracce sul piano Σ di tre piani fondamentali e precisamente di quelli che concorrono nel punto P corrispondente al piano dato. Inoltre siccome per ogni punto P passano tre piani fondamentali, per ciascun vertice del quadrilatero delle rette S, passeranno altri due piani fondamentali: e questi incontreranno le rette S nel punto P e in due punti α (41). Infine vi è un piano fondamentale, come abbiamo veduto (39), che incontra il piano Σ in una retta di Steiner. Quindi le retta d'intersezione del piano Σ coi piani fondamentali, sono: dodici rette ciascuna delle quali contiene un punto P e due punti α; le chiameremo *rette* β: tre rette che contengono ognuna due punti P; le diremo *rette* δ; una retta di Steiner.

Ciò posto, rispetto al piano 0, i piani Σ si distribuiscono così:

1° 45 piani Σ corrispondenti ai 45 piani P situati sul piano 0: essi incontrano questo piano secondo 45 rette δ ciascuna delle quali contiene due punti P: sono precisamente i lati dei triangoli diagonali dei quadrangoli che si formano prendendo i punti fondamentali 4 a 4.

2° 15 piani Σ corrispondenti ai 15 punti P coordinati al piano 0: lo incontrano secondo rette di Steiner ciascuna delle quali (per definizione) contiene quattro punti di Steiner.

3° 180 piani Σ corrispondenti ai punti P della 3ª categoria: essi incontrano il piano 0 secondo rette β.

44. Si possono dunque enunciare le seguenti proprietà:

Nell'esagrammo i punti di Steiner sono situati quattro a quattro sopra quindici rette di Steiner.

Esistono 180 rette β ciascuna delle quali contiene due punti α dell'esagrammo e un punto P: per ogni punto α ne passano tre e per ogni punto P ne passano quattro.

45. Siccome i punti Θ corrispondono uno per uno ai piani Π, la loro divisione

in categorie rispetto al piano 0, risulta naturalmente appoggiandosi a quella dei piani Π.

46. Consideriamo un piano C. Esso contiene un punto fondamentale (37) dal quale escono tre rette K, ciascuna delle quali contiene un punto P, un punto di Kirkman e 6 punti O (18). I tre punti P sono allineati in una retta S la quale contiene 6 punti α (41). I tre punti di Kirkman sono le intersezioni delle tre rette K con un piano fondamentale e precisamente con quel piano fondamentale che insieme al punto fondamentale del piano C determina la retta S e la sua coniugata: perciò i tre punti di Kirkman sono allineati in una retta che diremo *retta di Cayley*.

Altri 6 piani fondamentali passano pel punto fondamentale del piano C e l'incontrano secondo le rette che congiungono questo punto ai punti α della retta S: le chiameremo *rette* μ. Gli altri nove piani fondamentali passano naturalmente tre a tre pei punti P contenuti nel piano C e incontrano le tre rette K precisamente nei 18 punti O che esse contengono: le tracce di questi piani sul piano C le chiameremo *rette* ν.

Ciò posto ecco come si distribuiscono i piani C considerati per rispetto al piano 0:

1° Un punto fondamentale insieme a ciascuno dei 10 piani fondamentali non passanti per esso, determina 10 coppie di rette S le quali sono congiunte al punto fondamentale da 20 piani C. Dunque pei 6 punti fondamentali del piano 0 passano 120 piani C. Siccome le rette K uscenti da questi punti fondamentali contengono i 180 punti P della 3ª categoria, così quei 120 piani C sono quelli che contengono le rette S che incontrano il piano 0 nei 120 punti α: essi incontrano il piano 0 in rette μ.

2° I 20 piani C passanti per le 20 rette S che incontrano il piano 0 in punti di Steiner hanno per tracce sul piano 0 altrettante rette di Cayley.

3° i rimanenti 180 piani C incontrano il piano 0 in rette ν.

47. Risultano da ciò le seguenti proprietà:

Nell'esagrammo i 60 punti di Kirkman sono distribuiti tre a tre sopra 20 rette di Cayley, ciascuna delle quali contiene inoltre un punto di Steiner.

I 360 punti O si separano in 180 coppie ciascuna delle quali è allineata con un punto P: si hanno così 180 rette ν le quali passano quattro a quattro pei punti P: esse sono coniugate due a due.

48. Per un punto P coordinato al piano 0 passano quattro piani C che determinano su di esso quattro rette di Cayley: per un punto P della 3ª categoria, passano invece due piani C che determinano due rette μ e due piani C che determinano due rette ν.

Ciò posto la proprietà che i piani C passano quattro a quattro per le rette I, fornisce i seguenti enunciati:

Nell'esagrammo le 20 rette di Cayley concorrono quattro a quattro in quindici punti (punti di Salmon) i quali corrispondono uno ad uno alle rette di Steiner (37).

Si congiunga ogni punto fondamentale dell'esagrammo con i 20 punti α ad esso coordinati (42): si hanno così 120 rette μ (46). Ora vi sono 180 punti del piano in ciascuno dei quali concorrono due rette μ e due rette ν: questi punti corrispondono uno per uno alle 180 rette β (37).

49. Consideriamo un piano Π dei 60 coordinati al piano 0: esso incontra questo piano secondo una retta di Pascal e contiene quattro rette S le quali segnano su questa retta il punto di Steiner e i tre punti P che essa contiene. Le quattro rette S coniugate concorrono in un punto Θ: esse incontrano ancora (42) il piano 0 in un punto di Steiner e in tre punti P. I quattro piani C passanti rispettivamente per queste rette si tagliano in una medesima retta (40). Se ne deduce sul piano dell'esagrammo la proprietà che sopra ogni retta di Cayley esistono tre punti in ognuno dei quali concorrono tre rette ν: di questi ve ne sono 60 e ogni retta ν ne contiene uno; essi corrispondono uno per uno alle rette di Pascal.

50. Consideriamo un piano Π il quale incontri il piano 0 secondo una retta R: le quattro rette S su di esso contenute incontrano il piano 0 in quattro punti P: le quattro rette S coniugate, le quali concorrono in un punto Θ, incontreranno il piano 0 anche in quattro punti P: perciò i quattro piani C passanti rispettivamente per queste rette avranno per tracce quattro rette ν. Ciò serve a stabilire la seguente proprietà: le rette ν dell'esagrammo concorrono quattro a quattro in 90 punti i quali sono situati due a due sulle rette medesime.

51. Esponiamo altre proprietà della figura stereometrica che abbiamo studiato sin qui, le quali rendendo evidente il confronto di cui si è fatto cenno al n. 8, ne faranno meglio conoscere la natura.

Esaminiamo i 15 punti P coordinati al piano 0. Se ne prendano due alla cui determinazione occorrano 6 piani fondamentali per es. i punti

$$12.34.56$$
$$13.25.46:$$

allora è facile vedere che i nove punti fondamentali rimanenti

$$14.15.16.23.24.26.35.36.45$$

si separano in un solo modo in tre terne ciascuna delle quali dia un punto P: questi punti sono

$$14.26.35$$
$$15.24.36$$
$$16.23.45.$$

Si ottiene così un pentagono gobbo di punti P in modo che per avere i cinque vertici del pentagono bisogna adoperare tutti quindici i piani fondamentali (rimane eccettuato il piano 0). I quindici punti P coordinati al piano 0 sono situati, come già sappiamo, tre a tre sopra 20 rette S e sei a sei sopra 15 piani Σ. Ora gli spigoli del pentagono gobbo sono precisamente rette S e le sue facce sono piani Σ.

Conservando il primo dei due punti P da cui siamo partiti, vale a dire il punto 12 . 34 . 56 e cambiando l'altro, non si ottiene che un altro pentagono gobbo, di cui gli altri quattro vertici sono

14 . 26 . 35
13 . 25 . 46
15 . 24 . 36
16 . 23 . 45 .

Perciò uno dei 15 punti P appartiene ai due pentagoni gobbi: e però si potranno formare $\frac{2 \times 15}{5} = 6$ di tali pentagoni. Riassumendo: *coi quindici punti P coordinati ad un piano fondamentale si possono formare 6 pentagoni gobbi ciascuno dei quali ha per spigoli 10 rette S e per facce dieci piani Σ: ogni punto P appartiene a due di questi pentagoni: ogni retta S è spigolo di tre pentagoni.*

52. Abbiamo veduto (48) che i venti piani C coordinati ad un piano fondamentale passano quattro a quattro per 15 rette I. Un piano C contiene una retta S sulla quale vi sono tre punti P e per ciascuno di questi passa una retta I contenuta in quel piano: dimodochè due rette I uscenti da due punti P appartenenti ad una stessa retta S, sono in un medesimo piano C.

Se ora si considerano cinque punti P vertici di un pentagono gobbo, da essi partono rispettivamente cinque rette I le quali saranno situate due a due nei dieci piani C passanti rispettivamente per gli spigoli del pentagono: dunque quelle rette concorrono in un medesimo punto e si può enunciare il teorema: *le cinque rette I uscenti dai punti P vertici di un pentagono gobbo, concorrono in un medesimo punto.*

I sei pentagoni danno sei di questi punti e ne segue l'interessantissima proprietà che *le quindici rette I ed i venti piani C coordinati ad un piano fondamentale, sono gli spigoli e le facce di un esagono gobbo completo.*

Si hanno 16 esagoni gobbi coordinati rispettivamente ai 16 piani fondamentali.

53. I ragionamenti correlativi a quelli dei due numeri precedenti conducono a stabilire le seguenti proprietà: *ad un punto fondamentale sono coordinati 15 piani Π che passano tre a tre per 20 rette S le quali concorrono quattro a quattro in quindici punti Θ: ora, con questi elementi si possono formare sei pentaedri ciascuno dei quali abbia per facce piani Π, per spigoli rette S e per vertici punti Θ. Ogni piano Π appartiene a due pentaedri; ogni retta S a tre.*

Sopra ogni retta S vi è un punto di Steiner e questi 20 punti di Steiner sono situati quattro a quattro sopra 15 rette J situate una su ciascuno dei 15 piani Π. Le cinque rette J situate sui piani Π facce di un pentaedro, si

incontrano due a due in dieci punti di Steiner e perciò sono in un medesimo piano.

Ognuno dei 6 pentaedri dà uno di questi piani: dimodochè le 15 rette J e i 20 punti di Steiner sono spigoli e vertici di un esaedro completo.

Vi sono 16 esaedri coordinati rispettivamente ai 16 punti fondamentali.

54. Queste proprietà mostrano la perfetta identità fra i 15 piani Π coordinati ad un punto fondamentale ed i 15 piani di Plücker nelle ricerche del prof. Cremona ([1]).

I nostri 60 punti P (coordinati ad un punto fondamentale) sono i punti di Kirkman del prof. Cremona: le nostre 60 rette di Pascal conservano la medesima denominazione e così i punti di Steiner: le nostre rette J sono le rette di Steiner del lavoro citato: le nostre rette S sono le rette di Cayley: i nostri punti Θ sono i punti di Salmon.

55. Però fra la nostra figura e quella ricavata dalla superficie del 3° ordine esiste una differenza notevole: mentre in quest'ultima le tre rette di Pascal che concorrono in un punto di Steiner formano un triedro, e così quelle che determinano il punto di Steiner coniugato, nel nostro caso invece le sei rette di Pascal che determinano due punti di Steiner coniugati, sono situate in uno stesso piano; e vi sono dieci di questi piani, che sono i dieci piani fondamentali non passanti pel punto fondamentale al quale è coordinata tutta la figura.

Questo fatto si verifica precisamante in quello fra gl'infiniti sistemi dedotti da un esaedro nel lavoro del prof. Cremona, che corrisponde al valore $k=2$ del parametro variabile. Ci risparmiamo più minuti confronti che possono essere fatti senza difficoltà dal lettore.

56. Ci rimane da accennare alcune proprietà degli elementi che abbiamo studiato, in relazione ai sei complessi lineari rispetto ai quali si corrispondono fra loro i punti ed i piani fondamentali.

Indicheremo coi numeri I, II, III, IV, V, VI i sei complessi, in modo che il polo del piano 0 rispetto al complesso I sia il punto 1, il polo dello stesso piano rispetto al complesso II sia il punto 2, ecc.

Allora i piani polari del punto 1 sono ordinatamente 0, 12, 13, 14, 15, 16, quelli del punto 2 sono 21, 0, 23, 24, 25, 26, ecc: i piani polari del punto $\binom{123}{456}$ sono 23, 31, 12, 56, 46, 45; i poli del piano 12 sono 1, 2, $\binom{123}{456}$, $\binom{124}{356}$, $\binom{125}{346}$, $\binom{126}{345}$: ecc.

In questo modo ad ogni punto, retta o piano della figura che abbiamo studiato, corrisponderanno in generale sei piani, sei rette o sei punti che si determineranno con tutta facilità. E non sarà difficile il verificare le seguenti proprietà.

Delle sei rette R corrispondenti ad una retta R, due coincidono colla retta stessa e le altre quattro sono quelle della quaterna coniugata a quella alla quale appartiene la retta data (10).

[1] Cremona, *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal.* Atti della Reale Accademia dei Lincei, serie 3ª vol. I.

Le otto rette R di due quaterne coniugate appartengono ad una stessa congruenza lineare comune a due dei sei complessi fondamentali: così le 15 coppie di quaterne coniugate di rette R sono coordinate alle 15 congruenze determinate dai complessi fondamentali presi due a due.

I sei punti P corrispondenti ad un piano Π sono i punti comuni alle rette R e alle rette *a* contenute nel piano medesimo. Questi sei punti sono in una conica ([1]): perciò, per una nota proprietà delle coniche, le sei rette *a* situate in un piano Π toccano una stessa conica.

Analogamente i sei piani Π corrispondenti ad un punto P sono quelli determinati dalle rette R e dalle rette *a* passanti per quel punto. Le sei rette *a* passanti per un punto P sono generatrici di un cono di 2° grado.

I piani Π e i punti P si possono separare in 15 gruppi ciascuno costituito da 16 punti e 16 piani che formano una figura analoga a quella dei punti e dei piani fondamentali. Le quattro facce d'un tetraedro di 2ª specie, hanno la proprietà di avere rispetto ai sei complessi soltanto 12 poli distinti che sono situati due per ciascuno spigolo: questi 12 punti appartengono ad una stessa superficie del 2° ordine.

I quattro vertici di un tetraedro di 1ª specie hanno soltanto 12 piani polari distinti i quali passano due a due per gli spigoli del tetraedro: questi dodici piani toccano una stessa quadrica.

57. Sopra un piano Σ vi sono 18 punti Θ: dodici di questi sono tre a tre sulle quattro rette S: gli altri sei sono i poli del piano rispetto ai sei complessi.

Per un punto Θ passano 18 piani Σ: dodici di questi s'incontrano tre a tre nelle quattro rette S: gli altri sei sono i piani polari del punto rispetto ai sei complessi.

58. Sopra ogni piano C vi sono sette punti di Steiner: uno è situato sulla retta S contenuta nel piano: gli altri sei sono i poli del piano.

Per ogni punto di Steiner passano sette piani C: uno contiene la retta S che esce da quel punto: gli altri sei sono i piani polari del punto stesso.

59. La figura dei 15 punti P, delle 20 rette S e dei 15 piani Σ coordinati ad un piano fondamentale, si può considerare sotto un altro punto di vista che la mette maggiormente in luce.

(1) Klein, l. c.

Preso un punto P, che diremo P′, per esso passano quattro rette S: le quattro rette coniugate giacciono in un piano Σ′ dove s' incontrano due a due in sei punti P. Gli altri 8 punti P sono situati due a due sulle rette S passanti per P′ e perciò formano due tetraedri prospettivi, il centro di prospettiva essendo P′: e si vede subito che il piano di prospettiva è Σ′.

Viceversa, dati due tetraedri prospettivi, se si considerano i loro 8 vertici, il centro di prospettiva e i 6 punti d'incontro degli spigoli corrispondenti, da un lato: e da un altro lato si considerano le 8 facce dei tetraedri, il piano di prospettiva e 6 piani delle coppie di spigoli corrispondenti: e ancora si considerano i 12 spigoli dei due tetraedri, le quattro rette determinate dalle coppie di vertici corrispondenti e le quattro rette determinate dalle coppie di facce corrispondenti; si ottiene un sistema di 15 punti, 15 piani e 20 rette, affatto analogo a quello dei punti P, piani Σ e rette S.

Da queste osservazioni e dal teorema che due tetraedri prospettivi sono polari reciproci rispetto ad una determinata superficie del 2° ordine, si deduce la proprietà seguente:

I quindici punti P e i quindici piani Σ, coordinati ad uno stesso piano fondamentale, sono polari reciproci rispetto ad una quadrica: e le dieci coppie di rette S coniugate, sono reciproche rispetto alla quadrica medesima.

60. Correlativamente, si dimostrerebbe la medesima proprietà pei piani Π, le rette S e i punti Θ coordinati ad un medesimo punto fondamentale.

Rettificazione delle formule dalle quali viene rappresentata la teorica fisico-matematica del condensatore voltaico.

Memoria prima del Socio P. VOLPICELLI

letta nella seduta del 6 maggio 1877.

§ 1.

In quella guisa che sempre più studiando il fenomeno della combustione, si è sempre più fatta progredire la chimica razionale; similmente sempre più studiando il condensatore cioè l'accumulatore della elettricità, si è venuto e si verrà in chiaro maggiormente del come agisce la influenza elettrica nei fenomeni elettrostatici, dei quali essa è sempre indivisibile compagna.

Incominciamo dal considerare il caso più semplice di questo istrumento, vale a dire il caso nel quale uno solo dei suoi due piattelli P, Q, il primo dei quali, che chiameremo *collettore,* comunichi con una origine inesausta e costante di elettricità; mentre l'altro piattello Q, che chiameremo *accumulante* od *indotto,* comunichi con un conduttore sensibilmente nello stato elettrico neutrale. Ciò per maggior brevità, sarà parecchie volte riferito, dicendo che il piattello stesso comunica col suolo, ovvero anche dicendo che il medesimo non è isolato. Le nuove denominazioni dei due piattelli P, Q del così detto condensatore di Volta, sono adottate da noi per evitare l'idea della elettrica condensazione, la quale non è un concetto in elettrostatica bastantemente chiaro e ben definito; quindi stabiliamo i seguenti simboli, coi quali chiamiamo:

γ_1 la carica comunicata al piattello collettore P, da una sorgente di elettricità inesausta e costante;

v_1 la parte di γ_1 da considerare vincolata, totale o parziale;

c_1 l'altra parte della carica stessa, che deve considerarsi assolutamente libera, e sarebbe quella medesima ricevuta dal piattello collettore P, quando esso fosse posto in comunicazione colla riferita sorgente di elettricità, vale a dire da solo, cioè senza l'accoppiamento dell'altro piattello Q tanto isolato, quanto non isolato;

γ_2 la carica indotta di prima specie nel piattello accumulante, ovvero indotto Q, posto in comunicazione con un conduttore sensibilmente neutrale;

m un numero minore della unità, che rappresenta il rapporto elettrostatico, cioè quel rapporto, che si ottiene dividendo la indotta di prima specie per la relativa inducente; definizione che non deve mai dimenticarsi nei ragionamenti che ora esporremo, nei quali queste denominazioni saranno sempre mantenute. Intanto passiamo ad esporre, con un opportuno sviluppo, *quattro* diversi ragionamenti, adottati dai varî autori, per

assegnare i valori delle cariche γ_1 e γ_2, facendo ad ognuno dei ragionamenti stessi le necessarie osservazioni; quindi passeremo alla rettificazione delle formule comunemente accettate.

§ 2.

Pel *primo* ragionamento viene stabilita la

(1) $$\gamma_1 = v_1 + c_1 \quad ,$$

ed anche i due seguenti rapporti elettrostatici :

(2) $$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -m\,, \qquad \frac{v_1}{\gamma_2} = -m\,;$$

dal primo dei quali abbiamo:

(2 bis) $$\gamma_2 = -m\gamma_1\,,$$

e dall' altro :

(3) $$v_1 = -m\gamma_2.$$

La (1) significa che la carica γ_1 eguaglia la somma della sua parte vincolata v_1, e della sua parte libera c_1; la (2 bis) significa che la indotta di prima specie γ_2 è minore della carica γ_1, ed è ad essa di segno contrario; lo che dalla sperienza è dimostrato, scaricando fra loro i due piattelli, e trovando essere della natura di γ_1 la risultante di questa scarica, ossia neutralizzazione. In quanto alla (3), questa *suppone* che facendo comunicare il piattello collettore od inducente P con un corpo conduttore e sensibilmente neutro, mentre il piattello accumulante ovvero indotto Q resta isolato, la sola carica libera c_1 si dissipa, ovvero perdesi dal collettore P, conservando esso *tutta intera* la carica v_1 sul medesimo vincolata, come prima era per parte della γ_2, la quale ora è divenuta libera e perciò inducente. Quindi chiamando p la perdita fatta dall'indicato piattello P, per la sua comunicazione col suolo, si avrebbe :

(4) $$p = c_1.$$

Però questa falsa *supposizione* non fu sino ad ora giustificata dalla sperienza, e, come vedremo in seguito, la supposizione stessa viene in vece contraddetta sia dalla teorica, sia dai risultamenti sperimentali.

Dalle (1), (2 bis), (3) eliminando v_1, risultano le (5) che sieguono:

(5) $$\gamma_1 = \frac{1}{1-m^2}\,c_1\,, \qquad \gamma_2 = -\frac{m}{1-m^2}\,c_1\,;$$

le quali trovano luogo nei completi corsi di fisica, e nei trattati di elettricità, pubblicati dopo il 1816, quando si trattò da Biot questo argomento. Per conseguenza, conforme alla prima delle (5), il coefficente di accumulazione elettrica, secondo la *supposizione* riferita, dovrà essere :

$$\frac{1}{1-m^2}\,,$$

nel quale la m rappresenta il *rapporto elettrostatico* fra la indotta e la inducente. Le

formule (5) in sostanza furono date prima da Epino (V. *Tentamen theoriae electricitatis et magnetismi*. Petropoli 1759, p. 38, lin. 19), e poi da Biot con esposizione migliore (V. *Traité de phys. exp.* Paris 1816, p. 365).

§ 3.

Passando ad esporre il *secondo* ragionamento, col quale taluni giungono pure alle formule (5), facciamo riflettere innanzi tratto, che il medesimo anch' esso è fondato su quei due precedenti rapporti elettrostatici fra l'indotta e la induttrice, che sappiamo essere uguali fra loro, e perciò si rappresentano colla stessa $-m$, come or ora vedremo. Anche in questo *secondo* ragionamento si adotta, non giustificata, la *supposizione* accettata nel *primo;* diversificando però alquanto nel calcolo, e più nelle osservazioni. Per tanto seguendo questo ragionamento, poniamo che il piattello collettore P abbia, per la sua comunicazione con una sorgente inesausta e costante di elettricità, conseguita la carica positiva γ_1. Questa dovrà indurre a distanza, ed a traverso del coibente che separa i due piattelli, una carica $-\gamma_2$ sul piattello accumulante Q *non isolato.* La carica medesima, indotta di prima specie, rimarrà sul piattello stesso vincolata dalla carica primitiva ed inducente, e non potrà comunicarsi punto ad altro corpo per qualunque siasi mezzo. Quindi è chiaro che per le azioni reciproche, ovvero per l'azione e reazione fra le cariche γ_1 e $-\gamma_2$, una parte v_1 dalla carica γ_1 del piattello collettore P, sarà pur essa vincolata dalla $-\gamma_2$; cosicchè il piattello stesso dovrà trovarsi possedere una carica totalmente *libera,* ed espressa da $\gamma_1 - v_1$.

Per conseguenza il piattello medesimo, stando esso in continua comunicazione colla sorgente di elettricità, dovrà continuare a caricarsi. La sua carica libera $\gamma_1 - v_1$, anderà sempre crescendo, fino a tanto che abbia raggiunto la iniziale carica libera e costante c_1. Questa carica è quella che avrebbe acquistato il piattello medesimo P, comunicando esso da solo colla indicata sorgente, cioè senza essere associato al piattello accumulante Q, perciò dovremo finalmente avere:

$$(6) \qquad \gamma_1 - v_1 = c_1,$$

limite superiore della carica libera sul piattello stesso P, che però si raggiunge in un istante.

La carica γ_1 risulta numericamente sempre maggiore dell' altra $-\gamma_2$ indotta di prima specie, prescindendo cioè dal segno. Imperocchè queste due cariche, portate a contatto fra loro, sempre danno un residuo della stessa natura di γ_1. Biot nel seguente modo intende razionalmente dimostrare, che la indotta di prima specie sempre risulta minore della inducente; riflettendo esso cioè, che l'attrazione delle molecole di γ_1 su quelle di $-\gamma_2$ dev'essere a maggiore distanza di quello che sarebbe, se queste due cariche fossero a contatto fra loro, nel qual caso avverrebbe la reciproca e perfetta neutralizzazione fra esse. Ma poichè le molecole di γ_1, sebbene a distanza fra loro, tuttavia neutralizzano perfettamente, cioè rendono del tutto vincolate quelle di $-\gamma_2$, sopprimendo così ogni loro tensione, come se fossero a contatto colle prime; così ragione vuole che queste, cioè che le molecole di γ_1 compensino col maggior numero loro quella minore azione di esse, che si deve alla distanza fra le due cariche indicate.

Per convincersi razionalmente, che la inducente dev'essere, in ogni caso, maggiore della indotta, prescindendo dal segno, chi non trovasse a bastanza rigoroso il riferito

argomento di Biot, noi sostituiamo ad esso il seguente. Ognuno deve ammettere come cosa evidente, non potere l'effetto essere maggiore della causa. Nel caso attuale l'effetto è la indotta di prima specie, cioè la carica $-\gamma_2$, mentre la causa è la inducente γ_1; dunque la indotta γ_2 non potrà mai superare la inducente γ_1, cioè non potrà essere mai nè $\gamma_2 = \gamma_1$, nè $\gamma_2 > \gamma_1$, perciò la indotta di prima specie γ_2, non potrà essere uguale, nè maggiore della γ_1.

In fatti quanto più la inducente avvicinasi alla indotta, ed essa tanto più cresce; però il caso della eguaglianza fra queste due cariche potrà solo aver luogo, quando fra le medesime sia cessata ogni distanza. Ma in tal caso, che appunto è quello del contatto, fra le indicate due elettricità opposte fra loro, deve fra esse verificarsi la neutralizzazione, ove cessa qualunque influenza. Dunque prima di questo contatto, qualunque sia la distanza fra la indotta e la inducente, dovrà la prima essere minore della seconda, perchè la eguaglianza fra esse può solo aver luogo nel contatto dell'una coll'altra.

Sappiamo che fra la indotta $-\gamma_2$ e la inducente γ_1 esiste un *primo* rapporto costante, che noi diciamo elettrostatico; e poichè $\gamma_1 > \gamma_2$, perciò sarà:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -m, \tag{7}$$

essendo m una quantità minore della unità. Inoltre come γ_1 vincola $-\gamma_2$, così riguardando come reagente questa carica, essa dovrà vincolare a traverso dello strato isolante interposto fra i due piattelli, una parte v_1 della carica γ_1; perciò dovremo avere questo *secondo* elettrostatico rapporto:

$$\frac{v_1}{\gamma_2} = -m. \tag{8}$$

Dobbiamo avvertire, che ogni rapporto elettrostatico di questa natura, suppone dover'essere inducente la carica del suo denominatore, ed indotta quella del suo numeratore. Perciò nel caso attuale deve la carica $-\gamma_2$, contenuta nel piattello Q, essere divenuta inducente o reagente, e la v_1, che fa parte di quella contenuta in P, dev'essere tutta vincolata. Però affinchè la carica $-\gamma_2$ divenga inducente, deve il piattello collettore P avere comunicato col suolo, e l'altro Q deve rimanere isolato. Ciò posto, poichè col secondo rapporto elettrostatico, viene ritenuto essere unicamente v_1 la carica vincolata rimasta sul relativo piattello P, per la sua comunicazione col suolo; e poichè fu già stabilito colla (1) essere $\gamma_1 = v_1 + c_1$; così è chiaro, che si ritiene anche in questo *secondo* ragionamento, dover essere la sola c_1 quella carica perduta dal piattello P, quando facciasi esso comunicare col suolo. Ma ciò viene contraddetto, come appresso vedremo, tanto dalla teorica, quanto dalla sperienza, le quali dimostrano dover essere p maggiore di c_1 la perdita fatta da quel piattello P, quando esso cessa di essere isolato comunicando col suolo.

Mediante questo ultimo rapporto (8), si elimini v_1 dalla equazione (6), la quale perciò diverrà:

$$\gamma_1 + m\gamma_2 = c_1.$$

Da questa si elimini γ_2 mediante il primo rapporto (7), e si avrà:

$$\gamma_1 - m^2\gamma_1 = c_1.$$

Sostituendo nel primo rapporto (7) il valore di γ_1, dedotto da questa ultima equazione, avremo:

$$\gamma_2 \frac{(1 - m^2)}{c_1} = - m .$$

Finalmente da queste ultime due relazioni abbiamo:

$$\gamma_1 = \frac{1}{1 - m^2} c_1 \quad , \quad \gamma_2 = - \frac{m}{1 - m^2} c_1 ,$$

che coincidono colle (5); ma pure in questo *secondo* ragionamento si ritiene la falsa *supposizione* del *primo* (§ 2).

§ 4.

In quanto al *terzo* ragionamento, adottato dà taluni altri (V. fra questi M. Zannotti, *Elem. di fis.* 2ª edizione t. 2° § 18 e seguenti, Napoli 1850), esso è in ispecie fondato sulla comunicazione alternamente, fatta ed interrotta, sia del piattello P collettore colla sorgente di elettricità, sia del piattello Q accumulante col suolo; inoltre nel ragionamento stesso di continuo si applica l'elettrostatico rapporto. Per tanto seguendo, ma con maggiore chiarezza, questo *terzo* ragionamento, venga comunicata la carica positiva c_1 al piattello collettore, ovvero inducente P, per essersi stabilita la sua comunicazione con una sorgente di elettricità inesausta e costante. Si produrrà per influenza elettrica, cioè per elettrostatica induzione, sul piattello accumulante, ovvero indotto Q, posto a comunicare col suolo, una carica $- u_1$ indotta di prima specie, del tutto vincolata, ed un'altra $+ u_1$ libera, che completamente si disperderà nel suolo. Quindi avremo dalla prima indotta il rapporto elettrostatico seguente:

$$\frac{u_1}{c_1} = - m , \qquad \text{donde} \qquad u_1 = - m c_1 ,$$

carica che si troverà sul piattello Q.

Questa carica $- m c_1$ indotta di prima specie, contenuta nel piattello Q, vincolerà, per effetto di reazione, sul piattello collettore P, una parte v_1 della sua carica primitiva c_1 libera; quindi secondo quegli autori, che adottano l'attuale *terzo* ragionamento, e nella ipotesi che v_1 sia positiva, si dovrebbe ottenere l'altro rapporto elettrostatico di reazione:

$$\frac{v_1}{- m\, c_1} = - m , \qquad \text{donde} \qquad v_1 = m^2 c_1 .$$

Però qui osserviamo, che a determinare la vera vincolata di reazione v_1, e trasformare la $- m c_1$ in una vera vincolante, fa d'uopo mettere in comunicazione col suolo il piattello P, lasciando isolato il piattello Q. Allora soltanto colle due cariche così ottenute, una vincolata, l'altra vincolante, si potrà stabilire l'altro vero elettrostatico rapporto, relativo al caso che si considera. Ma in tutto questo *terzo* ragionamento non viene mai detto che il piattello P comunichi di fatto col suolo, e perciò la v_1 in esso contenuta, non è numericamente la vera vincolata, quella cioè che fu espressa da $v_1 = m^2 c_1$, che deve formare il numeratore del secondo elettrostatico rapporto. Si vede chiaro in fatti, che gli autori, da cui si adotta l'attuale *terzo* ragionamento, stabiliscono $c_1 = c_2 + v_1$, ove c_2 rappresenta la parte libera di c_1, mentre

v_1 rappresenta quella vincolata per effetto della reazione, che però non è la vera dell'attuale caso. Imperocchè questa v_1, per essere positiva e vincolata, deve unicamente rimanere in P, allorchè questo piattello abbia comunicato col suolo; perciò deve trovarsi priva di tensione, tanto perchè non si disperde, quanto anche perchè la $-u_1$ vincolata non si neutralizza colla indotta di seconda specie $+u_1$ libera colla quale si trovava mescolata sul piattello Q prima che questo comunicasse col suolo. Quindi è che non possono i seguaci di questo *terzo* ragionamento stabilire il vero elettrostatico rapporto fra la vera vincolata e la vincolante per effetto di reazione contenuta nel piattello Q, ora diventato vincolante. A tal fine fa d'uopo stabilire la comunicazione di P col suolo, e per tale comunicazione, come la sperienza e la teorica insegnano, deve partire da P una carica libera, maggiore della c_2; quindi deve restare nel piattello P una carica vincolata minore della v_1. Si dica x la quantità di elettrico libero, che oltre alla c_2 parte dal piattello P, a motivo della sua comunicazione col suolo, e dell'isolamento di Q; sarà quindi, per questo caso, la perdita $p = c_2 + x$, cioè sarà la quantità *totale* di elettrico libero, che per tale motivo parte dallo stesso P. Da ciò discende, che la vincolata v_1 deve diminuirsi della quantità x, come la libera c_2 si dovette accrescere della stessa quantità x. In fatti poichè, come vuole la sperienza, la libera c_2 dovette accrescersi della quantità x, per ottenere la vera perdita $p = c_2 + x$; similmente la vincolata v_1 dovette diminuirsi della stessa quantità x; perchè di tanto cresce la libera c_2, di altrettanto deve diminuire la vincolata v_1. Ora poichè $c_1 - p$ rappresenta la vincolata contenuta sul piattello P, la quale viene pure rappresentata da $v_1 - x$, perciò dovremo avere $c_1 - p = v_1 - x$, donde $x = v_1 p - c_1$. Quindi sarà in questo caso $v_1 - x$ la quantità totale, che resta vincolata sul piattello stesso P; cosicchè il vero elettrostatico rapporto, dopo la comunicazione di P col suolo e l'isolamento di Q, sarà il seguente:

$$\frac{v_1 - x}{-m c_1} = -m, \text{ donde } v_1 - x = m^2 c_1.$$

Sì fatta critica deve ripetersi per ognuno dei rapporti elettrostatici di reazione, che nel proseguire di questo *terzo* ragionamento vengono stabiliti; ma per ora basti di ciò, contentandosi di avere riconosciuto quanto esponemmo in proposito, e procediamo.

Continuano gli autori medesimi così riflettendo: la tensione τ della carica libera c_1 nello stesso collettore P, sarà diminuita di $v_1 = m^2 c_1$, e perciò rappresentata da $(1 - m^2) c_1$, poichè abbiamo $\tau = c_1 - v_1 = c_1 - m^2 c_1 = (1 - m^2) c_1$.

Si tolga la comunicazione del piattello accumulante Q col suolo, e si ristabilisca quella del piattello collettore P colla primitiva sorgente di elettricità. Il piattello stesso, per questa sua comunicazione, acquisterà di nuovo la carica primitiva c_1 libera, conservando la carica positiva e vincolata $m^2 c_1$ per effetto di reazione; cosicchè la carica *totale* positiva del medesimo piattello P sarà per ora espressa da

$$c_1 + m^2 c_1.$$

Si tolga la comunicazione del collettore P colla sorgente di elettricità, ristabilendo invece quella dell' accumulante Q col suolo. Quindi, come la carica c_1 ha per induzione vincolato sul piattello medesimo Q la carica $-mc_1$; così vincolerà sullo stesso Q, pure per induzione, la carica $-m^3 c_1$. Ed in fatti chiamando $-u_2$ la

carica indotta di prima specie su questo piattello Q, dovrà essere $+u_2$ quella indotta di seconda, cioè libera sul medesimo, la quale andrà tutta perduta nel suolo. Dovremo quindi avere il seguente rapporto elettrostatico, fra la carica $-u_2$ indotta di prima specie sul piattello Q, e la nuova inducente m^2c_1, cosicchè sarà:

$$\frac{-u_2}{m^2c_1}=m, \text{ donde } u_2=-m^3c_1;$$

dunque il piattello Q avrà una *totale* carica negativa, per ora espressa da

$$-(mc_1+m^3c_1).$$

Si tolga la comunicazione col suolo del piattello Q accumulante, ristabilendosi la comunicazione del piattello collettore P colla indicata elettrica sorgente; il piattello medesimo riacquisterà per questo mezzo la iniziale carica libera c_1; conservando la precedente già vincolata. Quindi poichè la carica $-mc_1$ del piattello Q, come or' ora vedemmo, vincolò in P per effetto di reazione una carica $v_1=m^2c_1$, della sua libera c_1; similmente la carica $-m^3c_1$ del piattello stesso Q, dovrà vincolare per l'effetto medesimo nel piattello P una carica positiva $v_2=m^4c_1$, della sua libera c_1. Quindi secondo gli stessi autori, se dicasi v_2 la carica vincolata in proposito sul piattello collettore P, avremo il rapporto elettrostatico che siegue:

$$\frac{v_2}{-m^3c_1}=-m, \text{ donde } v_2=m^4c_1;$$

dunque avrà per ora il piattello P una carica *totale* positiva, espressa da

$$c_1+m^2c_1+m^4c_1.$$

Cessi la comunicazione di questo piattello P colla sorgente stessa, ristabilendosi quella dell'accumulante Q col suolo; la carica m^4c_1 del piattello collettore P indurrà nell'accumulante Q una carica espressa da $-m^5c_1$. Poichè se dicasi $-u_3$ la indotta di prima specie su questo piattello, sarà u_3 quella di seconda specie sul medesimo, che verrà tutta dissipata nel suolo. Inoltre come la cárica m^2c_1 contenuta in P, vincolò sul piattello Q una carica $-m^3c_1$, così la m^4c_1 dovrà vincolare per induzione sul piattello stesso Q una carica m^5c_1; quindi avremo il relativo rapporto elettrostatico:

$$\frac{-u_3}{m^4c_1}=m, \text{ donde } u_3=-m^5c_1;$$

per tanto la carica *totale* di questo piattello Q sarà per ora espressa dal trinomio

$$-(mc_1+m^3c_1+m^5c_1).$$

Continuando indefinitamente a questo terzo modo, riflettiamo che sebbene non si dica, tuttavia in realtà per disperdere nel suolo le quantità di positivo, che si trovano nel piattello P, viene sempre comunicato col suolo, quindi è che la quantità libera massima contenuta nello stesso P eguaglia c_1, la quale però viene acquistata dal medesimo piattello, quando in esso cessa l'accumulazione delle quantità positive vincolate; quindi è che a rigore questa quantità si acquista mediante l'ultima comunicazione colla sorgente inesausta, che supponiamo positiva. Quindi sul piattello P si avrà per le quantità elettriche positive in esso restate la somma seguente:

$$v_1+v_2+v_3+\ldots\ldots+c_1=c_1+m^2c_1+m^4c_1+m^6c_1+\ldots\ldots=$$
$$=(1+m^2+m^4+m^6+\ldots\ldots)c_1=\gamma_1=\frac{1-(m^2)^n}{1-m^2}c_1.$$

Sommando tutte le quantità negative contenute nel piattello Q avremo:

$$-(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots) = -(1 + m^2 + m^4 + \ldots.)\, mc_1 =$$

$$\gamma_2 = -\frac{1-(m^2)^n}{1-m^2}\, mc_1\,;$$

ma siccome nel caso attuale abbiamo $m < 1$, ed n grandissimo, così le due precedenti somme si ridurranno alle

$$\text{(8 bis)} \qquad \gamma_1 = \frac{1}{1-m^2}\, c_1\,, \qquad \gamma_2 = -\frac{m}{1-m^2}\, c_1.$$

Queste formule coincidono colle (5) (§ 2), che allora si ottennero lasciando continua la comunicazione tanto del piattello collettore P colla elettrica sorgente, quanto del piattello accumulante Q col suolo. Nel *terzo* ragionamento che fu ora dichiarato, il lavoro della elettrostatica influenza si divide colla immaginazione in tanti tempuscoli, per ognuno dei quali si assegna l'effetto vincolante tanto di reazione quanto d'induzione sulla elettricità dei piattelli P e Q. Del resto ciascuno comprende, che nell'attuale *terzo* ragionamento, la discontinuità delle indicate comunicazioni colla quale procede il ragionamento stesso, non esclude la continuità delle comunicazioni medesime, la quale sarà in esso introdotta, col diminuire oltre ogni picciolezza immaginabile il tempo che intercede fra una comunicazione e la sua cessazione, lo che non altera punto l'esposto ragionamento.

Però anche in questo *terzo*, come nei precedenti due ragionamenti adottati da diversi autori, ed ora da noi dichiarati con maggiore sviluppo e con opportune osservazioni, la sperienza e la teorica si oppongono al modo col quale i rapporti elettrostatici di reazione vengono stabiliti, come già fu osservato. Questo modo inesatto consiste nel supporre, che mettendo a comunicare col suolo il piattello P collettore, da esso parta la sola quantità di elettrico c_1, già ben definita e ben cognita, mentre realmente ne parte dal medesimo piattello una maggiore. Anche il vedere che le (8 bis) coincidono colle (5), è una conferma che le prime includono la falsa *supposizione*, che cioè la perdita fatta dal piattello P eguagli la c_1.

§ 5.

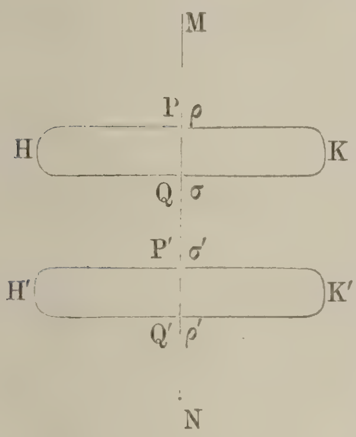
Passiamo ad esporre un *quarto* ragionamento, per giungere alle formule del condensatore pubblicate da Murphy a pag. 80 § 34 dell'opera, la quale ha per titolo: *Elementary principles of the theories of electricity heat and molecular actions designed for the use of students in the university* by the Rev. R. Murphy M. A. Fellow of Cajus college. Part 1, *On electricity*. Cambridge 1833. Nella esposizione del ragionamento stesso, noi, restando sempre fedeli esattamente alle idee dell'autore, cercheremo essere più espliciti nei brani ove si mostra egli non a bastanza chiaro. Inoltre, similmente a quanto abbiamo praticato nei tre ragionamenti che precedono, svolgeremo anche in questo *quarto* le nostre critiche osservazioni su tutto ciò che non si accorda colla sperienza.

Murphy si esprime a questo modo: « Due dischi metallici uguali e paralleli fra loro, di cui le superficie sono assai grandi relativamente alla ertezza di ognuno, sieno separati l'uno dall'altro da un sottile strato coibente. Si faccia comunicare la superficie del disco inferiore col suolo, e quella del disco superiore con una sorgente di elettricità

inesausta, come sarebbe quella del conduttore di una macchina elettrica in azione. Dopo caricato di elettricità per tal modo il disco superiore, si allontani la indicata sorgente da esso, e si cerchino gli effetti della *reciproca* influenza fra i due medesimi dischi ».

Suppongasi per una prima approssimazione, che la superficie dei dischi sia grande molto, e che la ertezza dei medesimi sia sommamente piccola. Si guidi una retta MN (fig. 1) verticale, che intersechi le orizzontali superficie superiori ed inferiori del disco HK nei punti P, Q, e del disco inferiore H'K' nei punti P', Q'. Rappresentiamo colle ρ, σ, e colle σ', ρ', le corrispondenti accumulazioni elettriche rispettivamente nei punti medesimi. Poichè la estensione delle superficie dei dischi fu supposta grandissima; perciò le accumulazioni ρ, σ, σ', possono riguardarsi costanti per ogni punto delle superficie medesime, eccetto per quei vicini agli orli dei dischi; e sarà inoltre $\rho' = 0$, perchè la superficie inferiore del disco H' K' comunica col suolo.

Fig. 1.



Qui noi dobbiamo riflettere, che la distribuzione dell'elettrico sopra una superficie piana sia pure grande quanto si vuole, non può supporsi uniforme, neppure in quei punti della superficie stessa, che non sono vicini agli orli stessi, quando essa è stata in comunicazione con una sorgente inesausta di elettricità, come viene supposto nel caso attuale. Non possiamo nè pure ammettere, che, a motivo della comunicazione col suolo, sia $\rho' = 0$, come vuole l'autore. Imperocchè il medesimo ritiene che la influenza elettrica traversi le masse conduttrici, e perciò dovrà egli ammettere, che la indotta di prima specie si trovi sulla superficie inferiore del disco H'K', dalla quale non potrà mai partire, sebbene questa superficie comunichi col suolo. In fatti se potesse dissiparsi nel suolo la ρ', dovrebbe aversi anche $\sigma' = 0$ per la stessa cagione; perciò non potrà stabilirsi $\rho' = 0$. In somma il comunicare col suolo, non potrà mai far disperdere in esso la indotta di prima specie, lo che da ognuno viene ammesso, che se ρ rappresenti la sola indotta di seconda specie, allora, come la sperienza insegna, per la comunicazione di H' K' col suolo, dovrà essere $\rho' = 0$. Ma progrediamo tornando all'autore.

Nella indicata retta verticale MN, si prendano due punti p, p', collocati uno nella massa del disco superiore HK, l' altro in quella del disco inferiore H'K'; l' azione *totale* dell'elettrico distribuito sulle tre superficie dei due dischi dev'essere nulla tanto sul punto p, quanto sull' altro p'.

Ora generalmente quando l' elettrico sia distribuito con uniformità, cioè con una accumulazione costante ρ, in ciascun punto di una superficie piana ed infinita, supposto che ogni particella elettrica eserciti l' azione sua nella ragione inversa del quadrato della distanza, in tal caso l'azione risultante, ovvero *totale* dell' elettrico medesimo sopra qualsiasi punto, è normale alla superficie stessa, lo che fu dimostrato dal Murphy al § 24 della sua citata opera; ed è l'azione medesima espressa da $2\pi\rho$ (*ibidem*). Per conseguenza, il punto p dovrà essere attratto rispettivamente dai tre indicati strati elettrici, colle seguenti tre forze:

$$2\pi\rho\,, \quad -2\pi\sigma\,, \quad -2\pi\sigma'\,:$$

imperocchè delle tre azioni in proposito, una cioè $2\pi\rho$ è diretta in senso positivo, perciò dev'essere preceduta dal segno $+$, mentre le altre due cioè $-2\pi\sigma$, $-2\pi\sigma'$ sono dirette in senso contrario, quindi esse debbono essere ambedue precedute dal segno $-$. Similmente, il punto p' dev'essere attratto dalle tre altre seguenti forze:

$$2\pi\rho, \quad 2\pi\sigma, \quad 2\pi\sigma',$$

le quali essendo tutte dirette in senso positivo, deve ciascuna essere preceduta dal segno $+$. Laonde, poichè tanto il punto p, quanto l'altro p' si debbono trovare in equilibrio, perciò dovranno verificarsi le due seguenti equazioni:

$$(a_1) \qquad \begin{cases} 2\pi\ (\sigma + \sigma' - \rho) = 0, \\ 2\pi\ (\sigma + \sigma' + \rho) = 0, \end{cases}$$

la prima delle quali appartiene all'equilibrio del punto p, mentre la seconda si riferisce all'equilibrio del punto p'. Sommando e sottraendo fra loro queste (a_1), avremo le

$$(a_2) \qquad \sigma + \sigma' = 0, \qquad \rho = 0.$$

Dalla seconda di queste conclude l'autore, che la carica totale comunicata dalla inesausta sorgente al disco superiore, HK la quale trovasi a contatto collo strato isolante, viene distribuita tutta sulla superficie inferiore del disco medesimo; questa carica perciò sarà espressa con σ. Quindi, poichè dalla prima delle (a_2) si ha $\sigma = -\sigma'$, così l'autore ancora conclude, che la carica stessa σ produce per influenza una quantità eguale di opposto elettrico espresso da $-\sigma'$, distribuito in egual modo sulla superficie superiore del disco H'K', il quale comunica col suolo.

Prima di proseguire nella esposizione del ragionamento di questo autore, dobbiamo noi riflettere: 1° che $\rho = 0$ non può verificarsi mai, sebbene le superficie dei due dischi sieno infinitamente grandi; 2° che neppure potrà mai verificarsi, che la totale inducente σ riesca in quantità eguale alla contraria $-\sigma'$; giacchè anche nel caso delle infinite superficie dei due dischi, sempre la inducente deve superare in quantità la indotta. Le (a_1) debbono esistere insieme per valori delle σ, σ', ρ comuni tanto alla prima, quanto alla seconda; ma i valori medesimi si debbono conciliare coi fatti sperimentali. Per tanto è chiaro che le (a_1) sono soddisfatte ponendo in esse:

$$\sigma = 0, \quad \sigma' = 0, \quad \rho = 0;$$

però siccome queste accumulazioni esistono, e non sono nulle, perciò conviene interpetrarle dicendo: che le azioni loro sopra i punti p, p' sono come se queste azioni non esistessero. Ciò vuol dire che le azioni medesime non traversano le masse conduttrici, come la sperienza insegna, e come già gli accademici del Cimento, prima dell'illustre Faraday hanno riconosciuto. Questa è la sola interpetrazione possibile delle (a_1) messa in accordo colla sperienza.

L'autore continua dicendo: « Questo risultamento è soltanto approssimativo, perchè in pratica i dischi non sono di estensione infinita, come fino ad ora fu supposto. Per ottenere un'approssimazione che più si avvicini al vero nel caso pratico, non dobbiamo ritenere che ρ sia nullo, ma soltanto assai piccolo relativamente alla σ. Di più, prescindendo dal segno, σ' non eguaglierà σ, ma dovrà essere σ' minore di σ, come si verifica nei casi tutti della pratica, cioè mediante la sperienza; perciò dovremo avere:

$$(a_3) \qquad \sigma' = -m\sigma,$$

essendo m una frazione poco minore della unità. La m risulta costante pel medesimo sistema dei dischi, poichè i valori delle ρ, σ, σ', necessarî all'equilibrio dei punti p, p', possono in tal caso essere duplicati, triplicati, ecc. senza turbare i rapporti fra le elettricità vincolate e le inducenti nei punti stessi ».

Per dichiarare meglio quello che dal Murphy si vuole intendere con questo suo riferito brano, cioè che il rapporto elettrostatico m non cangia col cangiare in quantità la carica inducente, aggiungiamo quanto segue. Il rapporto elettrostatico m varia col variare del sistema dei dischi, vale a dire col variare tanto la distanza fra essi, quanto la estensione loro, perchè la quantità della induzione dipende ad un tempo, e dalla distanza indicata, e dalla superficie dei medesimi; però il rapporto m non varia col variare della carica elettrica, sia sul medesimo condensatore, sia sopra due o più condensatori simili fra loro geometricamente. In fatti, se abbiasi un corpo inducente che agisca sopra un altro indotto, supposti ambedue conduttori, certo è che variando la carica del primo, varierà pure la carica indotta nel secondo; ma il rapporto, sia fra le due totali cariche, sia fra le accumulazioni elettriche in due punti *corrispondenti,* non potrà variare, cioè rimarrà sempre lo stesso di prima. Per dimostrare ciò nel caso di un medesimo condensatore, riflettiamo che l'azione totale di tutti gli elementi elettrici delle due superficie, una inducente, l'altra indotta, dev'essere nulla sopra un qualunque punto interno ad uno dei due corpi. Ora variando la carica inducente, l'equilibrio di quel punto deve ancora sussistere, perchè sussiste pure quel principio; perciò la nuova carica deve anch'essa fare un'azione totale nulla sopra un qualunque punto interno ai due corpi. Ma supponendo le due cariche distribuite in guisa, che il rapporto, sia fra le medesime, sia fra le accumulazioni elementari elettriche, rimanga costante, cioè quello di prima, continuerà l'azione totale ad essere nulla sopra un punto qualunque interno ad uno dei due corpi conduttori. E siccome sappiamo essere unica la elettrica *distribuzione* sopra un conduttore, così è chiaro che alla seconda carica tanto inducente, quanto indotta, corrisponderà una distribuzione uguale a quella ora indicata, e che perciò il rapporto, sia fra le due cariche totali, sia fra le accumulazioni elettriche, relative a due *corrispondenti* punti di esse, non potrà mai variare, cioè rimarrà costante, comunque si faccia variare la carica *inducente.*

Per tanto esprimendo con a la prima carica inducente, con b quella indotta, e con na la seconda carica inducente, dovrà esprimersi anche con nb la indotta corrispondente a questa, onde il rapporto elettrostatico fra le due cariche, una inducente, l'altra indotta, non possa variare; cosicchè avremo:

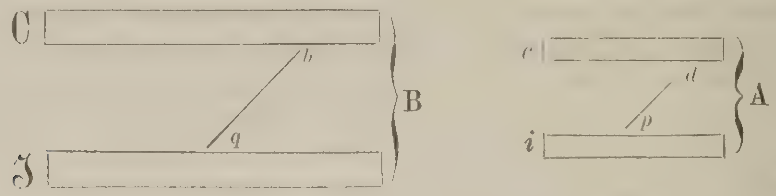
$$\frac{b}{a} = \frac{nb}{na} = m.$$

Siccome poi questa costanza di rapporto si riferisce anche a due corrispondenti accumulazioni elettriche elementari, così è chiaro che la costanza del rapporto indicato appartiene anche a due corrispondenti parti delle due cariche, una inducente, l'altra indotta. Dopo ciò proseguiamo coll'autore, ma svolgendo maggiormente i suoi concetti, e con più chiarezza.

Per dimostrare, che il coefficiente d'induzione ovvero che il rapporto elettrostatico m non cangia, quando i due condensatori A, B, (fig. 2) sieno simili fra

loro geometricamente, possiamo anche ragionare nel seguente modo. Le dimensioni tutte del condensatore A, cioè tanto dei suoi due piattelli, quanto della distanza fra i medesimi, abbiano il rapporto k costante, con quelle omologhe, relative al condensatore B. La interna superficie s del piattello collettore o inducente c di A sia

Fig. 2.



divisa in n piccolissime parti uguali fra loro; e similmente la interna superficie S del piattello inducente C di B sia pure divisa in parti, ognuna eguale a quella del piattello c di A; il numero delle parti di questa seconda divisione sarà espresso da nk^2, e ciò per la supposta similitudine dei due condensatori. In fatti, dicasi α una di queste piccolissime particelle eguali fra loro, sarà:

$$s = n\alpha.$$

Si dica x il numero delle medesime sulla superficie S, sarà:

$$S = x\alpha.$$

Ma per la similitudine abbiamo:

$$\frac{S}{s} = \frac{x}{n} = \frac{L^2}{l^2},$$

inoltre

$$\frac{L}{l} = k, \text{ donde: } L^2 = k^2 l^2;$$

dunque sostituendo avremo:

$$\frac{S}{s} = \frac{x}{n} = k^2, \text{ quindi sarà } x = nk^2,$$

ed nk^2 dovrà esprimere il numero delle divisioni, ognuna uguale ad α, sulla interna superficie S di B; ed essendo $s:S = 1:k^2$, sarà chiaro che ad una divisione di s corrispondono k^2 divisioni di S.

Sappiamo dal ragionamento, confermato dalla sperienza, che il rapporto elettrostatico, cioè quello fra la elettricità indotta e la induttrice, ossia che il coefficiente d'induzione non cangia punto col cangiamento della induttrice stessa, tanto se questa sia positiva, quanto se negativa, purchè non cangino e la distanza fra i due piattelli e le dimensioni loro. Sappiamo altresì che questo coefficiente si può assegnare sperimentalmente in più guise, come risulta dalle istituzioni di fisica le più complete in fatto di elettrostatica, e dai trattati di questa scienza. Di qui discende che, sebbene la distribuzione dell'elettrico sulla interna superficie del piattello inducente o collettore, in realtà cangi da un punto all'altro della superficie stessa; tuttavia, poichè l'indicato coefficiente m per nulla è dipendente dalla quantità E della carica induttrice, ma solo dalle dimensioni dei due piattelli del condensatore, e dalla distanza fra essi; così chiaro apparisce, che questo rapporto m sarà lo stesso, eziandio quando la carica *medesima* s'immagini uniformemente distribuita sulla *interna* superficie

del piattello inducente o collettore. Ciò facilita molto la determinazione del rapporto stesso e delle sue conseguenze.

Dopo queste premesse, consideriamo due qualunque divisioni od elementi *a, b,* omologhi sulle interne superficie dei due piattelli *c,* C, guidiamo le rette *ap, bq,* anch' esse omologhe fra loro, ed esprimiamo con *e, e'* le quantità di elettrico contenute rispettivamente nelle divisioni *a, b.* Sappiamo che ogni elemento inducente agisce nella ragione diretta della sua massa elettrica, e nella inversa del quadrato della distanza fra l' elemento indotto e l' inducente. Per tanto indicando con *u* la induzione di *a* sul punto *p,* ed essendo μ una costante, avremo:

$$u = \frac{\mu e}{\overline{a p}^2}.$$

Ponendo, per semplicità maggiore, la variabile $ap = z$, e ricordando essere supposta uniforme la indicata elettrica distribuzione sulla interna superficie del piattello *c* inducente, sarà:

$$(b_1) \qquad \sum u = \mu e \sum \left(\frac{1}{z^2} \right),$$

la formula, che *tutta* determina la indotta generata sul punto *p* dall' elettrico inducente accumulato nella interna superficie del piattello *c.*

Inoltre dicasi *v* quella *parte* della induzione di *b* sul punto *q*, la quale soltanto si riferisce alla variata distanza fra i due piattelli del condensatore B, rispetto quella fra i due piattelli del precedente condensatore A, ed avremo:

$$v = \frac{\mu e'}{\overline{b q}^2}.$$

Ma per la indicata similitudine abbiamo:

$$\overline{b q} = k . \overline{p a};$$

perciò dovrà essere

$$v = \frac{\mu e'}{k^2 . \overline{pa}^2} = \frac{\mu e'}{k^2 z^2}.$$

Ora si rifletta che *a* contiene una divisione, mentre *b* ne deve contenere k^2, come già fu dimostrato; perciò chiamando con *u' tutta* la induzione di *b* sul punto *q,* avremo:

$$u' = k^2 . v = \frac{\mu e'}{z^2};$$

perciò sarà:

$$(b_2) \qquad \sum u' = \mu e' \sum \left(\frac{1}{z^2} \right).$$

Questa formula esprime *tutta* la indotta, cioè quella tanto per la variata distanza fra i due piattelli di B, quanto per le variate dimensioni dei medesimi, generata sul punto *q* dall' elettrico inducente accumulato sulla interna superficie del piattello C.

Colle formole (b_1) e (b_2) furono assegnate le induzioni procedenti dall' elettrico inducente accumulato sulle interne superficie dei piattelli *c,* C, rispettivamente sopra un punto *p,* ovvero *q,* della interna corrispondente superficie, sia del piattello *i,*

sia dell'altro I. Volendo inoltre assegnare la induzione medesima su tutta la superficie di questi secondi due piattelli, dovremo immaginare tante altre uguaglianze, simili rispettivamente alle (b_1), (b_2), quanti sono i punti o divisioni dei relativi piattelli, uno i, l'altro I. Ma n rappresenta il numero delle divisioni del piattello i, mentre nk^2 rappresenta quello delle divisioni del piattello I; perciò chiaro apparisce, mediante le (b_1), (b_2), che le *complete* induzioni delle interne superficie dei piatelli c, C, inducenti sopra le interne superficie dei corrispondenti i, I, saranno espresse rispettivamente dalle

$$\mu . n e \sum \left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \mu . k^2 n e' \sum \left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Indicando con E la carica elettrica posseduta dalla interna superficie di ognuno dei due piattelli c, C, sarà:

$$\mathrm{E} = n e = k^2 n e';$$

e sostituendo questa carica nelle due precedenti espressioni, ognuna di esse diverrà:

$$\mu \mathrm{E} \sum \left(\frac{1}{z^2}\right) = m \mathrm{E}, \text{ e dividendo per E, sarà } m = \mu \sum \left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Inoltre benchè la carica E di uno dei due condensatori considerati, cangi divenendo E'; tuttavia poichè nel condensatore medesimo, pel solo cangiamento della carica, non può cangiare il rapporto m: così anche in tal caso questo rapporto rimarrà comune pei due condensatori, geometricamente simili fra loro, sebbene le cariche di elettricità inducenti possedute dai medesimi sieno diverse. Perciò nel riferito caso, i valori numerici delle induzioni sulle interne superficie dei due piattelli accumulanti, dovranno esprimersi rispettivamente colle

$$m \mathrm{E}', \text{ ed } m \mathrm{E}.$$

Da ciò si conclude a buon diritto quanto volevamo dimostrare, cioè che il coefficiente d'induzione m, ovvero il rapporto elettrostatico non cangia da un condensatore all'altro, allorchè questi formano due sistemi geometricamente simili fra loro; e ciò si verifica eziandio quando le cariche di elettricità, in questi due condensatori, sono diverse l'una dall'altra. Si deve ancora, da quanto fu esposto, concludere ciò che siegue:

1° Il coefficiente m d'induzione elettrostatica, non è punto dipendente dalla quantità della carica induttrice; perciò non potrà esso cangiare in un condensatore, cangiando in esso soltanto la carica di questo.

2° Il coefficiente medesimo nè pure cangia, se le dimensioni dei piattelli e delle distanze tra essi cangino in guisa, in uno dei due condensatori, da formarne un altro geometricamente simile al primo; e ciò sebbene le cariche di elettricità sieno diverse.

3° Il coefficiente stesso cresce o diminuisce in un medesimo condensatore col diminuire o crescere la distanza fra i suoi due piattelli.

4° Tutte le precedenti conclusioni saranno verificate, anche quando si riferiscano al coefficiente di *accumulazione*, o d'induzione, che noi già dimostrammo

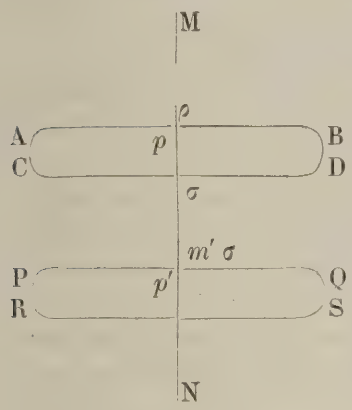
(*Comptes rendus* citati, ed *Archives* citati) dover'essere questo coefficiente rappresentato da

$$\frac{1}{1-m}, \text{ e non da } \frac{1}{1-m^2},$$

contro quello che trovasi comunemente stabilito nelle istituzioni di fisica e di elettrostatica.

I punti p, p', perchè interni, debbono essere in equilibrio, e per assegnare le condizioni di questo equilibrio sviluppiamo il ragionamento dell'autore stesso Murphy come siegue. Lo strato elettrico CD (fig. 3) agisce sul punto p', con una certa forza proporzionale all'accumulazione σ. Immaginando trasportata la forza medesima σ sulla superficie PQ, senza che sia turbato l'equilibrio del punto p', perchè avvicinata di più al punto p'; perciò dovrà chiaramente l'accumulazione stessa diminuire, ma rimanendo dello stesso segno, ed in tal caso l'accumulazione σ dovrà ridursi alla $m'\sigma$. Per tanto le azioni elettriche sul punto p' si ridurranno alle tre seguenti ρ, $m'\sigma$, $-m\sigma$, la somma delle quali, rispetto al punto medesimo, dev'essere nulla. Ma ρ, a causa della sua maggiore distanza da p', ed anche a causa della sua tenuissima proporzione con σ, può riguardarsi trascurabile rispetto all'accumulazione σ; laonde per l'equilibrio del punto p' avremo:

FIG. 3.



$$m'\sigma - m\sigma = 0, \qquad \text{quindi } m = m'.$$

Perciò l'accumulazione σ, portata sul piano PQ, sarà espressa da $+m\sigma$, onde non sia turbato l'equilibrio del punto p', sul quale saranno ρ, $m\sigma$, $-m\sigma$. Da ciò si conclude, che possiamo anche immaginare trasportata la $-m\sigma$ dalla superficie PQ sulla CD, senza turbare l'azione dello strato elettrico PQ sul punto p, ossia senza turbare l'equilibrio del punto medesimo p, purchè la $-m\sigma$ si moltiplichi per m. Laonde immaginando eseguito il trasporto che ora indicammo, egli è chiaro che il punto p riceverà l'azione delle tre forze procedenti dalle accumulazioni ρ, σ, $-m^2\sigma$, la prima positiva sulla superficie AB, e le altre due sulla superficie CD. L'azione *totale* che da queste accumulazioni proviene, dev'essere nulla sopra un punto qualunque p, collocato entro la massa conduttrice del superiore disco; dovrà quindi essere:

(a_4) $\qquad 2\pi(\sigma - m^2\sigma - \rho) = 0, \quad \text{ovvero} \quad \rho = \sigma - m^2\sigma,$

donde

(a_5) $\qquad \rho = (1 - m^2)\sigma,$

e siccome mediante la (a_3) abbiamo $\sigma' = -m\sigma$, così avremo le

$$\sigma = \frac{1}{1-m^2}\rho, \qquad \sigma' = -\frac{m}{1-m^2}\rho,$$

le quali coincidono colle (5).

Abbiamo esposto con maggiore sviluppo e chiarezza le idee dell'autore Murphy, per giungere alle formule (5); però dobbiamo confessare che la deduzione di queste formule, fatta nel modo indicato, non è rigorosamente ottenuta. Imperocchè l'autore medesimo per giungere alla precedente uguaglianza $m = m'$, suppone trascurabile l'accumulazione ρ rispetto alla σ; ma la pratica, ossia la sperienza insegna il contrario,

poichè mostra che ρ non è trascurabile rispetto alla σ, lo che viene confermato anche razionalmente. Però l'accumulazione ρ non è trascurabile per la sua pochezza rispetto alla σ; ma secondo Faraday, l'azione di ρ non può traversare le masse conduttrici, lo che non si ammette a torto da più altri, che non hanno bene posto mente alle sperienze di Faraday, dalle quali ciò giustamente si conclude. Inoltre la stessa ρ viene in gran parte trasportata per attrazione sulla superficie CD a motivo della indotta di prima specie $-m\sigma$, però senza traversare la metallica massa.

Inoltre dalla prima delle (a_2) l'autore ottiene $\sigma = -\sigma'$, cioè la inducente uguale alla indotta, lo che non si verifica mai nel caso delle superficie finite, che appunto è quello cui l'autore giunge colla prima delle (a_2), non accettabile altro che nel caso delle superficie di estensione infinita, nel quale soltanto abbiamo $m = 1$. Di più nella deduzione delle precedenti due formule (a_4) ed (a_5) suppongonsi due fatti, che si contraddicono, cioè nel principio del ragionamento che deve condurre alla stessa deduzione, viene supposto che le superficie dei piattelli sieno finite, mentre poi nel seguito dello stesso ragionamento, queste superficie suppongonsi essere infinite, perchè l'azione *totale* di ogni disco su qualunque punto, viene supposta essere il prodotto, che nasce moltiplicando 2π per la elementare accumulazione relativamente alle tre intersecazioni della perpendicolare MN colle superficie dei due dischi. Ma ciò si verifica soltanto pel caso delle superficie di estensione infinita (§ 24 del Murphy opera sua citata). L'autore inoltre suppone che in questo caso ognuna delle tre accumulazioni, cioè ognuna delle

$$\sigma\,,\quad -m^2\sigma\,,\quad -\rho$$

sia costante, da un punto all'altro della medesima superficie; ma ciò non si verifica, quando le superficie dei dischi sieno finite, sebbene assai grandi, e nella pratica le superficie medesime nè pure sono assai grandi. Un'altra osservazione, di molta importanza pur'essa, è la seguente: poniamo, come fu già stabilito, che la somma delle azioni totali elettriche sul punto p (fig. 3) sia $2\pi\sigma - 2\pi m^2\sigma - 2\pi\rho$, non ostante che le indicate superficie non sieno infinite, la precedente (a_4), obbligata pel noto principio di Poisson, ossia per l'equilibrio del punto p, ad esser nulla, fornisce la (a_5), a motivo dell'artificio fatto dall'autore, di trasportare cioè l'accumulazione $m\sigma$ dalla superficie PQ alla CD. Ma questo trasporto non è necessario e sarà più semplice lasciare le accumulazioni σ, $-m\sigma$, $-\rho$ all'iniziale posto loro. Però in tal caso la (a_4) si ridurrà nella seguente

$$(a_6)\qquad 2\pi(\sigma - m\sigma - \rho) = 0\,,\quad \text{ovvero}\quad \sigma - m\sigma - \rho = 0,$$

che secondo le idee dell'autore, accoppiate al principio di Poisson, dovrà valere. Da questo equilibrio abbiamo la

$$(a_7)\qquad \rho = (1 - m)\sigma,\quad \text{donde}\quad \sigma = \frac{1}{1-m}\rho,$$

che differisce dalla (a_5) a motivo dell'esponente del rapporto elettrostatico m.

Ognuno per tanto vede che trasportando l'accumulazione $-m\sigma$ dalla superficie PQ sulla CD, senza turbare l'equilibrio del punto p, si avrebbero altri valori di σ per lo stesso ρ. Perciò sebbene si volessero ammettere tutte le altre inesattezze dell'autore, per giungere alla (a_4), tuttavia si potrà soddisfare a questa equazione in più modi, senza turbare l'equilibrio di p. Da ciò discende che il noto principio di Poisson, è sempre

necessario, ma non è sempre solo esso *sufficiente* per giungere alla formula (a_1); perchè il medesimo principio, vale a dire l'equazione (a_4), sebbene voglia riguardarsi rigorosamente dedotta, ci lascia tuttavia nella incertezza per conoscere fra le diverse formule che da essa potrebbero dedursi, senza punto alterare l'equilibrio di p, quale debba essere la vera. Noi vedremo in appresso questa essere la (a_7) la formula, che mediante il noto principio di Poisson, confermato dalla sperienza, fornisce il risultamento analitico che ci conduce, con soddisfacente suffragio dei fatti, nell'assegnare la elettrica accumulazione prodotta dal condensatore di Volta. Prima però dobbiamo terminare di seguire l'autore, nel dedurre le altre sue formule dalla (a_5), di cui le conseguenze non sono a bastanza confermate dai fatti sperimentali.

Se dicasi E tutta la carica comunicata dalla elettrica ed inesausta sorgente alla superficie del disco superiore P; rappresentando con S una delle due superficie fra loro eguali, che formano le due basi del disco medesimo, sarà:

$$E = S\rho + S\sigma\,, \text{ ovvero } E = (\rho + \sigma)S\,,$$

ove ρ, e σ sono accumulazioni uniformi su qualunque punto della S. Da questa ultima formula si ottiene:

$$\sigma = \frac{E}{S} - \rho :$$

cosicchè, mediante la (a_5), avremo:

$$\sigma = \frac{1}{2 - m^2}\frac{E}{S}.$$

(a_8)

Sostituendo questo valore di σ nella equazione precedente, avremo:

$$\rho = \left(\frac{1 - m^2}{2 - m^2}\right)\frac{E}{S}.$$

finalmente per mezzo dell' (a_3) mediante la prima delle (a_8) abbiamo:

$$\sigma' = \frac{-m}{2 - m^2}\frac{E}{S},$$

e dalla seconda delle (a_8) otterremo:

$$E = \left(\frac{2 - m^2}{1 - m^2}\right)S\rho.$$

Dicasi E' la carica comunicata al disco collettore dalla sorgente inesausta, però senza che abbia luogo la influenza di questa carica sull' altro piattello detto accumulante; perciò se indichiamo con Σ la somma delle due basi del disco superiore, avremo $\Sigma = 2S$, e sarà:

$$E' = 2S\rho;$$

quindi, mediante la seconda, ed anche l'ultima delle (a_8), sarà:

$$(a_9) \qquad \frac{E'}{E} = \frac{2 - 2m^2}{2 - m^2}.$$

Ma riflettendo essere

$$2 - 2m^2 < 2 - m^2,$$

sarà:

$$E' < E.$$

Per assegnare più prossimamente il rapporto fra le due cariche E, E' poniamo:

$$m = 1 - a,$$

essendo a minore della unità, perciò trascurando a^2, sarà:

$$m^2 = 1 - 2a.$$

Sostituendo questo valore nell' (a_9) avremo:

$$\frac{E'}{E} = \frac{2(1 - 1 + 2a)}{2 - (1 - 2a)} = \frac{4a}{1 + 2a};$$

ma essendo $2a$ trascurabile rispetto alla unità, così avremo prossimamente:

$$(a_{10}) \qquad \frac{E'}{E} = 4a, \qquad \text{ovvero} \qquad E:E' = 1:4a.$$

Ora essendo $4a$ minore della unità, ciò dimostra che la carica E ottenuta dal disco collettore, allorchè questa carica induce sull'altro accumulante, supera quella E' ottenuta dal primo dei due dischi, quando esso non induce sul secondo.

Le formule precedenti del Murphy, da me qui riportate in modo più esplicito, differiscono alquanto da quelle corrispondenti, adottate fino ad ora in ogni corso di fisica, ed in ogni trattato di elettricità; e tanto le prime quanto le seconde, come vedremo, non sono confermate dalla sperienza. Però le indicate formule del Murphy si possono ridurre identiche a quelle comuni, che si trovano dedotte nei tre paragrafi precedenti. Ciò si ottiene trascurando la frazione m^2 rispetto al numero intero 2, non potendo ciò condurre ad errore che possa nella pratica essere valutato.

Per tanto dall' ultima delle (a_8), trascurando m^2 rispetto al 2, si ottiene:

$$(a_{11}) \qquad E = \frac{1}{1 - m^2} 2S\rho.$$

Ma $2S\rho$ esprime giustamente la carica c_1 libera, ricevuta dal piattello collettore, senza il concorso della induzione, ossia senza l'altro piattello (§ 4); perciò simboleggiando con γ_1 la totale carica E, ovvero la totale accumulazione elettrica sul piattello collettore, avremo:

$$(a_{12}) \qquad \gamma_1 = \frac{c_1}{1 - m^2},$$

la quale coincide con quella da tutti adottata, cioè colla prima delle (5), precedentemente ottenuta.

Riprendendo la (a_9), e trascurando in essa m^2 rispetto al 2, avremo dalla medesima:

$$\frac{E'}{E} = 1 - m^2.$$

Quindi ponendo $m = 1 - a$, essendo a quantità piccola e minore di 1, perciò sarà:

$$(a_{13}) \qquad \frac{E'}{E} = 1 - (1 - a)^2 = 1 - 1 + 2a - a^2 = 2a,$$

donde

$$E' = 2aE, \qquad \text{ossia} \qquad E:E' = 1:\ 2a,$$

vale a dire la carica E' minore della E, cioè queste due cariche stanno prossimamente nel rapporto di $1 : 2a$, rapporto diverso da quello $1 : 4a$ stabilito dal Murphy con (a_{10}). Il rapporto che ora fu stabilito da noi con (a_{13}), si ottiene anche dalla (a_{12}), da cui abbiamo:

$$\frac{c_1}{\gamma_1} = 1 - m^2 = 1 - (1 - a)^2 = 2a = \frac{E'}{E}.$$

Da ognuno è ammesso il seguente rapporto $\gamma_2 = - m\gamma_1$ (§ 2), dal quale per mezzo della (a_{12}) avremo la

$$(a_{14}) \qquad \gamma_2 = - \frac{m}{1 - m^2} c_1.$$

Le formule (a_{12}) e (a_{14}) sono quelle comunemente adottate, ma che non ricevettero la conferma dalle mie sperienze, come in seguito vedremo.

§ 6.

Ora passiamo ad analizzare la precedente *supposizione* (§§ 2, 3, 4), per la quale si suppone, che facendo comunicare col suolo il piattello P collettore, questo perda *soltanto* quella carica c_1, che in esso prima di tale comunicazione si trovava libera, però vi si trovava unitamente all'altra carica, che nel medesimo è vincolata. Da tale analisi vedremo risultare, che le formule (5), comuni a tutti, debbono essere modificate. Per tanto dobbiamo primieramente osservare, che dalla prima delle (5) si ottiene la

$$(a_{15}) \qquad c_1 = \gamma_1 (1 - m^2);$$

ed è chiaro che il secondo membro di questa eguaglianza, giustamente rappresenterebbe, per quella *supposizione*, la perdita che fa il piattello collettore, quando esso è fatto comunicare col suolo. Però come in appresso verrà dimostrato, sia teoricamente, sia sperimentalmente, non può questo secondo membro riguardarsi eguale alla indicata perdita del piattello collettore, la quale riesce sempre maggiore di uno qualunque dei due membri della (a_{15}): per conseguenza tale perdita, che ancora chiameremo con p (§§ 2, 4) dovrà essere rappresentata dalla equazione

$$(a_{16}) \qquad p = c_1 + x,$$

essendo x una incognita, che appresso determineremo.

Per giustificare teoricamente questa equazione, dobbiamo riflettere: 1° che facendo comunicare il piattello collettore con un corpo allo stato sensibilmente neutro, quale potrebbe considerarsi essere la interna superficie di una galitta metallica, e tutta chiusa, il primitivo elettrico equilibrio fra i due piattelli si turba, e ne succede un altro; 2° in cui si disperde la parte libera c_1 del piattello collettore medesimo, il quale in tal caso diviene indotto, lo che deve produrre una modificazione sulla carica $-\gamma_2$ del piattello Q accumulante, divenuto in tal caso inducente; 3° che tale modificazione consiste nel fare divenire libera una parte della carica $-\gamma_2$; 4° che questo ultimo fatto ha per conseguenza di mettere ad un tempo in libertà, e quindi produrre la dispersione di una parte, già indicata con x nella (a_{16}), dalla carica $\gamma_1 - c_1$, restata sul collettore dopo la dispersione della sola c_1. Quindi è che per questa seconda dispersione si produrrà l'ultimo elettrico equilibrio fra i due piattelli, cosicchè la parte finalmente restata sul piattello collettore, tutta indotta vincolata, sarà espressa con

$$\gamma_1 - (c_1 + x).$$

E per verità la carica sensibile nel piattello collettore, non è altro fuorchè la $c_1 + x$, però tolta questa carica subito si libera nel piattello accumulante una parte della indotta $-\gamma_2$, che perciò diviene inducente; ma questa liberazione non si può verificare

senza che in pari tempo una parte della v_1, cioè della vincolata (§ 4) divenga libera, quindi perduta nel suolo. Perciò chiaro apparisce, che mettendo a comunicare col suolo il piattello collettore P, la sua carica γ_1 contenuta in questo, dovrà prima che siasi trasformata tutta in carica indotta di prima specie, ricevere due diminuzioni, delle quali una è la c_1, l'altra è quella indicata con x, che ora determineremo quindi la perdita p dovrà essere maggiore di c_1.

Un caso sebbene non identico a quello che qui considerammo, però simile ad esso, lo abbiamo nella sperienza fondamentale della elettrostatica induzione, cioè quando un cilindro isolato, e conduttore viene sottoposto alla elettrica influenza. In questo caso possiamo essere certi, che facendo comunicare col suolo il cilindro indotto, parte da esso una quantità x di elettrico, omonimo della inducente, che accresce quella c_1 pur essa partita, e che possedeva il cilindro medesimo prima di essere posto a comunicare col suolo unitamente coll'altra carica in esso vincolata. Ed in fatti a convincersi di ciò, basta riflettere, che per così fatta comunicazione, la divergenza dell'elettrometro a pagliette, applicato a quell'estremo dell'indotto il più prossimo all'inducente, cresce assai sensibilmente. Ciò prova che la induzione od elettrica influenza, si è rafforzata, e che perciò si è decomposta nell'indotto una nuova quantità di elettrico neutrale. Quindi si è dovuta sviluppare in esso una nuova quantità di elettrico omonimo della inducente, il quale si è dissipato nel suolo unitamente a quella c_1, che già si trovava sull'indotto stesso, prima che fosse tolto dall' isolamento, cioè prima che fosse fatto comunicare col suolo.

Da tutti questi fatti si deduce facilmente, che facendo comunicare il piattello collettore P con un corpo conduttore grande molto, e sensibilmente neutro, mentre che l'altro piattello Q detto accumulante, ovvero indotto, rimane isolato, la carica perduta p dal primo di questi due piattelli supera c_1, vale a dire questa perdita è $c_1 + x = p$, come già fu stabilito (a_{16}). Pel contrario senza mettere il piattello collettore in comunicazione col suolo, ma invece valendosi del noto principio, che cioè l'azione è sempre uguale e contraria alla reazione, potremo invece della equazione (3), stabilire la seguente

$$(a_{17}) \qquad v_1 = -\gamma_2 ,$$

ove v_1 rappresenta come nella (1) la somma delle vincolate sul P, uguaglianza dipendente da un principio vero evidentemente, di cui l' applicazione in questo caso, come vedremo, è giustificata dalla sperienza. In tanto si rifletta che la (a_{17}) non si oppone al principio generale che fra la indotta γ_2 e la γ_1 in parte vincolata, ed in parte libera, vi dev' essere il costante rapporto m; poichè v_1 non è tutta la γ_1, ma solo una parte di essa, come viene indicato dalla (1) (§ 2), nè perciò si oppone alla disuguaglianza numerica delle $\gamma_1 > \gamma_2$ divenute libere.

Per dichiarare il significato della (1), anche meglio, di quello che in principio si fece, riflettiamo, che ogni molecola elettrica della carica vincolata v_1, ed accumulata sul piattello collettore P, contribuisce a produrre la carica indotta di prima specie $-\gamma_2$, ed a mantenerla tale sul piattello accumulante Q, e viceversa; da ciò nasce l' equilibrio fra queste due cariche. Però la differenza fra le cariche γ_1 e $-\gamma_2$, consiste in questo, che la carica γ_1 *è in parte*, ma non *in tutto* impegnata nel produrre e

nel mantenere l'indicato equilibrio; mentre ciascuna molecola della carica $-\gamma_2$ indotta di prima specie, si trova *totalmente* impegnata nel mantenere l'equilibrio stesso. Ciò viene confermato dalla sperienza; giacchè la $\gamma_1 - c_1$ ha diminuita in *parte*, *ma non in tutto* la sua tensione in questo equilibrio, mentre la $-\gamma_2$ trovasi *totalmente* vincolata per l'equilibrio stesso, cioè totalmente priva della facoltà di comunicarsi, lo che vuol dire totalmente priva di tensione. La carica fornita dalla inesausta sorgente al piattello P, prima che abbia la medesima raggiunto il suo massimo c_1, ha successivamente indotto sul piattello Q quantità sempre minore, ed ha finito per non indurre più sul medesimo, appena questo massimo fu conseguito da esso. Per tal caso la c_1 è totalmente libera, e non produce più verun lavoro sul piattello indotto. In fatti nel caso medesimo dovendo essa possedere una tensione uguale a quella della indicata sorgente, non può ricevere ulteriori accrescimenti dalla sorgente stessa, e perciò non può più indurre sul piattello Q. Il massimo c_1 libero totalmente, ottenuto da P, coll'associazione del piattello Q ad esso, e non isolato, eguaglia in tutto la carica comunicata al piattello P, senza l'associazione dell'altro piattello non isolato. Ora questa carica così ottenuta dal piattello P è libera totalmente, dunque tale pure sarà quella ottenuta dal piattello medesimo nel primo caso; ed il piano di prova serve benissimo a dimostrare la eguaglianza di queste due cariche.

Se di queste due cariche, fra loro eguali, ed ognuna rappresentata dalla c_1, potesse una indurre in parte, ma non l'altra; già non potrebbero *totalmente* l'una e l'altra disperdersi nel suolo. Ma invece la sperienza insegna che l'una e l'altra si disperdono completamente nel suolo sebbene ottenute in diversi modi, una cioè senza il piattello indotto, l'altra coll'associazione di questo piattello a quello detto inducente; dunque la c_1 che fu ottenuta con tale associazione, deve riguardarsi del tutto libera come lo è l'altra.

I due piattelli uno collettore o inducente, l'altro accumulante o indotto, sieno associati, e suppongasi che la c_1 già divenuta massima possa in parte indurre, non potrebbe mai la stessa c_1 divenire uguale nella tensione a quella della sorgente; quindi non potrebbe mai cessare l'accumulazione di questa, la quale perciò sarebbe infinita, lo che rappresenta un assurdo, che viene contraddetto dalla sperienza.

Dalla (a_{17}), dalle (1) e (2), (2 bis) si ottengono le

$$(a_{18}) \qquad \gamma_1 = \frac{1}{1-m} c_1 , \qquad \gamma_2 = -\frac{mc_1}{1-m} c_1 \text{ [1]}$$

che sono le nuove formule, che propongo sostituire alle antiche (5).

Il sig. Gaugain dice: che la esattezza della prima formula delle (5), fu contestata ultimamente dal Riess, ma che le obbiezioni di questo fisico, non sono fondate (v. Comptes rendus, t. 59 an. 1864 p. 138 lin. 8 salendo: vedi anche Les Mondes, t. V juillet 1864 p. 556). In ciò il sig. Gaugain ha ragione, ma bisogna discuterlo, come noi faremo qui appresso. Dice inoltre il sig. Gaugain che si può continuare a

(1) Queste formule furono da me pubblicate nei Comptes rendus, t. 60 n. 26 séance du 26 juin 1865 p. 1335; ed anche negli Archives des sciences phy. et nat. de Genève, an. 1865 t. 24 p. 133 nouvelle période.

servirsi della prima formula delle (5); però a questo proposito noi dobbiamo riflettere, che ciò si può fare quando non sia necessaria molta esattezza, perchè i due coefficienti $\frac{1}{1-m^2}$ ed $\frac{1}{1-m}$ non differiscono molto fra loro: ma quando si voglia un risultamento esatto il più possibile, dovrà preferirsi da ognuno il secondo di questi coefficienti al primo. Per conseguenza, pel principio rappresentato dalla (a_{17}), dovrà essere

$$(9) \qquad \frac{1}{1-m}$$

il nuovo e più esatto coefficiente di accumulazione del condensatore di Volta, che dovrà sostituirsi a quello comunemente adottato, e dedotto, come già teoricamente dimostrammo, da una *supposizione* non ammissibile, la quale viene contraddetta dalla teorica, come già vedemmo (§ 6), e dalla sperienza, come qui appresso dimostreremo. Per tanto, a parità di circostanze, qualunque dei due coefficienti di accumulazione risulta maggiore della unità, ed è solo dipendente, in modo cognito, dal rapporto elettrostatico m, che risulta minore della unità. Moltiplicando per questo coefficiente la carica c_1, si ottiene la carica totale γ_1 accumulata sul piattello collettore.

Tanto dalle (5), quanto dalla (a_{18}) risulta $\gamma_1 > \gamma_2$, prescindendo dal segno; cioè la γ_1 supera sempre numericamente la indotta γ_2. Ciò viene confermato dalla sperienza, mettendo in comunicazione fra loro i due piattelli del condensatore, per mezzo di uno scaricatore isolato, il quale se dopo fatta la scarica degli stessi due piattelli, si porti a contatto del bottone di un elettroscopio a pile secche, manifesterà un residuo della carica γ_1.

Dalla prima delle (5) abbiamo $c_1 = (1-m^2)\gamma_1$, quindi è chiaro che la elettricità vincolata nel piattello collettore, sarà espressa mediante la

$$\gamma_1 - c_1 = \gamma_1 - (1-m^2)\gamma_1, \quad \text{donde} \quad \gamma_1 - c_1 = m^2\gamma_1.$$

Però se prendasi la prima delle (a_{18}), avremo in vece che la medesima elettricità nel piattello stesso, verrà fornita dalla $\gamma_1 - c_1 = m\gamma_1$. Quindi avremo le due seguenti espressioni del rapporto elettrostatico m, cioè per la prima delle (5) sarà $m = \sqrt{\frac{\gamma_1 - c_1}{\gamma_1}}$, e per la prima delle (a_{18}) sarà $m = \frac{\gamma_1 - c_1}{\gamma_1}$, e potremo facilmente vedere, cognito m, quale di queste due formule venga convalidata dalla sperienza. Col precedente coefficiente (9), l'accumulazione risulta maggiore di quella risulterebbe coll'antico; poichè dall'uno sottraendo l'altro abbiamo

$$\frac{1}{1-m} - \frac{1}{1-m^2} = \frac{m}{1-m^2},$$

quantità positiva. Se pongasi

$$K = \frac{1}{1-m^2}, \; K' = \frac{1}{1-m}, \; \text{sarà} \; \frac{K}{K'} = \frac{1-m}{1-m^2} = \frac{1}{1+m}.$$

donde $\frac{K}{K'} = \frac{1}{1+m}$; ma la frazione indicata con m, dev'essere compresa fra 0 ed 1, quindi per $m = 0$ abbiamo $K = K'$, e per $m = 1$ abbiamo $K = \frac{1}{2} K'$. Ciò vale a dire che più diminuirà il rapporto elettrostatico m, più si avvicineranno alla

uguaglianza fra loro i due coefficienti K e K′ della elettrica accumulazione; cosicchè l'inferiore limite di K′ sarà K. Viceversa più crescerà la frazione m, più crescerà il valore di K′, cosicchè il superiore limite di K′ sarà 2K. E siccome la m nella pratica non è tanto discosta dalla unità, perciò nella pratica il K′ non sarà molto discosto dall'essere il doppio di K. Dunque il nuovo coefficiente K′, assegna un'accumulazione maggiore nella pratica, di quello che assegna l'antico K.

Il coefficiente dell' accumulazione in un medesimo condensatore, vale a dire con parità delle altre circostanze, si deve in astratto riguardare costante per una medesima distanza fra i due piattelli, comunque sia variata la carica del piattello collettore. Ma il coefficcente medesimo deve considerarsi variabile col variare la distanza indicata, col variare la natura del coibente solido, interposto fra i due piattelli, e col variare la superficie dei medesimi. Però in concreto questa costanza si verifica soltanto quando il coibente interposto fra i due piattelli sia l'aria; chè se fosse un coibente solido, come la cera di Spagna, non si verificherebbe a rigore la sopradetta costanza. Imperocchè il coibente solido assorbe sempre una parte della carica elettrica, colla quale si trova in contatto; e questa parte assorbita dal coibente medesimo si sprigiona poi lentamente da esso. Si consideri anche la induzione specifica, secondo la diversa natura dei coibenti solidi, per la quale varia sensibilmente il coefficiente K.

Per tanto la differenza che intercede fra il condensatore a coibente d' aria e quello a coibente solido, come la cera di Spagna, comunemente adoperata, consiste in questo; che il coibente solido assorbe parte dell'elettrico inducente, ma non così l'aria. Perciò nel piattello collettore si accumula questo elettrico, non solo per motivo dell'aumentata capacità del piattello stesso, ma eziandio per la virtù del coibente solido di assorbire l' elettrico inducente, lo che non si verifica per parte del coibente fluido elastico qual' è l' aria. Per altra parte le molecole d' aria caricandosi di elettricità inducente, sfuggono, e così diminuiscono alquanto la carica inducente, lo che non può verificarsi per parte del coibente solido. Da ciò deriva che il condensatore ben costruito a coibente solido sottilissimo, e perfettamente connesso con i due suoi piattelli, produce a parità di circostanze maggiori effetti, che non a coibente ad aria. Però il coibente solido conserva un residuo di carica per un tempo ben lungo, e non è possibile scaricarlo subito; fenomeno che si verifica in ogni coibente solido armato. Da ciò dipende, che anche nelle sperienze delicate, nelle quali le dosi di elettrico accumulato sono tenuissime, come nelle ricerche ordinarie di elettricità atmosferica non temporalesca; se debbasi ripetere l'uso di questo condensatore a intervalli di breve tempo, si ottengono risultamenti non esatti, ed alcune volte anche contraddittorî l'uno rispetto l'altro. Questo difetto non è comune ai condensatori ad aria, che si possono subito scaricare completamente. Del resto se abbiansi più condensatori a coibente solido, egualissimi fra loro in tutto, si può evitare il riferito difetto, adoperandoli ognuno una sol volta, e cosi potrà la medesima sperienza ripetersi ad intervalli quanto si vuole brevi.

§ 7.

Per assegnare il valore della perdita, che indicammo con p (§§ 2, 4 e 5), si ponga il piattello collettore o inducente a comunicare per un istante con un corpo sensibilmente neutro, e di continuo tale, come appunto sarebbe l'interna superficie di un grande

involucro metallico chiuso e non isolato. Per questa operazione la primitiva γ_1, già inducente in parte, diverrà ora indotta di prima specie, quindi la primitiva già totalmente, indotta γ_2, restando isolata, diverrà induttrice. Perciò dovremo avere il seguente rapporto elettrostatico:

$$\frac{v_1 + c_1 - p}{\gamma_2} = -m,$$

che per la (a_{17}) riducesi alla $-\gamma_2 + c_1 - p = -m\gamma_2$ la quale, mediante la seconda delle (a_{18}), diverrà come segue:

$$\frac{m}{1-m} c_1 + c_1 - p = \frac{m^2}{1-m} c_1,$$

donde

$$(10) \qquad p = (1 + m) c_1,$$

quantità maggiore di c_1. Sostituendo questo valore di p nella (a_{16}) si avrà:

$$(11) \qquad x = mc_1.$$

Perciò sarà mc_1 la quantità di elettrico che allora si disperde colla c_1, quando il piattello collettore si faccia comunicare con un corpo conducente, oltre che sensibilmente nello stato elettrico neutrale.

Questo medesimo valore della x si può raggiungere anche mediante il ragionamento che siegue. Chiaro apparisce che la perdita fatta dal piattello collettore, si esprime con $c_1 + x$; quindi sarà $\gamma_1 - (c_1 + x)$, la carica elettrica indotta di prima specie restata nel piattello stesso, e sarà $-m\gamma_1$ la inducente nel piattello accumulante, ora divenuto collettore. Quindi avremo il seguente rapporto elettrostatico:

$$\frac{\gamma_1 - (c_1 + x)}{-m\gamma_1} = -m,$$

donde

$$(12) \qquad \gamma_1 - (c_1 + x) = m^2\gamma_1,$$

dalla quale si ottiene

$$x = \gamma_1(1 - m^2) - c_1.$$

Eliminando γ_1 mediante la prima delle (a_{18}), avremo:

$$x = mc_1,$$

che coincide col valore della x precedentemente ottenuto (11). Sostituendo questo valore nella equazione (12), avremo:

$$\gamma_1 = \frac{c_1}{1-m},$$

che coincide con la prima delle (a_{18}).

§ 8.

Indichiamo per maggiore semplicità con γ_1' la carica restata sul piattello collettore P, dopo che fu esso posto in comunicazione con un corpo elettricamente neutro, e conservando gli altri simboli già stabiliti, facilmente si vede che avremo le tre seguenti equazioni:

$$(13) \qquad p = \gamma_1 - \gamma_1', \qquad \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -m, \qquad \frac{\gamma_1 - p}{\gamma_2} = -m,$$

le quali si debbono sempre verificare, purchè le sperienze da cui numericamente si conosceranno le cariche γ_1, γ'_1, γ_2, sieno state con ogni esattezza condotte. Ora eliminando tanto m, quanto p dalle (11), avremo la

$$\gamma^2_2 = \gamma_1\gamma'_1\,, \tag{14}$$

criterio che dovrà essere verificato dalla sperienza, per lo meno con una sufficiente approssimazione, affinchè accordar si possa fiducia riguardo alle numeriche determinazioni delle cariche γ_1, γ'_1, e γ_2. La eguaglianza (14) si può dedurre più speditamente dai seguenti elottrostatici rapporti:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -m\,, \qquad \frac{\gamma'_1}{\gamma_2} = -m,$$

i quali sono evidenti per loro stessi.

Del resto è facile verificare che le antiche formule (5) includono la eguaglianza

$$c_1 = p.$$

includono cioè la supposizione falsa (§ 2), che tutta la perdita fatta dal piattello collettore P quando esso cessi dall'essere isolato, eguaglia la c_1. Similmente riesce facile dimostrare che le nuove formule (8) includono la supposizione vera, consistente nella disuguaglianza

$$c_1 < p.$$

In fatti dalla terza delle (13) abbiamo:

$$p = \gamma_1 + m\gamma_2\,,$$

ed eliminando da questa le γ_1, γ_2 mediante le (5), avremo:

$$p = \frac{1-m^2}{1-m^2}\,c_1, \text{ donde } p = c_1,$$

risultamento il quale, come vedremo, si oppone alle nostre sperienze, che in seguito verranno esposte. Ma se invece questa eliminazione si faccia mediante le (a_{18}), avremo:

$$p = \frac{c_1}{1-m} - \frac{m^2c_1}{1-m} = \frac{1-m^2}{1-m}\,c_1,$$

donde

$$p = (1+m)c_1\,,$$

e perciò dev'essere

$$p > c_1 \tag{15}$$

lo che risulta conforme alle sperienze che in appresso verranno.

Inoltre dalla seconda e terza delle (13) abbiamo:

$$p = \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2}{\gamma_1}\,, \tag{16}$$

e sostituendo in questa formula i valori numerici delle γ_1, γ_2, c_1, dati dalla sperienza, troveremo sempre che sarà verificata la disuguaglianza (15).

La nostra teorica è fondata sopra due principî da tutti ammessi, cioè:

1° che l'azione uguaglia sempre la reazione contrariandola, lo che fornisce la (a_{17});

2° che l'effetto non può superare la sua causa, lo che ci fornisce il rapporto elettrostatico m (§ 1). I fatti della sperienza, come vedremo, confermano le conseguenze della nostra teorica del condensatore: questi fatti sono quelli che ci hanno suggerito la teorica dell'indicato istrumento, avendone bene interpetrato il linguaggio loro.

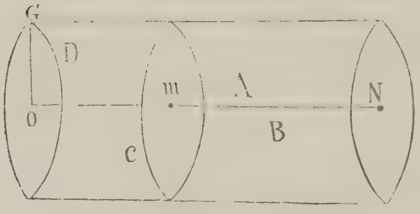
§ 9.

In questo paragrafo ci proponiamo giungere alle nostre formule (a_{18}), valendoci del noto principio di Poisson, e dei due già riferiti concetti di Murphy (§ 5), cioè: 1° che l'accumulazione ρ sulla superficie AB (fig. 3) sia trascurabile rispetto l'altra indicata con σ sulla superficie CD; 2° che la inferiore superficie RS del disco accumulante sia nello stato neutrale, perchè a contatto col suolo. Le critiche da farsi a questi due concetti già da noi furono esposte (§ 5); qui però adottiamo i concetti medesimi, unicamente per mostrare, che come il Murphy con essi è giunto alle antiche formule (5), così egli coi medesimi poteva eziandio giungere alle nostre formule (a_{18}). A tal fine incominceremo per dimostrare direttamente l'azione di un cilindro, sopra un punto collocato nel prolungamento dell'asse appartenente al disco medesimo, per quindi passare ad ottenere l'azione di un disco, avente un raggio finito, esercitata sopra un punto della normale al centro del medesimo disco.

Abbiasi un cilindro retto BD, di raggio $OG = u$ (fig. 4), avente per asse ovvero per altezza $ON = H$; l'attrazione Q di questo cilindro sul centro O della sua base, nella ipotesi della elementare legge newtoniana, si esprime con

$$Q = 2\pi(H + u - \sqrt{H^2 + u^2}). \tag{17}$$

FIG. 4.



Questa formula è dimostrata nell'opera di Plana, che ha per titolo *Mémoire sur la distribution de l'électricité* .... Turin 1845, p. 26 lin. 5 salendo, estratta dalle Memorie di quell'Accademia delle scienze, t. VII serie II. Intersecando questo cilindro con un piano perpendicolare all'asse orizzontale ON nel punto m, cosicchè abbiasi $mN = K$, ed $Om = h$, il secondo cilindro DC, avente per asse od altezza Om, attrarrà il centro O della sua base con forza q espressa da

$$q = 2\pi(h + u - \sqrt{h^2 + u^2}). \tag{18}$$

Sottraendo dalla (17) la (18) avremo l'attrazione $Q - q$ del cilindro mN, cioè del cilindro AB sul centro O della base del cilindro NO, vale a dire il cilindro mN attrarrà il punto O, posto nel prolungamento mO del suo asse mN, con forza espressa da

$$Q - q = 2\pi\left[H - h - \left(\sqrt{H^2 + u^2} - \sqrt{h^2 + u^2}\right)\right]. \tag{19}$$

Pongasi $Q - q = \Delta$, siccome abbiamo $H - h = K$, così dalla (17) avremo:

$$\Delta = 2\pi\left[K - \left(\sqrt{H^2 + u^2} - \sqrt{h^2 + u^2}\right)\right],$$

e da questa eliminando H, si avrà:

$$\Delta = 2\pi\left[K - \left(\sqrt{(K + h)^2 + u^2} - \sqrt{h^2 + u^2}\right)\right], \tag{20}$$

formula esprimente l'attrazione di un cilindro di asse K, e di raggio rappresentato da u, sopra un punto collocato sul prolungamento del detto asse, alla distanza h dalla sua base.

Suppongasi ora essere K piccolissimo, e perciò trascurabile rispetto al raggio u, come appunto si verifica nel caso pratico del condensatore, dalla (18) avremo:

$$\Delta = 2\pi\left[K - \left(\sqrt{h^2 + 2hK + u^2} - \sqrt{h^2 + u^2}\right)\right] =$$

$$= 2\pi\left[K - \sqrt{h^2 + u^2}\left(\sqrt{1 + \frac{2hK}{u^2 + h^2}} - 1\right)\right].$$

Ma sviluppando il secondo radicale mediante il teorema newtoniano, sarà:

$$\sqrt{1 + \frac{2hK}{u^2 + h^2}} = 1 + \frac{hK}{u^2 + h^2} - \ldots$$

e sostituendo questo valore nella equazione precedente, avremo:

$$\Delta = 2\pi K\left(1 - \frac{h}{\sqrt{u^2 + h^2}}\right). \tag{21}$$

La formula (21) rappresenta l'attrazione di un disco materiale, di raggio espresso da u, e della ertezza espressa da K, sopra un punto collocato sulla perpendicolare, guidata dal suo centro, alla distanza h dal disco stesso. La formula medesima è pure applicabile al caso di uno strato elettrico circolare; in questo caso chiamando σ la ertezza *media costante* di questo strato, sarà $K = \sigma$, e dalla (19), avremo:

$$\Delta = 2\pi\sigma\left(1 - \frac{h}{\sqrt{u^2 + h^2}}\right). \tag{22}$$

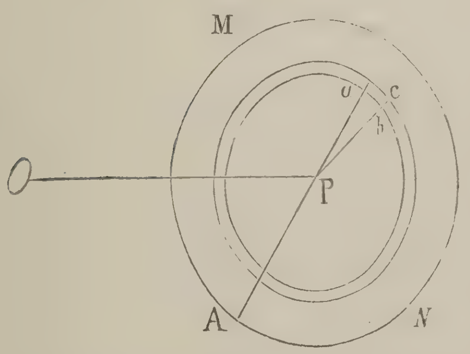
Il simbolo σ rappresenta eziandio la tensione media dell'elettrico sulla unità di superficie. Se, come nel condensatore ordinario si verifica, la distanza h essere pur essa piccolissima, e perciò trascurabile rispetto al raggio costante u di qualunque dei due dischi componenti siffatto istrumento, sarà:

$$1 - \frac{h}{\sqrt{u^2 + h^2}} = 1 - \frac{h}{u} = 1,$$

e perciò nel caso del condensatore potremo, senza temere alcun errore sensibile, ottenere dalla (22) l'altra seguente

$$\Delta = 2\pi\sigma. \tag{23}$$

Fig. 5.



Possiamo giungere anche più direttamente a questa medesima formula, ragionando come appresso. Dal punto P, centro del circolare disco MN (fig. 5), si guidi una perpendicolare OP al disco medesimo, e prendiamo il punto attratto O, per centro del sistema. Dividiamo la superficie del disco in tanti elementi sia per mezzo di circoli concentrici nello stesso P, vicinissimi fra loro, sia per mezzo di raggi anche essi vicinissimi gli uni agli altri. Posto ciò, facciasi $OP = h$, e chiamando φ l'angolo che fa un qualunque raggio variabile, che chiameremo r, con un piano fisso condotto per l'asse OP, l'area dell'elemento del disco sarà espressa da

$$ba \,.\, bc = r\,d\varphi\,dr, \text{ poichè abbiamo } ab : d\varphi = r : 1.$$

Esprimendo poi con K la ertezza costante dello strato elettrico inducente che ricopre il disco, l'elementare volume di questo sarà espresso da

$$K\, r\, d\varphi\, d r.$$

La distanza di siffatto elemento dal punto attratto O viene data da

$$\sqrt{r^2 + h^2},$$

cosicchè l'attrazione F dell'elemento stesso sul punto O, secondo la legge newtoniana, sarà:

$$F = \frac{K\, r\, d\varphi\, d r}{r^2 + h^2}.$$

Si decomponga in due questa forza, una secondo l'asse OP, l'altra secondo la perpendicolare ad esso; e così facciasi per ogni altro elemento del disco. Le componenti secondo la indicata perpendicolare si distruggeranno fra loro attesa la simmetria del disco rispetto alla OP, mentre le componenti secondo l' asse OP si dovranno sommare. Una qualunque di queste componenti si ottiene moltiplicando l'ultima espressione differenziale pel coseno dell' angolo α che fa questa componente colla F.

Ma siccome abbiamo $$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}},$$

perciò chiamando X la somma di tutte le attrazioni del disco dirette secondo la OP, sarà:

$$dX = hK \frac{r}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\varphi dr,$$

donde

$$X = K h \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{u} \frac{r dr}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ove il limite u denota il raggio costante del disco.

Ora procedendo alla prima integrazione, abbiamo:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi,$$

perciò sarà:

$$X = 2\, Kh\pi \int_0^{u} \frac{r dr}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Riguardo alla seconda integrazione si ha:

$$\int \frac{r}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}\, dr = \tfrac{1}{2} \int \frac{1}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\,(r^2 + h^2) = - \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}},$$

donde

$$\int_0^{u} \frac{r}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}\, dr = \frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{u^2 + h^2}},$$

e finalmente

$$X = 2\pi h K\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{u^2+h^2}}\right) = 2\pi K\left(1 - \frac{h}{\sqrt{u^2+h^2}}\right).$$

Questa formula coincide colla (21), cosicchè trascurando nella medesima la distanza h rispetto al raggio costante u del disco circolare, avremo

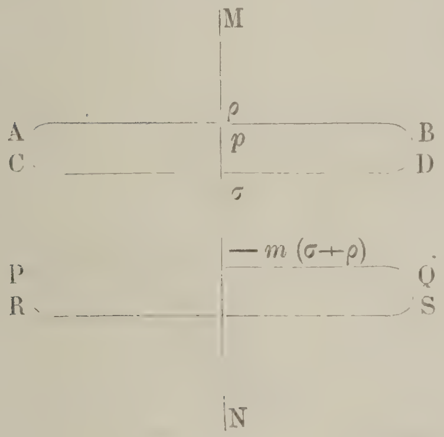
$$X = 2\pi K = 2\pi\sigma\,,$$

formula che coincide colla (23), nella quale σ rappresenta la ertezza dell' elettrico strato, supposto uniformemente distribuito sul disco.

Già indicammo (§ 5), che avendosi una superficie fisica piana ed *infinita*, di uniforme tensione, nella quale ogni punto agisca secondo la legge newtoniana, l'azione *totale* della superficie medesima sopra qualsiasi punto *esterno* è normale ad essa e viene rappresentata da $2\pi\rho$.

Deve inoltre osservarsi, che anche $2\pi\rho$ esprime l'azione *totale* di una circolare superficie materiale di raggio *finito*, sopra un qualunque punto infinitamente vicino e collocato sulla perpendicolare guidata pel centro di essa; però supponendo anche in questo secondo caso, che ogni punto agisca secondo la legge newtoniana, e che la tensione della superficie materiale sia uniforme. Perciò tanto nel primo, quanto nel secondo caso dei due che ora indicammo, quella totale azione non dipende punto dalla distanza, che intercede fra i punti agenti e quello sul quale agisce la totale azione loro.

FIG. 6.



Ciò premesso pongasi (fig. 6) che le quattro superficie dei due dischi AD, PS tutte sieno fra loro eguali, ed ognuna rappresentata da S. Le accumulazioni elettriche sopra queste superficie, riguardate naturalmente, non sono al certo uniformi. Però indicando con γ_1 la carica ricevuta dalle due superficie del disco collettore AD, per la sua comunicazione colla sorgente inesausta e costante di elettricità, ed esprimendo con ρ l'accumulazione media sulla superficie superiore, e con σ l' altra pure media sulla inferiore superficie del disco medesimo, sarà:

$$\gamma_1 = S\rho + S\sigma = S(\rho + \sigma).$$

(e_1) Dicasi γ_2 la carica indotta di prima specie sulla superficie PQ, sarà:

$$\gamma_2 = -m\gamma_1\,;$$

essendo m il solito elettrostatico rapporto sempre minore di 1. Si guidi la retta MN pei centri dei due dischi paralleli fra loro, e sia perpendicolare alle superficie di essi. La totale azione di tutti gli strati elettrici sopra un punto *qualunque*, preso dentro la massa metallica di un sistema elettrizzato, deve, secondo il noto principio di Poisson, essere nulla. Dunque tale azione dovrà essere pure nulla rispetto ad un punto qualunque posto dentro qualsiasi dei due piattelli metallici del condensatore. Da ciò discende che dovrà la totale azione stessa riescire nulla pure sopra un punto p collocato sulla normale MN dentro la massa del disco collettore AD, e perciò fuori dello strato elettrico di ertezza infinitesima ρ e σ circondante il medesimo disco.

Per la formula (23) l'azione dello strato elettrico AB (fig. 6) sul punto p, collocato fuori dello strato medesimo, sarà espressa da $-2\pi\rho$; quella dello strato elettrico CD sul punto medesimo, anch' esso fuori del detto strato, sarà espressa da $2\pi\sigma$, e quella dello strato PQ sul punto stesso fuori di tale strato, sarà $-2\pi m(\rho+\sigma)$; la quale, trascurando ρ in confronto di σ, secondo il primo concetto di Murphy (§ 5), si riduce nella $-2\pi m\sigma$. In quanto alla superficie RS, questa pel secondo concetto dello stesso Murphy, trovasi nello stato neutrale perchè comunica col suolo. La somma di queste due azioni elettriche sul punto p, dev'essere nulla, perciò dovremo avere:

$$2\pi(-\rho+\sigma-m\sigma)=0,$$

donde

$$(e_2)\qquad \rho=(1-m)\sigma.$$

Dalla prima delle (e_1) si ottiene:

$$(e_3)\qquad \sigma=\frac{\gamma_1}{S}-\rho,$$

cosicchè mediante la (e_2) si avrà:

$$\sigma=\frac{\gamma_1}{S}-(1-m)\sigma,$$

ed isolando σ otterremo:

$$\sigma=\left(\frac{1}{2-m}\right)\frac{\gamma_1}{S}.$$

Sostituendo questo valore di σ nella (e_3), avremo:

$$\rho=\frac{\gamma_1}{S}-\left(\frac{1}{2-m}\right)\frac{\gamma_1}{S}=\left(1-\frac{1}{2-m}\right)\frac{\gamma_1}{S},$$

ovvero

$$\rho=\left(\frac{1-m}{2-m}\right)\frac{\gamma_1}{S};$$

quindi

$$\gamma_1=\rho S\left(\frac{2-m}{1-m}\right).$$

e trascurando m rispetto al 2, sarà:

$$\gamma_1=\frac{1}{1-m}\,2\rho S.$$

Chiamando c_1 la carica ricevuta dal piattello collettore, mediante il suo contatto colla sorgente inesausta e costante di elettricità, ma senza il concorso della influenza cioè tolta l'associazione dell'altro piattello Q, sarà:

$$c_1=2S\rho,$$

donde

$$(e_4)\qquad \gamma_1=\frac{1}{1-m}c_1.$$

Sostituendo questo valore nella seconda delle (e_1), avremo:

$$(e_5)\qquad \gamma_2=-\frac{m}{1-m}c_1.$$

Le (e_4), (e_5) sono coincidenti colle mie nuove formule (a_{18}), che per essere convalidate dalla sperienza, come ora vedremo, debbono preferirsi alle antiche (5), le quali dalla sperienza medesima sono contrariate.

Secondo la nuova nostra formula (e_4), confermata dalla sperienza, trovammo essere

$$\gamma_1 = \frac{1}{1 - m} c_1$$

la carica del piattello collettore P, mentre per la corrispondente formula, non giustificata dalla sperienza, fu adottata la

$$\gamma_1 = \frac{1}{1 - m^2} c_1,$$

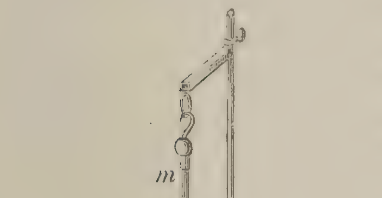
da cui discende:

$$\frac{c_1}{1 - m^2} < \frac{c_1}{1 - m}$$

Quindi si deduce che, secondo l'attuale nostra (e_4), l'accumulazione γ_1, procurata dall'istrumento in proposito, è maggiore di quella che all'istrumento stesso viene assegnata dalle corrispondenti formule $(a_8$ bis$)$, (a_{12}). Si osservi che per giungere alle formule (e_4), (e_5) mediante il noto principio di Poisson ed i due riferiti concetti di Murphy abbiamo trascurato una sol volta m rispetto al 2 sul fine del § 9 lo che in pratica si può consentire senza essere ad errore sensibile sottoposto.

§ 10.

Fig. 7.



Passiamo ad interrogare la sperienza, per conoscere quale delle due (5) od (a_{18}) viene confermata dai fatti, e quale da essi viene contraddetta; e per vedere se la indicata *supposizione* (§§ 2, 3 e 4) sia vera, cioè se la perdita p incontrata dal piattello collettore, quando esso è posto a comunicare col suolo, sia maggiore od eguale alla carica c_1 acquistata dal piattello medesimo, quando esso, da solo, si faccia comunicare colla elettrica sorgente inesausta e costante. Quindi per necessaria conseguenza verremo a concludere, quale delle due relazioni $p = c_1, p > c_1$ debba ritenersi, e quale debba escludersi. Perciò sarà necessariamente anche deciso, quale delle formule (5), (a_{18}) debba preferirsi nell'uso del condensatore. Nelle sperienze che andiamo ad esporre, si è sempre in ognuna delle medesime impiegato uno stesso elettrometro a pile secche, nel quale (fig. 7) il piattello Q, che prima era sottoposto e faceva da accumulante, ora è sopraposto e fa da collettore sostenuto da un manubrio mn isolante; mentre il piattello P, che prima era sopraposto, e faceva da collettore ora è sottoposto e fa da accumulante, cui si annette la foglia d'oro.

Una pila voltaica di 100 coppie zinco e rame, immerse ognuna nell'acqua distillata, contenuta in

altrettanti vasetti di vetro, ricoperti esteriormente di cera di Spagna, formava la elettrica sorgente qui non disegnata, e che può riguardarsi costante e indeficiente per un tempo bastevole alle sperienze, come il fatto ha dimostrato. Una divisione collocata dietro la foglia d'oro dell'elettrometro a pile secche, permetteva mediante un cannocchialetto di misurare la deviazione della medesima foglia dalla verticale, cui corrispondeva lo zero della divisione stessa. Il tutto era stabilito in modo che verun tremolio poteva manifestarsi dal sistema delle sperienze, ognuna delle quali era composta delle seguenti quattro parti.

1° Il piattello collettore Q, separato dall'altro P era messo in comunicazione metallica colla sorgente di elettricità somministrata dalla pila. Quindi si osservava la deviazione della foglia d'oro prodotta dalla carica c_1 ricevuta dal piattello Q non associato all' altro.

2° Colla medesima elettrica sorgente si caricava il piattello collettore Q associato all'accumulante P, il quale comunicava con un corpo allo stato neutro, cioè coll' interno di una galitta metallica perfettamente chiusa da ogni parte. Per questa operazione si riproduceva di necessità nel collettore Q la carica libera c_1, lo che si verificava esattamente mediante la divergenza della foglia d'oro dell' elettrometro. Quindi allontanando il piattello superiore P, cioè l'accumulante, si osservava la deviazione della foglia stessa, la quale corrispondeva alla carica γ_1 ricevuta dal collettore Q, tutta divenuta libera per l' indicato allontanamento.

3° Si tornava di nuovo a caricare il condensatore, come suol farsi, mediante la medesima sorgente di elettricità. Quindi, soppressa la comunicazione dell' accumulante P, cioè del piattello superiore con un corpo continuamente neutro, si stabiliva per un istante la comunicazione stessa col piattello inferiore Q, cioè col collettore, a fine di far perdere a questo piattello tutta quella parte γ'_1 della sua carica γ_1 che poteva essere abbandonata per così fatta comunicazione. In seguito si allontanava il piattello superiore P, cioè quello sovra posto al collettore Q, e si leggeva la deviazione della foglia d'oro corrispondente alla carica γ'_1, restata sul piattello inferiore. Per conseguenza questa deviazione corrispondente alla perdita p fatta dal piattello inferiore Q per la sua comunicazione con un corpo allo stato neutrale, veniva espressa con

$$p = \gamma_1 - \gamma_1'; \tag{24}$$

quindi per mezzo di sperienze medie, soddisfacenti alle (13) ed alla (14), si è sempre trovato

$$p = \gamma_1 - \gamma_1' > c_1 \tag{25}$$

come risulta dai tre gruppi di sperienze consegnati nei tre quadri seguenti. Dunque la *supposizione* (§§ 2, 3 e 4), che conduce alla $p = c_1$, indicata nel § 2, e discussa nel § 6, come ancora le formule (5) non che il valore del coefficiente di accumulazione che ne deriva, sono contraddette dalla sperienza. Lo stesso avviene riguardo alla formula

$$P - P' = p,$$

nella quale [1] si trova indicato con p ciò che noi chiamammo con c_1.

4° Poscia per conoscere la deviazione corrispondente alla carica indotta γ_2, si prendeva un altro elettrometro a pile secche, identico al precedente, vi si applicavano

[1] Annales de chim. et de phy. 4e série année 1865 t. IV p. 234.

i medesimi due piattelli di questo, si faceva comunicare l' *inferiore* P colla medesima sorgente di elettricità inesausta e costante, mentre che l'altro piattello cioè il *superiore* Q comunicava con un conduttore allo stato neutrale. Ciò fatto venivano soppresse le indicate due comunicazioni, e quindi subito il centro del piattello superiore ovvero indotto si applicava sull' asticella metallica pq, dalla quale pendeva la foglia d'oro nel primo elettrometro a pile secche. Si otteneva con esattezza grande, per questo mezzo, la deviazione della foglia stessa, corrispondente alla carica indotta γ_2, e mediante la formula (1) si calcolava la deviazione corrispondente alla carica vincolata v_1. I risultamenti sperimentali consegnati nei tre quadri seguenti hanno sempre, come si vede, confermato la uguaglianza (7), ed anche la disuguaglianza (15), escludendo la uguaglianza (4) generalmente ammessa. Dovremo dunque all' equazioni (5) sostituire le (a_{18}) (a_{17}), col coefficiente (9) di accumulazione che ne deriva.

5° I piattelli del condensatore non erano verniciati nelle superficie loro che si riguardano, ma l'aria fra essi costituiva il coibente, dal quale un piattello era separato dall' altro; ed il congegno che si vede indicato dalla (fig. 7) si prestava egregiamente a far variare la distanza fra i due piattelli stessi. La pila voltaica precedentemente menzionata poteva giungere ad essere composta sino di cento coppie.

Sieguono i tre quadri corrispondenti ai tre gruppi delle indicate sperienze medie, le quali sono tutte fondate sul principio, che le cariche di elettricità quando l'indice dell' elettrometro manifesta una deviazione che non supera i 30°, sono esse proporzionali al numero dei gradi che misurano le deviazioni dell' indice stesso.

Primo quadro dei valori numerici delle deviazioni corrispondenti alle cariche relative al primo gruppo di sperienze fatte coll' indice a foglia d'oro.

Numerazione	c_1	γ_1	γ'_1	p	v_1	γ_2	$p-c_1$	$v_1-\gamma_2$	Numero delle coppie	Distanza dei piatti	Distanza delle pile secche
										mm	mm
1	0,50	4,00	3,00	1,00	3,50	3,50	0,50	0,00	20	1	52
2	1,00	2,75	1,50	1,25	1,75	2,00	0,25	—0,25	40	8	41
3	0,50	3,50	2,00	1,50	3,00	3,00	1,00	0,00	»	4	42
4	1,00	3,50	1,50	2,00	2,50	2,50	1,00	0,00	60	4	»
5	1,33	4,50	2,50	2,00	3,17	3,00	0,67	0,17	80	9	50
6	1,66	4,75	2,00	2,75	3,09	3,16	1,09	—0,07	100	9	46
7	1,66	5,00	2,50	2,50	3,34	3,40	0,84	—0,06	»	6,5	»
8	1,50	4,75	2,50	2,25	3,25	3,50	0,75	—0,25	»	10,5	»
9	2,00	4,00	1,00	3,00	2,00	2,00	1,00	0,00	»	17,5	44
Medie	1,238	4,083	2,055	2,027	2,844	2,895	0,79	—0,05			

Risulta chiaramente dalle medie delle sperienze consegnate in questo quadro, che dalle medesime si è ottenuto $c_1 < p$, contrariamente a quello che viene supposto dalla formula (4 § 2) da tutti adottata, supposizione che ritiene dover essere $c_1 = p$, contro quello che insegna la sperienza: di più la equazione (a_{17}) risulta giustificata numericamente nella maniera la più completa. In fatti prima di tutto la differenza

media 0,79 è troppo forte per potersi attribuire agli errori di osservazione. Non è lo stesso dell' altra differenza media — 0,05, per la quale possiamo riguardare uguali *numericamente* fra loro i valori delle v_1 e γ_2 secondo la (a_{17}) (§ 6); tanto più l' equazione (a_{17}) può riguardarsi bene assai soddisfatta in quanto che le divisioni della scala sono piccolissime, ed è difficile assai giustamente apprezzarle, mentre l' indice compie la sua massima divergenza. In quanto alla equazione (14) (§ 8), la medesima può riguardarsi pure a sufficienza soddisfatta, ponendo bene mente alle circostanze ora indicate. Per confermare questi risultamenti ho istituito altre due serie di sperienze, nelle quali ho introdotto una modificazione, che mi è sembrata utile a procurare una maggior esattezza nell'elettrometro. Alla foglia d'oro volli sostituire un lungo e finissimo stelo il più possibile rettilineo, sospeso presso il suo centro di gravità, per mezzo di un asse orizzontale, come vedesi nella figura. Si misuravano le deviazioni di questo indice stelo, a partire dalla verticale, guardando l'indice medesimo con un cannocchialetto, che al foco dell' oculare portava un centimetro diviso in cento parti eguali, ed incise sopra un vetro a facce perfettamente parallele.

Secondo quadro dei valori numerici delle deviazioni corrispondenti alle cariche relative al secondo gruppo di sperienze fatte coll' indice a stelo rettilineo.

Numerazione	c_1	γ_1	γ'_1	p	v_1	γ_2	$p-c_1$	$v_1-\gamma_2$	Numero delle coppie	Distanza delle pile secche	Distanza dei piatti
										mm	mm
1	2,0	7,0	4,5	2,5	5.0	5.50	0,5	—0.50	20	32	3,5
2	2,5	9,0	5,0	4,0	7,0	6,75	1,5	0.25	30	34	»
3	3,0	11,0	7,0	4,0	8,0	8,70	1.0	—0.70	40	36	»
4	4,0	11,5	6,0	5,5	7.5	8,00	1.5	—0.50	60	45	»
5	4,5	14,0	7,0	7,0	9,5	9,75	2,5	—0,25	80	»	»
6	4,0	12,5	7,0	5,5	8,5	9,30	1,5	—0,80	»	»	»
7	5,0	15,0	8,0	7,0	10,0	10,80	2,0	—0,80	98	»	»
8	4,5	16,0	8,0	8,0	11,5	11,20	3,5	—0,30	»	»	»
9	5,0	9,0	2,5	6,5	4.0	4,60	1,5	—0,60	»	»	7.0
10	4,0	18,0	11,0	7,0	14,0	14,00	3,0	0.00	»	52	2,0
11	5,0	10,5	4,0	6,5	5,5	6,30	1,5	—0,80	»	42	7,0
12	4,0	11,5	5,5	5,5	7.0	7,80	1.5	—0,80	»	49	3,5
Medie	3,958	12,083	6,291	5,75	8,125	8,558	1,79	—0,43			

I risultamenti medî che in questo secondo quadro si trovano consegnati, verificano essi pure con esattezza sufficiente la diseguaglianza

$$p > c_1,$$

ed a sufficienza pure le uguaglianze

$$v_1 = \gamma_2 \,, \quad \gamma_2^2 = \gamma' \gamma'_1,$$

come si è verificato pel primo quadro, rispetto alle stesse medie.

Terzo quadro dei valori numerici delle deviazioni corrispondenti alle cariche relative al terzo gruppo di sperienze fatte coll' indice a stelo e rettilineo.

Numerazione	c_1	γ_1	γ'_1	p	v_1	γ_2	$p-c_1$	$v_1-\gamma_2$	Numero delle coppie	Distanza delle pile secc.	Distanza dei piatti
1	2	7	4,5	2,5	5	5,5	0.5	— 0,5	20	mm 32	3,5
2	2,5	9,5	6	3,5	7	7,5	1	— 0,5	30	34	»
3	3,5	11,2	7,5	3,7	7,7	7,7	0,2	0	40	36	»
4	3	10	6,5	3,5	7	6,5	0,5	0,5	»	»	»
5	4	12	6,2	5,7	8	7	1,7	1	60	45	»
6	»	14	7	7	10	9,5	3	0,5	80	»	»
7	4,5	12	6,5	5,5	7,5	7,5	1	0	»	»	»
8	5	9,5	3,5	6	3,5	4,5	1	— 1	98	»	7
9	3,5	18	12	6	14,5	13,5	2,5	1	»	52	2
10	5,2	11	4	7	5,7	5	1,8	0,7	»	42	7
11	4,5	»	6	5	6,5	7	0,5	— 0,5	»	49	3,5
12	1	»	9,5	1,5	10	9	0,5	1	50	55	1
13	1,5	3,5	1	2,5	2	1,5	1	0.5	»	42	7
14	2,7	6,5	3	3,5	3,7	4	0,8	— 0,3	»	33	»
15	0,7	4,5	3,5	1	3,7	3,5	0,3	0,2	»	52	3,5
16	»	4,2	3,2	»	3,5	3,5	»	0	»	»	»
Medie	3,01	9,056	5,806	4,05	6,58	6,418	1,03	0.16			

Le conseguenze che derivano dai risultamenti numerici medî, consegnati in questo terzo quadro, sono quelle stesse che già deducemmo dai due quadri precedenti. Abbiamo cioè pure confermata perfettamente dalla sperienza la diseguaglianza

$$p > c_1$$

ed a sufficienza verificate, le uguaglianze

$$\gamma_1 = \gamma_2 \,. \quad \gamma_2^2 = \gamma'\gamma'_1 .$$

Prima osservazione. Se non si ammettesse che la elettricità vincolata, cioè indotta di prima specie, sia priva di tensione ovvero di forza repulsiva per se medesima, si dovrebbe nella teorica del condensatore ammettere una contraddizione. In fatti ognuno per questa teorica riconosce vera la equazione (1), cioè la

$$\gamma_1 = v_1 + c_1 \,,$$

nella quale v_1, come già fu stabilito (§ 1), rappresenta la parte vincolata della carica γ_1, prodotta per effetto della reazione di $-\gamma_2$, mentre c_1 rappresenta la parte libera della carica stessa. Inoltre ognuno ammette che c_1 eguaglia quella carica, che

il piattello collettore acquisterebbe se il medesimo fosse posto solo a comunicare colla sorgente di elettricità. Ora ciò ammettendo vale quanto ammettere che la parte vincolata v_1 non possiede forza repulsiva; imperocchè se la possedesse, non potrebbe la carica c_1 essere la medesima sul piattello collettore tanto se in esso trovasi la c_1, quanto allorchè non vi si trova. Dunque per evitare la contraddizione indicata, si deve necessariamente ammettere che la v_1 ed anche la γ_2, cioè che queste due cariche vincolate non posseggono tensione di sorta.

Possiamo ancora dimostrare direttamente per mezzo del condensatore che la elettricità indotta di prima specie non possiede tensione, mediante la seguente sperienza, colla quale si rende più chiaro che questa elettricità può trovarsi unita colla elettricità *libera* di nome contrario, cioè colla indotta di seconda specie, senza neutralizzarsi con essa.

Sperienza. Si riprenda il piattello *superiore* P per collettore, si carichi come al solito il condensatore, facendo comunicare col suolo l'altro piattello Q indotto, posto *sotto* al primo. Sopprimendo poscia questa comunicazione, si comunichi con un piccolissimo piano di prova al piattello indotto una *tenuissima* carica elettrica della stessa natura della inducente, vale a dire di nome contrario alla indotta di prima specie; subito le foglie d' oro o le pagliette daranno segno di tensione. Dunque la elettricità indotta di prima specie, sebbene assai grande nel piattello Q, non ha punto neutralizzato quella *tenuissima* carica comunicata dal piano di prova al piattello indotto; dunque la indotta di prima specie non ha tensione, potendo essa coesistere colla elettricità libera e tenuissima di nome contrario, data dal piano di prova senza neutralizzarsi con essa. In altri termini questa sperienza dimostra che quando una delle due elettricità diviene indotta di prima specie, essa talmente s' impegna colla elettricità inducente, *abbandonando* la contraria omonima della inducente stessa, che mentre dura questo impegno, cioè questa influenza, la indotta di prima specie benchè molto accumulata, per mezzo del condensatore, nel piattello accumulante Q, non ha più tuttavia facoltà di combinarsi coll'altra di nome contrario *libera*, non ostante che questa *in piccolissima dose* si trovi coll'altra di prima specie nel medesimo luogo di un conduttore. In fatti così rimanendo la sperienza, si allontani poco a poco uno di questi piattelli dall'altro, si vedrà prima diminuire la divergenza delle due foglie d'oro, quindi dopo ridotta questa a zero, si vedrà ricominciare la divergenza medesima per effetto della indotta di prima specie divenuta libera. Se pongasi bene mente a queste fasi della indicata divergenza, si avrà una conferma essere la indotta di prima specie priva di tensione, che solo allora essa la riacquisterà tutta, quando a bastanza si accresca la distanza fra i due piattelli. Questo accrescimento, prima produce la neutralizzazione della tenuissima carica omonima della inducente, comunicata dal piano di prova al piattello Q. Quindi continuando l'accrescimento medesimo rinasce la indicata divergenza, per essersi accresciuta la libertà della indotta di prima specie. Se il condensatore congiungasi all' elettroscopio di Bohnenberger, allora l'unica foglia d'oro o paglietta fra le due pile secche dovrà per l' indicato accrescimento della distanza fra i due piattelli, come dicemmo, annullare prima la iniziale sua divergenza la quale poscia rinascerà in senso contrario; tutto ciò prova chiaramente che la indotta di prima specie non tende.

Seconda osservazione. Un'altra contraddizione incontriamo accordando la tensione alla indotta di prima specie, nella nota sperienza del cilindro indotto. Imperocchè questa sperienza è identica del tutto a quella del condensatore, nella quale vedemmo che la indotta di prima specie vale a dire la γ_2 deve riguardarsi priva di tensione, perciò tale deve riguardarsi pure la indotta medesima nel cilindro influito; dunque senza contraddirsi non possiamo accordare la tensione alla indotta di prima specie nella nota sperienza del cilindro indotto, come assai bene fu osservato dal Verdet (¹).

APPENDICE

Crediamo utile ribadire alcuni schiarimenti, che in altri termini si trovano nei paragrafi precedenti od implicitamente od esplicitamente riferiti nell'attuale Memoria sul condensatore voltaico.

I. Facendo comunicare col suolo un corpo conduttore indotto, parte da esso una quantità di elettrico omonimo della inducente, maggiore di quella c_1 che l'indotto medesimo possedeva prima di comunicare col suolo (§ 7) (15). In fatti per tale comunicazione la divergenza dell'elettrometro a pagliette applicato a quell'estremo dell'indotto stesso più vicino all'inducente, cresce assai sensibilmente. Ciò prova che la indicazione si è rafforzata sull'indotta e per conseguenza si è decomposta una nuova quantità di elettrico neutrale nell'indotto; quindi si è dovuta sviluppare una nuova quantità di elettrico omonimo della inducente, che si è dissipata nel suolo unitamente a quella c_1 che già esisteva sull'indotto, prima che fosse tolto in esso l'isolamento.

II. È da osservare che dalla (1) (§ 2) si ottiene

$$\gamma_1 - v_1 = c_1.$$

Ora è chiaro che il primo membro di questa equazione rappresenta tutta la perdita che secondo la comune dei fisici fa il piattello collettore P, quando esso è posto in comunicazione col suolo. Però come viene dimostrato tanto teoricamente (a_{16}) (§ 6), quanto sperimentalmente (§ 10) questo primo membro non può essere eguale alla c_1 bensì dovrà essere maggiore di c_1, per conseguenza la vera equazione deve essere:

$$\gamma_1 - v_1 = c_1 + x,$$

essendo x una incognita che abbiamo già determinato (§ 7).

III. Per assegnare il valore della perdita, che già indicammo con p (§ 4), e (a_{16}) (§ 6), si ponga il piattello collettore P a comunicare per un istante con un corpo conduttore continuamente neutro, come sarebbe la interna superficie di un corpo metallico, chiuso e molto grande; sarà:

$$\frac{v_1 + c_1 - p}{\gamma_2} = -m$$

(¹) Annales de chim. et de phy. 3ᵉ série t. XLII, novembre 1854, pag. 377. — Vedi anche De la Rive, *Traité d'électricité théorique et pratique*, Paris 1858, t. III pag. 682 li. 19. — Ed anche Poggendorff Annalen, t. XXXVII pag. 642 an. 1836.

il noto rapporto elettrostatico, donde

$$v_1 + c_1 - p = - m\gamma_2,$$

quindi mediante la (a_{17}) (§ 6) avremo:

$$-\gamma_2 + c_1 - p = - m\gamma_2,$$

ovvero

$$\frac{m\,c_1}{1-m} + c_1 - p = - m\gamma_2.$$

ed anche

$$\frac{m\,c_1}{1-m} + c_1 - p = \frac{m^2\,c_1}{1-m},$$

donde

$$p = \frac{1-m^2}{1-m}\,c_1,$$

e finalmente

$$p = (1+m)\,c_1,$$

formula che coincide colla (10) (§ 7).

IV. Col nuovo coefficiente $\frac{1}{1-m}$ l'accumulazione dell'elettrico sul piattello collettore P risulta maggiore di quella che risulterebbe coll'antico coefficiente $\frac{1}{1-m^2}$; poichè dal primo sottraendo il secondo di questi due coefficienti si ottiene per differenza $\frac{m}{1-m^2}$ quantità positiva.

V. Il coefficiente dell'accumulazione si deve riguardare costante per una medesima distanza fra i due piattelli del condensatore comunque varii la carica del piattello collettore P. Però il coefficiente medesimo deve considerarsi variabile col variare la distanza indicata.

VI. L'equazione (14) (§ 8) si può dedurre più speditamente dalle (p. 27, § 8)

$$\gamma_2 = - m\gamma_1, \quad \gamma^1{}_1 = - m\gamma_2,$$

le quali sono evidenti per loro stesse, perchè la indotta risulta sempre una frazione della inducente γ_1. lo che da tutti viene ammesso, e dicasi altrettanto della $\gamma^1{}_1$ (§ 8).

VII. È facile verificare che le antiche formule (5 § 2) includono la eguaglianza $p = c_1$, e che le (a_{18}, § 6) includono la diseguaglianza $p > c_1$. In fatti dalla

$$\frac{\gamma_1 - p}{\gamma_2} = - m$$

abbiamo:

$$p = \gamma_1 + m\gamma_2,$$

ed eliminando da questa le γ_1, γ_2, mediante le formule (5) (§ 2), avremo:

$$p = \frac{1-m^2}{1-m^2}\,c_1,$$

donde

$$p = c_1.$$

Ma se invece questa eliminazione si faccia mediante le (a_{18}) (§ 6), dovremo avere:

$$p = \frac{1-m^2}{1-m}\,c_1,$$

donde

$$p = (1 + m)\ c_1,$$

e perciò $p > c_1$, risultamento confermato dalla sperienza.

Inoltre dalle

$$\frac{\gamma_1 - p}{\gamma_2} = -m, \quad \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -m$$

abbiamo :

$$p = \frac{\gamma^2{}_1 - \gamma^2{}_2}{\gamma_1} = (1 + m)\ c_1,$$

ossia $p > c_1$.

Inoltre sostituendo in questa formula i valori numerici delle $\gamma^2{}_1$ e $\gamma^2{}_2$, dati dalla sperienza, mediante i tre precedenti quadri, troveremo che sempre si verifica numericamente la

$$p > c_1.$$

VIII. Le sperienze riportate nei tre quadri numerici precedenti, ove il piattello collettore Q, quello che porta la foglia d'oro ovvero lo stelo, è sottoposto, mentre il piattello accumulante P gli è sovrapposto, sono tutte fondate sul principio seguente, cioè che le cariche, quando non superano 30°, sono proporzionali al numero dei gradi che misurano le deviazioni dell' indice dalla verticale nell' elettrometro.

IX. Si osservi che nei tre quadri numerici precedenti ove in vece della foglia d'oro si è adoperato lo stelo, l'equazione

$$\gamma_1\ \gamma^1{}_1 = \gamma^2{}_2$$

è meglio soddisfatta, di quello che avvenga quando il quadro sia costruito servendosi della foglia d'oro per indice, questa essendo flessibile mentre lo stelo è rigido, quindi le deviazioni di questo sono più regolari.

X. Quanto siegue basta per meglio dichiarare quel che fu detto al § 6. Fra la vincolata v_1 e la indotta di prima specie γ_2, supposta questa in comunicazione col suolo, avvi un equilibrio espresso da $v_1 = - \gamma_2\ (a_{17})$ (§ 6). Ora togliendo tale comunicazione, e mettendola sul piattello collettore P, questo diverrà tutto indotto di prima specie, divenendo inducente l' altro Q isolato. Quindi poichè sul piattello P, che prima era inducente, si trovava una carica espressa da $v_1 + c_1$ (1) (§ 2), avverrà ora che non solo si dissiperà nel suolo tutta la c_1 libera, ma pure una parte x (§ 4) della v_1 diverrà contemporaneamente libera, e si disperderà pur'essa nel suolo colla c_1. Poichè siccome la indotta di prima specie $-\gamma_2$, ora è divenuta inducente, perciò resterà essa vincolata in parte, per effetto di reazione, ma non in tutto, e solo nella parte libera non vincolerà più sul P, quindi dovrà vincolare meno di prima su questo piattello perciò una parte x della vincolata v_1 sul P, diverrà libera nel piattello stesso, che prima induceva. Per conseguenza si disperderà nel suolo una quantità di elettrico $c_1 + x$, e la dispersione in P sarà maggiore di c_1, quando lo stesso P si faccia comunicare col suolo.

Si avverta, che la parte libera, è conseguita da v_1 per effetto di reazione, ma non per effetto d'induzione, ossia per effetto di decomposizione dell' elettrico neutrale; cioè fra la indotta e la inducente avvi una reciprocanza di azioni eguali fra loro e contrarie rappresentata dalla (a_{17}); quindi è che se agisce la inducente, reagirà nello stesso tempo la indotta di altrettanto sulla prima.

XI. Dalle vincolate $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots v_n$, sul piattello P, per effetto di reazione, abbiamo pel terzo metodo (§ 4) le seguenti equazioni:

$$v_1 = m^2 c_1, \quad v_2 = m^4 c_1, \quad v_3 = m^6 c_1, \ldots\ldots, v_n = m^{2n} c_1,$$

rappresentando rispettivamente con $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$, le quantità di elettrico libero avremo le seguenti equazioni:

$$v_1 + y_1 = c_1 \quad v_2 + y_2 = c_1 \quad v_3 + y_3 = c_1 \quad v_4 + y_4 = c_1 \ldots\ldots v_n + y_n = c_1$$

Il primo membro in ognuna di queste uguaglianze, rappresenta la somma della vincolata colla libera, la quale somma deve uguagliare c_1. Dalla (a_{17}) abbiamo:

$$v_1 = -\gamma_2$$

e dal (§ 4) abbiamo:

$$v_1 = m^2 c_1.$$

quindi avremo:

$$-\gamma_2 + y = c_1$$

e sostituendo il valore di γ_2 preso dalle (a_{18}) avremo:

$$\frac{m}{1-m} c_1 + y_1 = c_1,$$

ovvero

$$mc_1 + (1-m) y_1 = c_1 (1-m).$$

donde

$$y_1 = \frac{c_1(1-m) - m c_1}{1-m} = c_1 - \frac{mc_1}{1-m}.$$

Similmente operando avremo:

$$y_2 = c_1 - \frac{m^3 c_1}{1-m}, \quad y_3 = c_1 - \frac{m^5 c_1}{1-m}, \quad y_4 = c_1 - \frac{m^7 c_1}{1-m}, \; \ldots\ldots, \; y_n = c_1 - \frac{m^{2n-1} c_1}{1-m}.$$

Sommando tutte le riferite equazioni avremo:

$$S_n = nc_1 - \frac{mc_1}{1-m} \frac{1-(m^2)^n}{1-m^2}.$$

Abbiamo cioè la somma di n termini di elettricità libera sul piattello P, e questa somma va crescendo col numero dei termini stessi.

XII. Abbiamo veduto sull'ultimo del (§ 5), che ponendo $m = 1 - a$ e trascurando a^2 rispetto l'unità otterremo:

$$m^2 = 1 - 2a,$$

donde avremo la (a_{10}), ovvero la

$$\frac{E'}{E} = 4a.$$

Ora si esprima con E_1, quello che rappresenta E nell' indicato primo rapporto, e ponendo senz'altro $m = 1 - a$, abbiamo:

$$\frac{E'}{E_1} = 2a.$$

quindi avremo:

$$\frac{E'}{E_1} \frac{E}{E'} = \frac{2a}{4a},$$

quindi

$$2E = E_1,$$

donde

$$E_1 > E.$$

Perciò E nel caso di $m^2 = 1 - 2a$ è minore di E_1, che appartiene al caso di $m = 1 - a$.

La trasformazione piana doppia di terzo ordine, primo genere, e la sua applicazione alle curve del quarto ordine.

Memoria del dott. RICCARDO DE PAOLIS

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del 5 maggio 1878.

Le proprietà delle tangenti doppie delle curve di quart' ordine, che dimostro in questa prima parte servendomi della trasformazione, quasi tutte sono state trovate da Aronhold, Steiner, Hesse, Geiser, Cayley, Salmon, ..., nei loro noti e classici lavori.

Facendo le formole dirette ed inverse della trasformazione ho ottenuto l'equazione della curva limite, generale di quarto ordine, sotto una forma che dà separate le 28 equazioni delle sue tangenti doppie.

I risultati che trovo formano il materiale che mi serve per una nuova classe di proprietà delle tangenti doppie che tratterò nella seconda parte.

§ 1. Cubiche che passano per sette punti dati — Formole che danno il punto corrispondente in P ad un punto dato in P'.

1. Siano dati in un piano P', semplice, sette punti

$$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6 \quad p_7$$

arbitrarî; prendiamo $p_1\, p_2\, p_3$ come vertici del triangolo fondamentale, in modo che le equazioni dei lati

$$p_2 p_3 \quad p_3 p_1 \quad p_1 p_2$$

siano

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0\,,$$

prendiamo p_4 come punto unità, e chiamiamo

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \quad \beta_1 \beta_2 \beta_3 \quad \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$$

le coordinate dei rimanenti punti $p_5\, p_6\, p_7$.

Se poniamo

$$(1) \qquad \begin{array}{lll} u_1 = \alpha_2 - \alpha_3 & v_1 = \beta_2 - \beta_3 & w_1 = \gamma_2 - \gamma_3 \\ u_2 = \alpha_3 - \alpha_1 & v_2 = \beta_3 - \beta_1 & w_2 = \gamma_3 - \gamma_1 \\ u_3 = \alpha_1 - \alpha_2 & v_3 = \beta_1 - \beta_2 & w_3 = \gamma_1 - \gamma_2\,, \end{array}$$

abbiamo

$$(2) \qquad u_1 + u_2 + u_3 = 0 \quad v_1 + v_2 + v_3 = 0 \quad w_1 + w_2 + w_3 = 0\,,$$

e le equazioni

$$U = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \quad V = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0 \quad W = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 = 0$$

rappresentano le rette

$$p_4 p_5 \quad p_4 p_6 \quad p_4 p_7\,.$$

Le rette

$$p_6 p_7 \quad p_7 p_5 \quad p_5 p_6$$

hanno per equazioni

$$A = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \quad B = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0 \quad C = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

se

$$(3) \qquad \begin{array}{lll} a_1 = (\beta_2 \gamma_3) & b_1 = (\gamma_2 \alpha_3) & c_1 = (\alpha_2 \beta_3) \\ a_2 = (\beta_3 \gamma_1) & b_2 = (\gamma_3 \alpha_1) & c_2 = (\alpha_3 \beta_1) \\ a_3 = (\beta_1 \gamma_2) & b_3 = (\gamma_1 \alpha_2) & c_3 = (\alpha_1 \beta_2) . \end{array}$$

2. L'equazioni delle coniche circoscritte al triangolo fondamentale e che passano per i punti

$$p_4 p_5 \quad p_4 p_6 \quad p_4 p_7$$

sono

$$(4) \qquad \begin{array}{l} S_u = u_1 \alpha_1 x_2 x_3 + u_2 \alpha_2 x_3 x_1 + u_3 \alpha_3 x_1 x_2 = 0 \\ S_v = v_1 \beta_1 x_2 x_3 + v_2 \beta_2 x_3 x_1 + v_3 \beta_3 x_1 x_2 = 0 \\ S_w = w_1 \gamma_1 x_2 x_3 + w_2 \gamma_2 x_3 x_1 + w_3 \gamma_3 x_1 x_2 = 0 , \end{array}$$

e si possono anche scrivere sotto la forma

$$\begin{array}{l} S_u = (x_2 \alpha_3) x_1 \alpha_1 + (x_3 \alpha_1) x_2 \alpha_2 + (x_1 \alpha_2) x_3 \alpha_3 = 0 \\ S_v = (x_2 \beta_3) x_1 \beta_1 + (x_3 \beta_1) x_2 \beta_2 + (x_1 \beta_2) x_3 \beta_3 = 0 \\ S_w = (x_2 \gamma_3) x_1 \gamma_1 + (x_3 \gamma_1) x_2 \gamma_2 + (x_1 \gamma_2) x_3 \gamma_3 = 0 . \end{array}$$

Ponendo al posto delle x successivamente le $\alpha \beta \gamma$ troviamo per le (3)

$$(5) \qquad \begin{array}{ll} (S_u)_\beta = - C_{\alpha\beta} & (S_u)_\gamma = B_{\gamma\alpha} \\ (S_v)_\gamma = - A_{\beta\gamma} & (S_v)_\alpha = C_{\alpha\beta} \\ (S_w)_\alpha = - B_{\gamma\alpha} & (S_w)_\beta = A_{\beta\gamma} , \end{array}$$

avendo posto

$$A_{\beta\gamma} = a_1 \beta_1 \gamma_1 + a_2 \beta_2 \gamma_2 + a_3 \beta_3 \gamma_3 \quad B_{\gamma\alpha} = b_1 \gamma_1 \alpha_1 + b_2 \gamma_2 \alpha_2 + b_3 \gamma_3 \alpha_3 \quad C_{\alpha\beta} = c_1 \alpha_1 \beta_1 + c_2 \alpha_2 \beta_2 + c_3 \alpha_3 \beta_3 .$$

3. Le coniche $S_u\, S_v\, S_w$ rispettivamente insieme alle rette $A B C$ formano tre cubiche $L M N$ che passano per i sette punti dati, perciò una cubica qualunque della rete che determinano ha l'equazione della forma

$$(6) \qquad \Phi = \lambda L + \mu M + \nu N = 0 ;$$

se nel piano doppio P facciamo corrispondere alla cubica Φ la retta

$$\lambda y_1 + \mu y_2 + \nu y_3 = 0$$

le formole che ci danno le coordinate del punto y_1 che nel piano P corrisponde al punto x del piano semplice, sono

$$(7) \qquad y_1 : y_2 : y_3 = L : M : N .$$

4. Esistono sette cubiche (6) ciascuna delle quali ha un punto doppio in uno dei punti fondamentali p_i. Affinchè la (6) abbia un punto doppio in p_1, o p_2, o p_3, devono sparire i termini di primo grado in $x_2 x_3$, o $x_3 x_1$, o $x_1 x_2$, quindi dobbiamo porre

$$\lambda : \mu : \nu = b_1 c_1 (v_3 \beta_3 . w_2 \gamma_2) : c_1 a_1 (w_3 \gamma_3 . u_2 \alpha_2) : a_1 b_1 (u_3 \alpha_3 . v_2 \beta_2) ,$$

$$\text{o} \quad \lambda : \mu : \nu = b_2 c_2 (v_1 \beta_1 . w_3 \gamma_3) : c_2 a_2 (w_1 \gamma_1 . u_3 \alpha_3) : a_2 b_2 (u_1 \alpha_1 . v_3 \beta_3) ,$$

$$\text{o} \quad \lambda : \mu : \nu = b_3 c_3 (v_2 \beta_2 . w_1 \gamma_1) : c_3 a_3 (w_2 \gamma_2 . u_1 \alpha_1) : a_3 b_3 (u_2 \alpha_2 . v_1 \beta_1) .$$

Sostituendo nei precedenti determinanti di secondo ordine al posto delle uvw i loro valori dati dalle (1), ed ordinando i risultati rispetto a

$$\beta_1\gamma_1 \ \beta_2\gamma_2 \ \beta_3\gamma_3 \qquad \gamma_1\alpha_1 \ \gamma_2\alpha_2 \ \gamma_3\alpha_3 \qquad \alpha_1\beta_1 \ \alpha_2\beta_2 \ \alpha_3\beta_3$$

deduciamo

$$\begin{aligned} &(v_3\beta_3 \,.\, w_2\gamma_2) = (v_1\beta_1 \,.\, w_3\gamma_3) = (v_2\beta_2 \,.\, w_1\gamma_1) = \mathrm{A}_{\beta\gamma} \\ (8) \qquad &(w_3\gamma_3 \,.\, u_2\alpha_2) = (w_1\gamma_1 \,.\, u_3\alpha_3) = (w_2\gamma_2 \,.\, u_1\alpha_1) = \mathrm{B}_{\gamma\alpha} \\ &(u_3\alpha_3 \,.\, v_2\beta_2) = (u_1\alpha_1 \,.\, v_3\beta_3) = (u_2\alpha_2 \,.\, v_1\beta_1) = \mathrm{C}_{\alpha\beta} \,, \end{aligned}$$

quindi

$$\lambda:\mu:\nu = b_1c_1\,\mathrm{A}_{\beta\gamma} : c_1a_1\,\mathrm{B}_{\gamma\alpha} : a_1b_1\,\mathrm{C}_{\alpha\beta} \,,$$

$$\text{o} \quad \lambda:\mu:\nu = b_2c_2\,\mathrm{A}_{\beta\gamma} : c_2a_2\,\mathrm{B}_{\gamma\alpha} : a_2b_2\,\mathrm{C}_{\alpha\beta} \,,$$

$$\text{o} \quad \lambda:\mu:\nu = b_3c_3\,\mathrm{A}_{\beta\gamma} : c_3a_3\,\mathrm{B}_{\gamma\alpha} : a_3b_3\,\mathrm{C}_{\alpha\beta} \,,$$

e le tre cubiche cercate sono

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = b_1c_1\,\mathrm{A}_{\beta\gamma}\,.\,\mathrm{L} + c_1a_1\,\mathrm{B}_{\gamma\alpha}\,.\,\mathrm{M} + a_1b_1\,\mathrm{C}_{\alpha\beta}\,.\,\mathrm{N} = 0 \\ (9) \qquad &\Phi_2 = b_2c_2\,\mathrm{A}_{\beta\gamma}\,.\,\mathrm{L} + c_2a_2\,\mathrm{B}_{\gamma\alpha}\,.\,\mathrm{M} + a_2b_2\,\mathrm{C}_{\alpha\beta}\,.\,\mathrm{N} = 0 \\ &\Phi_3 = b_3c_3\,\mathrm{A}_{\beta\gamma}.\,\mathrm{L} + c_3a_3\,\mathrm{B}_{\gamma\alpha}\,.\,\mathrm{M} + a_3b_3\,\mathrm{C}_{\alpha\beta}\,.\,\mathrm{N} = 0 \,. \end{aligned}$$

5. Poniamo

$$A_\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 \qquad B_\beta = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 \qquad C_\gamma = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 \,,$$

e

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} ;$$

se H si sviluppa rispetto agli elementi α, oβ, oγ, ricordando le (3) troviamo

$$(10) \qquad H = A_\alpha = B_\beta = C_\gamma \,.$$

Se dalla seconda linea moltiplicata per α_1 togliamo la prima moltiplicata per α_2, e dalla terza moltiplicata per α_1 togliamo la prima moltiplicata per α_3, abbiamo

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & c_3 & -b_3 \\ 0 & -c_2 & b_2 \end{vmatrix} ,$$

questa relazione e le analoghe si possono scrivere come segue

$$\begin{aligned} &(b_2c_3) = \alpha_1\,\mathrm{H} \quad (b_3c_1) = \alpha_2\,\mathrm{H} \quad (b_1c_2) = \alpha_3\,\mathrm{H} \\ (11) \qquad &(c_2a_3) = \beta_1\,\mathrm{H} \quad (c_3a_1) = \beta_2\,\mathrm{H} \quad (c_1a_2) = \beta_3\,\mathrm{H} \\ &(a_2b_3) = \gamma_1\,\mathrm{H} \quad (a_3b_1) = \gamma_2\,\mathrm{H} \quad (a_1b_2) = \gamma_3\,\mathrm{H} \,. \end{aligned}$$

6. Se una cubica (6) ha un punto doppio in α devono essere soddisfatte le relazioni

$$(12) \quad \lambda\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_1}\right)_\alpha + \mu\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_1}\right)_\alpha + \nu\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x_1}\right)_\alpha = 0 \qquad \lambda\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_2}\right)_\alpha + \mu\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_2}\right)_\alpha + \nu\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x_2}\right)_\alpha = 0$$

$$\lambda\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_3}\right)_\alpha + \mu\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_3}\right)_\alpha + \nu\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x_3}\right)_\alpha = 0,$$

una qualunque delle quali è conseguenza delle altre due. Differenziando le LMN rispetto ad x_1 troviamo

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_1} = a_1\mathrm{S}_u + \mathrm{A}\,(u_2\,\alpha_2\,x_3 + u_3\,\alpha_3\,x_2) \qquad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_1} = b_1\,\mathrm{S}_v + \mathrm{B}\,(v_2\,\beta_2\,x_3 + v_3\,\beta_3\,x_2)$$

$$\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x_1} = c_1\,\mathrm{S}_w + \mathrm{C}\,(w_2\,\gamma_2\,x_3 + w_3\,\gamma_3\,x_2) \,,$$

ponendo le α al posto delle x, ed osservando che le rette BC e la conica S_u passano per α, abbiamo

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_\alpha = -H u_1 \alpha_2 \alpha_3 \quad \left(\frac{\partial M}{\partial x_1}\right)_\alpha = b_1 C_{\alpha\beta} \quad \left(\frac{\partial N}{\partial x_1}\right)_\alpha = -c_1 B_{\gamma\alpha} .$$

Con un semplice cambiamento di indici troviamo ciò che divengono le derivate rispetto alle x_2 x_3 quando si mettono le α al posto delle x, e così scriviamo le (12) sotto la forma

$$\begin{aligned} &\lambda u_1 \alpha_2 \alpha_3 H - \mu b_1 C_{\alpha\beta} + \nu c_1 B_{\gamma\alpha} = 0 \\ (13) \qquad &\lambda u_2 \alpha_3 \alpha_1 H - \mu b_2 C_{\alpha\beta} + \nu c_2 B_{\gamma\alpha} = 0 \\ &\lambda u_3 \alpha_1 \alpha_2 H - \mu b_3 C_{\alpha\beta} + \nu c_3 B_{\gamma\alpha} = 0 . \end{aligned}$$

Servendoci delle due prime deduciamo

$$\lambda : \mu : \nu = (b_2 c_1) B_{\gamma\alpha} C_{\alpha\beta} : (u_2 . \alpha_1 c_1) \alpha_3 B_{\gamma\alpha} H : (u_2 . \alpha_1 b_1) \alpha_3 C_{\alpha\beta} H ,$$

ponendo in queste equazioni e nelle analoghe, che risultano considerando la seconda e la terza o la terza e la prima delle (13), i valori di

$$(b_2 c_1) \quad (b_1 c_3) \quad (b_3 c_2)$$

dati dalle (11) abbiamo

$$\begin{aligned} &\lambda : \mu : \nu = B_{\gamma\alpha} C_{\alpha\beta} : (u_1 . \alpha_2 c_2) B_{\gamma\alpha} : (u_1 . \alpha_2 b_2) C_{\alpha\beta} , \\ \text{o} \quad &\lambda : \mu : \nu = B_{\gamma\alpha} C_{\alpha\beta} : (u_2 . \alpha_3 c_3) B_{\gamma\alpha} : (u_2 . \alpha_3 b_3) C_{\alpha\beta} , \\ \text{o} \quad &\lambda : \mu : \nu = B_{\gamma\alpha} C_{\alpha\beta} : (u_3 . \alpha_1 c_1) B_{\gamma\alpha} : (u_3 . \alpha_1 b_1) C_{\alpha\beta} . \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo si possono trovare i valori proporzionali a $\lambda \mu \nu$ per le cubiche (6) che hanno un punto doppio in β o γ. Se nei determinanti che entrano in questi valori eliminiamo $u v w$ colle (1), $a b c$ colle (3), ed ordiniamo rispetto ad $\alpha^2 \beta^2 \gamma^2$, troviamo

$$\begin{aligned} &(u_2 . \alpha_3 b_3) = (u_3 . \alpha_1 b_1) = (u_1 . \alpha_2 b_2) = b_1 \alpha_1^2 + b_2 \alpha_2^2 + b_3 \alpha_3^2 = B_{\alpha^2} \\ &(u_2 . \alpha_3 c_3) = (u_3 . \alpha_1 c_1) = (u_1 . \alpha_2 c_2) = c_1 \alpha_1^2 + c_2 \alpha_2^2 + c_3 \alpha_3^2 = C_{\alpha^2} \\ &(v_2 . \beta_3 c_3) = (v_3 . \beta_1 c_1) = (v_1 . \beta_2 c_2) = c_1 \beta_1^2 + c_2 \beta_2^2 + c_3 \beta_3^2 = C_{\beta^2} \\ (14) \qquad &(v_2 . \beta_3 a_3) = (v_3 . \beta_1 a_1) = (v_1 . \beta_2 a_2) = a_1 \beta_1^2 + a_2 \beta_2^2 + a_3 \beta_3^2 = A_{\beta^2} \\ &(w_2 . \gamma_3 a_3) = (w_3 . \gamma_1 a_1) = (w_1 . \gamma_2 a_2) = a_1 \gamma_1^2 + a_2 \gamma_2^2 + a_3 \gamma_3^2 = A_{\gamma^2} \\ &(w_2 . \gamma_3 b_3) = (w_3 . \gamma_1 b_1) = (w_1 . \gamma_2 b_2) = b_1 \gamma_1^2 + b_2 \gamma_2^2 + b_3 \gamma_3^2 = B_{\gamma^2} . \end{aligned}$$

Per queste equazioni le tre cubiche sono date da

$$\begin{aligned} &\lambda : \mu : \nu = B_{\gamma\alpha} C_{\alpha\beta} : B_{\gamma\alpha} C_{\alpha^2} : B_{\alpha^2} C_{\alpha\beta} \\ &\lambda : \mu : \nu = C_{\beta^2} A_{\beta\gamma} : C_{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} : C_{\alpha\beta} A_{\beta^2} \\ &\lambda : \mu : \nu = A_{\beta\gamma} B_{\gamma^2} : A_{\gamma^2} B_{\gamma\alpha} : A_{\beta\gamma} B_{\gamma\alpha} , \end{aligned}$$

ed hanno le equazioni

$$\begin{aligned} &\Phi_5 = B_{\gamma\alpha} C_{\alpha\beta} . L + B_{\gamma\alpha} C_{\alpha^2} . M + B_{\alpha^2} C_{\alpha\beta} . N = 0 \\ (15) \qquad &\Phi_6 = C_{\beta^2} A_{\beta\gamma} . L + C_{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} . M + C_{\alpha\beta} A_{\beta^2} . N = 0 \\ &\Phi_7 = A_{\beta\gamma} B_{\gamma^2} . L + A_{\gamma^2} B_{\gamma\alpha} . M + A_{\beta\gamma} B_{\gamma\alpha} . N = 0 . \end{aligned}$$

7. Ci rimane a trovare l'equazione della cubica (6) che ha un punto doppio nel punto unità. Nelle derivate delle LMN rispetto ad x_1 facciamo le x uguali ad 1,

osservando che allora le $S_u\, S_v\, S_w$ si annullano, perchè le tre coniche che rappresentano passano per p_4, abbiamo

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_1 = A_1 (u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3) \quad \left(\frac{\partial M}{\partial x_1}\right)_1 = B_1 (v_2 \beta_2 + v_3 \beta_3) \quad \left(\frac{\partial N}{\partial x_1}\right)_1 = C_1 (w_2 \gamma_2 + w_3 \gamma_3),$$

avendo posto

$$A_1 = a_1 + a_2 + a_3 \quad B_1 = b_1 + b_2 + b_3 \quad C_1 = c_1 + c_2 + c_3 ;$$

ma

$$U_\alpha = u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3 = 0 \quad V_\beta = v_1\beta_1 + v_2\beta_2 + v_3\beta_3 = 0 \quad W_\gamma = w_1\gamma_1 + w_2\gamma_2 + w_3\gamma_3 = 0,$$

perchè le rette $U\, V\, W$ passano per $p_5\, p_6\, p_7$, quindi

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_1 = - u_1 \alpha_1 A_1 \qquad \left(\frac{\partial M}{\partial x_1}\right)_1 = - v_1 \beta_1 B_1 \qquad \left(\frac{\partial N}{\partial x_1}\right)_1 = - w_1 \gamma_1 C_1 .$$

Analogamente si trovano i valori che acquistano le altre derivate facendo le x uguali ad 1, e le (12) divengono

$$\begin{aligned} \lambda u_1 \alpha_1 A_1 + \mu v_1 \beta_1 B_1 + \nu w_1 \gamma_1 C_1 &= 0 \\ \lambda u_2 \alpha_2 A_1 + \mu v_2 \beta_2 B_1 + \nu w_2 \gamma_2 C_1 &= 0 \\ \lambda u_3 \alpha_3 A_1 + \mu v_3 \beta_3 B_1 + \nu w_3 \gamma_3 C_1 &= 0 . \end{aligned}$$

Servendoci di due qualunque troviamo immediatamente per le (8)

$$\lambda : \mu : \nu = B_1 C_1 A_{\beta\gamma} : C_1 A_1 B_{\gamma\alpha} : A_1 B_1 C_{\alpha\beta} ,$$

e quindi la cubica cercata ha per equazione

$$\Phi_4 = B_1 C_1 A_{\beta\gamma} . L + C_1 A_1 B_{\gamma\alpha} . M + A_1 B_1 C_{\alpha\beta} . N = 0 .$$

§ 2. Formole della trasformazione congiunta.

8. Esiste un fascio di curve del quarto ordine che hanno un punto doppio in ciascuno dei punti $p_1\, p_2\, p_3$ e passano per gli altri quattro punti fondamentali. Fra le curve del fascio vi sono le

$$x_1 \Phi_1 = 0 \quad x_2 \Phi_2 = 0 \quad x_3 \Phi_3 = 0 ,$$

quindi dobbiamo avere una identità della forma

$$l_1 . x_1 \Phi_1 + l_2 . x_2 \Phi_2 + l_3 . x_3 \Phi_3 = 0 . \tag{19}$$

Si tratta di determinare i coefficienti l.

Chiamiamo $S_{23}\, S_{31}\, S_{12}$ le coniche che passano per i punti $p_4\, p_5\, p_6\, p_7$ e rispettivamente per $p_1\, p_2\, p_3$. Le loro equazioni

$$\begin{aligned} S_{23} &= a_1 u_1 A_1 . BC + b_1 v_1 B_1 . CA + c_1 w_1 C_1 . AB = 0 \\ S_{31} &= a_2 u_2 A_1 . BC + b_2 v_2 B_1 . CA + c_2 w_2 C_1 . AB = 0 \\ S_{12} &= a_3 u_3 A_1 . BC + b_3 v_3 B_1 . CA + c_3 w_3 C_1 . AB = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

si trovano facilmente. Appartenendo al fascio determinato dai punti $p_4\, p_5\, p_6\, p_7$ deve esistere una identità della forma

$$m_1 S_{23} + m_2 S_{31} + m_3 S_{12} = 0 . \tag{21}$$

Si tratta di determinare i coefficienti m.

9. I determinanti

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} u_2 & v_2 & w_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} u_3 & v_3 & w_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

sono identicamente nulli in virtù delle (1), quindi sviluppati per gli elementi delle loro prime linee, tenendo presenti le (3), ci danno

$$(22) \quad u_1a_1+v_1b_1+w_1c_1=0 \quad u_2a_2+v_2b_2+w_2c_2=0 \quad u_3a_3+v_3b_3+w_3c_3=0\,.$$

Ora scriviamo i seguenti trinomî

$$K_{23}=v_2w_2.u_3a_3\alpha_3+w_2u_2.v_3b_3\beta_3+u_2v_2.w_3c_3\gamma_3 \quad K_{32}=v_3w_3.u_2a_2\alpha_2+w_3u_3.v_2b_2\beta_2+u_3v_3.w_2c_2\gamma_2$$
$$K_{31}=v_3w_3.u_1a_1\alpha_1+w_3u_3.v_1b_1\beta_1+u_3v_3.w_1c_1\gamma_1 \quad K_{13}=v_1w_1.u_3a_3\alpha_3+w_1u_1.v_3b_3\beta_3+u_1v_1.w_3c_3\gamma_3$$
$$K_{12}=v_1w_1.u_2a_2\alpha_2+w_1u_1.v_2b_2\beta_2+u_1v_1.w_2c_2\gamma_2 \quad K_{21}=v_2w_2.u_1a_1\alpha_1+w_2u_2.v_1b_1\beta_1+u_2v_2.w_1c_1\gamma_1\,,$$

eliminando da essi i termini ua, o vb, o wc, per mezzo delle (22), abbiamo

$$K_{23}=(v_3b_3\,.\,w_2c_2)=(w_3c_3\,.\,u_2a_2)=(u_3a_3\,.\,v_2b_2)$$
$$K_{31}=(v_1b_1\,.\,w_3c_3)=(w_1c_1\,.\,u_3a_3)=(u_1a_1\,.\,v_3b_3)$$
$$K_{12}=(v_2b_2\,.\,w_1c_1)=(w_2c_2\,.\,u_1a_1)=(u_2a_2\,.\,v_1b_1)\,,$$

e

$$(23) \qquad K_{23}+K_{32}=0 \qquad K_{31}+K_{13}=0 \qquad K_{12}+K_{21}=0\,.$$

10. Nell'identità (19) devono annullarsi i coefficienti dei diversi termini nelle x, ponendo uguali a zero i coefficienti di $x^2_2x^2_3$, $x^2_3x^2_1$, $x^2_1x^2_2$ abbiamo

$$\begin{aligned} & l_2\,(a_3b_2c_2A_{\beta\gamma}\,.\,u_1\alpha_1+b_3c_2a_2B_{\gamma\alpha}\,.\,v_1\beta_1+c_3a_2b_2C_{\alpha\beta}\,.\,w_1\gamma_1) \\ & \quad +l_3\,(a_2b_3c_3A_{\beta\gamma}\,.\,u_1\alpha_1+b_2c_3a_3B_{\gamma\alpha}\,.\,v_1\beta_1+c_2a_3b_3C_{\alpha\beta}\,.\,w_1\gamma_1)=0 \\ (24) \quad & l_3\,(a_1b_3c_3A_{\beta\gamma}\,.\,u_2\alpha_2+b_1c_3a_3B_{\gamma\alpha}\,.\,v_2\beta_2+c_1a_3b_3C_{\alpha\beta}\,.\,w_2\gamma_2) \\ & \quad +l_1\,(a_3b_1c_1A_{\beta\gamma}\,.\,u_2\alpha_2+b_3c_1a_1B_{\gamma\alpha}\,.\,v_2\beta_2+c_3a_1b_1C_{\alpha\beta}\,.\,w_2\gamma_2)=0 \\ & l_1\,(a_2b_1c_1A_{\beta\gamma}\,.\,u_3\alpha_3+b_2c_1a_1B_{\gamma\alpha}\,.\,v_3\beta_3+c_2a_1b_1C_{\alpha\beta}\,.\,w_3\gamma_3) \\ & \quad +l_2\,(a_1b_2c_2A_{\beta\gamma}\,.\,u_3\alpha_3+b_1c_2a_2B_{\gamma\alpha}\,.\,v_3\beta_3+c_1a_2b_2C_{\alpha\beta}\,.\,w_3\gamma_3)=0. \end{aligned}$$

Prendiamo

$$a_3b_2c_2A_{\beta\gamma}\,.\,u_1\alpha_1+b_3c_2a_2B_{\gamma\alpha}\,.\,v_1\beta_1+c_3a_2b_2C_{\alpha\beta}\,.\,w_1\gamma_1\,,$$

che è uno dei coefficienti delle l; ponendo al posto di $A_{\beta\gamma}$ $B_{\gamma\alpha}$ $C_{\alpha\beta}$ i valori dati dalle (8) il coefficiente si muta nel determinante

$$\begin{vmatrix} a_3u_1\alpha_1 & b_3v_1\beta_1 & c_3w_1\gamma_1 \\ a_2u_2\alpha_2 & b_2v_2\beta_2 & c_2w_2\gamma_2 \\ a_2u_1\alpha_1 & b_2v_1\beta_1 & c_2w_1\gamma_1 \end{vmatrix}\,,$$

che sviluppato rispetto agli elementi della seconda linea diviene

$$a_2u_2\alpha_2\,.\,v_1\beta_1w_1\gamma_1(b_2c_3)+b_2v_2\beta_2\,.\,w_1\gamma_1u_1\alpha_1(c_2a_3)+c_2w_2\gamma_2\,.\,u_1\alpha_1v_1\beta_1(a_2b_3)\,,$$

ovvero per le (11)

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1H(v_1w_1\,.\,u_2a_2\alpha_2+w_1u_1v_2b_2\beta_2+u_1v_1\,.\,w_2c_2\gamma_2)=\alpha_1\beta_1\gamma_1HK_{12}\,.$$

Facendo subire analoghe trasformazioni agli altri coefficienti delle l, e ricordando le (23), le (24) divengono

$$l_2K_{12}-l_3K_{31}=0 \quad l_3K_{23}-l_1K_{12}=0 \quad l_1K_{31}-l_2K_{23}=0$$

dalle quali si deduce

$$l_1 : l_2 : l_3 = K_{23} : K_{31} : K_{12} \,,$$

e quindi

$$\mathrm{K}_{23} \,.\, x_1 \Phi_1 + \mathrm{K}_{31} \,.\, x_2 \Phi_2 + \mathrm{K}_{12} \,.\, x_3 \Phi_3 = 0 \,. \tag{25}$$

11. Per determinare le m facciamo successivamente uguali a zero le $x_2 x_3$, $x_3 x_1$, $x_1 x_2$ nella (21), allora per la forma delle (20) abbiamo

$$\begin{aligned} &m_2(a_2u_2\mathrm{A}_1b_1c_1+b_2v_2\mathrm{B}_1c_1a_1+c_2w_2\mathrm{C}_1a_1b_1)+m_3(a_3u_3\mathrm{A}_1b_1c_1+b_3v_3\mathrm{B}_1c_1a_1+c_3w_3\mathrm{C}_1a_1b_1)=0\\ &m_3(a_3u_3\mathrm{A}_1b_2c_2+b_3v_3\mathrm{B}_1c_2a_2+c_3w_3\mathrm{C}_1a_2b_2)+m_1(a_1u_1\mathrm{A}_1b_2c_2+b_1v_1\mathrm{B}_1c_2a_2+c_1w_1\mathrm{C}_1a_2b_2)=0\\ &m_1(a_1u_1\mathrm{A}_1b_3c_3+b_1v_1\mathrm{B}_1c_3a_3+c_1w_1\mathrm{C}_1a_3b_3)+m_2(a_2u_2\mathrm{A}_1b_3c_3+b_2v_2\mathrm{B}_1c_3a_3+c_2w_2\mathrm{C}_1a_3b_3)=0. \end{aligned} \tag{26}$$

Il coefficiente

$$a_2 u_2 \mathrm{A}_1 b_1 c_1 + b_2 v_2 \mathrm{B}_1 c_1 a_1 + c_2 w_2 \mathrm{C}_1 a_1 b_1$$

ponendo al posto di $a_2\, u_2$ il valore tratto dalla seconda delle (22) diviene

$$c_1 \,.\, b_2 v_2 (\mathrm{B}_1 a_1 - \mathrm{A}_1 b_1) + b_1 \,.\, c_2 w_2 (\mathrm{C}_1 a_1 - \mathrm{A}_1 c_1),$$

ovvero

$$c_1 . b_2 v_2 \left\{ (a_1 b_2) - (a_3 b_1) \right\} + b_1 . c_2 w_2 \left\{ (c_3 a_1) - (c_1 a_2) \right\}$$

e per le (11) (1)

$$H(b_1 v_1 \,.\, c_2 w_2) = HK_{21} \,.$$

Dopo aver operato analogamente sugli altri coefficienti, avuto riguardo alle (23), possiamo scrivere le (26) sotto la forma

$$m_2 \mathrm{K}_{12} - m_3 \mathrm{K}_{31} = 0 \qquad m_3 \mathrm{K}_{23} - m_1 \mathrm{K}_{12} = 0 \qquad m_1 \mathrm{K}_{31} - m_2 \mathrm{K}_{23} = 0 \,;$$

quindi

$$m_1 : m_2 : m_3 = \mathrm{K}_{23} : \mathrm{K}_{31} : \mathrm{K}_{12} \,,$$

e l'identità (21) è

$$\mathrm{K}_{23}\, \mathrm{S}_{23} + \mathrm{K}_{31}\, \mathrm{S}_{31} + \mathrm{K}_{12}\, \mathrm{S}_{12} = 0 \,. \tag{27}$$

12. Ad una retta qualunque del piano semplice è congiunta una curva di ottavo ordine che ha sette punti tripli nei punti p_i. Ad un punto p_i è congiunta la cubica che passa per gli altri sei punti fondamentali ed ha un punto doppio in p_i (¹); le sette cubiche fondamentali sono le Φ_i. Se invece di una retta qualunque consideriamo la retta $p_r p_s$ la curva congiunta si spezza nelle cubiche $\Phi_r\ \Phi_s$ ed in una conica che è quella determinata dagli altri cinque punti fondamentali; da ciò discende immediatamente che le formole della trasformazione congiunta sono

$$\mathbf{x}_1 : \mathbf{x}_2 : \mathbf{x}_3 = h_1 \,.\, \Phi_2 \Phi_3 \mathrm{S}_{23} : h_2 \,.\, \Phi_3 \Phi_1 \mathrm{S}_{31} : h_3\, \Phi_1 \Phi_2 \mathrm{S}_{12} \,, \tag{28}$$

dove restano a determinarsi convenientemente le h. Per ottenerle prendiamo l'identità (27) e moltiplichiamola per $\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3$, allora diviene

$$\mathrm{K}_{23} \Phi_1 \,.\, \Phi_2 \Phi_3 \mathrm{S}_{23} + \mathrm{K}_{31} \Phi_2 \,.\, \Phi_3 \Phi_1 \mathrm{S}_{31} + \mathrm{K}_{12} \Phi_3 \,.\, \Phi_1 \Phi_2 \mathrm{S}_{12} = 0 \,;$$

(¹) De Paolis, *Le trasformazioni piane doppie*. R. Accademia dei Lincei 1876-77, n. 28.

ora un' espressione della forma

$$\lambda \Phi_1 + \mu \Phi_2 + \nu \Phi_3 ,$$

siccome posta uguale a zero rappresenta una cubica congiunta a sè stessa, non cambia, astrazione fatta da un fattore costante, quando dalle x si passa alle $\mathbf{x}$, quindi per le (28) la (29) si muta in

$$\frac{K_{23}}{h_1} . x_1 \Phi_1 + \frac{K_{31}}{h_2} . x_2 \Phi_2 + \frac{K_{12}}{h_3} . x_3 \Phi_3 = 0 ,$$

che paragonata colla (23) dà

$$h_1 = h_2 = h_3$$

e

(30) $$\mathbf{x}_1 : \mathbf{x}_2 : \mathbf{x}_3 = \Phi_2 \Phi_3 S_{23} : \Phi_3 \Phi_1 S_{31} : \Phi_1 \Phi_2 S_{12} ,$$

che sono le vere formole della trasformazione congiunta.

§ 3. Formole per le quali si passa da un punto di P ai punti corrispondenti in P′ — Equazioni della curva limite e della curva doppia.

13. Fra tutte le cubiche che passano per i punti p_i abbiamo

$$x_1 S_{23} = 0 \qquad x_2 S_{31} = 0 \qquad x_3 S_{12} = 0 ,$$

quindi possiamo sempre determinare le $\rho \lambda \mu \nu$ in modo che siano soddisfatte identicamente le equazioni

(31) $$\begin{aligned} &\rho_1 (\lambda_1 L + \mu_1 M + \nu_1 N) + x_1 S_{23} = 0 \\ &\rho_2 (\lambda_2 L + \mu_2 M + \nu_2 N) + x_2 S_{31} = 0 \\ &\rho_3 (\lambda_3 L + \mu_3 M + \nu_3 N) + x_3 S_{12} = 0 . \end{aligned}$$

Considerando la prima e ponendo uguali a zero i coefficienti dei termini $x^2_2 x_3$, $x_2 x^2_3$ abbiamo

$$\begin{aligned} &\lambda_1 a_2 u_1 \alpha_1 + \mu_1 b_2 v_1 \beta_1 + \nu_1 c_2 w_1 \gamma_1 = 0 \\ &\lambda_1 a_3 u_1 \alpha_1 + \mu_1 b_3 v_1 \beta_1 + \nu_1 c_3 w_1 \gamma_1 = 0 , \end{aligned}$$

da cui

$$\lambda_1 : \mu_1 : \nu_1 = v_1 \beta_1 w_1 \gamma_1 (b_2 c_3) : w_1 \gamma_1 u_1 \alpha_1 (c_2 a_3) : u_1 \alpha_1 v_1 \beta_1 (a_2 b_3) ,$$

adoperando le (11) e considerando le altre (31) abbiamo

$$\begin{aligned} &\lambda_1 : \mu_1 : \nu_1 = v_1 w_1 : w_1 u_1 : u_1 v_1 \\ &\lambda_2 : \mu_2 : \nu_2 = v_2 w_2 : w_2 u_2 : u_2 v_2 \\ &\lambda_3 : \mu_3 : \nu_3 = v_3 w_3 : w_3 u_3 : u_3 v_3 . \end{aligned}$$

Per determinare le ρ nei termini che moltiplicano x_1 facciamo uguali a zero le x_1 x_3, allora la prima delle (31) diviene

$$\rho_1 (v_1 w_1 a_2 u_3 \alpha_3 + w_1 u_1 b_2 v_3 \beta_3 + u_1 v_1 c_2 w_3 \gamma_3) + (a_1 u_1 A_1 b_2 c_2 + b_1 v_1 B_1 c_2 a_2 + c_1 w_1 C_1 a_2 b_2) = 0,$$

e se dalle (17) troviamo

$$u_3 \alpha_3 \qquad v_3 \beta_3 \qquad w_3 \gamma_3$$

e poniamo i valori in questa equazione deduciamo

$$\rho_1 \left\{ u_1 v_1 w_1 (a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + c_2 \gamma_1) + (v_1 w_1 a_2 u_2 \alpha_2 + w_1 u_1 b_1 v_2 \beta_2 + u_1 v_1 c_2 w_2 \gamma_2) \right\}$$
$$= a_1 u_1 A_1 b_2 c_2 + b_1 v_1 B_1 c_2 a_2 + c_1 w_1 C_1 a_2 b_2 .$$

La prima parte del fattore di ρ_1 è nulla perchè

$$a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0,$$

la seconda parte è K_{12}, il secondo membro è HK_{12}, quindi

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = H,$$

e le (31) divengono

$$\begin{aligned} &H(v_1 w_1 L + w_1 u_1 M + u_1 v_1 N) + x_1 S_{23} = 0 \\ &H(v_2 w_2 L + w_2 u_2 M + u_2 v_2 N) + x_2 S_{31} = 0 \\ &H(v_3 w_3 L + w_3 u_3 M + u_3 v_3 N) + x_3 S_{12} = 0, \end{aligned}$$

dalle quali si stabilisce che quando dalle x si passa alle y le

$$x_1 S_{23} \qquad x_2 S_{31} \qquad x_3 S_{12}$$

divengono proporzionali a

$$\begin{aligned} T_1 &= v_1 w_1 y_1 + w_1 u_1 y_2 + u_1 v_1 y_3 \\ T_2 &= v_2 w_2 y_1 + w_2 u_2 y_2 + u_2 v_2 y_3 \qquad (32) \\ T_3 &= v_3 w_3 y_1 + w_3 u_3 y_2 + u_3 v_3 y_3 . \end{aligned}$$

Risulta poi immediatamente dalle (9) che mutando le x nelle y le $\Phi_1\ \Phi_2\ \Phi_3$ divengono proporzionali a

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= b_1 c_1 A_{\beta\gamma} y_1 + c_1 a_1 B_{\gamma\alpha} y_2 + a_1 b_1 C_{\alpha\beta} y_3 \\ \Theta_2 &= b_2 c_2 A_{\beta\gamma} y_1 + c_2 a_2 B_{\gamma\alpha} y_2 + a_2 b_2 C_{\alpha\beta} y_3 \qquad (33) \\ \Theta_3 &= b_3 c_3 A_{\beta\gamma} y_1 + c_3 a_3 B_{\gamma\alpha} y_2 + a_3 b_3 C_{\alpha\beta} y_3 . \end{aligned}$$

14. Se prendiamo in P' una retta

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0 \qquad (34)$$

stante le (30) abbiamo

$$\lambda_1 \Phi_2 \Phi_3 S_{23} + \lambda_2 \Phi_3 \Phi_1 S_{31} + \lambda_3 \Phi_1 \Phi_2 S_{12} = 0$$

come curva congiunta; facendo il prodotto di queste due equazioni si trova

$$\begin{aligned} &\lambda^2_1 \Phi_2 \Phi_3 x_1 S_{23} + \lambda^2_2 \Phi_3 \Phi_1 x_2 S_{31} + \lambda^2_3 \Phi_1 \Phi_2 S_{12} + \lambda_1 \lambda_3 \Phi_1 (\Phi_2 x_2 S_{12} + \Phi_3 x_3 S_{31}) \\ &\quad + \lambda_3 \lambda_1 \Phi_2 (\Phi_3 x_3 S_{23} + \Phi_1 x_1 S_{12}) + \lambda_1 \lambda_2 \Phi_3 (\Phi_1 x_1 S_{31} + \Phi_2 x_2 S_{23}) = 0, \end{aligned}$$

la quale per mezzo delle identità (25) (27) può prendere la forma

$$\begin{aligned} &K_{23} K_{31} K_{12} (\lambda^2_1 \Phi_2 \Phi_3 x_1 S_{23} + \lambda^2_2 \Phi_3 \Phi_1 x_2 S_{31} + \lambda^2_3 \Phi_1 \Phi_2 x_3 S_{12}) \\ &- \lambda_2 \lambda_3 K_{23} \Phi_1 (- K^2_{23} \Phi_1 x_1 S_{23} + K^2_{31} \Phi_2 x_2 S_{31} + K^2_{12} \Phi_3 x_3 S_{12}) \\ &- \lambda_3 \lambda_1 K_{31} \Phi_2 (K^2_{23} \Phi_1 x_1 S_{23} - K^2_{31} \Phi_2 x_2 S_{31} + K^2_{12} \Phi_3 x_3 S_{12}) \\ &- \lambda_1 \lambda_2 K_{12} \Phi_3 (K^2_{23} \Phi_1 x_1 S_{23} + K^2_{31} \Phi_2 x_2 S_{31} - K^2_{12} \Phi_3 x_3 S_{12}) = 0, \end{aligned}$$

che è omogenea rispetto alle

$$x_1 S_{23} \qquad x_2 S_{31} \qquad x_3 S_{12}$$

ed alle

$$\Phi_1 \qquad \Phi_2 \qquad \Phi_3$$

e che quindi cambiando le x nelle y diviene

$$\begin{aligned} &K_{23} K_{31} K_{12} (\lambda^2_1 T_1 \Theta_2 \Theta_3 + \lambda^2_2 T_2 \Theta_3 \Theta_1 + \lambda^2_3 T_3 \Theta_1 \Theta_2) \\ &\quad - \lambda_2 \lambda_3 (- K^2_{23} T_1 \Theta_1 + K^2_{31} T_2 \Theta_2 + K^2_{12} T_3 \Theta_3) K_{23} \Theta_1 \\ &\quad - \lambda_3 \lambda_1 (K^2_{23} T_1 \Theta_1 - K^2_{31} T_2 \Theta_2 + K^2_{12} T_3 \Theta_3) K_{31} \Theta_2 \\ &\quad - \lambda_1 \lambda_2 (K^2_{23} T_1 \Theta_1 + K^2_{31} T_2 \Theta_2 - K^2_{12} T_3 \Theta_3) K_{12} \Theta_3 = 0, \end{aligned}$$

ovvero

$$(35)\qquad \begin{vmatrix} 0 & K_{12}T_3 & K_{31}T_1 & K_{23}\Theta_1 & \lambda_1 \\ K_{12}T_3 & 0 & K_{23}T_1 & K_{31}\Theta_2 & \lambda_2 \\ K_{31}T_2 & K_{23}T_1 & 0 & K_{12}\Theta_3 & \lambda_3 \\ K_{23}\Theta_1 & K_{31}\Theta_2 & K_{12}\Theta_3 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa equazione di terzo grado nelle y rappresenta la cubica corrispondente alla retta (34) del piano semplice, variando le λ si hanno tutte le cubiche del sistema corrispondente alle rette di P', queste cubiche toccano la curva limite del quarto ordine in sei punti variabili, ed hanno un punto doppio pure variabile [1].

15. Indicando con

$$\Sigma\Sigma\Delta_{rs}\lambda_r\lambda_s$$

lo sviluppo del determinante (35), per una nota proprietà abbiamo

$$(36)\qquad \Sigma\Sigma\Delta_{rs}\lambda_r\lambda_s\,.\,\Sigma\Sigma\Delta_{rs}\theta_r\theta_s - (\Sigma\Sigma\Delta_{rs}\lambda_r\theta_s)^2 = -\Omega \begin{vmatrix} K_{23}\Theta_1 & \lambda_1 & \theta_1 \\ K_{31}\Theta_2 & \lambda_2 & \theta_2 \\ K_{12}\Theta_3 & \lambda_3 & \theta_3 \end{vmatrix}$$

dove $\theta_1\ \theta_2\ \theta_3$ sono costanti arbitrarie, e

$$(37)\qquad \Omega = \begin{vmatrix} 0 & K_{12}T_3 & K_{31}T_2 & K_{23}\Theta_1 \\ K_{12}T_3 & 0 & K_{23}T_1 & K_{31}\Theta_2 \\ K_{31}T_2 & K_{23}T_1 & 0 & K_{12}\Theta_3 \\ K_{23}\Theta_1 & K_{31}\Theta_2 & K_{12}\Theta_3 & 0 \end{vmatrix};$$

ma per la (35)

$$\Sigma\Sigma\Delta_{rs}\lambda_r\lambda_s = 0\,,$$

dunque la (36) diviene

$$\Sigma\Sigma\Delta_{rs}\lambda_r\theta_s \pm \begin{vmatrix} K_{23}\Theta_1 & \lambda_1 & \theta_1 \\ K_{31}\Theta_2 & \lambda_2 & \theta_2 \\ K_{12}\Theta_3 & \lambda_3 & \theta_3 \end{vmatrix} \sqrt{\Omega} = 0\,.$$

Paragonando i coefficienti delle λ in questa equazione coi coefficienti delle λ nella (34) abbiamo

$$x_1 \equiv \Delta_{11}\theta_1 + \Delta_{12}\theta_2 + \Delta_{13}\theta_3 \pm (K_{31}\Theta_2\theta_3 - K_{12}\Theta_3\theta_2)\sqrt{\Omega}$$
$$x_2 \equiv \Delta_{21}\theta_1 + \Delta_{22}\theta_2 + \Delta_{23}\theta_3 \pm (K_{12}\Theta_3\theta_1 - K_{23}\Theta_1\theta_3)\sqrt{\Omega}$$
$$x_3 \equiv \Delta_{31}\theta_1 + \Delta_{32}\theta_2 + \Delta_{33}\theta_3 \pm (K_{23}\Theta_1\theta_2 - K_{31}\Theta_2\theta_1)\sqrt{\Omega}\,,$$

che sono le formole inverse delle (7) e servono a darci i punti di P' che corrispondono a dati punti di P.

16. L'equazione della curva limite, del quarto ordine, è

$$\Omega = 0\,,$$

ossia

$$K_{23}\sqrt{T_1\Theta_1} + K_{31}\sqrt{T_2\Theta_2} + K_{12}\sqrt{T_3\Theta_3} = 0\,.$$

Per ottenere l'equazione della curva doppia basta porre nella (37) al posto di

$$T_1\ T_2\ T_3 \qquad \Theta_1\ \Theta_2\ \Theta_3$$

[1] L. c. n. 28.

i valori

$$x_1\,S_{23}\;x_2\,S_{31}\;x_3\,S_{12}\qquad \Phi_1\;\Phi_2\;\Phi_3$$

proporzionali, ed allora abbiamo

$$\Omega'^2 = \begin{vmatrix} 0 & K_{12}\,x_3\,S_{12} & K_{31}\,x_2\,S_{31} & K_{23}\,\Phi_1 \\ K_{12}\,x_3\,S_{12} & 0 & K_{23}\,x_1\,S_{23} & K_{31}\,\Phi_2 \\ K_{31}\,x_2\,S_{31} & K_{23}\,x_1\,S_{23} & 0 & K_{12}\,\Phi_3 \\ K_{23}\,\Phi_1 & K_{31}\,\Phi_2 & K_{12}\,\Phi_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

che è il quadrato dell'equazione della curva doppia perchè ad un punto della Ω corrispondono due punti infinitamente vicini. Per le (25) (27) possiamo facilmente estrarre la radice e l'equazione può prendere le forme

$$x_2\,\Phi_2\,S_{12} - x_3\,\Phi_3\,S_{31} = 0 \quad x_3\,\Phi_3\,S_{23} - x_1\,\Phi_1\,S_{12} = 0 \quad x_1\,\Phi_1\,S_{31} - x_2\,\Phi_2\,S_{23} = 0\,.$$

§ 4. Corrispondenza tra i punti e le rette dei piani P, P'. Costruzione della trasformazione doppia.

17. La curva K', luogo delle coppie di punti congiunti situati sulle rette che passano per m', è la cubica che passa per i sette punti fondamentali, per m', per il punto congiunto $\mathbf{m}'$, e tocca in m' la retta $m'\,\mathbf{m}'$ (¹). La K' taglia in due punti variabili una cubica descritta per i punti p_i, quindi le rette determinate dalle coppie di punti congiunti di una cubica, corrispondente ad una retta del piano doppio, passano per un punto I' della cubica (the coresidual).

Facciamo corrispondere ad un punto p la retta $p'\,\mathbf{p}'$. Una retta di P' è tagliata in otto punti dalla curva congiunta, sei sono i punti d' incontro colla curva doppia, congiunti a se stessi, gli altri due $p'\,\mathbf{p}'$ formano la sola coppia di punti congiunti situati sulla retta, quindi la retta è data dal solo punto p di P. Ad una retta di P corrisponde un punto di P', perchè l'inviluppo delle rette determinate dalle coppie di punti congiunti corrispondenti ai punti della retta è un punto; ad un punto m' di P' corrisponde la retta corrispondente alla K' relativa ad m', perchè è il luogo dei punti doppî delle cubiche corrispondenti alle rette che passano per m'. In questo modo viene stabilita una dualità tra P e P'; un punto o della quartica limite dà la retta principale del punto o' (²) corrispondente sulla curva doppia, e viceversa una retta principale dà un punto della quartica limite; ma alle rette di P' che passano per un punto corrispondono i punti di P che stanno sopra una retta, dunque l'inviluppo delle rette principali è una curva della quarta classe. Ad una tangente della curva limite corrisponde un punto dell' inviluppo delle rette principali, che è il punto I' della cubica corrispondente alla tangente; ma questa cubica è dotata di un punto doppio non fondamentale (³), dunque l'inviluppo delle rette principali è il luogo dei punti I' delle cubiche della rete dotate di un punto doppio; il suo ordine è 16, uguale alla classe della curva limite.

(¹) Per le considerazioni di questo numero vedi l. c. n. 16, 17, 28.— (²) L. c. n. 2.— (³) L. c. n. 12, VII.

18. Trasformiamo il piano P' univocamente in se stesso con una trasformazione quadratica. I due triangoli fondamentali siano $p_1 p_2 p_3$, $p'_1 p'_2 p'_3$; ad una retta R', considerata appartenente al piano del primo triangolo, corrisponderà una conica C'' circoscritta al triangolo $p'_1 p'_2 p'_3$, ad una retta R'', considerata appartenente al piano del secondo triangolo, corrisponderà una conica C' circoscritta al triangolo $p_1 p_2 p_3$; un punto p' avrà per corrispondente un punto p'' se si considera appartenente al primo piano, ed un altro punto se si considera appartenente al secondo.

I vertici $p_1 p_2 p_3$ abbiano per corrispondenti i lati $p'_2 p'_3$ $p'_3 p'_1$ $p'_1 p'_2$, ed i vertici $p'_1 p'_2 p'_3$ corrispondano ai lati $p_2 p_3$ $p_3 p_1$ $p_1 p_2$. Se conduciamo una retta R' per p_1 la conica C' si spezza nel lato $p'_2 p'_3$ ed in una retta R'' che passa per p'_1, quindi abbiamo tre fasci di rette R' coi centri in p_1 p_2 p_3, ai quali corrispondono tre fasci projettivi di rette R'' coi centri in $p'_1 p'_2 p'_3$. Preso un punto p' se tiriamo le rette $p'(p_1 p_2 p_3)$ le corrispondenti nei fasci projettivi sono $p''(p'_1 p'_2 p'_3)$, e si tagliano nel punto p'' corrispondente a p', quindi fissati i due triangoli fondamentali e la projettività, per es. tra i fasci $p_1 p'_1$ $p_2 p'_2$, viene fissata quella tra i fasci $p_3 p'_3$ e la corrispondenza quadratica che trasforma P' in se stesso.

19. I fasci projettivi $p_1 p'_1$ $p_2 p'_2$ $p_3 p'_3$ generano tre coniche C_1 C_2 C_3 che passano per $p_1 p'_1$ $p_2 p'_2$ $p_3 p'_3$ ed hanno comuni quattro punti p_4 p_5 p_6 p_7; per uno di questi punti passano tre raggi dei fasci p_1 p_2 p_3 e i tre corrispondenti dei fasci p'_1 p'_2 p'_3, quindi i punti $p_4 p_5 p_6 p_7$ sono punti uniti del piano P', cioè punti che corrispondono a se stessi.

20. Abbiamo già detto come si fa a trovare il punto corrispondente ad un punto dato, ora vediamo come si trova la conica corrispondente ad una retta R''. Prendiamo sulla R'' un punto p'' e tiriamo le rette $p''(p'_1 p'_2 p'_3)$, i raggi corrispondenti $p'(p_1 p_2 p_3)$ insieme alle rette $p_2 p_3$ $p_3 p_1$ $p_1 p_2$ formano le tre coniche C' corrispondenti e tagliano la R'' in tre coppie di punti che determinano due punteggiate projettive sovrapposte, i due punti uniti sono le intersezioni della R'' colla conica corrispondente C', quindi C' è determinata dai due punti uniti e da $p_1 p_2 p_3$. Analogamente si può costruire la conica C'' corrispondente ad una retta R'.

21. Se prendiamo ad arbitrio uno dei triangoli fondamentali, per es. $p_1 p_2 p_3$, e i quattro punti uniti $p_4 p_5 p_6 p_7$, la trasformazione è individuata. Basta far vedere che viene determinato il triangolo $p'_1 p'_2 p'_3$ e la projettività tra i fasci $p_1 p'_1$ $p_2 p'_2$ $p_3 p'_3$. Costruiamo le coniche C_1 C_2 C_3 che sono determinate dai punti

$$p_1 p_4 p_5 p_6 p_7 \quad p_2 p_4 p_5 p_6 p_7 \quad p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 .$$

I raggi $p_1 p_2$ $p_1 p_3$ tagliano la C_1 in p_1 ed in altri due punti $c_1 b_1$, analogamente diremo $a_2 c_2$ e $b_3 a_3$ le intersezioni ulteriori di $p_2 p_3$ $p_2 p_1$ con C_2 e di $p_3 p_1$ $p_3 p_2$ con C_3. Ora la retta $p'_1 p'_3$ considerata come appartenente al fascio p'_1 ha per corrispondente la retta $p_1 p_2$, e siccome la taglia sulla C_1, passa per c_1; considerata come raggio del fascio p'_3 ha per corrispondente la retta $p_3 p_2$, e siccome la taglia sulla C_3, passa per a_3. Congiungendo $a_3 c_1$ abbiamo la retta $p'_1 p'_3$, analogamente troviamo le $p'_3 p'_2$, $p'_2 p'_1$, e vediamo che i punti cercati sono i vertici del triangolo

$$a_3 c_1 \quad b_1 a_2 \quad c_2 b_3 .$$

Così abbiamo determinato non solamente l'altro triangolo fondamentale, ma anche la

projettività dei fasci $p_1 p_2 p_3$ $p'_1 p'_2 p'_3$, perchè le rette $p_1(p_4 p_5 p_6 p_7)$, devono corrispondere alle rette $p'_1(p_4 p_5 p_6 p_7)$, ecc., essendo $p_4 p_5 p_6 p_7$ punti uniti.

22. Applichiamo le considerazioni precedenti alla nostra trasformazione doppia. Sopra una retta R'' di P' abbiamo una sola coppia di punti congiunti $p' \mathbf{p}'$, chiamiamo C' la conica determinata da $p' \mathbf{p}'$ e da tre dei sette punti fondamentali, per es. $p_1 p_2 p_3$, in questo modo facciamo corrispondere ad ogni retta R'' una conica C'. Viceversa prendiamo una conica C' circoscritta a $p_1 p_2 p_3$, la curva congiunta è del settimo ordine ed ha un punto doppio in ciascuno dei punti $p_1 p_2 p_3$, quindi taglia la C' in otto punti non fondamentali, sei appartengono alla curva doppia, gli altri due $p' \mathbf{p}'$ sono congiunti e determinano la retta R''. La corrispondenza tra le rette R'' e le coniche C' è dunque univoca, e trasforma il piano P' univocamente in se stesso. Se facciamo passare la R'' per p_4 la coppia di punti congiunti situati sulla retta è formata dal punto infinitamente vicino a p_4, e dall' ulteriore intersezione della R'' colla cubica fondamentale Φ_4, quindi la C' corrispondente alla R'' passa per p_4, e viceversa se una C' passa per p_4, vi passa anche la R'' corrispondente, dunque i punti $p_4 p_5 p_6 p_7$ sono i quattro punti uniti della trasformazione quadratica, che perciò viene del tutto stabilita dai punti p_i, ed abbiamo veduto come si determina il triangolo $p'_1 p'_2 p'_3$, la projettività tra i fasci $p_1 p_2 p_3$ $p'_1 p'_2 p'_3$, e come si trova il punto p'' corrispondente a p', la conica C' corrispondente a R''.

23. Colle precedenti proprietà possiamo costruire la trasformazione doppia come segue.

Stabiliamo una corrispondenza duale tra i punti p di P e le rette R'' di P'. Allora dato un punto p troviamo la retta corrispondente R'' e quindi la conica C', i due punti comuni a R'' C' sono i punti congiunti $p' \mathbf{p}'$ corrispondenti a p. Se poi supponiamo dato p' e vogliamo trovare il punto congiunto $\mathbf{p}'$ basta prima trovare p'', che è il punto corrispondente a p' colla trasformazione quadratica, tirare la retta $p' p''$, la conica C' corrispondente taglia la retta in p' ed in $\mathbf{p}'$, che viene così determinato. Se poi vogliamo trovare p dato p' o $\mathbf{p}'$ basta tirare la retta $p' p''$, che è anche la $p' \mathbf{p}'$, e trovare il punto corrispondente in P.

Le costruzioni precedenti dipendono dalla scelta dei tre punti fondamentali $p_1 p_2 p_3$, coi punti p_i si possono formare 35 terne che danno 35 costruzioni della corrispondenza tra P e P'.

§ 5. Le equazioni delle 28 tangenti doppie di una curva generale del quarto ordine.

24. La curva doppia passa con due rami per un punto fondamentale, quindi la retta corrispondente è una tangente doppia della curva limite ([1]). Una retta $p_r p_s$ taglia la curva doppia in due punti non fondamentali, non è congiunta a se stessa, è tagliata in un punto variabile dalle cubiche corrispondenti alle rette di P_1, quindi ha per corrispondente una tangente doppia della curva limite ([2]). Così vediamo che

([1]) L. c. n. 8, IV. — ([2]) L. c. n. 3, IV.

Le 28 tangenti doppie della quartica limite corrispondono ai 7 punti fondamentali ed alle 21 rette che li congiungono due a due.

Se con rs rappresentiamo la tangente doppia che corrisponde alla retta $p_r\, p_s$ e con $r\,8$ quella che corrisponde al punto p_r, le 28 tangenti doppie vengono rappresentate dalle 28 combinazioni binarie dei simboli

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ .$$

Una tangente doppia può anche essere rappresentata da

secondochè corrisponde ad un punto p_r o ad una retta $p_r\ p_s$; conveniamo d'indicare con

$$\Lambda \qquad \| \qquad -\ \overset{|}{\underset{|}{\circ}} \qquad |$$

due tangenti doppie secondochè le rette a cui corrispondono passano o no per uno stesso punto fondamentale, o il punto a cui corrisponde una sta o no sulla retta a cui corrisponde l'altra ([1]).

25. La forma

$$K_{23}\sqrt{T_1\,\Theta_1} + K_{31}\sqrt{T_2\,\Theta_2} + K_{12}\sqrt{T_3\,\Theta_3} = 0\,,$$

sotto la quale si può sempre porre l'equazione di una curva generale del quarto ordine ([2]), ci permette di scrivere separatamente le equazioni delle 28 tangenti doppie. Quelle delle sette corrispondenti ai punti fondamentali si trovano immediatamente, basta porre in luogo di

$$L \quad M \quad N$$

le

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3$$

nelle (9) (15) (18) equazioni delle cubiche congiunte. Per avere le altre basta prendere la cubica

$$\lambda\, L + \mu M + \nu N = 0$$

e determinare $\lambda\, \mu\, \nu$ in modo che si spezzi in una retta $p_r\ p_s$ e nella conica congiunta, quindi porre

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3$$

al posto di

$$L \quad M \quad N\,.$$

Abbiamo già eseguito questa operazione per le tangenti doppie

$$23 \quad 31 \quad 12$$

che corrispondono alle rette

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0$$

([1]) Il primo di questi algoritmi è analogo a quello usato da Hesse, Crelle XLIX, ed il secondo a quello usato da Cayley. Vedi Salmon, *Higher plane Curves* p. 223.

([2]) Per dimostrare che la quartica limite è generale basta osservare che possiamo partire da un piano doppio con una curva limite generale del quarto ordine, e passare al piano semplice come hanno fatto Clebsch, *Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen....* M. Ann. t. 3, e Noether, *Ueber die einzweideutigen Ebenen-transformationen*. Physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen, 1878.

ed alle coniche congiunte

$$S_{23} = 0 \quad S_{31} = 0 \quad S_{12} = 0 .$$

ed abbiamo trovato per le

$$23 \quad 31 \quad 12$$

le equazioni

$$T_1 = 0 \quad T_2 = 0 \quad T_3 = 0 ;$$

ora faremo vedere come si possono facilmente condurre i calcoli negli altri casi.

26. Prendiamo per es. la retta $p_1 p_4$; la conica congiunta essendo circoscritta al triangolo $p_5 p_6 p_7$ ha l'equazione della forma

$$lBC + mCA + nAB = 0 ;$$

ma dovendo passare per $p_2 p_3$ abbiamo

$$lb_2 c_2 + mc_2 a_2 + na_2 b_2 = 0$$
$$lb_3 c_3 + mc_3 a_3 + na_3 b_3 = 0 ,$$

da cui

$$l : m : n = \alpha_1 a_2 a_3 : \beta_1 b_2 b_3 : \gamma_1 c_2 c_3 ,$$

e

$$\alpha_1 a_2 a_3 \,.\, \mathrm{BC} + \beta_1 b_2 b_3 \,.\, \mathrm{CA} + \gamma_1 c_2 c_3 \,.\, \mathrm{AB} = 0$$

è l'equazione della conica. La retta $p_1\ p_4$ ha per equazione

$$x_2 - x_3 = 0 ,$$

dunque si tratta di determinare $\lambda\, \mu\, \nu$ in modo che sia

$$\lambda \mathrm{L} + \mu \mathrm{M} + \nu \mathrm{N} = \rho\, (x_2 - x_3)\, (\alpha_1 a_2 a_3 \,.\, \mathrm{BC} + \beta_1 b_2 b_3 \,.\, \mathrm{CA} + \gamma_1 c_2 c_3 \,.\, \mathrm{AB}) .$$

Se poniamo

$$x_2 = x_3$$

risulta

$$\lambda \left\{ a_1 x_1 + (a_2 + a_3)\, x_3 \right\} u_1 \alpha_1 + \mu \left\{ b_1 x_1 + (b_2 + b_3) x_3 \right\} v_1 \beta_1 + \nu \left\{ c_1 x_1 + (c_2 + c_3) x_3 \right\} w_1 \gamma_1 = 0$$

dalla quale

$$\lambda u_1 \alpha_1 a_1 + \mu v_1 \beta_1 b_1 + \nu w_1 \gamma_1 c_1 = 0$$
$$\lambda u_1 \alpha_1 (a_2 + a_3) + \mu v_1 \beta_1 (b_2 + b_3) + \nu w_1 \gamma_1 (c_2 + c_3) = 0 ,$$

perciò

$$\lambda : \mu : \nu = v_1 \beta_1 . w_1 \gamma_1 \left\{ (b_1 c_2) + (b_1 c_3) \right\} : w_1 \gamma_1 . u_1 \alpha_1 \left\{ (c_1 a_2) + (c_1 a_3) \right\} : u_1 \alpha_1 . v_1 \beta_1 \left\{ (a_1 b_2) + (a_1 b_3) \right\},$$

e per le (11) (1)

$$\lambda . \mu : \nu = \beta_1 \gamma_1 : \gamma_1 \alpha_1 : \alpha_1 \beta_1 ,$$

quindi

$$\beta_1 \gamma_1 y_1 + \gamma_1 \alpha_1 y_2 + \alpha_1 \beta_1 y_3 = 0$$

è l'equazione della tangente doppia 14. In modo analogo si possono trovare le equazioni di tutte le altre. Per le

$$67 \quad 75 \quad 56$$

abbiamo immediatamente

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 0$$

perchè corrispondono alle cubiche

$$L = AS_u \quad M = BS_v \quad N = CS_w .$$

27. Scriviamo qui sotto le equazioni delle 28 tangenti doppie ponendo

$$A_{\gamma\alpha} = a_1\gamma_1\alpha_1 + a_2\gamma_2\alpha_2 + a_3\gamma_3\alpha_3 \qquad A_{\alpha\beta} = a_1\alpha_1\beta_1 + a_2\alpha_2\beta_2 + a_3\alpha_3\beta_3$$
$$B_{\alpha\beta} = b_1\alpha_1\beta_1 + b_2\alpha_2\beta_2 + b_3\alpha_3\beta_3 \qquad B_{\beta\gamma} = b_1\beta_1\gamma_1 + b_2\beta_2\gamma_2 + b_3\beta_3\gamma_3$$
$$C_{\beta\gamma} = c_1\beta_1\gamma_1 + c_2\beta_2\gamma_2 + c_3\beta_3\gamma_3 \qquad C_{\gamma\alpha} = c_1\gamma_1\alpha_1 + c_2\gamma_3\alpha_2 + c_3\gamma_3\alpha_3 .$$

Le equazioni seguenti delle tangenti doppie contengono solamente 6 costanti arbitrarie, cioè il minimo numero possibile.

18, $b_1c_1A_{\beta\gamma}y_1+c_1a_1B_{\gamma\alpha}y_2+a_1b_1C_{\alpha\beta}y_3=0$ 58, $B_{\gamma\alpha}C_{\alpha\beta}y_1+B_{\gamma\alpha}C_{\alpha^2}y_2+B_{\alpha^2}C_{\alpha\beta}y_3=0$

28, $b_2c_2A_{\beta\gamma}y_1+c_2a_2B_{\gamma\alpha}y_2+a_2b_2C_{\alpha\beta}y_3=0$ 68, $C_{\beta^2}A_{\beta\gamma}y_1+C_{\alpha\beta}A_{\beta\gamma}y_2+C_{\alpha\beta}A_{\beta^2}y_3=0$

38, $b_3c_3A_{\beta\gamma}y_1+c_3a_3B_{\gamma\alpha}y_2+a_3b_3C_{\alpha\beta}y_3=0$ 78, $A_{\beta\gamma}B_{\gamma^2}y_1+A_{\gamma^2}B_{\gamma\alpha}y_2+A_{\beta\gamma}B_{\gamma\alpha}y_3=0$

48, $B_1C_1A_{\beta\gamma}y_1 + C_1A_1B_{\gamma\alpha}y_2 + A_1B_1C_{\alpha\beta}y_3 = 0$

23, $v_1w_1y_1 + w_1u_1y_2 + u_1v_1y_3 = 0$ 31, $v_2w_2y_1 + w_2u_2y_2 + u_2v_2y_3 = 0$

12, $v_3w_3y_1 + w_3u_3y_2 + u_3v_3y_3 = 0$

67, $y_1 = 0$ 75, $y_2 = 0$ 56, $y_3 = 0$

14, $\beta_1\gamma_1y_1 + \gamma_1\alpha_1y_2 + \alpha_1\beta_1y_3 = 0$ 24, $\beta_2\gamma_2y_1 + \gamma_2\alpha_2y_2 + \alpha_2\beta_2y_3 = 0$

34, $\beta_3\gamma_3y_1 + \gamma_3\alpha_3y_2 + \alpha_3\beta_3y_3 = 0$

15, $A_{\beta\gamma}y_1+(A_{\gamma\alpha}-\gamma_1H)y_2+(A_{\alpha\beta}-\beta_1H)y_3=0$ 16, $(B_{\beta\gamma}-\gamma_1H)y_1+B_{\gamma\alpha}y_2+(B_{\alpha\beta}-\alpha_1H)y_3=0$

25, $A_{\beta\gamma}y_1+(A_{\gamma\alpha}-\gamma_2H)y_2+(A_{\alpha\beta}-\beta_2H)y_3=0$ 26, $(B_{\beta\gamma}-\gamma_2H)y_1+B_{\gamma\alpha}y_2+(B_{\alpha\beta}-\alpha_2H)y_3=0$

35, $A_{\beta\gamma}y_1+(A_{\gamma\alpha}-\gamma_3H)y_2+(A_{\alpha\beta}-\beta_3H)y_3=0$ 36, $(B_{\beta\gamma}-\gamma_3H)y_1+B_{\gamma\alpha}y_2+(B_{\alpha\beta}-\alpha_3H)y_3=0$

17, $(C_{\beta\gamma}-\beta_1H)y_1+(C_{\gamma\alpha}-\alpha_1H)y_2+C_{\alpha\beta}y_3=0$ 45, $A_{\beta\gamma}y_1+A_{\gamma\alpha}y_2+A_{\alpha\beta}y_3=0$

27, $(C_{\beta\gamma}-\beta_2H)y_1+(C_{\gamma\alpha}-\alpha_2H)y_2+C_{\alpha\beta}y_3=0$ 46, $B_{\beta\gamma}y_1+B_{\gamma\alpha}y_2+B_{\alpha\beta}y_3=0$

37, $(C_{\beta\gamma}-\beta_3H)y_1+(C_{\gamma\alpha}-\alpha_3H)y_2+C_{\alpha\beta}y_3=0$ 47, $C_{\beta\gamma}y_1+C_{\gamma\alpha}y_2+C_{\alpha\beta}y_3=0.$

§ 6. I sistemi di coniche quadritangenti ad una curva generale del quarto ordine — Proprietà delle tangenti doppie.

28. Una conica C incontra in sei punti la cubica corrispondente ad una retta di P', ed in due una retta fondamentale, quindi ha per corrispondente una curva iperellittica ([1]), congiunta a se stessa, del sesto ordine con sette punti doppî nei punti fondamentali. Se la conica C tocca la quartica limite in quattro punti, la curva corrispondente ha quattro punti doppî nei punti corrispondenti sulla curva doppia ([2]), quindi si spezza in due curve congiunte che si tagliano in quattro punti della curva doppia; ciascuna curva deve dare in P la conica, quindi deve essere incontrata in due punti variabili dalle cubiche che passano per i punti p_i.

Considerando tutti gli spezzamenti possibili troviamo che le curve le quali danno in P coniche quadritangenti alla quartica limite sono così distribuite:

I. I sette fasci di rette che passano per p_i, e i fasci di curve congiunte del quinto ordine che passano per p_i ed hanno un punto doppio in ciascuno degli altri sei punti fondamentali.

([1]) *Le trasformazioni piane doppie*, n. 1, IV. — ([2]) L. c. n. 12, VI.

II. I trentacinque fasci di coniche che passano per quattro punti fondamentali, e i fasci di curve congiunte del quarto ordine che passano per i detti quattro punti p_i ed hanno un punto doppio in ciascuno degli altri tre.

III. I ventuno fasci di cubiche che hanno un punto doppio p_i e passano per altri cinque punti p_i, insieme ai fasci di cubiche congiunte che hanno un punto doppio nel settimo punto fondamentale e passano per gli stessi altri cinque.

Vi sono 63 sistemi S di coniche che toccano in quattro punti una curva del quarto ordine.

È interessante osservare che le coniche di un sistema corrispondono alle curve di un fascio.

Trasformando quadraticamente il piano P' possiamo trasformare uno qualunque dei fasci di coniche e di cubiche considerati in un fascio di rette che passino per un punto fondamentale, in modo che le cubiche per i punti p_i diano ancora cubiche per sette punti fissi. Da ciò discende che i sessantatre sistemi di coniche quadritangenti godono delle stesse proprietà, e possiamo indifferentemente considerare quello corrispondente alle rette che passano per p_i.

29. Preso un punto p se congiungiamo i due punti corrispondenti p' $\mathbf{p}'$ con p_i abbiamo due rette alle quali corrispondono due coniche di uno stesso sistema S che passano per p.

Vi sono 2 coniche di un sistema S che passano per un punto arbitrario.

Da un punto fondamentale si possono condurre quattro tangenti alla cubica corrispondente ad una retta del piano doppio, quindi

Vi sono 4 coniche di un sistema S che toccano una retta data.

30. Sappiamo già che il luogo E' delle coppie di punti congiunti separate armonicamente da due rette date R'_1 R'_2 è una curva congiunta a se stessa, del nono ordine con sette punti tripli fondamentali (¹). La E' taglia una delle rette R'_1 R'_2 nel punto in cui incontra l'altra, nei sei punti in cui taglia la curva doppia, e nei due punti congiunti situati sulla retta; taglia la curva doppia solamente nei dodici punti situati sulle R'_1 R'_2, e nei punti fondamentali.

La curva E corrispondente in P è del terzo ordine, passa per i dodici punti di contatto della quartica limite colle cubiche corrispondenti alle rette R'_1 R'_2, per i loro punti doppî, e per il loro punto comune corrispondente all'intersezione delle rette R'_1 R'_2.

Se R'_1 R'_2 coincidono con R', un punto qualunque p' di R', ed il suo congiunto $\mathbf{p}'$ sono separati armonicamente da R'_1 R'_2, quindi la E' si spezza nella R' e nella curva congiunta d'ottavo ordine.

Facendo passare R'_1 R'_2 per p_i la E' si spezza nella cubica congiunta a p_i, ed in una curva iperellittica del sesto ordine con sette punti doppî fondamentali (²). Queste curve iperellittiche E' tagliano la curva doppia nei punti p_i e negli otto punti non fondamentali in cui la incontrano le R'_1 R'_2.

(¹) L. c. n. 18, I, II. — (²) L. c. n. 18.

Alle rette R'_1 R'_2 corrispondono due coniche di uno stesso sistema S, ed alla E' corrisponde una conica E che passa per gli otto punti di contatto delle due coniche colla curva limite.

Gli 8 punti di contatto di due coniche di un sistema S colla curva limite, stanno sopra una conica E.

Viceversa E' taglia la curva doppia in otto punti non fondamentali che si separano in due gruppi di quattro, i quattro punti di ciascun gruppo sono in linea retta con p_i.

Una conica E taglia la curva del quarto ordine in otto punti che sono punti di contatto con due coniche di uno stesso sistema S.

Le curve E', iperellittiche di sesto ordine, formano una rete; infatti presi due punti arbitrarî $p'_1\, p'_2$ e i congiunti $\mathbf{p}'_1\, \mathbf{p}'_2$ possiamo condurre da p_i due rette, e due sole, che separino armonicamente le coppie $p'_1\mathbf{p}'_1\; p'_2\mathbf{p}'_2$, quindi per $p'_1\, p'_2$ passa una sola E'. Alla E' corrisponde una conica E che passa per $p_1\, p_2$.

Le coniche E relative ad un sistema S formano una rete.

Se R'_1 R'_2 coincidono con una retta R'_1 che passa per p_i, la E' si spezza nella R' e nella curva congiunta del quinto ordine, perciò le rette passano per p_i insieme alle curve congiunte appartengono alla rete delle E'.

Ciascuno dei 63 sistemi S appartiene ad una delle 63 reti di coniche E.

31. Da p_i si possono condurre dodici tangenti alla curva doppia, dunque (¹)

In un sistema S vi sono 12 coniche che hanno un contatto quadripunto colla curva del quarto ordine.

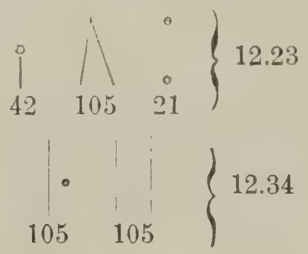
Se una conica di un sistema S ha colla curva limite un contatto quadripunto in o_1 e contatti semplici in $o_2\, o_3$, abbiamo un fascio di coniche E, della rete corrispondente ad S, che si toccano in o_1, dunque o_1 è un punto della Jacobiana della rete.

I 12 punti nei quali vi è un contatto quadripunto, della curva del quarto ordine con una delle coniche di un sistema S, stanno sopra una cubica.

32. Sei rette passano per p_i e per un altro punto fondamentale, le sei coniche corrispondenti si spezzano in due tangenti doppie.

In un sistema S vi sono 6 coniche che si spezzano in due tangenti doppie.

Le 378 coppie che si possono formare colle 28 tangenti doppie sono rappresentate dai simboli

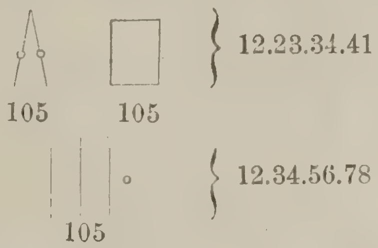


(¹) L. c. n. 12, III.

Le sei coppie appartenenti ad un sistema S sono distribuite nel seguente modo, secondochè le coniche del sistema corrispondono ad un fascio delle specie I II III.

Con questi simboli è facile vedere che ogni coppia di tangenti doppie appartiene ad un solo sistema S.

Se prendiamo due coppie di tangenti doppie, appartenenti ad uno stesso sistema, gli otto punti di contatto stanno sopra una conica. Combinando i simboli trovati per le coppie di uno stesso sistema abbiamo 315 quadrilateri q rappresentati come segue.



Vi sono 315 coniche che passano per otto punti di contatto di quattro tangenti doppie.

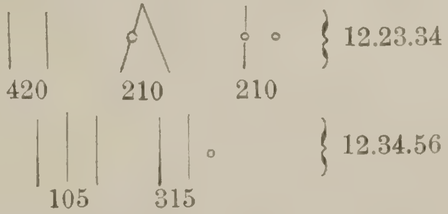
Colle sei coppie di un sistema si possono formare quindici quadrilateri q, perciò

Un quadrilatero q appartiene a $\frac{63 \times 15}{315} = 3$ sistemi S.

33. Togliendo una retta, o un punto, dai simboli dei quadrilateri q vediamo che

Vi sono 1260 triangoli τ di tangenti doppie coi sei punti di contatto sopra una conica.

I simboli di questi triangoli sono distribuiti come segue.



Un triangolo τ è formato da tre tangenti doppie, le tangenti doppie sono ventotto. dunque

Una tangente doppia è lato di $\frac{1260 \times 3}{28} = 135$ triangoli τ.

Un triangolo τ contiene tre coppie di tangenti doppie, le coppie possibili sono 378, dunque

Due tangenti doppie possono essere lati di $\frac{1260 \times 3}{378} = 10$ triangoli τ.

Se chiamiamo p i 378 punti in cui si tagliano le tangenti doppie, troviamo che i punti p sono i vertici distinti dei 1260 triangoli τ.

§ 7. Sistemi Σ' di cubiche razionali che toccano in sei punti una curva generale del quarto ordine — Proprietà delle tangenti doppie.

34. Una cubica di P dà in P' una curva del nono ordine con un punto triplo in ciascuno dei sette punti p_i, se tocca la quartica limite in sei punti ed ha un punto doppio p la curva del nono corrispondente ha sei punti doppî sulla curva doppia ([1]), e due punti doppî in p' $\mathbf{p}'$, quindi si spezza in due curve congiunte. Possono darsi due casi: o le curve congiunte si tagliano in p' $\mathbf{p}'$, o una ha un punto doppio p', e l'altra un punto doppio $\mathbf{p}'$. Considerando il primo caso e facendo tutti gli spezzamenti possibili troviamo

I. Le rette di P', e la rete di curve congiunte di ottavo ordine con sette punti tripli p_i.

II. Le 35 reti di coniche per tre punti p_i, e le reti di curve congiunte del settimo ordine con quattro punti p_i tripli, e tre p_i doppî.

III. Le 105 reti di cubiche che hanno quattro punti semplici ed un punto doppio fondamentale, e le reti di curve congiunte del sesto ordine con quattro punti doppî, uno semplice, e due tripli fondamentali.

IV. Le 140 reti di curve del quarto ordine con tre punti doppî e tre semplici p_i, e le reti di curve congiunte del quinto ordine con tre punti semplici, tre doppî, ed uno triplo fondamentali.

V. Le sette reti di curve del quarto ordine con un punto triplo e sei semplici fondamentali, e le reti di curve congiunte del quinto ordine con sei punti doppî fondamentali.

In tutto abbiamo 288 reti congiunte ad altre 288, che danno 288 sistemi di quelli cercati.

Le proprietà di questi sistemi Σ' sono le stesse perchè una qualunque delle reti considerate trasforma razionalmente il piano P' in modo che alle curve della rete corrispondano le rette del piano, e alle cubiche che passano per i sette punti fondamentali corrispondano cubiche che pure passano per sette punti fissi.

35. Passando al secondo caso di spezzamento abbiamo:

I. I sette sistemi di cubiche che passano per sei punti fondamentali ed hanno un punto doppio variabile, insieme ai sistemi di curve congiunte del sesto ordine che hanno un punto p_i triplo, sei p_i doppî, ed uno doppio variabile.

II. I 21 sistemi di curve del quarto ordine con due punti p_i doppî, cinque p_i semplici, ed uno doppio variabile, insieme ai sistemi di curve congiunte del quinto ordine con un punto doppio variabile, due semplici e cinque doppî nei punti fondamentali.

In tutto sono 28 sistemi congiunti ad altri 28, che danno in P 28 sistemi di quelli cercati.

Le proprietà di questi sistemi Σ'' sono le stesse perchè con una trasformazione razionale quadratica possiamo passare da uno dei 21 sistemi di quartiche ad uno dei sette sistemi di cubiche.

([1]) L. c. n. 12, VI.

Vi sono 316 sistemi di cubiche razionali che toccano in sei punti variabili una curva generale del quarto ordine. Questi sistemi si separano in due classi distinte, una di 288, e l'altra di 28.

36. Limitiamoci per ora allo studio dei sistemi Σ'. Considerando quello corrispondente alle rette di P' troviamo immediatamente che

Per due punti arbitrarî passano 4 cubiche di un sistema Σ' (1)

e

Le cubiche di un sistema Σ' che passano per un dato punto formano due sistemi semplicemente infiniti, il luogo del punto doppio è formato da due rette una per sistema (2);

così pure

Le cubiche di un sistema Σ' che hanno il punto doppio sopra una retta data passano per un punto fisso della retta.

Da ciò deduciamo che ogni sistema Σ' trasforma dualmente il piano P in P', e quindi vi sono 288 di queste dualità.

Abbiamo già considerato il luogo E', ed abbiamo veduto il luogo E corrispondente in P (n. 30), applicando le considerazioni a tutti i sistemi Σ' diremo:

Due cubiche di uno stesso sistema Σ' hanno i 12 punti di contatto colla quartica limite situati sopra una cubica che passa per i loro punti doppî, e per una delle loro intersezioni comuni.

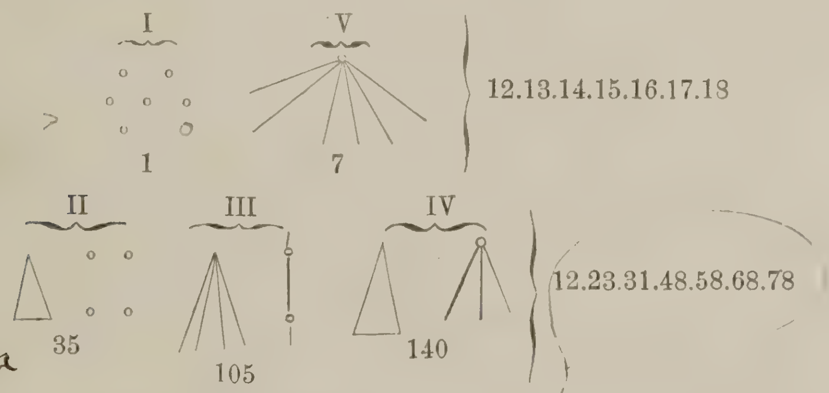
37. Alle rette che passano per p_i corrisponde un sistema S di coniche quadritangenti ciascuna delle quali unita alla tangente doppia che corrisponde a p_i forma una cubica del sistema Σ' dato dalle rette di P'; i punti p_i sono sette, dunque

In un sistema Σ' vi sono sette sistemi S di coniche quadritangenti.

I sistemi Σ' sono 288, i sistemi S sono 63 dunque

Ogni sistema S appartiene a $\frac{288 \times 7}{63} = 32$ sistemi Σ'.

Un sistema S di Σ' è coordinato ad una tangente doppia, quindi ogni sistema Σ' determina uno speciale gruppo π di sette tangenti doppie. I 288 gruppi π sono distribuiti nel seguente modo secondo le reti a cui corrispondono i sistemi Σ'.



(1) L. c. n. 6, II. — (2) L. c. n. 17, II; n. 28.

In un gruppo π vi sono 21 coppie di tangenti doppie, quindi

Una coppia di tangenti doppie appartiene a $\frac{288\times21}{378}=16$ gruppi π.

Considerando i simboli delle coppie di tangenti doppie troviamo che

Due coppie di tangenti doppie capaci di appartenere ad un gruppo π appartengono anche ad un altro gruppo π.

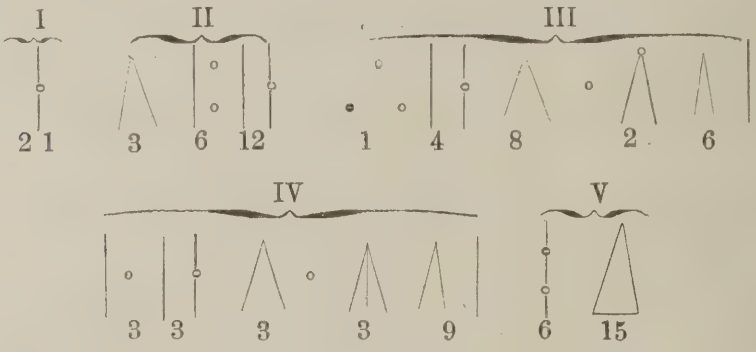
per es. le due coppie appartengono al gruppo I e ad uno dei gruppi II.

Osserviamo anche che colle sette tangenti doppie di uno stesso gruppo non si può formare un quadrilatero q, cogli otto punti di contatto sopra una conica, in altre parole non si possono formare due coppie in modo che appartengano ad uno stesso sistema S.

38. Se una retta di P' passa per due punti fondamentali la cubica corrispondente si spezza in tre tangenti doppie, di rette che congiungono due punti fondamentali ne abbiamo 21, dunque

Vi sono 21 cubiche di un sistema Σ' che si spezzano in tre tangenti doppie.

I 21 triangoli del sistema sono rappresentati come segue secondo la rete a cui corrisponde il sistema



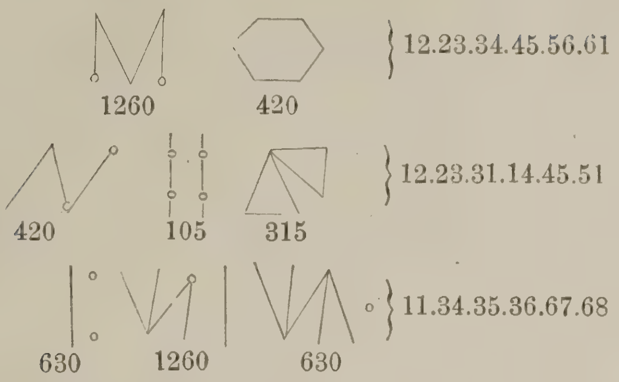
Questi triangoli sono diversi dai τ, ed in ciascuno due lati sono due tangenti doppie del gruppo π determinato dal sistema, il terzo lato è una delle altre 21 tangenti doppie; ogni tangente del gruppo π è lato di sei triangoli, quindi i vertici dei 21 triangoli sono tutti sopra le sette tangenti doppie del gruppo π.

Osserviamo che due tangenti doppie del gruppo π determiniamo una delle altre 21, e precisamente quella che insieme alle due prime forma uno dei 21 triangoli.

39. Due cubiche di un sistema Σ' hanno i dodici punti di contatto situati sopra una cubica, perciò combinando due triangoli di uno stesso sistema Σ', in modo che non abbiano un lato comune, abbiamo un esagono σ i cui lati toccano la curva del quarto ordine in dodici punti situati sopra una cubica. Se il sistema Σ' è quello dato dalle rette di P' un esagono σ è rappresentato da , di queste combinazioni se ne possono formare 105, dunque

In un sistema Σ' vi sono 105 esagoni di tangenti doppie coi dodici punti di contatto sopra una cubica.

Tutti gli esagoni σ sono i seguenti



Vi sono 5040 esagoni di tangenti doppie coi dodici punti di contatto sopra una cubica; ogni esagono appartiene a $\frac{288\times 195}{5040}=6$ sistemi Σ'.

Osservando i simboli dei triangoli τ troviamo che

Colle tangenti doppie di un esagono σ si possono formare quattro coppie di triangoli τ coi sei punti di contatto sopra una conica.

40. Consideriamo l'esagono σ formato dai triangoli

$$81\,.\,12\,.\,28 \qquad 83\,.\,34\,.\,48\,.$$

Il luogo delle coppie di punti congiunti situate sulle rette che passano per il punto comune a $p_1p_2\ p_3p_4$ è una cubica K' che ha due punti congiunti infinitamente vicini a $p_1\,p_2$, due pure congiunti infinitamente vicini a $p_3\,p_4$, e passa per il punto comune a $p_1p_2\ p_3p_4$. Nel piano P la retta corrispondente passa per il punto comune alle tangenti doppie 81.82, per quello comune a 83.84, e per quello comune a 12. 34. Questa retta P si può indicare col simbolo

$$\left|\begin{matrix} 81\ .\ 28 \\ 83\ .\ 48 \\ 12\ .\ 34 \end{matrix}\right|.$$

Le quattro coppie di triangoli τ che si possono formare coi lati di σ sono

$$\begin{matrix} 48\,.\,81\,.\,12 & 18\,.\,84\,.\,43 & 38\,.\,81\,.\,12 & 18\,.\,83\,.\,34 \\ 38\,.\,82\,.\,34 & 28\,.\,83\,.\,12 & 48\,.\,82\,.\,34 & 28\,.\,84\,.\,12, \end{matrix}$$

ed evidentemente i lati corrispondenti dei τ di una coppia si tagliano sulla retta P.

Coi lati di un esagono σ possiamo formare quattro coppie di triangoli τ omologici.

I 5040 esagoni σ danno 5040 rette P.

41. Le tre coppie che si tagliano sulla retta P dell'esagono sono

$$81\ .\ 28 \qquad 83\ .\ 48 \qquad 12\ .\ 34\,,$$

combinate fra loro danno i tre quadrilateri

$$38\,.\,84\,.\,43\,.\,12 \qquad 19\,.\,28\,.\,38\,.\,48 \qquad 18\,.\,82\,.\,21\,.\,34$$

ciascuno capace di appartenere a due gruppi π, i sei gruppi π sono

18.28.38.48.58.68.78	38.84.43.12.15.16.17	18.82.21.34.35.36.37
18.28.38.48.56.67.75	38.84.43.21.25.26.27	18.82.21.43.45.46.47.

Due qualunque delle tre coppie che si tagliano sopra una retta P sono capaci di appartenere a due gruppi π.

Le sette tangenti doppie di un gruppo π si tagliano in 21 punti p, le rette che congiungono due p, non situati sopra una stessa tangente doppia, sono le 105 P determinate dal sistema Σ' corrispondente al gruppo π da cui siamo partiti. Sopra una di queste 105 rette P oltre alle due coppie di tangenti doppie del gruppo π si tagliano altre due tangenti doppie, che sono quelle capaci di formare colle due coppie del gruppo π due dei 21 triangoli del sistema Σ'.

Dato un esagono σ per trovare le tre coppie di lati che si tagliano sulla sua retta P osserviamo che queste tre coppie combinate due a due devono essere capaci di appartenere ad uno stesso gruppo π, quindi cominciamo dal trovare i tre gruppi di quattro lati che sono capaci di appartenere ad un gruppo π, le coppie che appartengono a due di questi tre sono le cercate. Partendo da questo metodo si vede facilmente che le rette P sono date dai tre tipi

12 . 45	12 . 31	12 . 36
23 . 56	14 . 51	34 . 35
34 . 61	23 . 45	67 . 68

corrispondenti rispettivamente alle tre specie

12 . 23 . 34 . 45 . 56 . 61   12 . 23 . 31 . 14 . 45 . 51   22 . 34 . 35 . 36 . 67 . 68

di esagoni.

I tre punti p di una retta P sono le tre intersezioni colla cubica che passa per i dodici punti di contatto dei lati del suo esagono.

Sopra una P abbiamo tre punti p, vi sono 378 punti p, dunque

Per un punto p passano $\dfrac{5040 \times 3}{378} = 40$ rette P.

42. Un esagono σ dà otto triangoli τ, ma i triangoli τ sono 1260, dunque

Un triangolo τ appartiene a $\dfrac{5040 \times 8}{1260} = 32$ esagoni σ.

cioè

Vi sono 32 triangoli τ omologici ad uno dato.

Preso un triangolo τ possiamo trovare una quarta tangente doppia in modo che col triangolo preso formi un quadrilatero q. Tre qualunque delle quattro tangenti doppie così ottenute formano un triangolo τ, quindi le quattro tangenti non possono essere lati di uno stesso esagono σ, e perciò la quarta tangente doppia determinata nel detto modo dal triangolo τ non è lato di alcuno dei 32τ omologici, rimangono ancora 24 tangenti doppie, i 32 τ danno 96 lati, quindi una di queste 24 è lato di $\dfrac{96}{24} = 4$ triangoli τ omologici al primo.

Se sono dati due triangoli $\tau_1 \tau_2$ che formino un esagono σ, ogni lato di τ_2 è lato di altri tre τ omologici a τ_1, i tre lati di τ_2 danno 9 triangoli τ che insieme

a τ_2 ne formano 10, e perciò ne rimangono 22. Se formiamo i simboli dei 22 τ omologici a τ_1 troviamo che coincidono coi simboli dei 22 τ omologici a τ_2, quindi

Se prendiamo due triangoli omologici $\tau_1 \tau_2$, capaci cioè di formare un esagono σ, colle rimanenti 22 tangenti doppie si possono formare 22 triangoli τ omologici a $\tau_1 \tau_2$, cioè capaci di formare un esagono σ con τ_1 e con τ_2.

§ 8. Sistemi Σ'' di cubiche razionali che toccano in sei punti una curva generale del quarto ordine — Proprietà delle tangenti doppie.

43. Consideriamo ora il sistema Σ'' che corrisponde alle cubiche descritte per sei punti fondamentali e che hanno un punto doppio variabile.

Dei nove punti comuni a due cubiche di Σ'' tre principali si separano e corrispondono ai tre punti non fondamentali comuni alle due cubiche corrispondenti in P', gli altri sei corrispondono ai punti di una cubica i cui congiunti stanno sull'altra.

Le cubiche in P' che passano per $p'_1\, p'_2$ formano un fascio, e quindi ve ne sono dodici che hanno un punto doppio, considerando anche quelle date dalle coppie $p'_1\, \mathbf{p}'_2$, $p'_1\, \mathbf{p}'_2$, $\mathbf{p}'_1\, \mathbf{p}'_2$ abbiamo

Per due punti arbitrarî passano 48 cubiche di un sistema Σ''.

In P' le cubiche che passano per la coppia di punti $p'_1\, p'_2$ formano un fascio ed hanno un nono punto comune.

Le 48 cubiche di un sistema Σ'' che passano per due punti arbitrarî si separano in quattro gruppi di dodici. Le cubiche di un gruppo oltre ai due punti presi hanno comune un altro punto che insieme a quelli forma la terna dei punti principali.

44. Consideriamo il fascio determinato dalle due cubiche $C'_1\, C'_2$ che corririspondono a due cubiche di Σ'', e determiniamo il luogo delle coppie di punti congiunti che danno due cubiche del fascio coniugate armoniche a $C'_1\, C'_2$.

Sia p' un punto di una trasversale R', tiriamo la cubica del fascio che passa per $\mathbf{p}'$, e chiamiamo p'' i tre punti in cui la coniugata armonica taglia R'. Se partiamo da p'' dobbiamo prendere la cubica che passa per p'', cercare la coniugata armonica, e prendere sopra R' i sei punti p' congiunti ai sei in cui la coniugata armonica incontra la curva congiunta ad R'; con ciò abbiamo sopra R' una corrispondenza tra p' e p'' che ha 9 punti uniti, e ci dimostra che il luogo cercato è del nono ordine. È facile trovare che questo luogo ha sette punti tripli p_i, passa per i tre punti non fondamentali comuni a $C'_1\, C'_2$, e per le dodici intersezioni di $C'_1\, C'_2$ colla curva doppia [1]. Trasformando in P abbiamo che

I dodici punti di contatto di due cubiche di un sistema Σ'' colla curva del quarto ordine stanno sopra una cubica che passa per i loro tre punti comuni principali.

[1] Se prendiamo due curve d'ordine m, se m' è l'ordine delle congiunte, e se consideriamo il loro fascio, la curva costruita è d'ordine

$$m + m'.$$

45. Alle cubiche di Σ'' corrispondono le cubiche che passano per sei punti p_i ed hanno un punto doppio variabile. Le cubiche con un punto doppio in uno dei sei p_i e che passano per gli altri cinque danno sei sistemi S che appartengono al sistema Σ'', altri sei sono dati dalle rette che passano per uno, e quindici dalle coniche che passano per quattro dei sei punti p_i.

In un sistema Σ'' vi sono 27 sistemi S.

Ogni sistema S è coordinato ad una tangente doppia, i sistemi S di Σ'' sono 27, quindi rimane una tangente doppia che diremo coordinata a Σ''.

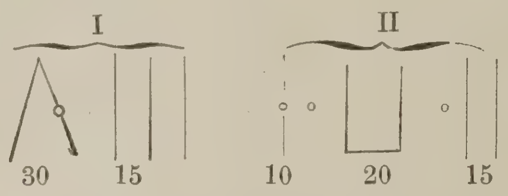
I sistemi Σ'' sono 28, i sistemi S sono 63, dunque

Un sistema S appartiene a $\frac{28 \times 27}{63} = 12$ sistemi Σ''.

46. È facile vedere che in un sistema Σ'' vi sono cubiche che si spezzano in tre tangenti doppie che formano un triangolo τ, anzi precisamente

In un sistema Σ'' vi sono 45 triangoli τ.

I simboli sono i seguenti.

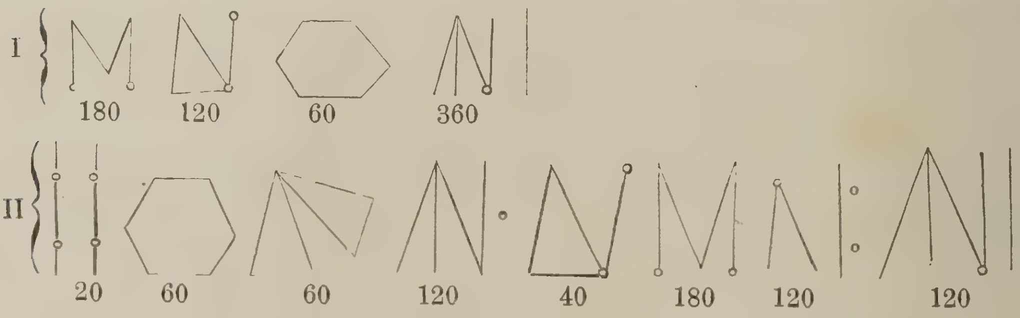


Osserviamo che i sei punti di contatto delle tre rette in cui si spezza una Σ'' stanno sopra una conica, mentre quelli delle tre rette in cui si spezza una Σ' non stanno sopra una conica.

La tangente doppia coordinata al sistema Σ'' non è lato di un triangolo τ del sistema, rimangono 27 tangenti doppie che formano 45 triangoli τ, quindi

Una delle 27 tangenti doppie di Σ'' è lato di $\frac{45 \times 3}{27} = 5$ triangoli τ del sistema.

Combinando due triangoli τ di uno stesso sistema Σ'' si ha un esagono di tangenti doppie coi dodici punti di contatto sopra una cubica. In questo modo nascono gli esagoni σ già considerati. Un sistema Σ'' ne dà 720 rappresentati come segue.



Ciascuno dei 28 sistemi Σ'' dà un gruppo di 720 rette P. Una retta P appartiene a $\frac{28 \times 720}{5040} = 4$ gruppi.

47. Fissiamo l'attenzione sopra un sistema Σ'', e diciamo che due tangenti doppie formano una coppia γ quando sono lati di uno dei 45 triangoli τ del sistema. La tangente doppia coordinata al sistema non può appartenere ad una coppia γ, una delle altre è lato di 5 τ, dunque

Ciascuna delle 27 tangenti doppie di Σ'' appartiene a 10 coppie γ.

È facile vedere dai simboli dei τ di Σ'' che prese due tangenti doppie che non formino una coppia γ, 5 delle 10 che formano una coppia γ con una non la formano coll'altra, abbiamo così due gruppi ciascuno di sei tangenti doppie, una di un gruppo forma una coppia γ con 5 dell'altro. Diremo che queste dodici tangenti doppie formano una bissestupla. La bissestupla si può anche definire come un gruppo di dodici tangenti doppie tali che tre qualunque non formino un triangolo τ. Presa una tangente doppia ve ne sono 16 che non formano con essa una coppia γ, quindi abbiamo $\frac{27\times 16}{2}=216$ coppie che non sono γ, una di queste coppie determina una bissestupla, ciascuna bissestupla contiene sei coppie, quindi troviamo $\frac{216}{6}=36$ bissestuple. È facile vedere che una bissestupla può appartenere ad un solo sistema Σ'', quindi

Vi sono $36\times 28=1008$ bissestuple.

Se dalle 27 tangenti doppie di Σ'' ne togliamo dodici di una bissestupla rimane un gruppo Π di 15, di gruppi Π se ne hanno 1008.

I 1008 gruppi Π danno 1008 gruppi ciascuno di 60 rette P.

Una retta P appartiene a $\frac{36\times 60}{720}=3$ gruppi Π di un sistema Σ''.

§ 9. Gli esagoni formati da sei tangenti doppie che toccano una stessa conica — Date le sette tangenti doppie di un gruppo π costruire le altre 21.

48. Colla dualità stabilita tra P e P', n. 27, ai punti p_i corrispondono sette tangenti doppie, le altre corrispondono ai punti coresiduali delle 21 cubiche che hanno due punti doppî. Una di queste cubiche è formata dalla conica determinata da cinque punti p_i colla retta che congiunge gli altri due, il coresiduale si trova sulla conica, che perciò contiene sei punti i quali danno in P, colla dualità, un esagono σ' formato da sei tangenti doppie che toccano una stessa conica. Per trovare un esagono σ' basta da un gruppo π togliere due tangenti doppie, e alle cinque rimanenti aggiungere quella che insieme alle tolte forma uno dei 21 triangoli del sistema Σ' relativo al gruppo da cui siamo partiti. Da ciò discende che un gruppo π dà 21 esagoni σ'.

Il gruppo π corrispondente ai punti p_i ci dà l'esagono

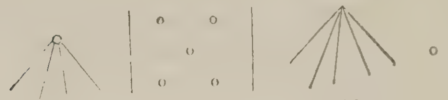
cinque lati del quale appartengono ad uno stesso gruppo π mentre il sesto è dato,

nel modo voluto, dalle altre due tangenti doppie del gruppo π, quindi un esagono σ' nasce da sei gruppi π, e

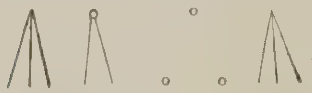
Vi sono $\frac{288\times 21}{6} = 1008$ esagoni σ'.

I simboli che li rappresentano sono

210 } 12.23.31.45.56.64



105 21 42 } 12.34.35.36.37.38



420 140 } 12.13.14.56.56.58

49. La conica C'_{67} determinata dai punti $p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$ e la retta R'_{67} determinata da $p_6 p_7$, e la conica C'_{45} determinata da $p_1 p_2 p_3 p_6 p_7$ e la retta R'_{45} determinata da $p_4 p_5$, formano due cubiche che passano per i sette punti p_i, le altre loro due intersezioni sono il punto p' comune alle rette R'_{45} R'_{67}, e il punto congiunto $\mathbf{p}'$ che insieme a $p_1 p_2 p_3$ forma le quattro intersezioni delle C'_{45} C'_{67}. La retta $p'\mathbf{p}'$ che contiene una coppia di punti congiunti delle due cubiche $R'_{67} C'_{67}$, $R'_{45} C'_{45}$ le taglia ulteriormente nei loro coresiduali che possono trovarsi linearmente essendo le intersezioni, distinte da $\mathbf{p}'$, delle C'_{45} C'_{67} colla retta $p'\mathbf{p}'$. Trasportando dualmente queste considerazioni in P abbiamo il modo di costruire linearmente date sette tangenti doppie, di un gruppo π, le altre 21.

Siano 18 28 38 48 58 68 78

le tangenti doppie del gruppo π; scegliamo le due coppie

48 58 68 78,

e vediamo di determinare le 45 67. Le due coniche C_{45} C_{67} che toccano

18 28 38 68 78 18 28 38 48 58

oltre alle tre tangenti comuni 18 28 38 ne hanno una quarta T che possiamo costruire linearmente; la T taglia la retta P determinata dalle coppie prese, ossia la $\left|\begin{matrix}84.58\\86.78\\45.67\end{matrix}\right|$ in un punto p, l'ulteriore tangente condotta da p alla C_{45} è la 45, e quella condotta alla C_{67} è la 67, ecco così trovate le due tangenti doppie (¹). Per avere le altre possiamo fare a meno di applicare la costruzione precedente ricordando che le due tangenti doppie determinate da due coppie si tagliano sulla retta P delle coppie; così se vogliamo la 12, che corrisponde alla coppia 18 28, basta congiungere il punto 18.28 con 45.58 e con 68.78, allora abbiamo le $\left|\begin{matrix}81.28\\84.58\\12.45\end{matrix}\right|$ $\left|\begin{matrix}81.28\\86.78\\12.67\end{matrix}\right|$ quindi congiungendo i punti in cui tagliano le tangenti doppie 45 67 già trovate abbiamo la cercata 12.

(¹) Questa costruzione è in sostanza quella di Aronhold.

Osservazioni sulle alterazioni dei Gangli intervertebrali in alcune malattie della midolla.

Memoria del dott. ARNALDO ANGELUCCI

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del 2 giugno 1878.

Da quando Ehrenberg [1] descrisse la struttura dei gangli intervertebrali, e chiamò le loro cellule nervose « cellule clavate », numerosi studî hanno arricchito la letteratura e le conoscenze che oggi possediamo sulla struttura istologica e sulle funzioni di questi gangli. All'opposto però scarse sono le cognizioni sulla loro patologia, e mentre pochi ma dettagliati lavori hanno dimostrato la loro alterazione nell'*Herpes Zoster*, alcun lavoro speciale non esiste sui rapporti delle alterazioni dei gangli intervertebrali con le alterazioni della midolla. Solo in pochissimi casi, viene citata la loro alterazione, come complemento di altre ricerche ed in qualche descrizione di alcuni processi patologici: questi fatti isolati, non confermati, anzi in parte contradetti, hanno gettato poca luce sulla questione ed oggi scarse sono le conoscenze sul loro modo di comportarsi nelle alterazioni della midolla.

Le prime osservazioni sulla anatomia patologica dei gangli intervertebrali nel Zoster furono fatte da Bärensprung [2]. Questi ha avuto occasione di esaminare i gangli intervertebrali in un bambino perito per tubercolosi polmonale, il quale 40 giorni prima della sua morte era andato soggetto ad una eruzione di Zoster lungo il decorso del 6°, 7°, 8° nervo intercostale destro, che dopo 16 giorni era completamente scomparsa.

La sezione mostrò la midolla e le radici spinali normali, il 6°, 7° ed 8° nervo intercostale destro apparivano iniettati. Le osservazioni microscopiche nei gangli intervertebrali lasciavano scorgere i residui di un'infiammazione: le principali alterazioni si trovavano nel connettivo interstiziale, in esso giacevano delle masse di granuli brunastri, residui di distrutti corpuscoli rossi, la tessitura interstiziale era più ricca di nuclei, appariva meno elastica ed arricciata che nello stato normale, le fibre nervose erano in alcuni punti granulose, fortemente varicose ed interrotte.

Charcot e Cotard [3] studiarono un caso di Zoster sviluppatosi nel territorio d'innervazione del plesso cervicale destro in una donna di 78 anni la quale morì 14 giorni dopo l'eruzione in seguito ad una pleurite bilaterale. Trovarono un processo di nevrite nel plesso cervicale destro, i gangli spinali corrispondenti fortemente iniettati,

(1) Poggendorffs' Annalen der Physik und Chemie 1833. Come anche: *Beobachtung einer auffallenden bisher unbekannten Structur des Seelenorgans bei Menschen und Thieren.* Berlin, 1836. — (2) *Beitrage zur Kenntniss des Zosters.* Annalen II Heft, 1863. — (3) *Sur un cas de zona du cou avec altération des nerfs du plexus cervical et des ganglions correspondants des racines spinales postér.* Gaz. med. 15 anno 1866.

la loro tessitura interstiziale era proliferata, nel mentre che le cellule e le fibre nervose apparivano normali.

Wagner (¹) in un uomo di 23 anni, il quale negli ultimi 7 giorni della sua vita ebbe a soffrire un' eruzione di Zoster forse causata dall'alterazione dei gangli spinali per carie delle vertebre, trovò dal 9° fino al 12° ganglio dorsale sinistro le seguenti alterazioni. Gli involucri dei gangli erano infiltrati da una massa caseosa, la tessitura interstiziale era molto ricca di nuclei, numerose cellule nervose avevano subìto una avanzata degenerazione grassa in modo da restarne quale traccia entro le capsule ove esse giacciono delle masse ora omogenee ed ora granulose. Lasciata la preparazione un solo giorno nell'etere si notava la loro completa scomparsa.

Il Kaposi in un lavoro sulla etiologia dell'Herpes Zoster (²), parla di un caso di Zoster lombo-inguinale osservato in un uomo di 54 anni, morto per piemia 9 giorni dopo l'eruzione. Alla sezione trovò macroscopicamente iperemia della midolla lombare e suoi involucri, microscopicamente alterazione marcata del 2°, 3° ganglio lombare destro, tracce al 4°, 5° ganglio lombare dello stesso lato, visibili alterazioni nell' ultimo ganglio dorsale e nel 1° lombare. L'autore poi rinvenne iperemie varicosità dei vasi e focolai emorragici nella tessitura interstiziale, le cellule nervose si presentavano alterate, fortemente pigmentate, ed infiltrate da corpuscoli sanguigni.

Queste osservazioni sui gangli intervertebrali del tronco e delle estremità sono avvalorate dalle alterazioni trovate nel ganglio del Gasser nel Zoster della faccia. Infatti il Weidner (³), in un vecchio morto 5 anni dopo avere sofferto un'eruzione di Zoster alla faccia in corrispondenza della regione innervata dal 1° ramo del trigemino destro, trovò nelle varie cellule nervose del corrispondente ganglio del Gasser il protoplasma più o meno infiltrato da masse di pigmento, ed il nucleo ora ben netto e visibile ora non visibile od indistinto. La tessitura interstiziale del ganglio appariva ricoperta da una numerosa quantità di nuclei.

Wiss (⁴) descrive minutamente un caso di Zoster il quale si era sviluppato in rapporto col primo ramo del trigemino, in un uomo di 68 anni, morto all'ottavo giorno di una tale eruzione. Quest' autore alla sezione trovò flebite e trombosi della vena oftalmica, emorragie nell'interno del ganglio del Gasser, e nel primo ramo del trigemino ove le fibre nervose erano manifestamente alterate; il 2° e 3° ramo del trigemino erano normali; la struttura del ganglio del Gasser quasi normale all'uscita del 2° e 3° ramo del trigemino mostravasi grandemente alterata all' uscita del primo, la sua tessitura interstiziale era infiltrata da numerose cellule neoformate più al centro che alla periferia. Le cellule nervose, alcune delle quali erano maggiormente pigmentate venivano schiacciate da questa proliferazione e prendevano un aspetto molto irregolare. Il Wiss osservò che alcuni nuclei della tessitura interstiziale erano pigmentati, ed il pigmento che essi contenevano era in rapporto con quello che si rendeva libero dalla cellula nervosa per il disgregamento molecolare di essa. La reazione chimica con cianuro di potassa ed acido idroclorico escluse che questo pigmento fosse originato dalla distruzione dei corpuscoli rossi del sangue, ma bensì verificò che era identico a quello delle cellule nervose.

(¹) Wagner, Archiv der Heilkunde, tom. 11 fasc. 4°, 1870. — (²) Wiener med. Jahrb. 1876. — (³) Berliner klin. Wochenschrift, f. 27 anno 1870. — (⁴) Archiv der Heilkunde, f. 12 anno 1871.

Sull'alterazione dei gangli intervertebrali nei processi patologici della midolla spinale possediamo le seguenti cognizioni. Nell'Atassia locomotrice Bourdon (1) trovò che l'alterazione dei gangli intervertebrali accompagnava quelle del cervello e della midolla spinale. Le alterazioni della sostanza cerebrale consistevano in iperemie vasali che s'avveravano principalmente nella sostanza grigia dei talami ottici e dei corpi striati. Nella midolla spinale la pia e la dura madre erano fortemente vascolarizzate, i cordoni anteriori normali, i posteriori profondamente alterati, specialmente nella regione lombare, la sostanza grigia rammollita, le radici anteriori e posteriori nella regione lombare alterate, il grado d'alterazione che le colpiva era più avanzato nelle radici posteriori.

Tutti i gangli intervertebrali della regione lombare si osservavano aumentati di volume, arrossati, insolitamente vascolarizzati con consistenza non diminuita, e con involucro notevolmente ispessito. Le ricerche microscopiche fecero conoscere l'esistenza di capillari enormemente dilatati, tracce non dubbie di antichi processi congestivi con diffusione di materia ematica. Alcune cellule nervose mostravansi per lo intiero ripiene di pigmento brunastro, con i bordi retratti ed irregolari; altre all'opposto apparivano voluminose quasi sferiche scolorate con aspetto di vescicole adipose, da cui facilmente si distinguevano per le tracce ancora apparenti del nucleo e per le vestigia dei loro prolungamenti.

Wulpian (2) nelle ricerche sullo stato dei nervi sensibili dei gangli spinali e simpatici nei casi di sclerosi dei fasci posteriori, trovò che mentre l'intero tratto della radice posteriore che scorre dalla midolla al ganglio era atrofico, il ganglio stesso ed il suo tronco periferico fino alle sue ultime divisioni nella pelle apparivano normali.

Questi fatti hanno indotto il Leyden (3) a scrivere che nell'Atassia locomotrice non si è ancora con sicurezza costatata l'alterazione dei gangli intervertebrali.

Dumeniel (4) nell'atrofia muscolare progressiva delle estremità superiori costatò la insensibilità allo stimolo elettrico delle parti affette, la degenerazione grassa delle fibre delle radici anteriori e posteriori della midolla cervicale. In qualche ganglio spinale della regione cervicale le osservazioni microscopiche lasciavano scorgere degenerate in grasso le cellule della tessitura interstiziale. Le cellule nervose erano fortemente pigmentate, il loro nucleo poco visibile, le fibre nervose degenerate in grasso sì fortemente, che riusciva difficile il poterle riconoscere.

Lubimoff (5) anche in un caso d'atrofia muscolare vide nei gangli intervertebrali le cellule nervose alterate ed il pigmento che era abbondantemente accumulato nella tessitura interstiziale potevasi differenziare facilmente dai granuli di grasso mercè l'alcool bollente.

Schneevogt, Clarke e Leyden (6) all'opposto nei casi d'atrofia muscolare progressiva non hanno mai potuto confermare le ricordate alterazioni dei gangli intervertebrali.

(1) *Études cliniques et histologiques sur l'Ataxie locomotrice progressive.* Archive général de Médecine. Nov. 1861. — (2) Archiv. de Physiol. norm. et pathol. — (3) Leyden, *Klinik der Ruckenmark's Krankheiten.* Berlin, 1876. — (4) *Nouveaux faits relatifs à la Pathol. de l'Atrophie musculaire grasseuse.* Gaz. hébd. de Méd. et de Chir. n. 27, 29, 30. — (5) *Recherches sur l'état du système nerveux sympatique dans un cas d'Atrophie musculaire progressive spinale propatique et dans un cas de sclérose latérale amitropique.* Archiv. de Physiol. norm. et path. n. 6 p. 889. — (6) Leyden, l. c.

L'Arnt (1) in un lavoro sull'alterazione della fibra nervosa nella paralisi generale progressiva descrive una alterazione delle fibre nervose, che egli ha chiamato degenerazione pigmentosa della membrana midollare delle fibre nervose. Nelle fibre dei gangli intervertebrali dello stesso caso, ed in quelle del ganglio del Gasser in un altro trovò la membrana midollare atrofica o scomparsa, mentre il cilindro assile mostravasi splendente più dell'ordinario ipertrofico e striato. Nello stesso lavoro l'Arnt descrive anche un'altra alterazione delle fibre del cervello, della midolla, dei gangli intervertebrali, del ganglio di Gasser e del ganglio giugulare del vago. Queste fibre contenevano nuclei pallidi, appiattiti, formati da una sostanza poco refrangente, leggermente granulosa nella quale erano rinchiusi due o tre grossi granuli a guisa di nucleolo i quali offrivano una straordinaria posizione, poichè essi non giacevano sulla superficie della fibra, ma sul cilindro dell'asse, per cui egli conchiuse di avere trovato *cilindri assili portanti nuclei.*

Nella paralisi progressiva del bulbo Leyden trovò le radici anteriori alterate, mentre i gangli intervertebrali apparivano normali.

Levi (2) in un caso di paralisi ascendente, sullo stato del cervello, della midolla, del simpatico e dei gangli intervertebrali ci fornisce i seguenti dati. Traccia alcuna di congestione capillare nella midolla, nessun essudato interstiziale, nessun ispessimento del tessuto connettivo, le cellule e le fibre nervose perfettamente normali: lo stesso fatto fu osservato nelle radici nervose e nei gangli situati a livello dei fori di coniugazione. Molti gangli del gran simpatico ed il nervo pneumo-gastrico non presentavano lesioni: nel cervello la forte iniezione venosa delle meningi era la sola alterazione rimarcabile.

Il Westphal (3) cita un caso di paralisi e contrattura delle estremità inferiori in cui alcuni gangli spinali e lombari esaminati a fresco presentavansi normali. Nella midolla trovò la degenerazione grigia dei cordoni posteriori e l'atrofia delle radici dello stesso lato.

Dejerine (4) nelle sue ricerche sul sistema nervoso nelle paralisi difteriche descrive le alterazioni trovate nella midolla e nelle radici anteriori, mentre le radici posteriori ed i gangli intervertebrali erano normali. Altri autori descrivendo in alcuni processi patologici della midolla le alterazioni dei nervi periferici non parlano dello stato dei gangli intervertebrali.

In un caso di mielite acuta Mankopf osservò che le radici spinali contenevano numerose cellule e fibre nervose degenerate in grasso.

Leyden riferisce che frequentemente nelle malattie della midolla riscontrasi la degenerazione grassa delle fibre dell'ischiatico.

Klemm vide in due casi di mielite l'iniettamento e rigonfiamento dell'ischiatico, ma alle ricerche microscopiche non potè dimostrare alcuna alterazione delle sue fibre.

(1) *Aphorisme zur Pathol. anat. der central Organe des Nervensystem.* Virchow Arch. 61. — (2) *Contribution à l'étude de la paralysie ascendente* etc. Archiv. général de Médecine 1865. — (3) Westphal, *Ueber Erkrankungen des Ruckenmarks, bei der allgemeinen progressiven Paralyse der Irren.* Archiv für pathologische Anatomie, tom. 39, 1877. — (4) Archives de Physiologie normale et pathologique n. 2, 1878.

Nella Chorea minor Elischer [1] descrive l'alterazione del nervo mediano e dello sciatico.

Nell'atrofia muscolare progressiva Dejerine [2], oltre le alterazioni delle corna anteriori della midolla trovò anche le alterazioni delle fibre dell'ischiatico.

Nelle presenti nostre ricerche abbiamo fatto soggetto di studio quattro casi di malattie della midolla in cui trovammo che le alterazioni si diffondevano anche alle radici spinali ed ai gangli intervertebrali. Vennero esaminati i seguenti casi:

1° e 2° Caso — *Mielite acuta ascendente da emorragia traumatica.*

3° Caso — *Paralisi progressiva degli alienati.*

4° Caso — *Mielite cronica spontanea.*

Abbiamo riunite le due storie, e la descrizione delle alterazioni dei gangli intervertebrali dei due casi di mielite acuta, perchè il processo morboso ha avuta la medesima origine, il medesimo decorso e le alterazioni trovate risultarono identiche.

Storia del primo Caso. Mielite acuta. Giovanni S. di anni 26 cadde dall'alto, trasportato all'Ospedale della Consolazione di Roma (quartiere del prof. Laurenzi) un'ora dopo la caduta conservava integre le facoltà sensitive e motrici. Poche ore dopo avvertì un dolore alla regione sacrale ed un senso di formicolio nelle estremità inferiori. 2° *Giorno.* La sensibilità tattile dolorifica elettrica era abolita completamente in ambedue le estremità inferiori fino ad una linea che s'arrestava quattro dita trasverse al disotto delle spine iliache anteriori superiori. 5° *Giorno.* La linea anestetica era ascesa un cent. sotto l'ombelico con paralisi dello sfintere della vescica e del retto. 10° *Giorno.* L'anestesia ascendendo sempre parallela alla regione anteriore posteriore e laterali del tronco, aveva guadagnato una linea che s'arrestava quattro cent. sotto la l'area mammaria: le estremità inferiori e lo scroto erano edematose. 13° *Giorno.* L'anestesia aveva superate le mammelle, la respirazione era stentata, l'espansione degli archi costali minima. 16° *Giorno.* L'area dell'anestesia era rappresentata da una linea che seguiva parallela il margine inferiore della seconda costola. 18° *Giorno.* S'osservò l'anestesia nel campo d'innervazione del brachiale-cutaneo interno destro, e la respirazione diaframmatica. 20° *Giorno.* La linea anestetica giungeva un cent. sotto la clavicola all'innanzi, 5 cent. al disopra della spina della scapola all'indietro; l'infermo accusava uno stringimento all'esofago, la respirazione era breve e faticosa, l'edema ascendeva fino all'area mammaria. 21° *Giorno.* La temperatura ascese a 41 Celsius. 22° *Giorno.* Morte.

Sezione. Cadavere edematoso, decubiti al sacro alle regioni calcanee e malleolari. Aperto lo speco vertebrale 4 ore dopo la morte si rinvenne la dura madre vascolarizzata in tutto il tratto spinale, nella regione lombare appariva rigonfiata, la superficie interna era ricoperta da un sottile strato d'essudato purulento aderente alle pareti, mentre un essudato siero purulento era raccolto nella sua cavità. Anche la pia madre mostravasi vascolarizzata nel tratto spinale, la sua superficie esterna nella regione lombare era ricoperta da un essudato purulento. L'aspetto della midolla normale nella regione cervicale, leggermente rigonfiata nella ultima porzione dorsale,

[1] *Ueber die Veränderung in den peripherischen Nerven und in Rückenmark bei Chorea minor.* Virchow Arch. 61. — [2] *Atrophie musculaire et paraplégie dans un cas de syphilis maligne précoce.* Archiv. de Physiol. norm. et pathol. n. 8, 1876.

appariva ingrossata e molto rammollita alla regione lombare, al disopra della origine della coda equina in corrispondenza de'cordoni posteriori trovavasi un coagulo sanguigno della lunghezza di circa quattro centimetri. Alla regione lombare per l'alto grado di rammollimento erano invisibili i confini della sostanza grigia la quale formava una massa unica colla sostanza bianca. Alla regione dorsale la sostanza grigia appariva leggermente rammollita rigonfiata e nel taglio trasverso si vedeva ravvolta da un anello rammollito di sostanza bianca. Nei cordoni posteriori il focolaio di rammollimento era più esteso che negli anteriori. Alla regione cervicale mentre i confini delle corna anteriori erano ben netti, quelli delle corna posteriori erano poco distinti perchè circondati da un leggero rammollimento della sostanza bianca. Le radici anteriori e posteriori apparivano molto vascolarizzate, all'aspetto macroscopico i gangli intervertebrali non offrivano nulla d'anormale. Nulla d'anormale nella cavità del cranio.

Storia del secondo Caso. MIELITE ACUTA. Gaspare B. di anni 18 osservato un giorno dopo la caduta da un'altezza di pochi metri, fu costatato che eragli impossibile di camminare e di stare nella posizione eretta. Accusava un forte dolore alla regione lombare ed un senso di formicolio alle estremità inferiori. Nella posizione orizzontale poteva appena alzare la gamba destra, mentre alzava la sinistra senza una grave difficoltà; la sensibilità tattile dolorifica ed elettrica era abolita all'arto inferiore destro fino a 4 cent. sotto la spina iliaca anteriore superiore corrispondente, mentre all'arto inferiore sinistro sopra al ginocchio avvertiva indistintamente la sensibilità dolorifica ed elettrica la quale addiveniva distinta al 3° medio della coscia. 6° *Giorno.* L'anestesia era avanzata nel lato sinistro fino al livello della spina iliaca anteriore superiore, mentre nel lato destro era solo avanzata per 3 cent. 12° *Giorno.* L'anestesia aveva fatto un rapido progresso al lato destro, e trovavasi in ambedue i lati marcata da una linea che scorreva orizzontalmente parallela all' ombelico. Paralisi del retto e della vessica orinaria, scroto ed estremità inferiori edematose. 20° *Giorno.* Morte.

Sezione 20 *ore dopo la morte.* Cadavere edematoso alle estremità inferiori ed allo scroto, vasto decubito al sacro. Nello speco vertebrale la dura madre si presentava riccamente vascolarizzata in specie alla regione lombare: lo stesso fatto avveniva per la pia madre che nella stessa regione era rigonfiata ed edematosa. Al disopra della coda equina poggiava un grosso coagulo sanguigno. L'aspetto della midolla era normale nella regione cervicale e dorsale, rigonfiata ed altamente rammollita alla regione lombare. All'aspetto macroscopico i gangli non presentavansi anormali, nella cavità del cranio, del petto e del ventre non s'osservarono lesioni degne di nota.

Nelle osservazioni microscopiche di ambedue i casi, i più manifesti ed avanzati periodi del processo patologico si trovarono nei gangli intervertebrali lombari. Anche i gangli dorsali del primo caso si presentarono alterati, mentre i gangli cervicali erano fortemente iniettati. Le cellule nervose non essendosi nè presentate tutte contemporaneamente alterate nè alla stessa fase di processo degenerativo, abbiamo avuto l' occasione di esaminare il decorso ed i periodi delle alterazioni alle quali erano progressivamente in preda.

Il primo ad alterarsi era il protoplasma delle cellule. Esso appariva ripieno di granulazioni bruno-giallastre che lo rendevano meno trasparente e più oscuro, in alcune cellule era addivenuto talmente torbido e granuloso che nascondeva i contorni del nucleo e solo vedevasi nettamente il nucleolo. In altre cellule che offrivano gli stessi cambiamenti del protoplasma, anche quelli del nucleo erano manifesti. Mostravasi il nucleo rigonfio ed aumentato di volume, i suoi margini, benchè netti e rotondi, non erano marcati come nello stato normale, il suo contenuto era oscurato ma omogeneo, il nucleolo ingrandito e marcato da forti contorni conteneva grosse granulazioni giallastre refrangenti la luce.

Nei sopra descritti stadî d'alterazione, alcune cellule apparivano ingrandite còn margini netti e rotondeggianti, altre all'opposto sembravano leggermente atrofiche, con margini grossolani oscuri e di forma irregolare (Fig. 2). In altre cellule si vedeva il nucleo impiccolito, retratto, con margini irregolari e stellati addossato al nucleolo (Fig. 3). Da ultimo alcune cellule fortemente atrofiche avevano il nucleo molto impiccolito, irregolarmente retratto e formante una massa unica col nucleolo i di cui contorni erano divenuti indistinti ed irregolari. In altre cellule non era più visibile alcuna traccia di nucleo e di nucleolo.

Le cellule che mostravano questo alto grado di degenerazione del nucleo erano atrofiche, retratte, il loro protoplasma appariva torbido, granuloso, diminuito di volume, con contorni irregolari marcati da grosse linee oscure. Un attento esame della singolare apparenza dei contorni di queste cellule faceva vedere che l'ingrossamento dei margini era dovuto ad un fenomeno di refrazione della luce, poichè la cellula retratta irregolarmente in tutte le sue parti presentava varî e differenti piani di refrazione. Il processo d'atrofia e di raggrinzamento del protoplasma non colpiva uniformemente tutte le sue parti, perchè irregolarmente retratto e perchè molti nuclei occupavano la periferia di esso.

Le capsule, le di cui alterazioni avevano una certa relazione con quelle delle cellule, nei primi periodi mostravano le pareti rigonfiate, i nuclei non aumentati, in seguito esse si ispessivano ed i loro nuclei aumentavano di numero. Lo spazio pericellulare, che fisiologicamente esiste fra la cellula dei gangli intervertebrali e la sua capsula, si vedeva sempre ingrandito, ad eccezione dei primi periodi d'alterazione della cellula in cui non appariva alcuna traccia di esso.

La tessitura connettivale interstiziale mostrava un aumento di nuclei, la presenza di piccole gocciole di grasso e di granuli di pigmento. La quantità di questi granuli non era grande, essi erano regolarmente stratificati, o allocati entro il protoplasma o entro il nucleo delle cellule connettive.

Le reazioni chimiche con cianuro di potassa ed acido idroclorico fatte su molti preparati non avendo colorato in bleu questi granuli, hanno fatto ammettere che la loro chimica natura era diversa da quella dei granuli di pigmento sanguigno costituiti da ematoidina.

I vasi sanguigni molto iniettati avevano le pareti perfettamente normali.

Nei gangli lombari d'ambedue i casi ed anche nei dorsali del primo, tanto i tronchi dei nervi scorrenti entro al ganglio, quanto quelli delle radici anteriori e posteriori, presentavano in molte delle loro fibre le seguenti alterazioni. Le fibre apparivano

qua e là rigonfiate e varicose, il loro contenuto era fortemente granuloso, la membrana di Schwann ispessita; impregnate con il carminio non appariva alcuna stria colorata che segnasse il decorso del cilindro dell'asse; alla reazione coll'acido osmico mostravano la scontinuità della loro guaina midollare rappresentata da numerose gocciole irregolarmente disposte entro la guaina di Schwann.

Storia del terzo Caso. DEMENZA PARALITICA PROGRESSIVA. Antonio dell'O. di anni 56 fu condotto al Manicomio di Roma nel maggio 1877. La conoscenza del suo passato, le profonde alterazioni del senso del moto della intelligenza che presentava fecero diagnosticare gli ultimi stadî d'un processo di demenza paralitica progressiva. Egli giaceva immobile nel suo letto, non aveva conoscenza di se stesso, le facoltà motorie e sensitive apparivano completamente abolite, gli sfinteri della vescica e del retto erano paralizzati. Morì nell'agosto dello stesso anno.

Sezione dopo 24 *ore.* Cervello piccolo di consistenza più dura del normale, l'arteria basilare le carotidi interne le arterie del circolo di Willis contenevano grosse placche ateromatose, al taglio si mostrava la sua sostanza anemica. Nello speco vertebrale l'aspetto della dura e pia madre era normale, la midolla aumentata di consistenza, al taglio trasverso la sostanza grigia appariva atrofica e non bene limitata dalla sostanza bianca. Niente d'anormale macroscopicamente mostravano le radici spinali ed i gangli intervertebrali. Ateromasie nell'aorta: degenerazione grassa dei visceri addominali.

In questo caso il processo patologico dei gangli intervertebrali aveva avuto una grande analogia con quello già osservato nei due casi di mielite acuta, solo ne differenziava per il singolare aspetto che presentavano le cellule nervose, le quali si mostravano indistinte nei varî gradi d'alterazione pigmentosa.

Abbiamo osservato che i primi gradi d' alterazione delle cellule erano a carico del protoplasma, il quale appariva oscuro, torbido, granuloso, mentre il nucleo ed il nucleolo erano normali.

In alcune cellule in cui il nucleo ed il nucleolo erano normali o presentavano i primi periodi della loro alterazione, il protoplasma si mostrava torbido, granuloso, grandemente diminuito di volume, terminato con margini irregolari e sfumati in modo da sembrare alle volte barbificazioni d'un protoplasma atrofico. Un grande spazio lo separava dalla capsula, ed in esso qua e là apparivano masse di granuli nerastri liberi, i quali confinavano con gli orli sfumati del protoplasma (Fig. 7). Alcune di queste cellule presentarono le nette immagini del pigmento che si rendeva libero dal protoplasma della cellula nervosa a causa del suo disgregamento molecolare; si vedevano piccoli accumuli di pigmento situati liberi in un orlo che divideva la capsula dalla cellula, confinare col pigmento della cellula nervosa, alcune volte vedevansi questi granuli disposti in forma di strisce arrivare fino alla capsula ed anche essere situati nel protoplasma delle cellule e nei nuclei della stessa (Fig. 5). Abbenchè molti nuclei della tessitura interstiziale in vicinanza di tali capsule si mostrassero pigmentati, non avemmo mai l'occasione di vedere queste strisce di pigmento confinare direttamente con essi.

A processo patologico più avanzato, partendo dalle alterazioni del nucleolo, il protoplasma non presentava i netti caratteri del suo disgregamento molecolare, ma appariva progressivamente atrofico raggrinzato e circondato da bordi nerastri.

In alcune di tali cellule il nucleo era ingrandito di volume, il suo contenuto era torbido ma omogeneo, i suoi contorni erano rotondi, altre volte esso si vedeva retratto e stellato, conteneva un nucleolo granuloso ed ingrandito, ed era circondato da un protoplasma oscuro avvizzito ed atrofico contenente grandi ammassi di pigmento (Fig. 3). In fine in altre cellule si mostravano il nucleo ed il nucleolo poco distinti formanti insieme una massa irregolare, il protoplasma era ridotto ad un solo segmento appena visibile o del tutto scomparso, ed essi erano circondati da ammassi di granuli di pigmento (Fig. 4). In altre circostanze si vedevano, quali resti delle varie parti della cellula nervosa, mucchi di pigmento rinchiusi entro capsule proliferate ed ispessite.

In moltissime cellule si scorgeva la presenza di gocciole di grasso fra esse e la loro capsula, le quali alle volte si mostravano annicchiate ed in parte quasi invaginate nel protoplasma della cellula, la quale in tali casi prendeva un aspetto irregolare (Fig. 6).

In questo caso l'irregolarità con cui il processo patologico colpiva gli identici elementi era più marcato che nei due casi di mielite acuta; ciò s'avverava anche per le cellule nervose alcune delle quali perfettamente normali, erano circondate da tessitura interstiziale e da gruppi d'altre cellule profondamente alterate. Il numero delle cellule nervose sembrava diminuito. Anche in questo caso i margini oscuri che apparivano nella periferia delle cellule atrofiche erano dovuti al fatto citato nei casi precedenti. La capsula delle cellule nervose presentava un rapporto fra le sue alterazioni e quelle della cellula in essa contenuta. Nei varî periodi d' alterazione la capsula mostrava un aumento di nuclei, i quali venivano per la proliferazione successiva spinti nel protoplasma della cellula nervosa, che ai suoi contorni assumeva un aspetto irregolare. Si vedevano anche delle capsule nelle quali all'opposto i nuclei erano diminuiti, ma esse mostravano un forte ispessimento e contenevano i resti atrofici di qualche cellula nervosa: alcune altre capsule pressochè normali avevano la pigmentazione delle pareti, erano quasi vuote o solo contenevano disseminati piccoli ammassi di granuli scuri. I nuclei del tessuto connettivo interstiziale erano aumentati, si notava in esso anche la presenza di cellule granulose e di gocciole grasse di granuli di pigmento e di piccoli focolai emorragici.

Le cellule granulose apparivano quali grossi nuclei riempiti di granuli grassi, giallastri refrangenti fortemente la luce. Le emorragie erano rappresentate da piccoli stravasi sanguigni attorno ai vasi: i più vasti focolai emorragici erano osservabili in vicinanza della capsula del ganglio (Fig. 8 B). Dei corpuscoli rossi erano infiltrati nel tessuto interstiziale unitamente a dei granuli di pigmento. In alcuni preparati per sfibramento si osservava che il protoplasma delle cellule connettive interstiziali conteneva uno o due corpuscoli rossi ben conservati e riconoscibili, in altre essi erano sformati e ridotti in un detritus granuloso. Con la reazione chimica di cianuro potassico ed acido idroclorico si ebbe una colorazione intensamente bluastra dei granuli di pigmento: questa reazione dimostrò che quel pigmento aveva origine dal disfacimento dei corpuscoli rossi. È a notarsi però che alcuni granuli di pigmento restavano incolori: questo fatto s'avverava nei nuclei pigmentati di quelle capsule nell'interno delle quali esistevano granuli di pigmento liberi per il disgregamento molecolare del protoplasma.

I vasi sanguigni erano molto iniettati, alcuni capillari presentavano piccole ectasie e sfiancamenti (Fig. 8 C). altri mostravano un rilevante ispessimento delle pareti. La capsula che circonda i gangli intervertebrali mostravasi ispessita.

In molte fibre nervose tanto entro ai gangli quanto nelle radici spinali fu trovato l'ispessimento della membrana di Schwann, i nuclei granulosi, la guaina midollare rigonfiata granulosa ed in qualche luogo scomparsa era rimpiazzata da piccole gocciole. Il cilindro dell'asse mostravasi rigonfio, debolmente impregnavasi con il carminio, in alcune fibre non era avvertibile la sua presenza, con l'acido osmico si tingevano in nero alcuni nuclei della membrana di Schwann e le gocciole contenute entro di essa. Tra queste fibre rimarcavasi anche la presenza delle cellule granulose.

Storia del quarto Caso. Mielite cronica. N. N. nell'estate del 1876 soffrì un forte dolore alla regione lombare accompagnato da indebolimento delle estremità inferiori che unitamente ad altri sintomi generali lo costrinse a giacere lungamente in letto.

Nell'inverno del 1877 potè riprendere il suo lavoro però senza avere interamente riacquistate le forze, l'incesso era stentato faticoso ed accompagnato da dolore alla regione lombare. Nell'autunno dello stesso anno impossibilitato a camminare e molestato da più forti dolori, fu costretto di tornare in letto. Da questo tempo fino a quando entrò (gennaio 1878) nella clinica medica di Rostock aggravò sempre: presentava una completa paralisi delle estremità inferiori della vescica del retto, un leggero edema alle estremità inferiori, un dolore alla pressione nella regione cervicale, la sensibilità scemata in ambedue le estremità inferiori. Morì 8 giorni dopo l'ingresso nelle sale cliniche.

Sezione dopo 24 *ore. Speco vertebrale.* La dura e pia madre molto vascolarizzate in tutto il loro tratto spinale. La midolla alla regione lombare era rigonfia e rammollita, alla dorsale macroscopicamente appariva normale, ed alla cervicale si notava un parziale rammollimento nei cordoni posteriori. I gangli intervertebrali lombari apparivano diminuiti di volume: nulla di rimarchevole al cervello.

Alle osservazioni microscopiche si riscontrarono alterati i gangli lombari ed i gangli cervicali, non che qualche ganglio dorsale. Quasi tutte le cellule nervose dei gangli lombari erano colpite dal processo regressivo, il numero delle cellule alterate era minore nei gangli cervicali, i dorsali apparivano quasi normali. Tanto nei gangli lombari quanto nei cervicali si scorgeva che tutte le cellule alterate erano diminuite di volume, i loro contorni apparivano oscuri irregolari retratti, il loro protoplasma aveva perduto l'aspetto finamente granuloso, si mostrava omogeneo e refrangente la luce, il nucleo di forma rotondeggiante non appariva mai netto e distinto (Fig. 9 A); qualche volta si mostrava retratto, stelliforme, atrofico, addossato al nucleolo che non mostrava alterazioni, ovvero era del tutto scomparso tanto nelle cellule pigmentate quanto nelle non pigmentate.

Il nucleo non occupava sempre il centro della cellula ma alle volte era addossato alla sua periferia. Con la colorazione al carminio in alcune cellule si sono potuti osservare i resti del nucleo e del nucleolo più chiaramente ove essi apparivano indistinti. Ad onta di questo artificio tanto il nucleo quanto il nucleolo non apparivano mai netti e distinti come nello stato normale. In ultimo è da notarsi che non fu

possibile di scorgere nè nel nucleo nè nel nucleolo un aumento di volume, il quale potesse ascriversi ad un fatto patologico.

Avendo avuto opportunità di vedere anche in questo caso delle cellule nervose a varie fasi di processo regressivo non apparve mai che qualcuna di esse si mostrasse aumentata di volume, ma solo erano ripiene di granuli di pigmento, il quale si infiltrava anche lungo i loro prolungamenti. La quantità di questo pigmento in alcune cellule era considerevole, infatti grandi cellule sotto forti ingrandimenti presentavano tutte le loro parti completamente ripiene di pigmento. La capsula che circondava queste cellule mostravasi ispessita e qualche volta ricca di nuclei, gli spazî pericellulari in alcune cellule nervose erano poco aumentati, mentre in altre non erano punto visibili. Il numero dei nuclei contenuti nella tessitura interstiziale era scarso ma in cambio vi si vedevano numerose cellule connettive granulose, piccole gocciole di grasso e molti granuli di pigmento giallo-scuri che apparivano anche nel protoplasma e nel nucleo delle sue cellule (Fig. 9 G). La nota reazione chimica dava la colorazione bleu dei granuli di pigmento. Il pigmento contenuto nelle cellule nervose fu sempre indifferente a questa reazione.

I vasi sanguigni mostravansi iniettati, ed in alcuni le pareti erano fortemente ispessite.

Le fibre nervose, tagliate trasversalmente all'asse nei gangli lombari nelle radici anteriori e posteriori della detta regione, e nelle radici posteriori della regione cervicale apparivano rigonfiate, omogenee, splendenti. Nei preparati ottenuti con lo sfibramento la fibra si presentava varicosa rigonfiata con contenuto omogeneo refrangente la luce, la membrana di Schwann ispessita, alcuni nuclei di essa erano granulosi, colorate con il carminio mostravano la loro guaina midollare in gran parte scomparsa. Questa aveva l'aspetto di piccoli strati filiformi colorati in rosso e disposti irregolarmente all' intorno del cilindro dell' asse, il quale appariva irregolarmente varicoso, rigonfiato ed assorbiva poco il carminio. Fra le fibre delle radici spinali le cellule granulose mostravansi in buon numero. Nei gangli dorsali quali uniche alterazioni fu notato solo il riempimento dei vasi sanguigni e la pigmentazione della tessitura interstiziale.

Basandosi sulle alterazioni che in questi casi hanno presentato i gangli intervertebrali crediamo di potere stabilire che essi possono prender parte all'alterazione della midolla, in seguito alla estensione del processo patologico del quale essa viene colpita.

L'avere osservato in alcuni gangli, nei quali non apparivano manifeste alterazioni della cellula nervosa considerevoli iperemie vasali e proliferazioni del connettivo interstiziale, e dove alcune cellule nervose mostravansi alterate ne esistevano altre perfettamente normali circondate però da tessuto interstiziale alterato, ha portato ad emettere che i primi fenomeni dell'alterazione nei gangli intervertebrali erano marcati dalla proliferazione del connettivo interstiziale e dalle iperemie vasali. Lasciando da parte la questione tuttora irresoluta, se le iperemie vasali o le alterazioni del tessuto interstiziale aprano le fasi del processo patologico, e fondandosi sulla unione delle due alterazioni, si deve ammettere col Meynert (¹) la stretta connessione che

(¹) *Studien über das pathol. Anat.* Material der Wiener Irrenanstalt-Vierteliahresschrift für Psychiatrie, 1868.

passa fra le iperemie del sistema vasale ed i cambiamenti della tessitura interstiziale. Da ciò ne segue che la cellula nervosa si comportava come le cellule nervose della midolla dove la loro alterazione sembra seguire quella della nevroglia (1) e dei vasi.

Osservammo lo svolgersi del processo patologico nei gangli intervertebrali avverarsi con fasi molto irregolari, così che anche le identiche strutture non si vedevano nello stesso tempo colpite dalla medesima fase d'alterazione in modo che anche in uno stesso preparato notavasi questa differenza. Simile fatto venne osservato anche in altri centri nervosi. Il Lubimoff (2) è giunto a queste medesime conclusioni studiando la sostanza cerebrale nelle paralisi progressive degli alienati, come del pari in casi speciali hanno ammesso l'Umgeher, l'Habraneck, il Wellischek.

Le alterazioni che presentava il tessuto connettivo interstiziale erano perfettamente analoghe con quelle descritte da Virchow (3) con il nome di nevrite interstiziale proliferante in un caso di lesione traumatica del nervo mediano e dei tronchi nervosi nella lebra anestetica. Si è veduto che in essa oltre la proliferazione dei nuclei si riscontravano le cellule granulose, delle gocciole di grasso, dei granuli di pigmento e delle emorragie.

Da ciò che si sa sulle cellule granulose può dirsi che esse non sono sempre la conseguenza di una infiammazione, perchè furono dal Simon trovate nel connettivo interstiziale del cervello e della midolla in individui che durante la vita non avevano avute speciali sofferenze. Meyer le ha trovate nel connettivo dei vecchi, ed Jastrowitz nel feto le ha vedute costituire uno speciale fenomeno fisiologico. Nei casi però da noi studiati non avvi dubbio che dipendano da un fatto patologico in specie se viene messo in rapporto il numero di esse con le speciali alterazioni che presentano gli altri elementi.

Tutti i casi da noi riferiti hanno presentato la pigmentazione della tessitura interstiziale. Questo fatto era originato dalle emorragie che si erano effettuate nello stroma del ganglio e dal disgregamento molecolare della cellula nervosa come lo hanno fatto vedere le reazioni chimiche caratteristiche ed i fatti istologici.

Due distinti processi regressivi avevano colpito nei nostri casi le cellule nervose dei gangli intervertebrali. Nei due casi di mielite acuta ed in quello di paralisi progressiva degli alienati le cellule nervose ci rappresentavano i diversi gradi della loro ipertrofia o rigonfiamento torbido, e del loro successivo disgregamento molecolare, mentre nel caso di mielite cronica osservammo le particolari immagini di quel processo che va sotto il nome di sclerosi della cellula nervosa. Nei gangli del demente paralitico osservammo che in non tutte le cellule nervose il corso di questo processo sembrava identico poichè quelle cellule, le quali presentavano il nucleo e la capsula poco o nulla alterati, ed avevano il protoplasma grandemente diminuito fino ad apparire simile a scarse masse di granulazioni circondanti il nucleo, mostravano l'evenienza di un processo di disgregamento molecolare acuto del protoplasma. Le cellule poi nelle quali i successivi mutamenti del nucleo e del nucleolo svolgevansi unitamente al progressivo periodo d'atrofia del protoplasma, fino ad apparire il nucleo ed il nucleolo ridotti quasi ad una massa unica, e circondati da un protoplasma atrofico e pigmentato, facevano vedere che esse erano colpite da un processo relativamente cronico.

(1) Leyden, opera cit. — (2) *Studien über die Veränderung des Gehirnbaues und deren Hergang bei der Progressiven Paralyse der Irren.* Virchow Archiv, t. 57. — (3) Archiv für pathol. Anat. t. 53, 1871.

Nei casi di mielite cronica e di paralisi progressiva fu trovata considerevole quantità di pigmento nelle cellule nervose. Circa all' origine di un tal fatto, alcuni autori pensano che i disturbi di nutrizione della cellula sieno accompagnati da aumento del suo pigmento; altri invece hanno creduto che l'aumento del pigmento si deve ai depositi speciali di pigmento sanguigno. La reazione stabilita per decidere su tale questione e per conoscere la natura del pigmento contenuto nelle cellule nervose, mostrò che questo era sempre indifferente alla reazione, mentre si coloravano in bleu molti granuli contenuti nella tessitura interstiziale. Questa circostanza farebbe concludere che se la cellula nervosa conteneva pigmento sanguigno (Ematoidina) aveva questo nel protoplasma della cellula subìto ulteriori modificazioni.

Le alterazioni dei vasi sanguigni furono trovate esclusivamente nella mielite cronica e nella paralisi progressiva, forse perchè le malattie dei vasi sono generalmente proprie dei processi cronici. Queste alterazioni erano rappresentate dal loro iniettamento e dall'aspetto delle pareti, le quali si mostravano o ectasiche e sfiancate, o ispessite e proliferate.

Le fibre nervose furono trovate profondamente alterate nei processi acuti e cronici sì nell'interno dei gangli come nelle radici anteriori e posteriori.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Cellule colorate col carminio.

FIG. 1. Gruppo di cellule nervose normali dei gangli intervertebrali *A.* nucleo. *B.* nucleolo. *C.* protoplasma. *D.* pigmento. *E.* capsula. *F.* spazio pericellulare. Hartnack Ocul. 3. Ob. 7.

FIG. 2. Prime alterazioni della cellula nervosa nei gangli lombari - *Caso mielite acuta* - *A.* protoplasma granuloso e torbido con confini irregolari. *B.* nucleolo granuloso. *C.* nucleo o rigonfiato e d'aspetto omogeneo oscurato, con contorni poco visibili. *D.* confini irregolari del protoplasma. *G.* capsula leggermente rigonfiata. *I.* pigmento della cellula. *O.* spazio pericellulare di molto ingrandito. Hart. Ocul. 2. Obiet. 8.

FIG. 3. Cellula nervosa dei gangli lombari con alterazioni più profonde della Fig. 2. - *Caso demenza paralitica* -. *A.* protoplasma fortemente torbido e granuloso con confini irregolari marcati da grosse linee oscure. *B.* nucleolo granuloso, *G* nucleo retratto, stelliforme, atrofico. *C.* grande quantità di pigmento contenuto nella cellula. *D.* capsula ispessita proliferata. *E.* spazio pericellulare ingrandito.

FIG. 4. Cellula fortemente pigmentata ed atrofica dei gangli intervertebrali - *Caso demenza paralitica* - *A.* protoplasma intieramente pigmentato ed atrofico con confini irregolari e marcati da linee scure. *B.* nucleo e nucleolo formanti quasi una massa unica, il nucleo apparisce retratto, altamente atrofico, il nucleolo si mostra indistinto, oscurato e granuloso. *C.* capsula ispessita.

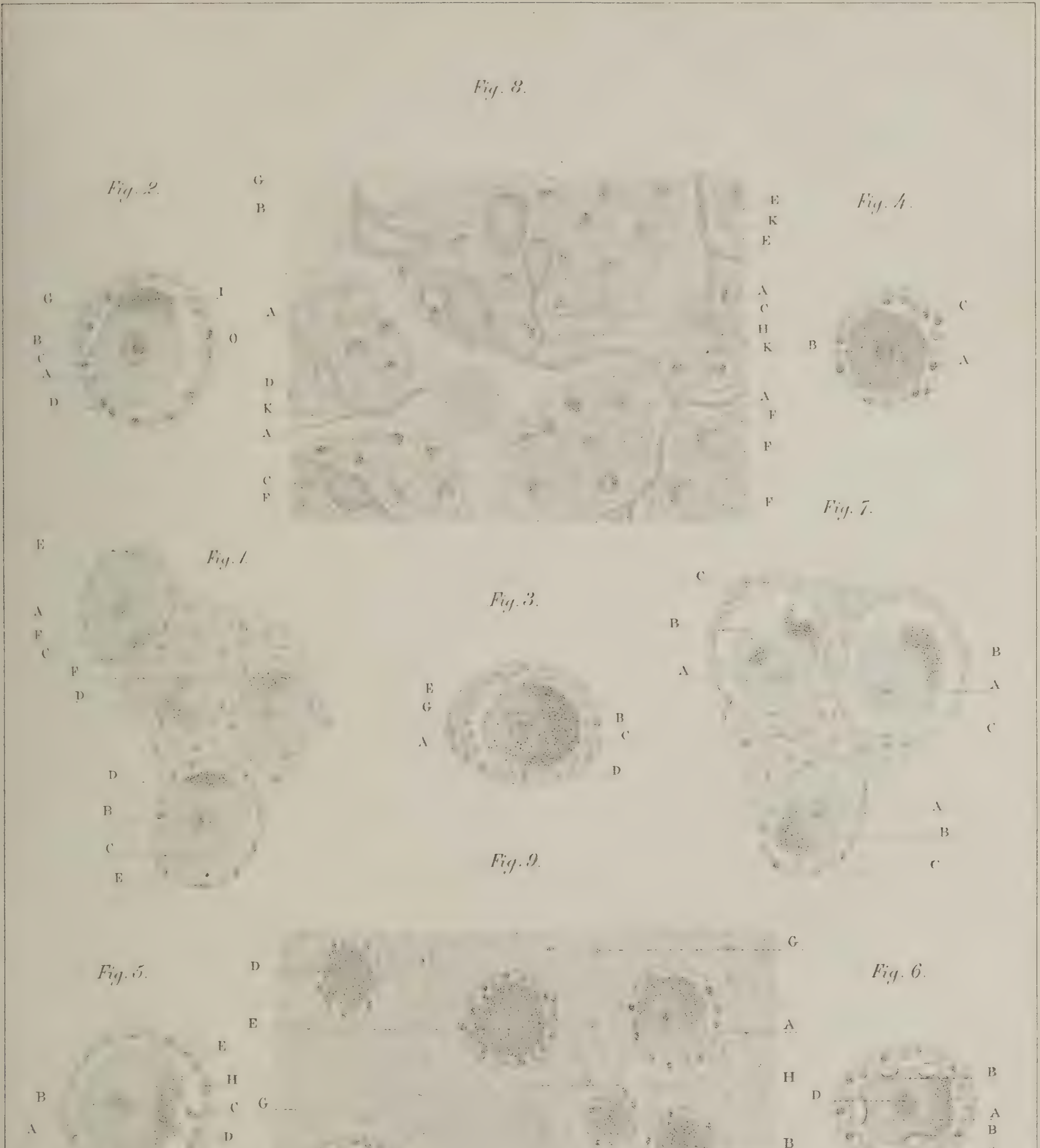
FIG. 5. Cellula dei gangli lombari - *Caso demenza paralitica* - *A.* protoplasma granuloso. *B.* nucleo e nucleolo normali. *C.* striscia di pigmento in rapporto col pigmento della capsula situato anche entro un nucleo di essa *D.* e con quello che si rende libero dalla cellula. *E.* terminazioni sfumate del protoplasma. *F.* capsula. *H.* spazio pericellulare di molto ingrandito.

FIG. 6. Cellula dei gangli lombari - *Caso demenza paralitica* - *A.* protoplasma granuloso circondato da gocciole di grasso, *B.* alcune delle quali sono annicchiate ed invaginate in esso. *D.* nucleo e nucleolo retratti ed atrofici. *C.* capsula ispessita.

FIG. 7. Gruppo di cellule nervose colorate col carminio, rappresentanti il disgregamento molecolare del loro protoplasma. *A.* nucleo inalterato ma poco apparente. *B.* protoplasma. *C.* capsula.

FIG. 8. Taglio dei gangli intervertebrali lombari - *Caso demenza paralitica* - Hartnack Ob. 4. Oc. 3. *A.* cellule fortemente pigmentate. *B.* emorragia esistente nella capsula del ganglio. *C.* ectasie dei vasi capillari tagliate longitudinalmente. *E.* ectasie tagliate trasversalmente. *F. H.* tessitura interstiziale e capsule ricche di nuclei. *D.* tronco nervoso scorrente nel ganglio. *G.* capsula del ganglio. *K.* capillari molto iniettati.

FIG. 9. Taglio dei gangli intervertebrali lombari - *Caso mielite cronica* - Hartnack Ob. 8. Oc. 2. *A.* cellula con nucleo normale ma poco visibile, con protoplasma retratto, splendente, omogeneo, fortemente pigmentato e circondato da linee scure. *B. C.* cellule fortemente pigmentate con protoplasma splendente, omogeneo in cui non è visibile alcuna traccia di nucleo o di nucleolo. *E.* cellula fortemente pigmentata in cui è solamente visibile il nucleolo. *F.* cellula completamente ripiena di pigmento con nucleo e nucleolo poco visibili, la sua capsula appare molto ispessita e proliferata. *D.* cellula ripiena di pigmento in cui non apparisce traccia di nucleo. *H.* tessitura interstiziale pigmentata. *G.* nuclei della tessitura interstiziale pigmentati e circondati da granuli di pigmento. *K.* piccolo vaso le cui pareti appariscono pigmentate. Nelle cellule *F. B.* le capsule mostrano contenere granuli di pigmento.



Lit. Danesi. Roma. U. Colonna inc.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

Di alcune sostanze non metalliche che accelerano la reazione tra lo zinco e l'acido solforico.

Memoria del Socio corrispondente FRANCESCO SELMI

letta nella seduta del 2 giugno 1878.

Nell' istituire alcune ricerche per isvelare minime quantità di fosforo libero, allorquando sia in condizioni tali da non produrre la fosforescenza col mezzo dell'apparecchio di Mitscherlich, come sarebbe quando è in soluzione alcoolica, io mi avvidi che ne basta pochissimo per ingagliardire in modo straordinario la reazione tra lo zinco e l'acido solforico diluito, e che l' acido ipofosforoso si comporta ugualmente. Ne trassi partito per renderlo manifesto quand'anche se ne abbia $^1/_{100}$ di milligr. su cui operare, dacchè l'idrogeno che si svolge fornisce la fiamma inverdita, purchè si proceda con quelle cautele e diligenze che si devono osservare in proposito.

Di tutto ciò ne tenni discorso in una mia Memoria che fu letta all'Accademia delle scienze di Bologna nel 6 dicembre dell' anno scorso, pubblicata nel vol. VIII delle Memorie dell' Accademia stessa.

Ivi pure accennai che altre sostanze agiscono come il fosforo e l'acido ipofosforoso, e promisi di farne uno studio speciale: mi vi accinsi non appena mi fu concesso da altre mie occupazioni, e ne raccolsi alcuni fatti che reputo non inutili da essere dati in luce.

Millon e Barreswil, molti anni sono, osservarono che bastano tracce di cloruro di platino o di qualche altro sale metallico, riducibile dallo zinco, perchè la reazione tra questo e gli acidi venga eccitata in maniera straordinaria; il primo suppose che il fenomeno fosse da attribuire ad una cagione non ispiegabile coi dati conosciuti della scienza, mentre il secondo opinò che derivasse dalla formazione delle piccole coppie voltaiche le quali si stabiliscono tra lo zinco e il metallo eterogeneo che sopra vi si precipita. Io sono dell' avviso del Barreswil, non solo perchè è noto come due metalli che fanno coppia elettrica fra di loro reagiscono assai più vivacemente a decomporre l'acqua, ma ben'anche perchè nel corso delle mie ricerche ebbi da convincermi, che realmente basta una tenue proporzione di un metallo sopra di un altro, acciò quello di maggiore reagibilità operi con singolare energia a fronte degli acidi diluiti.

Sarà lo stesso quando il fosforo od altri corpi non metallici intervengono tra lo zinco e gli acidi? Se ciò sia si vedrà dal corso delle esperienze che verrò descrivendo, ed in cui tratterò di alcuni corpi, i quali ne rinvigoriscono la reazione come appunto fanno alcune tracce di un sale di platino.

Idrogeno fosforato, zinco ed acido solforico diluito.

Nella Memoria testè citata, riportando in tabelle le differenze tra la rapidità con cui si svolge la reazione tra lo zinco e l'acido solforico da un lato, lo zinco, l'acido solforico e il fosforo o l'ipofosfito di soda dall'altro, feci vedere quanto un minimo di fosforo libero o di acido ipofosforoso contribuisca all'acceleramento, avvertendo che non aveva saputo rendermi ragione dell'efficacia stragrande manifestata dall'uno e dall'altro eccitatore.

Fu per chiarire la ragione del fenomeno singolare che intrapresi le ricerche contenute nello scritto presente, e che incominciai sottoponendo a prova l'idrogeno fosforato affine di conoscere se operasse con quella gagliarda eccitazione che trovai pel fosforo e per l'acido ipofosforoso.

Disposi due palloncini della stessa capacità con entro 4 gr. di zinco purificato e granulato e 20 c. c. di acido solforico diluito a 4 % di forza acida; indi in uno di essi feci gorgogliare 6 c. c. d'idrogeno fosforato, dopo che la reazione si era già svegliata al punto da essersi svolta dall'uno e dall'altro palloncino una bolla d'idrogeno.

L'andamento dello sviluppo gassoso fu osservato di confronto di 5 in 5 minuti, e gli effetti resultanti sono consegnati nella tabella che segue:

TABELLA

4 gr. Zn — 20 c. c. soluz. di SH^2O^4 al 4 %

Ore		Prova in bianco		6. c. c. d'H^3Ph	
11 — ant.					
11,10′	»	1ª bolla		1ª bolla	
11,15′	»	1 c. c.		9 c. c.	
11,20′	»	3	»	18	»
11,25′	»	4	»	40	»
11,30′	»	7,3	»	73	»
11,35′	»	10,2	»	90	»
11,40′	»	14,0	»	104	»
11,45′	»	20,0	»	115	»
11,50′	»	26,0	»	122	»
11,55′	»	32,0	»	127	»
12 — mer.		43,0	»	131	»
12,5′ pom.		50,0	»	134	»
12,10′	»	58,0	»	135	»
12,15′	»	66,0	»	136	»
12,20′	»	75,0	»	137	»
12,25′	»	82,0	»	138	»
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
1,50′	»	131	»	140	»

L'esperienza fu fatta il 4 febbraio di quest'anno ed alla temperatura ambiente; un'altra del 10 aprile con 5 gr. di zinco purissimo granulato, 20 c. c. di acido solforico titolato al 4 $^0/_0$ e poscia 10 c. c. di acqua distillata in una delle bocce, e 10 c. c. di soluzione acquosa d'idrogeno fosforato nell'altra, fornì i dati seguenti:

Ore		Prova in bianco	con H^3Ph
9,30′	antim.	4 c. c.	2 c. c.
9,33′	»	agg. 10 c. c. di acq.	agg. 10 c. c. di soluzione d'H^3Ph
9,34′	»	7 »	18 »
9,36′	»	9 »	35 »
9,40′	»	22 »	110 »
9,45′	»	40 »	160 »
9,50′	»	60 »	185 »
10 —	»	110 »	208 »
10,15′	»	150 »	215 »
11 —	»	211 »	219 »

Coll'acido cloridrico le cose procedettero in modo somigliante. In un palloncino versai 20 c. c. dell'acido al titolo di 4 $^0/_0$ e poscia 20 c. c. di acqua stillata, introducendovi inoltre 5 gr. di zinco purissimo granulato: nell'altro palloncino in cambio dell'acqua stillata aggiunsi 20 c. c. di soluzione d'idrogeno fosforato.

Il contatto incominciò alle 8,42 ant.

Ore		Prova in bianco	con H^3Ph
8,45′	antim.	$^1/_2$ c. c.	23 c. c.
8,50′	»	20 »	120 »
8,55′	»	32 »	185 »
9 —	»	66 »	223 »
9,5′	»	105 »	240 »
9,12′	»	155 »	248 »
9,25′	»	206 »	253 »
9,45′	»	225 »	255 »
10,20′	»	225$^1/_2$ »	257 »
12,30′	pom.	229$^1/_2$ »	260 »
1,20′	»	230 »	251 »

Taccio di altre esperienze confermative per non andare troppo in lungo, avvertendo frattanto che le condizioni della temperatura ambiente e lo stato puranche dello zinco possono influire in modo considerevole circa all'efficacia con cui l'H^3Ph rende più attiva la reazione.

Anche una certa influenza si manifesta secondo che l'acido è più o meno concentrato.

Volendo conoscere se lo stato superficiale del metallo rendesse o più o meno perspicuo il potere del detto eccitatore, disposi le due esperienze che sto per descrivere.

Presi due piccole verghe di zinco purissimo uguali, che dopo il getto nello stampo erano state sotto campana con calce, e le introdussi in due palloncini con 35 c. c. di acido solforico al titolo di 4 %, lasciando a reagire per 3 ore $^1/_4$. Da uno si erano svolti 37 c. c. di gas e dall'altro 40 $^1/_2$ c. c. Ad 1 ora 18′ aggiunsi in quello, che aveva dato reazione un po' minore, 35 c. c. di soluzione acquosa di H^3Ph e nell'altro 35 c. c. di acqua distillata.

Sebbene lo zinco fosse stato già corroso dall'acido, tanto da averne disciolta la parte superficiale, nondimeno la reazione fu più viva dove era stato aggiunto l'H^3Ph.

Ore	Prova in bianco	con H^3Ph
1,30′ pom.	2 c. c.	4 c. c.
1,35′ »	2,5 »	5,5 »
1,45′ »	4 »	8,5 »
2 — »	6 »	12 »
2,15′ »	7,5 »	15,5 »
2,30′ »	9 »	18 »
2,45′ »	10,5 »	20,5 »
3 — »	11,5 »	22 »
3,15′ »	12,5 »	23,5 »
3,45′ »	14,5 »	25,5 »

La seconda esperienza fu condotta sullo zinco granulato puro, il quale avea già reagito in precedenza coll' acido solforico diluito, tanto da essere coperto da una patina bruna, indi lavato più volte con acqua distillata e diviso in parti uguali che furono pesate.

In uno dei palloncini versai 30 c. c. di H^2SO^4 al 4 % e nell'altro la stessa quantità, poscia nel primo 30 c. c. di acqua distillata e nell'altro ugual volume di soluzione acquosa di H^3Ph.

Il contatto incominciò alle ore 10 ant. del 24 marzo dell'anno presente.

Ore	Prova in bianco	con H^3Ph
10,2 antim.	16 c. c.	28 c. c.
10,4′ »	30 »	50 »
10,6′ »	48 »	75 »
10,8′ »	61 »	93 »
10,10′ »	77 »	108 »
10,12′ »	88 »	122 »
10,14′ »	98 »	133 »
10,16′ »	109 »	142 »
10,19′ »	115 »	150 »
10,30′ »	176 »	190 »
10,38′ »	192 »	200 »
1,12′ pom.	230 »	245 »

Feci una soluzione concentrata di potassa caustica e ne misurai 25 c. c. che versai in palloncino con 10 gr. di zinco puro e granulato finamente, e ripetei l'ugual

cosa in un secondo palloncino; al primo aggiunsi 15 c. c. di acqua distillata e al secondo 15 c. c. di soluzione acquosa di $H^3 Ph$.

Siccome non si svolgeva reazione tra lo zinco e l'alcali, almeno in modo da raccogliere in breve una certa quantità di gas, perciò introdussi in ciascuno 30 gr. di potassa solida, e perchè la reazione avvenisse più sollecita, immersi i due palloncini in una vaschetta contenente dell'acqua che scaldai fino a 58°. Tosto la reazione si manifestò e procedette come dalle cifre che seguono:

Ore	Prova in bianco	con H^3Ph
10,25′ antim.	niente	2 c. c.
10,35′ »	»	4 »
10,45′ »	1 c. c.	5,2 »
10,55′ »	1,4 »	6,4 »
11,10′ »	1,6 »	7,2 »
11,30′ »	2 »	9 »
11,50′ »	2,4 »	10,2 »
12,10′ pom.	2,4 »	10,4 »
2 — »	3 »	12,4 »

In altra esperienza con KHO e 10 c. c. di soluzione d'idrogeno fosforato, lo sviluppo dell'idrogeno fu a un dipresso come notai nella tabella riportata.

La soluzione alcoolica di fosforo interviene con efficacia maggiore di quanto faccia l' $H^3 Ph$.

Messe insieme le dette quantità di KHO e di Zn in due palloncini, in uno aggiunsi 10 c. c. di alcole concentrato e nell'altro 10 c. c. di soluzione alcoolica di fosforo, poscia scaldai in bagno a 48°; la reazione dov'era il fosforo si svegliò molto vivace, tanto che in 10 minuti si era già dal palloncino col Ph svolta una certa quantità di H^2.

Ore	Prova in bianco	con alcol fosforato
1,40′ pom.	1 c. c.	18 c. c.
1,45′ »	4,4 »	37 »
1,50′ »	6 »	50 »
2,5′ »	11 »	87 »
2,20′ »	17 »	120 »
2,30′ »	22 »	140 »
3,5′ »	31 »	183 »
3,35′ »	45 »	228 »

Non minori furono le differenze in una seconda esperienza che fu posta in ordine alle ore 12, 55 pom. del giorno appresso con 20 c. c. di liscivia concentrata di KHO, 3 gr. di limatura di zinco, aggiungendo 3, 6 c. c. di alcole concentrato in uno dei palloncini, e 3, 6 c. c. di soluzione alcoolica satura di fosforo nell'altro. L'indicato volume di soluzione alcoolica di fosforo conteneva 1 centigr. del metalloide. La temperatura della vaschetta cominciò a 43°, ma poi crebbe fino a 52°. Cinque minuti

dopo erasi svolto dell' H^2 dall'uno e dall'altro palloncino, ma in proporzione molto diversa, come dalla tabella:

Ore		Prova in bianco		Alcol fosforico	
1 —	pom.	7,6	c. c.	30	c. c.
1,5′	»	22,2	»	90	»
1,10′	»	29	»	148	»
1,15′	»	32	»	190	»
1,20′	»	34	»	220	»
1,30′	»	38	»	265	»
1,40′	»	47	»	300	»
1,50′	»	62	»	360	»
2,35′	»	75,6	»	450	»

Dai risultati fino ad ora descritti appare evidente che l'idrogeno fosforato eccita la reazione come fanno il fosforo e l'acido ipofosforoso; e ciò pure succede se in cambio di un acido si usa un alcali caustico sullo zinco. In questo ultimo caso però il fosforo manifesta un vigore assai più gagliardo che non l'idrogeno fosforato, e ciò probabilmente per avere adoperato l'idrogeno fosforato in proporzioni tenui rispetto a quelle del fosforo, e per la stessa sua volatilità, dacchè deve rimanere poco tempo in contatto dei due corpi in reazione.

Acido solfidrico, zinco ed acido solforico.

Parecchie volte nell'esaminare se un dato zinco fosse scevro di arsenico, antimonio e fosforo per le ricerche tossicologiche, ed anche ad istudiare le condizioni più opportune acciò tra zinco ed acido solforico diluito la reazione non si spinga troppo innanzi tanto da svolgersi idrogeno solforato, io mi avvidi che allorquando (o per non essere abbastanza refrigerata la boccia, o perchè l'acido non fosse allungato a sufficienza) l'idrogeno uscente dal cannello di sviluppo incominciava ad imbrunire fortemente la carta di acetato di piombo, succedeva tale e tanto rinvigorimento di sviluppo gazoso da non bastare più il foro dell'affilatura per dargli sfogo. Dopo le osservazioni già descritte sulla forza di attività che il fosforo e l'idrogeno fosforato imprimono allo zinco ed all'acido solforico, mi nacque il sospetto che l'acido solfidrico si comportasse in maniera somigliante, onde per assicurarmene feci alcune esperienze, prendendo i due soliti palloncini, in uno dei quali versai 50 c. c. di acqua distillata con 2,5 di acido solforico e 4 gr. di zinco granulato, e nell'altro 50 c. c. di soluzione solfidrica recente e limpida colle dette quantità dell'acido e del metallo. La temperatura dell'ambiente era di 15°.

Nella tabella che trascrivo registrai i dati numerici delle due reazioni poste di confronto:

Ore		Prova in bianco		con H^2S	
1,30′	pom.	—	—	—	—
1,31′	»	—	—	$^1/_2$	c. c.
1,35′	»	—	—	60	»
1,40′	»	—	—	200	»
1,45′	»	—	—	277	»

Ore		Prova in bianco		con H^2S	
1,50′	pom	1,5	c. c.	307	»
2 —	»	12	»	320	»
2,5′	»	32	»	323	»
2,10′	»	52	»	334	»
2,15′	»	80	»	id.	»
2,20′	»	118	»	id.	»
2,28′	»	140	»	325	»
2,35′	»	188	»	—	—
2,40′	»	210	»	—	—
2,44′	»	224	»	—	—
2,50′	»	242	»	—	—
3 —	»	260	»	—	—
3,20′	»	290	»	—	—

Altra prova fu disposta con 4 gr. di zinco granulato e 25 c. c. di acido solforico del titolo di 4 per $^0/_0$, saturato allora allora d'idrogeno solforato, procedendo sempre di confronto colle dette quantità di acido solforico e di zinco soltanto:

Ore		Prova in bianco		con H^2S	
9,34′	ant.	—	—	—	—
9,55′	»	—	—	1	c. c.
9,40′	»	2	c. c.	27	»
9,50′	»	23	»	120	»
9,55′	»	50	»	162	»
10,00′	»	75	»	178	»
10,05′	»	102	»	189	»
10,20′	»	165	»	203	»
11,30′	»	210	»	233	»
1 —	pom.	213	»	230	»

Esaminando il liquido solfidrico dopo che la reazione fu a termine notai, che appariva reso torbidiccio da una materia bianca diffusavi per entro. L'aspetto sembrava quello dell'acqua solfidrica quando divenne lattea per un principio di alterazione, onde cercai se l'intorbidamento non provenisse da solfo libero.

A tal effetto vi aggiunsi del solfuro di carbonio puro, dibattendo fortemente e replicai per due volte; la materia che intorbidava diminuì alquanto, ma non scomparve del tutto, per cui supponendo che fosse solfuro di zinco ciò che non si era sciolto nel solfuro di carbonio, feltrai il liquido, lavai il feltro, ne ruppi la punta e feci cadere con un zampillo d'acqua ciò che vi era rimasto sopra, poi, sulla materia bianca staccata in tal modo dal feltro, versai dell'acido solforico diluito; essa si sciolse svolgendo del gas solfidrico.

Ponendo in altro lato ad evaporare il solfuro di carbonio mi rimase un residuo possedente l'aspetto del solfo, che pesato risultò di gr. 0,002 e che convertii per ossidazione in acido solforico e poscia in solfato di barite. Altra volta, trattai dapprima con acido solforico il liquido bianchiccio, agitando e scaldando blandamente acciò il

solfuro di zinco si sciogliesse, indi, svanito l'idrogeno solforato derivante dalla reazione, ripresi il liquido stesso, rimasto opalino, con solfuro di carbonio, che portò via la parte indisciolta dall'acido.

Replicando l'esperienza più volte coll'acido solforico, lo zinco e l'idrogeno solforato, si formò costantemente il solfuro di zinco, ma non sempre si rese libero del solfo. Come questo si possa ingenerare in tali condizioni non saprei ben dire; congetturai che in alcuni casi l'idrogeno riducesse una tenue quantità d'acido solforico ad acido solforoso o ad acido iposolforoso, donde poi la separazione di solfo libero, dal primo per reazione coll'acido solfidrico o dal secondo per decomposizione spontanea.

Comunque sia la ragione di questo fatto speciale, rimane dimostrato per l'acido solfidrico, che deve essere considerato quale eccitatore della reazione tra lo zinco e l'acido solforico.

Anche gl'iposolfiti favoriscono la detta reazione, ma non feci indagini rigorose per determinare entro quali limiti e fino a qual punto.

Ferro, zinco ed acidi diluiti.

Nelle esperienze del Millon e del Barreswil non fu esaminato se tra i sali metallici, quelli di ferro affrettino la reazione tra lo zinco e gli acidi. Era da supporre che ciò avvenisse perchè è noto che lo zinco immerso nei sali ferrici affine di ridurli a ferrosi, fa deporre tracce di ferro, come fu verificato da Mitscherlich. Nondimeno potevasi anche presumere che, quando il liquido è molto acido, ciò non succeda, parendo probabile che non appena lo zinco tenda a precipitare del ferro, questo essendo in istato molecolare nell'atto della precipitazione, venga tosto in reazione coll'acido e si ridisciolga. Era perciò da riconoscere se realmente fin dal principio i sali di ferro rendono più attiva la reazione, ed ecco quali le risultanze ottenute.

In un palloncino introdussi 30 c. c. dell'acido solforico all'1 $^0/_0$ con 4 gr. di zinco granulato, e nell'altro la stessa quantità di liquido acido e di zinco; se non che l'acido aveva reagito con 5 o 6 bullette di Parigi tanto da produrre un inazzurrimento manifestissimo col ferricianuro di potassio. La temperatura dell'ambiente era di 17°.

Ore		Prova in bianco	con Fe
11,23′	antim.	—	—
11,33′	»	—	$^1/_5$ c. c.
11,40′	»	—	1 c. c.
11,45′	»	$^1/_3$ c. c.	2 »
11,50′	»	1 »	3,6 »
11,55′	»	2 »	6 »
12 —	mer.	3,2 »	9,1 »
12,5′	pom.	4,6 »	13 »
12,10′	»	7 »	18 »
12,15′	»	9 »	23 »
12,20′	»	12 »	31 »
12,25′	»	15 »	37 »

Ore		Prova in bianco	con Fe
12,30′	pom.	20 c. c.	48 c. c.
12,40′	»	29 »	68 »
12,50′	»	42 »	96 »
12,55′	»	50 »	112 »
1 —	»	58,5 »	133 »
1,5′	»	63 »	145 »
1,10′	»	74 »	164 »
1,15′	»	84 »	183 »

Lo zinco che rimase indisciolto nel palloncino sotto l'acido ferruginoso, raccolto e lavato accuratamente, indi fatto sciogliere nell' acido solforico diluito, diede la reazione del ferro, d'onde è comprovata l' osservazione di Mitscherlich.

Indagini per ispiegare la cagione dei fatti descritti.

Allorquando vidi dapprima che il fosforo eccitava in maniera sì curiosa la reazione tra lo zinco e l'acido solforico, mi nacque il dubbio che l'effetto provenisse dal coprirsi il metallo di un velo d'idrogeno aderente nell' atto in cui s' immerge nell'acido; idrogeno il quale venisse sottratto rapidamente dal fosforo per cui la superficie metallica, essendone spoglia, potesse reagire immediatamente e con tutta la forza di cui fosse capace. Senonchè, allorquando trovai che l'idrogeno fosforato e l'acido solfidrico operano pure eccitando, quella mia congettura dovette cadere.

E nemmeno era da attribuire il fenomeno ad un velamento di ossido o di aria, dacchè tra le esperienze riferite ve ne ha una da cui si appalesa, come l' idrogeno fosforato agisca sullo zinco quand'anche da questo si svolsero oltre a 30 c. c. di gas e che perciò deve avere la sua superficie libera o dall'ossido o dall'aria. Si aggiunga inoltre, che il fosforo e l' idrogeno fosforato si mostrano efficaci quando eziandio in essi lo zinco è immerso in una liscivia caustica; caso nel quale il velo d'ossido non si potrebbe ammettere, sapendosi che tanto l' idrato di potassio quanto quello di sodio lo sciolgono avidamente. Forse sarebbe intervenuta qualche azione chimica tra Ph, H^3Ph e Zn? Ma quale? Formerebbesi un *fosfuro di zinco?* ovvero lo zinco si unirebbe all' idrogeno fosforato per ingenerare un composto $\left(Zn\frac{H^3Ph}{H^3Ph}\right)$, o vi sostituirebbe piuttosto una parte dell'H? Ciò non mi parve ammissibile, perchè Zn e Ph in un liquido acido ed a temperatura ordinaria non danno origine ad un fosfuro, e perchè nulla conduce a supporre la probabilità che tra Zn e H^3Ph si produca taluno dei composti immaginati.

Messe in disparte tali idee, me ne nacque in animo una terza, cioè, che per forza di aderenza tanto il Ph quanto l'H^3Ph e l'H^2S si condensino in parte su la superficie metallica, ed ivi rimangano trattenuti per quella medesima causa onde vediamo le materie coloranti, certe materie saline, certi alcaloidi ecc. precipitare e restare aderenti al carbone, al solfuro di piombo e simili corpi. Quando ciò fosse, comporrebbesi

per tal modo col metallo una infinità di coppie voltaiche a somiglianza di quanto fanno il platino e l'oro, nè farebbe ostacolo che il fosforo e l'H^3Ph non appartengano alla classe degli elettromotori, dacchè ridotti in istato molecolare possono acquistare qualità di cui mancano quando sono in massa.

Affine di verificare se questa induzione corrispondesse o no al vero, intrapresi alcune esperienze di cui darò conto, le quali furono molte e variate in più modi, ma di cui non riferirò che le più importanti e dichiarative.

Prove col galvanometro.

Se il fosforo e l'idrogeno fosforato agissero sullo zinco formando aderenza con esso, ed in qualunque modo producendo una combinazione alla superficie, ne doveva succedere che ponendo due pezzi uguali dello stesso zinco in coppia voltaica, l'uno immerso nell'acqua stillata o nell'acidula e l'altro in uno o nell'altro dei due liquidi a cui si aggiungesse soluzione di fosforo o di H^3Ph, avrebbesi dovuto osservare uno squilibrio elettrico mediante un galvanometro sensibile. È ciò che feci.

Per lo zinco ne presi di quello distillato e di nota purezza, avendolo previamente sottoposto ad analisi: lo fusi e lo versai in istampo di ottone ben pulito affine di averlo in cannelli di uguale lunghezza e diametro. Per montare l'esperienza, avvolsi in uno degli estremi dei cannelli un filo sottile e deterso di rame, per tre o quattro giri, e chiusi la congiunzione in un pezzetto di cannello di vetro, otturandone gl'interstizî con mastice di cera vergine e un po' di trementina affinchè nell'immersione dei liquidi questi non s'arrampicassero a bagnarla. Furono poi messi in coppia o con un tubo di vetro avente chiuso il fondo da vescica e posto in un vaso maggiore, o con due tubi uguali chiusi pure da vescica e collocati l'uno e l'altro in un vaso maggiore.

Le prove furono fatte con acqua a cui aggiunsi un poco di soluzione alcoolica di fosforo o di soluzione d'idrogeno fosforato, ed anche con zinchi che stettero immersi per un certo tempo o in detta acqua fosforata o nella soluzione alcoolica o nella solfocarbonica di fosforo, nonchè nella soluzione acquosa di H^3Ph.

Esperienza 1.ª — Preso un tubo con vescica e posto in un vaso più grande, versai nel primo 20 c. c. di acqua distillata e bollita e nel secondo 60 c. c., indi nell'uno e nell'altro tuffai uno dei bastoncelli di zinco comunicanti col galvanometro. L'ago nell'atto dell'immersione fece qualche leggera oscillazione, ma in breve si fermò a 0°.

Quando divenne stabile, copersi con uno strato di olio d'olivo l'acqua del tubo, aggiunsi 3 c. c. di alcole assoluto nel vaso grande ed 1 c. c. di soluzione alcoolica di Ph nel tubo, valendomi di pipetta che introdussi fin presso il fondo e d'onde spinsi fuori il liquido alcoolico con lento soffiare del fiato. Nell'atto in cui l'alcole fosforato si mescolò coll'acqua, il galvanometro deviò, indicando una corrente che partiva dallo zinco venuto in contatto del Ph; l'ago segnò 3° che passò immediatamente a 4° per ricadere a 3° scorsi 2 minuti. Dopo 13 min. l'ago si manteneva fermo, dopo 28 min. era diminuito a 2°, dopo 3 ore ad 1°, dopo 3,20′ toccava vicino allo 0°.

Tolsi con pipetta l'olio dal tubo, estrassi i due zinchi, li lavai subito e separatamente per sei volte in acqua distillata e bollita, e li trasportai in altro apparecchio uguale al descritto, contenente dell'acqua inacidita coll'acido solforico, e del titolo di 3 %.

Nell'istante dal tuffamento lo zinco ch'era stato nel liquido con fosforo, si coprì di grosse bolle di gas e svolse una reazione vivace, mentre su quello del vaso esterno non apparvero che rare e piccole bollicine. L'ago deviò all'opposto di quanto avrei creduto, cioè segnò la corrente in verso contrario dello zinco più attivo, il quale perciò si comportava rispetto all'altro come se fosse una bacchetta di rame.

La deviazione fu in sul principio di 6° e crebbe in 5 min. fino a 10°, e dopo altri 5 min. fino a 12°; frattanto dallo zinco che fu nel Ph lo sviluppo dell'idrogeno era continuo e rapido, mentre nell'altro non si scorgevano che bolle ingrossate e aderenti. Mezz'ora appresso le cose si mantenevano uguali tranne che dallo zinco del vaso maggiore s'incominciava a staccare qualche bolla; 50 min. dopo, anche questo zinco sprigionava una corrente d'H ma con più lentezza in confronto dell'altro, mentre l'ago era diminuito fino a 6°.

Di mano in mano che la reazione s'invigorì nel vaso esterno, l'ago s'andò accostando allo 0°, che toccò 2 ore e 10′ dopo l'immersione; poi cominciò a deviare all'opposto con deviazione crescente, toccando i 18° passate 2 ore dopo che avea raggiunto lo 0°.

Questi fatti mi resero manifesto, che per l'aggiunta dell'alcole fosforato nel tubo contenente uno dei zinchi avveniva una reazione capace di movere una debole corrente elettrica che di quivi partiva; che lo zinco rimasto per certo tempo col Ph aveva acquistata la proprietà di reagire con forza sui liquidi acidi, ma che nel tempo medesimo consumava in sè gran parte dell'elettrico svolto per la reazione; e che allorquando l'altro zinco pel logorìo dell'acido si era coperto di punte brune in modo da produrre lo stesso consumo interno, mentre nell'altro l'acido era quasi saturo di metallo, la corrente s'invertiva e tornava a designare un maggiore afflusso elettrico dal lato dello zinco stato nel Ph.

Questa esperienza replicata più volte confermò costantemente i resultati della prima.

Esperienza 2.ª — Fu disposta come la precedente, tranne che in cambio d'immergere uno zinco in un tubo a vescica e l'altro nel vaso esterno, adoperai due tubi a vescica collocati in un vaso comune. In ciascun tubo a vescica versai 20 c. c. di acqua stillata e bollita, e nel vaso maggiore 100 c. c.

Provato in precedenza se fra i due zinchi non vi fosse squilibrio elettrico e accertato che non v'era, aggiunsi in uno 1 c. c. di alcole assoluto con uno strato di olio d'olivo sopra, nell'altro 1 c. c. di soluzione alcoolica di fosforo con olio sopra, e nel vaso grande 5 c. c. di alcole assoluto. La deviazione dell'ago fu di 3° rispetto allo zinco nel tubo con Ph, che lentamente andò diminuendo come già avvertii nella prima esperienza. Quando fu presso lo 0°, tolto l'olio dai due tubi ed estrattine gli zinchi, li lavai replicatamente nell'acqua distillata, poi nell'alcole di 90° e nuovamente in acqua, e li trasportai in altro apparecchio contenente dell'$H^2 SO^4$ al titolo di 2 $^0/_0$. Nel primo istante l'ago si mosse indicando una corrente maggiore dallo zinco ch'era stato nel liquido fosforato, poi discese con rapidità a 0° e dopo 1 min. segnava 2° nel verso contrario, dopo 5 min. si era spostato fino a 3°, e successivamente andò fino a 9° scorsi 20 min.

Frattanto lo zinco ch'era stato nel liquido con Ph, non appena immerso nell'acqua acida si era coperto di bolle, mentre sull'altro nulla si manifestava; il primo sempre

più mostrò di reagire, tanto che 15 min. appresso forniva una discreta corrente di gas ed il secondo incominciava a coprirsi di bolle; la reazione fu vivacissima nel primo zinco 20 min. dopo, mentre nel secondo s'incominciarono allora a staccare piccole bollicine. L'andamento delle cose fu in seguito conforme a quello dell'esperienza precedente.

Esperienza 3.ª — In questa disposi due zinchi in due tubi a vescica in un vaso più ampio con acqua acidulata di HCl a 2° acidimetrici. In uno dei tubi feci cadere 2 goccie di soluzione neutra di $Pt\,Cl^4$. Nel primo istante l'ago si mosse indicando una corrente maggiore da questo tubo; senonchè deviò all'opposto in breve, mentre il suo zinco si coprì di nero, e incominciò a reagire con forza, e quanto più la reazione ivi cresceva tanto più l'ago si allontanava accennando minore corrente dal detto zinco: l'altro frattanto non si era coperto che di poche bolle le quali lentamente vennero aumentando. Lo zinco platinato si comportò adunque come lo zinco con fosforo.

Esperienza 4.ª — Affine di togliere il sospetto che intervenisse nella reazione un sottilissimo velamento di sottossido, che si fosse prodotto sullo zinco nel breve tratto di tempo in cui fu versato fuso nello stampo, tolto di là e poi conservato sotto campana con calce (come usai di fare), credetti opportuno d'istituire una prova apposita, pigliando de' bastoncelli del metallo e soffregandoli a lungo con carta invetriata ed alcole, fino a pulimento perfetto, indi, lavati con alcole ed acqua, li tuffai subito in acqua distillata e bollita contenuta in due tubi a vescica dell'apparecchio consueto. Posti in comunicazione col galvanometro l'ago rimase a 0°.

Essendo 100 c. c. l'acqua del vaso esterno e 20 c. c. quella di ciascun tubo, aggiunsi nella prima 5 c. c. di alcole assoluto, in uno dei tubi 1 c. c. del medesimo e nell'altro 1 c. c. della soluzione alcoolica di fosforo, previo in ambedue il versamento di una zona di olio d'olivo. Questa operazione incominciò alle ore 10 e 3 min. del mattino e l'ago deviò a 2° indicando la corrente dallo zinco nel liquido fosforato; 9 min. dopo l'ago erasi mosso fino a 3°; 2 ore dopo era ricaduto a 2°; 3 ore dopo ad 1°, e alle 1,45′ stava collocato vicino allo 0°.

Tolsi l'olio, cavai gli zinchi, li lavai replicatamente con alcole e poi con acqua e li trasportai all'istante in altro apparecchio con acido solforico al titolo di 2° acidimetrici, e nell'atto stesso l'ago segnò 4° indicando la corrente dallo zinco che non era stato nel fosforo, mentre quello che vi era stato incominciò a svolgere grosse bolle di gas che prestamente si venivano staccando: 3 min. dopo, la reazione appariva più vivace nel secondo, mentre non si manifestava nel primo che per bolle aderenti. La deviazione dell'ago andò crescendo, mostrando che la corrente maggiore usciva dallo zinco non fosforato, sebbene le bolle non si staccassero per anco e nell'altro zinco lo sviluppo del gas fosse gagliardo. Scorsi 22 min. dall'immersione nell'acqua acida, l'ago si era portato a 9° sempre dal medesimo lato, nonostante lo sprigionamento fortissimo del gas dallo zinco fosforato e le pochissime bollicine che si separavano dal non fosforato. L'esperienza replicata per una seconda volta non fece che confermare la descritta.

In altre prove vidi che poteva bastare $^1/_2$ ed anche un $^1/_4$ di c. c. di alcole fosforato per ottenerne effetti somiglianti ai mentovati, sebbene con qualche poco di forza minore.

Esperienza 5.ª — Colla presente esperienza volli verificare se lo zinco che era

rimasto tuffato per un tempo un po' lungo in una soluzione alcoolica di fosforo fatta con alcole assoluto o quasi (segnava 100° all'areometro di Gay Lussac), e poi lavato con alcole ed etere e in ultimo con acqua, conservasse nonostante i ripetuti lavacri coi liquidi che sono solventi del fosforo, la proprietà di comportarsi in coppia voltaica come fa lo zinco che stette nell'acqua a cui fu aggiunta della soluzione alcoolica di fosforo. Presa una campanella ed empita a metà della soluzione del fosforo nell'alcole assoluto, v'immersi un bastoncello di zinco in modo che ne fosse tutto coperto, indi la tappai con un buon sovero, già preparato in precedenza e che la chiudeva perfettamente.

Nel giorno appresso lo zinco aveva perduto alquanto del suo lustro metallico; estrattolo, lavatolo rapidamente con etere e con alcole assoluto, asciugato tra carta bibula e messo in coppia con altro zinco, empiti i recipienti di acqua stillata e bollita, l'ago deviò a 10°, accennando la corrente che usciva dallo zinco che aveva dimorato nella soluzione alcoolica di fosforo; sei minuti dopo era disceso a 7° e tale si mantenne per 25 min. In allora trasportai gli zinchi in altro apparecchio con acqua al titolo di 1 % di acido solforico, prendendola più diluita perchè la temperatura ambiente era cresciuta. Nell'istante dell'immersione l'ago tornò a segnare 7° com'era in precedenza, se non che in pochi secondi calò a 0° e passò dal lato contrario segnando una corrente maggiore dallo zinco che non era stato nella soluzione di fosforo. Frattanto la reazione erasi svegliata subito e vivace nello zinco stato nel fosforo, mentre nell'altro non apparivano che piccole bollicine aderenti. Per investigare se dallo zinco primo l'idrogeno che si sprigionava vivacemente contenesse o no dell'H^3Ph, adattai con un tappo al tubo due cartoline sospese, una che era stata bagnata nel nitrato d'argento, e l'altra nell'acetato di piombo; quella annerì in breve e questa rimase bianca. Dunque lo zinco stato immerso nella soluzione alcoolica di fosforo aveva fissato con tale stabilità il fosforo da non cederlo ai lavacri successivi di etere e di alcole e da trasportarlo con sè per isvolgerlo nella reazione coll'acqua acida.

Ripetei l'esperienza con accuratezza anche maggiore, in quanto che i lavacri furono in più numero e lo zinco fu bene asciugato con carta bibula, e messo in coppia con altro zinco ch'era stato conservato sotto campana con calce. Facendo l'immersione nell'acqua stillata, l'ago non deviò nè a destra nè a sinistra, ma trasportati i due zinchi nell'acqua acida, la reazione si risvegliò tosto in quello che era stato nell'alcole con fosforo, indicando però l'ago, che deviò fino ad 8°, una corrente maggiore da questo, ma per sì breve tempo che 1 min. dopo era passato a 2° dal lato contrario, crescendo sempre tanto che 27 min. dopo erasi mosso fino a 10°.

Questa volta sebbene la reazione si palesasse più viva sullo zinco stato nel fosforo, la carta di argento non accennò a sviluppo d'H^3Ph.

Per conseguenza i lavacri accresciuti e forse più la confricazione con carta bibula avevano tolto il velamento di fosforo aderente; e difatto in altra prova condotta come le testè descritte, ma con minori lavacri e fregamenti, la carta di argento manifestò indizî di H^3Ph.

Esperienza 6.ª — Visto che lo zinco rimasto nella soluzione alcoolica di fosforo, aveva tenuto fisso del fosforo, tolto necessariamente dal solvente (fatto che mi recò qualche maraviglia, dacchè non supponeva ciò troppo agevole, trattandosi di

un liquido quale è l'alcole assoluto) volli anche esperimentare se per avventura accadesse lo stesso nella soluzione di fosforo fatta nel solfuro di carbonio. A quest'effetto preso del solfuro distillato di recente sul rame, lo versai in bicchiere conico, vi sciolsi un pezzetto di fosforo, ma assai meno di quello che sarebbe occorso per una soluzione satura, indi v'immersi un cannello di zinco lucidissimo, che dopo la fusione era stato conservato sotto campana con calce, in modo che ne emergesse per un quarto della lunghezza, avvertendo che sul solfuro versai nell'atto stesso dell'acqua distillata.

Vi rimase per sei ore; erasi conservato splendente, senza parti o punti offuscati; estrattolo lo trasportai nell'etere in cui lo lasciai per qualche minuto, poi lo asciugai tra carta bibula, lo sciacquai nell'alcole assoluto, lo rimisi per due volte alternamente nell'etere e nell'alcole e in ultimo lo lavai con acqua.

Messo in coppia con altro cilindretto di zinco in acido solforico del titolo di 1 $^0/_0$ acidimetrici, vidi che l'ago del galvanometro segnò 2° dal lato del primo; 2 min. appresso aveva già trascorso lo zero ed era passato ad 1° dal lato opposto, mentre già incominciava la reazione sul detto zinco, cioè su quello che era stato nel solfuro di carbonio. Scorsi altri 12 min. la reazione ivi si era fatta vivissima, mentre sull'altro zinco non apparivano che poche bollicine di gas aderenti, e dopo altri 8 min. la reazione era cresciuta solo nel primo, mentre l'ago aveva proceduto a 4° indicante sempre la corrente dal secondo.

Col succedere del tempo la deviazione dell'ago andò crescendo come pure la reazione dello zinco che era stato nel solfuro di carbonio, con bolle un po' ingrandite nell'altro; contemporaneamente il gas che sprigionavasi dal primo zinco odorava di solfuro di carbonio alterato, e due cartoline una di nitrato d'argento e l'altra di piombo, sospesevi sopra, s'ingiallirono nel lembo inferiore, ma più quella d'argento.

Replicata l'esperienza, tranne che i lavacri dello zinco stato nel solfuro di carbonio con fosforo furono meno insistenti, e cominciando con acqua distillata nei due tubi a vescica, notai che l'ago si mantenne a 0° tra i due zinchi; tolta l'acqua e versato l'acido solforico a 2 $^0/_0$ acidimetrici, immediatamente lo zinco che era stato nel bagno fosforato si coprì di bolle e l'ago deviò di 8° accennando la corrente dalla parte di questo zinco.

La reazione però avvenne più lenta che non nell'esperienza testè descritta tanto che dopo 56 min. si era fatta vivace e odorava forte di solfuro di carbonio, mentre l'ago era caduto a 0°, e l'altro zinco era coperto di bolle aderenti. L'ago passò a due gradi dal lato opposto nè poco più si mosse.

Esperienza 7.ª — Vista la tenacità onde il solfuro di carbonio era rimasto aderente allo zinco volli provarlo da solo, tuffandovi il metallo fino a tre quarti dell'altezza e coprendo l'ultimo quarto con acqua distillata. L'immersione durò un giorno; estrattolo, lavatolo cinque volte con alcole e messo in coppia, si comportò a un dipresso come già dissi nell'esperienza 6.ª, inquanto che svolse odore di solfuro di carbonio, reagì vivamente, mantenne per 12 min. la corrente dal proprio lato, mentre il secondo zinco reagì con grande lentezza. L'acqua acida fu del solito titolo.

Da questo dunque fu palese che lo zinco aveva trattenuto con tenacità un velamento di solfuro di carbonio, che non cedette ai lavacri replicati.

Esperienza 8.ª — La proporzione del fosforo e il grado di acidità del liquido influiscono nello sviluppo della corrente dal lato dello zinco immerso nella soluzione fo forata.

Per esempio con acqua acida del titolo di $^1/_4$ p. $^0/_0$ e poche goccie di soluzione alcoolica di fosforo la corrente esce maggiore dallo zinco tuffato nel liquido fosforico e seguita, ora diminuendo ora crescendo di 1 a 2 gradi. Frattanto lo svolgimento del gas debolissimo in ambedue gli zinchi, è sempre alquanto meno lento in quello che sta nella soluzione fosforata.

Coll'acido al titolo di 1 p. $^0/_0$, ma sempre coll'aggiunta di poche goccie di alcole fosforato, l'ago deviò di 10° indicando la corrente dal lato dello zinco nel liquido con fosforo, in cui si svegliò viva la reazione, poscia declinò a 0°: scorsa un'ora, passò in contrario e crebbe fino a 7°.

Esperienza 9.ª — Riconosciuto che lo zinco trae in aderenza il fosforo, o stemperato nell'acqua, o sciolto nell'alcole (pel solfuro di carbonio non potrei assicurarlo di certo), volli anche provare che avvenisse mettendo in opera la soluzione acquosa d'idrogeno fosforato, e quindi istituii l'esperienza seguente.

Disposti in coppia due cannelli di zinco e provati con acqua stillata non fecero deviare l'ago del galvanometro nè a destra nè a sinistra.

Verificato il loro perfetto equilibrio, li trasportai in altri due tubi a vescica, uno con acqua distillata, e l'altro con 20 c. c. di soluzione d'idrogeno fosforato. L'ago deviò di 2° $^1/_2$, indicando la corrente dallo zinco immerso nella soluzione d'idrogeno fosforato, ma poi andò scemando tanto che in 3 ore erasi accostato allo 0°.

Tolsi i due zinchi dai tubi e li tuffai in acqua acida al titolo di 2 per $^0/_0$, e vidi che lo zinco tenuto nella soluzione idrofosforica reagì immediatamente con forza, mentre l'altro si coprì soltanto di bolle aderenti e l'ago deviò di 15° indicando la corrente dal lato del primo. La deviazione decrebbe in 1 min. a soli 7°, e dopo 5 min. a 0°, poi si mosse in breve tempo a 2° nel verso opposto, ricadendo tra pochi minuti ad 1° e poi rivolgendosi in breve nel verso di prima fino a 2°, essendo divenuta vivissima la reazione in ambedue gli zinchi.

Rifeci l'esperienza con risultati somiglianti a quelli ora descritti.

Esperienza 10.ª — In questa provai lo zinco che tenni per 6 ore immerso nella soluzione d'idrogeno fosforato. Posto in coppia e provando dapprima nell'acqua distillata, l'ago segnò 2° dal lato dello zinco stato nell'acqua fosforata; ciò osservato, li trasportai subito in acqua acida al titolo di 1 $^0/_0$, con che l'ago si mosse di 3° dal lato dello stesso zinco, il quale si coprì di bolle, nulla frattanto apparendo sull'altro. L'ago retrocesse ad 1° in verso contrario, cioè indicando maggiore la corrente dallo zinco che non era stato nel bagno d'idrogeno fosforato e crebbe l'allontanamento dallo 0° per 15 min., poi retrocesse in breve allo 0° e passò a 4° nell'altro verso, mantenendosi più attiva la reazione nel primo zinco che nel secondo.

Ripetei l'esperienza con altro cannello di zinco ch'era stato per 6 giorni nella soluzione acquosa d'idrogeno fosforato, indi sciacquato ben bene e asciugato con carta bibula. Fatta coppia con altro cannello di zinco stato sotto campana con calce, e tuffando nell'acqua distillata, l'ago deviò di 4° indicando una corrente maggiore dallo zinco primo, la quale però venne diminuendo, perchè dopo 5 min. l'ago era disceso a 2°.

Trasportati allora in acqua a 2 % acidimetrici, il primo zinco si coprì subito di bolle, il secondo no; l'ago deviò a 22° indicando la corrente maggiore dallo zinco primo, diminuì di due gradi in 10 min., crebbe alquanto in altri 15 min., di più e fino a 25 nell'ora seguente, poscia decrebbe, mentre sul secondo zinco si fece più viva la reazione che nel primo.

Con altro cannello di zinco, stato nove giorni nella soluzione d'idrogeno fosforato, e che era perfettamente lucido, messo in coppia con altro zinco conservato sotto campana con calce, immersi dapprima nell'acqua stillata, ebbi un lieve spostamento dell'ago indicando la corrente che partiva dal primo. Passati 10 min. e trasportati i due zinchi nell'acqua con acido solforico al titolo di 2 %, l'ago segnò immediatamente 19° dal lato dello zinco primo, che si coprì tosto di minute bollicine, apparendo inerte l'altro. Scorsi 10 min. l'ago era a 30° nel medesimo verso, le bolle cresciute nello zinco primo e già manifeste nel secondo; dopo 15 min. l'ago era disceso a 27° e i due zinchi coperti di bolle ingrossate e aderenti in modo pressochè uguale; dopo altri 15 min. l'ago era tornato sui 30° e lo zinco secondo manifestava maggior reazione che il primo; finalmente, scorsa altra mezz'ora, l'ago avea deviato fino a 32° sempre indicando la corrente che usciva dallo zinco stato nell'acqua fosforata, in cui frattanto la reazione chimica appariva minore che nello zinco conservato sotto campana, avendo quello le bolle tutte aderenti, mentre da questo partiva già una corrente abbastanza rapida di gallozzole.

Altre prove coincidettero colla descritta, meno una che è degna di essere notata perchè il cannello di zinco che era rimasto 9 giorni nella soluzione acquosa di idrogeno fosforato, e non s'era mantenuto compiutamente lucido e presentava punti macchiati qua e là, si comportò all'opposto dei precedenti, in quanto che reagì più vivamente dello zinco conservato sotto campana e l'ago indicò la corrente maggiore nel secondo zinco.

È cosa osservabile , quando si paragonano i risultati delle esperienze collo zinco che stette immerso nell'acqua a cui si era aggiunto della soluzione alcoolica di fosforo, o nella stessa soluzione alcoolica, e quelli dello zinco che stette tuffato per più giorni nella soluzione acquosa d' idrogeno fosforato , che il primo acquistò un'attività di reazione la quale si mantenne sempre vigorosa, e con debole corrente elettrica, tanto da rappresentare il rame rispetto allo zinco postogli in coppia (questo, all'occhio, svolgendo piccola reazione, avrebbe fatto supporre invece di produrre una corrente più piccola), mentre lo zinco che fu nella soluzione acquosa d'idrogeno fosforato si mostrò meno attivo dello zinco vergine e diede ad un tempo la corrente più gagliarda.

Vi fu però un'eccezione, la quale si produsse allorchè il metallo stato nella soluzione acquosa d'idrogeno fosforato n'era uscito privo in varî tratti della lucidezza primitiva. Da ciò si può desumere, che il fosforo precipitandosi sullo zinco lo copra in modo scontinuo od almeno vi determini una sequela di punti, in cui sussistano altrettante tenuissime coppie che consumano internamente l'elettrico, mentre per l'opposto l'idrogeno fosforato pare che col tempo veli uniformemente tutta la superficie del metallo, forse spogliandolo di quel lievissimo strato di aria od anche di sottossido (sebbene questo non appaia alla vista) di cui fosse involuto.

Esperienza 11.ª — Fu istituita allo scopo di conoscere se l'idrogeno fosforato sciolto in una liscivia caustica influisse sullo zinco come si comporta nelle soluzioni acide.

L'apparecchio fu disposto con due tubi a vescica, immersi in un vaso maggiore contenente dell'acqua distillata, ed in ciascuno dei quali aveva versato 13 c. c. di soluzione di soda caustica di concentrazione discreta. I due zinchi erano al solito, cioè conservati sotto campana con calce; uguali ambedue e di superficie perfettamente lucida.

Provatili col galvanometro vi produssero una lieve oscillazione a destra e a sinistra, dopo di che l'ago si fermò a 0°. In uno dei tubi versai 13 c. c. di soluzione acquosa e recente d'idrogeno fosforato e nell'altro altrettanto di acqua stillata mescendo con uno specillo. Tosto l'ago deviò di 4° indicando maggiore la corrente dallo zinco del tubo che conteneva l'idrogeno fosforato, ma scorsi 5 min. l'ago passò dal lato opposto fino a 3° e tale si mantenne crescendo anzi fino a 5° nello spazio di 1 ora e 20 min. Lo sviluppo dell'idrogeno fu lentissimo da ambedue gli zinchi, maggiore però da quello con cui era $H^3 Ph$.

Avverto che per impedire il contatto dell'aria le due liscivie furono coperte di olio di olivo. In altra esperienza che feci con diversa disposizione dell'apparecchio, cioè immergendo i due zinchi in due bicchieri e stabilendo la comunicazione con un tubo pieno d'acqua stillata postovi a cavalcione, la reazione chimica fu eziandio maggiore dal lato dello zinco immerso nella liscivia con $H^3 Ph$, senonchè, in contrario di quanto notai di sopra, l'ago non si spostò che di 1°, 5 dallo 0° e sempre indicando la corrente maggiore dal lato dello zinco con $H^3 Ph$.

Indagini chimiche.

Dopo avere compiute le esperienze galvanometriche mi accinsi ad altre, le quali fossero dirette a mettere in chiaro, se tra lo zinco e il fosforo, lo zinco e l'idrogeno fosforato succedessero effetti chimici, e di che maniera, da cui desumere la ragione dei fenomeni fino ad ora indicati.

Esperienze per determinare se tra lo zinco ed il fosforo succeda un' unione intima quando il primo è tuffato in una soluzione del secondo.

Dapprima deliberai di accertarmi, se realmente lo zinco immerso nella soluzione alcoolica di fosforo, ne sottraesse quantità talmente apprezzabili, fissandolo su di sè, da potere determinare con precisione la proporzione sottratta.

A quest'intento mi procurai della limatura di zinco puro, fatta fare poco prima con lima di acciaio nitida e nuova, e, pesatene 15 gram., la feci cadere in campanella in cui aveva versato 6 c. c. di soluzione alcoolica di fosforo, preparata con 1 vol. di soluzione satura a freddo nell'alcole assoluto e 5 vol. di alcole pure assoluto. Chiusa la campanella con tappo di sovero, la lasciai a sè per 3 ore e $^1/_4$ ponendovi in paragone altra campanella uguale, con 6 c. c. della detta soluzione e non altro. Passato il detto tempo sturai le due campanelle e n'estrassi da ciascuna 2 c. c. dei liquidi, che feci cadere separatamente in due bicchieri, contenenti ciascuno 4 c. c. di soluzione alcoolica e diluita di nitrato d'argento. Si formò in ambedue un precipitato

bruno, minore però dove aggiunsi il liquido della prima campanella. Li diluii con acqua fino al volume di 14 c. c., feltrai i due liquidi e presi di ciascuno 10 c. c., e vi determinai la quantità dell'argento rimasto in soprappiù con una soluzione titolata ed alcalina di cianuro di potassio, seguendo il metodo di Liebig.

10 c. c. del liquido in cui era stata versata la soluzione alcoolica di fosforo digerita collo zinco corrisposero a 9 c. c. della soluzione titolata cianica.

10 c. c. del liquido derivante dalla soluzione alcoolica vergine corrisposero a 7 c. c. della soluzione cianica.

Ne consegue che la soluzione alcoolica di fosforo nella quale era dimorato lo zinco, aveva precipitato meno di argento dalla soluzione del nitrato in confronto della soluzione vergine, per cui dopo la feltrazione occorre più della soluzione cianica a far deporre tutto l'argento rimasto nel liquido; dunque lo zinco stando per un certo tempo immerso nella soluzione alcoolica di fosforo n' avea tolto una parte del metalloide.

Per controllo di quanto accennai, feci cadere lo zinco dalla campanella in altra maggiore piena a metà di alcole assoluto, ne lo dibattei e rinnovai per tre volte i lavacri alcoolici finchè dall'ultimo non ottenessi più reazione colla soluzione alcoolica di nitrato d'argento; non contento di ciò lo sciacquai anche ben bene in alcole assoluto e caldo, che poscia provai con nitrato d'argento senza che vi fosse indizio di fosforo disciolto; lo sgocciolai rapidamente gettandolo sopra imbuto, lo spremetti fra carta bibula finchè fosse umido appena, lo divisi in due parti e ne feci cadere una dentro matraccetto contenente dell'acido solforico diluito al 5 %, introducendo nel collo un tappo portante due cartoline, una bagnata nel nitrato d'argento e l'altra nel tartaro emetico. Il gas che si svolse imbrunì tosto la carta d'argento, lasciando bianca quella di tartaro emetico, la quale avrebbe voltato all'arancio, se dai corpi in reazione si fosse sprigionato del gas solfidrico.

Ma ciò che parrà strano fu che l'altra parte dello stesso zinco lavato con alcole, introdotta in campanella che empiva per metà senza aggiungere dell'acido, imbrunì ciò non ostante ed in breve una cartolina di nitrato d'argento sospesavi sopra, e seguitò ad imbrunirne altre che andai mutando fino alla metà del giorno successivo.

Scorso questo tempo e tolta fuori della campanella questa medesima parte, dello zinco, la lasciai all' aria per 18 ore, la divisi in due porzioni una delle quali trattai con acido solforico diluito; essa mostrò di contenere del fosforo perchè il suo gas anneriva la carta d' argento. Mi valsi poi dell' altra porzione per dibatterla con acqua distillata, la quale decantai e trattai: 1° con soluzione di nitrato d'argento che la fece intorbidare senza imbrunimento; 2° con acido nitrico che diede col reattivo molibdico un copioso precipitato giallo.

La stessa porzione di zinco, sebbene dibattuta con acqua non aveva perduto tutto il fosforo, perchè messa a reagire con acido solforico diluito svolse tracce d'idrogeno fosforato.

Fatta un'altra prova in modo uguale, tranne che lasciai in disparte la ricerca sul liquido alcoolico in cui il metallo era stato digerito, i resultati furono conformi.

In una terza prova dello stesso genere, eseguii i lavacri dello zinco non solo con alcole assoluto, ma ben'anche con solfuro di carbonio, facendo succedere questo

solvente dopo che l'alcole nulla più estraeva di fosforo. Il solfuro di carbonio decantato, fu messo ad evaporare spontaneamente dopo avervi aggiunto qualche c. c. di alcole assoluto; dissipato l'odore del solfuro, sperimentai l'alcole rimasto, che imbrunì la soluzione alcoolica di nitrato d'argento come avrebbe fatto una soluzione alcoolica diluitissima di fosforo; di più dopo aggiuntovi acido nitrico ed evaporando a secco, fornì un lievissimo residuo, il quale precipitò copiosamente col reattivo molibdico.

In una quarta prova feci l'ultimo lavacro dello zinco col cloroformio, il quale gli tolse appena una traccia di fosforo, poichè non diede indizî di reazione colla soluzione alcoolica di nitrato d'argento, ed appena dopo un trattamento con acido nitrico produsse un lievissimo ingiallimento col reattivo molibdico.

Dal complesso di queste indagini è manifesto, che lo zinco immerso in una soluzione allungata ed alcoolica di fosforo, ne separa una parte del metalloide; che questo vi rimane aderente con tanta forza da resistere ai lavacri dell'alcole assoluto, da cedere appena al cloroformio e meglio al solfuro di carbonio.

Parrebbe dall'esposto che il fosforo non contragga che una semplice unione di aderenza, la quale verrebbe meno allorchè l'aria vi affluisce per ossidare lo zinco sottoposto, come si vide dai contrassegni ottenuti nelle campanelle; se non che confesso che sto per ora titubante nel pronunciare un giudizio assoluto.

Esperienze per determinare se avviene un'unione intima tra lo zinco e l'idrogeno fosforato.

Quando s'immerge dello zinco nella soluzione acquosa d'idrogeno fosforato, indi scorso un certo tempo si estrae e si lava più volte, il metallo messo a reagire con acido diluito svolge del gas che imbruna la carta di nitrato di argento e nulla fa su quella di tartaro emetico.

Lo svolgimento dell'idrogeno fosforato che aveva aderito allo zinco avviene con lentezza.

Se si esperimenta di confronto con altro zinco uguale, quello che stette immerso nell'idrogeno fosforato si dimostra alquanto attivo ma non di molto. Difatto pesati 32 gr. di zinco granulato e puro, tenutolo per 1 ora nella soluzione d'idrogeno fosforato, lavatolo più volte con acqua, e messo a reagire di confronto con altri 32 gr. dello stesso conservato sotto la calce, in due palloncini entrovi per ciascuno 25 c. c. di acqua acida al titolo di 1 $^{0}/_{0}$, lo sviluppo dell'idrogeno procedette come dalla tabella seguente:

Ore	Prova in bianco	Zn nell'H^3Ph
2,30′ pom.	—	—
2,33′ »	10 c. c.	10 c. c.
2,35′ »	25 »	25 »
2,40′ »	52 »	53 »
2,45′ »	61,5 »	66 »
3 — »	61,5 »	70 »

Avendo aggiunto nel giorno appresso altri 25 c. c. dell'acqua acida si svegliò nuova reazione.

8,50′ ant.	—	—
8,55′ »	14 c. c.	14 c. c.
9 — »	49 »	49 »
9,7′ »	64 »	65 »
9,45′ »	72 »	75 »

Dalle cifre riferite si vede che quel tanto d'H^3Ph che era rimasto aderente allo zinco accelerò d'alquanto lo sviluppo dell'idrogeno, ma che poi riattivando la reazione più tardi, quando cioè quel poco d'H^3Ph si era svolto, la reazione procedette conforme fra i due zinchi.

In altra prova fatta collo zinco granulato, che fu lavato con acqua e poi con etere dopo la digestione nell'H^3Ph, disponendo le cose come nell'esperienza precedente, ottenni i dati seguenti:

Ore	Prova in bianco	Zn che fu nell'H^3Ph
2,3′ pom.	— —	— —
2,10′ »	2 c. c.	1 c. c.
2,15′ »	5 »	4,8 »
2,20′ »	7 »	9 »
2,25′ »	11 »	16 »
2,30′ »	15 »	23,5 »
2,35′ »	19 »	31 »
2,40′ »	24 »	33 »
2,45′ »	29 »	44 »
2,50′ »	34 »	49 »
2,55′ »	39 »	55 »
3 — »	47 »	60,6 »
3,15′ »	53,4 »	64,8 »
3,30′ »	59 »	66 »
5 — »	68 »	69 »

Dopo avere riconosciuto che lo zinco per essere rimasto nell'H^3Ph ne trattiene una certa quantità che non cede ai lavacri e da cui acquista una lieve energia maggiore per reagire cogli acidi, volli anche conoscere di quanto la soluzione dell'idrogeno fosforato fosse impoverita standovi sommerso il metallo.

Introdussi 15 gr. di limatura di zinco puro in una campanella e vi sopravversai 7 c. c. di soluzione recente d'H^3Ph, la chiusi subito con tappo e dopo mezz'ora aspirai con pipetta 2 c. c. del liquido sovrastante. Colla stessa pipetta presi altri 2 c. c. della soluzione vergine d'H^3Ph.

Precipitai l'una e l'altra con 3 c. c. di soluzione acquosa e diluita di nitrato d'argento, diluii le due mescolanze con acqua fino a 15 c. c., lasciai deporre il precipitato, presi 7 c. c. dell'uno e dell'altro liquido, li sottoposi a prova con soluzione allungata di cianuro di potassio e ne ottenni:

7 c. c. del liquido derivante dalla soluzione digerita collo zinco corrisposero a 4,2 c. c. di soluzione cianica.

7 c. c. del liquido derivante dalla soluzione vergine d'H^3Ph corrisposero a 3,2 c. c.

Dunque nella prima era stato precipitato meno di nitrato d'argento, il che significa che una parte dell'H^3Ph era stato sottratto dallo zinco.

In una seconda prova eseguita come la descritta i rapporti rimasero pressochè identici, avendo impiegato 4 c. c. di soluzione cianica pel primo liquido e 3 c. c. pel secondo.

Lo zinco che era stato nella soluzione d'H^3Ph fu fatto cadere in campanella grande e sciacquato con alcole assoluto per due volte, indi altre due volte con etere, poi spremuto fra carta bibula e diviso in due parti, una delle quali fu tenuta nell'aria libera e l'altra introdotta in robusto palloncino di vetro, mentre per anco odorava un poco di etere, e sottoposto al vuoto che venni rinnovando più volte. L'apparecchio fu ordinato in modo che il palloncino, dal cui tappo scendeva sospesavi una cartolina di nitrato d'argento, si congiungesse con altri due matraccetti, in uno dei quali aveva versato 6 c. c. di soluzione diluita di nitrato d'argento, ed in ultimo con una tromba aspirante.

Il vuoto fu replicato ogni quarto d'ora, incominciando alle ore 10 e $^1/_2$ antim.; alle ore 1,15 pom. la carta d'argento era ingiallita nel lembo inferiore ma poi si fece alquanto più bruna. Alle 2 smontai l'apparecchio per estrarre una porzione dello zinco, che fu di 2 gr., il quale (notai con maraviglia) esalava odore di etere a un dipresso come quando l'introdussi nel palloncino. Rimisi tutto a posto e seguitai a replicare il vuoto sino alle ore 5. L'imbrunimento della cartolina d'argento venne crescendo e s'imbrunì puranco lievissimamente la soluzione argentica contenuta nei palloncini intraposti tra il primo e la tromba.

Nel giorno seguente alle ore 9 tolsi di nuovo lo zinco dal vuoto; osservai che la carta di argento non si era imbrunita di più; lo zinco esalava pur sempre odore di etere, fatto che potrebbe far supporre che l'avessi introdotto nel palloncino, bagnato ben bene del liquido, mentre per l'opposto, come già avvertii, l'aveva asciugato tra carta bibula finchè fosse asciutto pienamente.

Presi 2 gr. di questo zinco che introdussi in palloncino, sopravversandovi 25 c. c. di acido solforico al titolo di 2, sospendendo al tappo con cui lo chiusi e che portava il cannello di sviluppo, le due solite cartoline di nitrato d'argento e di tartaro emetico.

Per confronto, in altro palloncino introdussi altri 2 gr. di limatura di zinco conservato sotto campana con calce, il detto volume di acqua acida e le dette cartoline.

La reazione incominciò a un dipresso nello stesso tempo e per 5 min. procedette uguale, poscia crebbe per lo zinco ch'era stato nel vuoto più che nell'altro fino al punto da raggiungere la differenza di 10 c. c. di più dopo 32 min., passando indi a 15° ed in ultimo finendo per differire di 6 c. c. soltanto.

Dunque anche in questo caso lo zinco ch'era stato immerso nella soluzione d'idrogeno fosforato ecc. aveva conservato maggiore attitudine, ma non grande, a reagire coll'acido solforico. Debbo notare inoltre che mentre le due cartoline di emetico rimasero incolore, e tale rimase quella d'argento nel secondo palloncino, cominciò ad imbrunirsi la carta di argento nel palloncino primo, dopo 7 min. in cui lo zinco era

in contatto coll'acido solforico, quando cioè incominciarono a svolgersi le prime bolle di gas, e che l'imbrunimento andò crescendo pei 20 min. successivi.

Avevo anche 11 gr. dello zinco ch'era stato nel vuoto; lo dibattei più volte con acqua stillata e non bollita, la quale s'intorbidò di bianchiccio, e che decantai e rinnovai per sei volte, sempre dibattendo, cioè fino a tanto che l'ultima rimanesse limpida.

Feci 4 parti di quell'acqua torbida; una trattai con ammoniaca, e l'altra con acido acetico che fecero scomparire le particelle indisciolte; alla terza aggiunsi qualche goccia di nitrato d'argento, che annerì le particelle bianche con susseguente deposito di un lieve precipitato nero e tenue ingiallimento del liquido dopo 3 ore. Evaporai la quarta porzione, che era la maggiore, dopo averla inacidita con acido nitrico; sul residuo concentrato stillai del molibdato di ammonio che v'indusse un precipitato copioso giallo.

Avverto inoltre, che neppure pei lavacri replicati tutto lo zinco che era stato nel vuoto dopo l'immersione nell'idrogeno fosforato, aveva tutto perduto il fosforo, poichè messo a reagire con acido solforico diluito, imbrunì la carta di argento.

L'esperienza descritta fu rinnovata altre volte con risultati conformi.

Accennai in principio che lo zinco tolto fuori dalla soluzione di $H^3 Ph$, lavato con alcole od etere, era stato in parte abbandonato in contatto dell'aria. In brevissimo l'odore di etere si era dissipato, se non che in sul fine se n'era svolto un altro piuttosto spiacevole che ugualmente svanì.

Secco che fu, introdotto in campanella, chiusa con tappo a cui era attaccata una cartolina di nitrato d'argento, non la imbrunì in maniera sensibile. Fece lo stesso quando lo misi nel vuoto.

Per conseguenza è manifesto che lo zinco, mentre ritiene con pertinacia un velo di etere nel vuoto, se ne spoglia rapidamente in contatto dell'aria, e che mentre svolge tracce d'idrogeno fosforato quando conserva un poco di etere aderente, non ne svolge più se l'etere siasi dissipato.

L'anidride carbonica non sembra capace di espellere l'idrogeno fosforato aderente allo zinco, come almeno si può dedurre dall'esperienza che segue.

15 gr. di limatura di zinco, digerita in soluzione acquosa d'idrogeno fosforato, poi lavata con acqua, alcole ed etere, spremuta fra carta bibula e tenuta all'aria finchè l'odore di etere fosse svanito, furono introdotti in una campanella con tappo a due fori, in uno dei quali un cannello di vetro portava un afflusso di anidride carbonica secca, mentre dall'altro partiva un secondo cannello che pescava in altra campanella contenente una soluzione diluita di nitrato d'argento. L'anidride carbonica passò per un certo tempo sullo zinco senza fare punto imbrunire la soluzione argentica; in appresso scaldai fino a 100° la campanella colla limatura affine di aiutare col calore lo sviluppo dell'$H^3 Ph$, caso che occorresse un grado di temperatura un po' elevato; ma ciò non ostante non vidi effetto di sorta; in allora trasportai la campanella in bagno di olio che gradatamente scaldai fino a 140°, e nemmeno con ciò la soluzione argentica diede il più piccolo segno d'imbrunire. Lasciai raffreddare mantenendo l'afflusso dell'anidride carbonica, ne estrassi la limatura e la feci cadere in palloncino con acido solforico diluito; il gas che si sviluppò annerì in breve la carta di nitrato d'argento.

Senza conchiuderne che l'$H^3 Ph$ rimanga sullo Zn per sola forza di aderenza

tanto da resistere al vuoto e alla temperatura di 140°, poichè non credo di possedere fino al presente dati bastevoli per escludere qualche reazione chimica tra i due corpi in contatto e per conchiudere che si faccia fra di essi un'unione intima di semplice aderenza, parmi tuttavolta notevole il fatto che venni narrando, e degno della considerazione dei chimici.

Tentai un'altra esperienza con limatura di zinco e soluzione recente d'$H^3 Ph$ per conoscere se si svolgesse fra i due dell'idrogeno libero; in 3 ore di contatto non si manifestò il più che menomo contrassegno di svolgimento gassoso. Ne istituii anche una diversa, disposta in guisa da accertarmi, se avvenisse assorbimento quando la limatura di zinco fosse posta repentinamente in contatto di un'atmosfera d'idrogeno fosforato.

L'apparecchio si componeva di due palloni, uno dei quali con entro 70 gr. di limatura di zinco, e da cui espulsi l'aria mediante una corrente di anidride carbonica secca.

Ciascuno dei palloni portava nel collo un'armatura a chiave, e le due chiavi si potevano avvitare insieme, tanto che aprendole e collocato di sopra il pallone colla limatura, questa potesse discendere pel proprio peso e cadere nell'inferiore.

Chiuse le chiavi, introdussi una corrente d'$H^3 Ph$, seccato da potassa, nel pallone inferiore seguitando per un'orà ond' essere sicuro che l'interno fosse tutto pieno del detto gas, indi, tolta la comunicazione coll'apparecchio da cui si sviluppava, apersi le due chiavi con che la limatura discese dal pallone superiore nell'inferiore.

A questo era unito un cannello piegato a due gomiti ed affilato che coll'affilatura pescava in un bagno d'olio. Se lo zinco avesse condensato su di sè dell'idrogeno fosforato l'olio avrebbe dovuto salire nel cannello, se non immediatamente, almeno qualche tempo dopo. Nell'atto della discesa dello zinco successe una piccola dilatazione; ma, scorsa mezz'ora, l'olio risalì al limite di prima e non le oltrepassò neppure nel rimanente della giornata, stando fermo fino anche al giorno seguente. La temperatura del luogo era di 17° nel giorno dell'esperienza, e nel tardo mattino del dì seguente la trovai nel medesimo punto.

Estratto lo zinco, lavatolo più volte con etere, lo misi a seccare all'aria e lo provai con acido solforico diluito; sprigionò del gas che imbruniva immediatamente il nitrato di argento.

Veramente male si può intendere come lo zinco tragga in aderenza una certa quantità d'idrogeno fosforato gassoso senza che appaia verun contrassegno di contrazione, poichè sarebbe bastato $^1/_{10}$ o poco più di c. c. di gas sottratto dall'atmosfera del pallone, perchè si fosse visibilmente sollevato nel cannello l'olio che faceva da indice.

Forse il metallo, aveva condensato del gas precedente, cioè dell'anidride carbonica, a cui poscia si surrogò l'idrogeno fosforato espellendola a pari volume? Tale sarebbe la spiegazione più accettevole del fatto; se non che tanto per questa esperienza quanto per la precedente converrà farne replica con una quantità maggiore di zinco ed in apparecchio di maggiore perfezione, avendo io dovuto congegnare alla meglio i miei per iscarsezza di mezzi.

Esperienze ad indagare se lo zinco agisca sulla soluzione acquosa d'idrogeno solforato.

Ne feci qualcuna, cioè mi restrinsi a mettere in digestione della limatura di zinco con soluzione concentrata e con soluzione diluita d'idrogeno solforato, in campanella chiusa, e lasciando in contatto per un'ora. La soluzione diluita perdette qualsivoglia odore di acido solfidrico; la concentrata, lo manteneva assai meno intenso e provata con un sale di rame, divenne di un giallastro azzurra, senza che deponesse fiocchi di solfuro se non a lungo andare; la stessa soluzione solfidrica, ma in cui lo zinco non aveva dimorato, precipitò invece copiosamente in nero il sale di rame.

Esperienze dirette ad indagare se i sali di ferro aderiscano allo zinco come il fosforo e l'idrogeno fosforato.

L'azione che i sali di ferro esplicano sullo zinco eccitandone la reazione cogli acidi diluiti, non parendo che si spieghi chiaramente col presupporre che succeda una precipitazione del ferro solo nell'istante del contatto, mi condusse a cercare se per caso non avvenga una deposizione del sale di ferro sul metallo, tanto che si formi coppia elettrica da cui venga accresciuta notevolmente la reagibilità.

Per rispondere a tale quesito presi dell'acido cloridrico purissimo e lo diluii fino al titolo di 1 $^0/_0$; ne misurai 50 c. c. e vi feci cadere in piccolo pallone 7 od 8 bullette di Parigi, scaldando poi blandamente per qualche minuto, finchè un poco di ferro si fosse disciolto.

Frattanto aveva fatto preparare della limatura di zinco, che purgai da quella tenue quantità di ferro che le fosse rimasta aderente per la confricazione della lima, adoperando a ciò dell'acqua di cloro diluita con 4 vol. di acqua acidula, e lavando con acqua, poi con alcole ed asciugando con carta bibula ed all'aria. Feci cedere 15 gr. di tale limatura in bottiglietta e vi sopravversai l'acido cloridrico ferruginoso in modo che, oltre la porzione imprigionata tra le particelle del metallo, ne rimanessero in più circa 15 c. c.

Dibattei alcune volte, e trascorsi 5 min. di contatto, estrassi 4 c. c. del liquido sovrastante; passati altri 10 min. ne estrassi altri 4 c. c.; finalmente dopo altri 20 min. ne cavai altri 4 c. c.

Contemporaneamente misurai lo stesso volume dell'acido ferruginoso che non era stato in contatto dello zinco, e precipitai ciascun assaggio con 50 c. c. di soluzione normale di nitrato d'argento.

Lasciai i quattro liquidi in quiete fino al mattino seguente; sui tre del liquido stato in contatto dello zinco erasi formata una pellicella di aspetto metallico, che sciolsi a caldo con qualche goccia di acido nitrico, indi li feltrai tutti quattro.

Ciò eseguito, presi una soluzione diluita e resa fortemente alcàlina di cianuro di potassio, e ne misurai 4 c. c. separatamente, cioè 1 c. c. per ogni bicchiere da precipitato, facendo cadere in ciascuno da una pipetta quel tanto di ogni liquido che abbisognasse per convertire l'argento contenutovi in doppio cianuro di potassio e di argento fino al manifestarsi di un lievissimo torbido permanente.

Occorsero del primo liquido (l'acido che non fu in contatto collo Zn) 10,3. c. c. per l'indicata reazione.

Del secondo liquido (contatto di 5 min. collo Zn) 6,9 c. c.

Del terzo liquido (contatto di 15 min.) 6,2 c. c.

Del quarto liquido (contatto di 35 min.) 7 c. c.

Replicai le determinazioni con 2 c. c. della soluzione cianica ed occorsero:

del 1.° liquido 21 c. c.;
del 2.° liq. 13,8 c. c.;
del 3.° liq. 14,4 c. c.
del 4.° liq. 14,2 c. c.

In altra prova operando nel modo descritto le cose procedettero in maniera conforme.

Rimase adunque accertato che lo zinco in contatto di un acido ferruginoso e diluito precipita su di sè non del ferro soltanto, ma il salè di ferro che è disciolto nel liquido acido.

Lo zinco, lavato più volte con acqua stillata e bollita, fino a tanto che l'ultimo lavacro non reagisse più col nitrato di argento e col prussiato di potassa, fu trattato con acido solforico diluito; scorsi 10 minuti di reazione assaggiai il liquido, e vi trovai del ferro sciolto, ma non traccie di cloro. Per conseguenza il cloruro ferroso rimane intatto sullo zinco, finchè la soluzione rimane nell'acido cloridrico libero; poi, lavando con acqua semplice, si sdoppia, tutto il cloro si scioglie nei lavacri e il ferro, in parte almeno, rimane sullo zinco.

Affine di togliere il dubbio che il cloro fissato dallo zinco non vi sussistesse combinato collo zinco medesimo in forma di un cloruro insolubile di sottossido, istituii una nuova esperienza, valendomi dell'acido cloridrico al titolo dell'1 per $^0/_0$ privo assolutamente di ferro.

Dalle determinazioni di confronto trovai che occorsero le stesse quantità tanto dell'acido che non era stato in contatto dello zinco, quanto di quello che vi fu in contatto per 5 min. ed anche per 45 min. ad ottenere la reazione nel medesimo limite colla soluzione cianica, cioè 10 c. c. per 1 c. c. del reattivo.

L'apparire, come notai in addietro, di una pellicella di aspetto metallico sulla mescolanza dell'acido ferruginoso ch'era stato in contatto collo zinco, sebbene i bicchieri fossero stati conservati in luogo oscuro, mi spinse a qualche investigazione in proposito, dacchè quella pellicella piuttosto che essere bianca come l'argento metallico, era bruniccia, e dacchè in altra prova, lasciata a sè per due giorni aveva preso in sull'orlo un aspetto rugginoso.

Quando mi accinsi a ripetere l'esperienza a questo unico scopo, non sempre conseguii identico l'effetto, onde talvolta la pellicella appariva uniforme, bruniccia e senza contrassegno di cristallizzazione, neppure sotto il microscopio; altre volte era tempestata di sotto da cristallini lucidi e di un bianco argentino; altre volte non si erano formati che i detti cristallini alla superficie del liquido ed alle pareti, ed in ultimo alle volte nulla si era separato.

Premetto che quando la pellicella si formò uniforme, bruniccia e senza punti cristallini, raccoltala su piccolo feltro e lavata fino a togliere tutto l'argento dell'acqua

madre, si sciolse compiutamente ed a freddo nell'acido nitrico allungato con 2 vol. di acqua, svolgendo odore di vapori nitrosi, e che la soluzione conteneva del ferro e punto dell'argento; se poi colla pellicella si erano deposti dei cristalli argentini, l'acido nitrico sciolse tanto del ferro quanto dell'argento, mentre non diedero che argento i cristallini bianchi apparsi senza traccia di pellicella bruna.

Invece dell'acido nitrico adoperando il solforico diluito la pellicella si disciolse pure: la soluzione precipitò in azzurro coi due prussiati, ed in bianco verdognolo colla potassa caustica.

Dunque, poste certe condizioni, il sale ferroso rimasto nel liquido insieme coll'eccedenza del nitrato d'argento era capace di reagire spontaneamente e col tempo in guisa da aversene la separazione di un ossido minore del ferro di aspetto metalloide.

Si avverta che la soluzione era acida, essendo stato surrogato l'acido cloridrico del liquido primitivo, da altrettanto di acido nitrico derivante dal nitrato d'argento.

Aggiungo che i liquidi producenti la pellicella o i cristallini stando all'oscuro abbisognavano di un certo numero di ore, mentre vi davano nascimento in pochi minuti, esponendoli alla luce diretta del sole.

La pellicella di ossido di ferro, per quanto mi avvidi, s'ingenera allorchè lo zinco che stette nell'acido cloridrico ferruginoso, dopo essere stato purgato e lavato replicatamente con acqua, asciugato fra carta bibula, si lascia all' aria a temperatura comune per qualche ora fino a disseccazione perfetta. Se si volesse accelerare la disseccazione facendola a caldo, per esempio, su lastra coperta di carta ed a temperatura di 70° ad 80°, in modo che il metallo rimanga imbianchito alquanto dal polviscolo di ossido che vi si forma, in allora il fenomeno non si ottiene. Se poi il metallo non fu asciugato all'aria, ma si lasciò bagnato dall'ultimo lavacro, il liquido depone dei cristallini di argento e punto di ossido di ferro. Se sulla limatura seccata a temperatura comune e da cui si ebbe la pellicella ferruginosa si versa nuovo acido cloridrico contenente ferro, si digerisce per qualche minuto, si decanta il liquido e si replica la detta operazione per altre due volte, le soluzioni susseguenti danno una proporzione decrescente di ossido nella pellicella ferruginosa e crescenti di cristallini di argento.

Un'altra circostanza dev'essere considerata, ed è, che l'acido cloridrico al titolo di 1 per °/₀ deve essere stato scaldato col ferro da poco, messo a raffreddare in recipiente chiuso e adoperato dopo il raffreddamento, o passato non molto tempo. Occorre anche il concorso dell'aria ed una certa eccedenza di nitrato di argento: in boccia ben chiusa non si presenta; se l'argento scarseggia si produce lenta e sottilissima. L'eccedenza del nitrato di argento dev'essere tale, che il liquido feltrato, divenga latteo ma non opaco con acido cloridrico diluito, senza deporre fiocchi immediatamente.

Dalle cose osservate parrebbe, che la mescolanza dei due nitrati di protossido di ferro e di argento, in soluzione molto diluita, pel contatto dell'aria diano nascimento ad un ossido ferroso-ferrico, il quale si separi dal liquido con aspetto metalloide.

Non saprebbesi spiegare come mai il sottossido di zinco sussistendo nel liquido determini la separazione dell'ossido di ferro al minimo nella maniera descritta, piuttosto che portare l'azione sua sul nitrato di argento con cui esiste disciolto.

Osservazioni sulla reagibilità diversa dello zinco secondo lo stato in cui si trova.

Alle volte nelle esperienze eseguite mi avvidi che lo zinco, sebbene preparato nello stesso modo, cioè fuso e gettato nello stesso stampo, ovvero anche granulato, non reagiva ugualmente cogli acidi, da cannello a cannello, e da pezzetto a pezzetto, sebbene nulla apparisse di differente esaminandone la superficie.

Mi nacque il dubbio che le diversità di reazione, non potendo attribuirle allo stato superficiale del metallo fossero da accagionare a che, uno dei cannelli per es., fosse stato tra i primi quando si versò lo zinco liquefatto nello stampo freddo, e che l'altro fosse stato fra gli ultimi essendo già caldo lo stesso stampo. Feci perciò qualche ricerca, e trovai che lo zinco rassodato a freddo si mostrava più restio alla reazione di quello rassodato a caldo, e ciò in due esperienze consecutive, con diversità un po' ragguardevoli in sul principio, per esempio quello a caldo svolgeva il doppio o un terzo di più d'idrogeno, ma poi col procedere della reazione lo squilibrio venne scemando fino a ridursi nel tempo di 1 ora a 2 o 3 c. c.

Altre osservazioni feci pure, che cioè lo zinco per quanto sia puro e si sciolga compiutamente negli acidi, nondimeno ad un certo punto della reazione incomincia a coprirsi di un polviscolo nero, il quale va crescendo, ma che finisce per essere in tenue quantità.

Io raccolsi un poco di tale polviscolo e notai che ripreso con acido diluito finisce per disciogliersi svolgendo bollicine gassose, ma che poi la soluzione si fa completa. Lasciandolo pure sott'acqua ed in contatto dell'aria s'imbianca lentamente, incominciando dalla parte più vicina alla superficie del liquido e continuando negli strati sottostanti. Corrisponderebbe mai ad uno stato particolare del metallo, meno intaccabile dagli acidi, e che sussiste nella massa metallica commisto intimamente collo zinco di più facile reagibilità?

Giunto al termine della esposizione delle mie ricerche sull' argomento in discorso mi accorgo da me medesimo che rimangono qua e là delle lacune, che vi sono addentellati per nove indagini, e che non si può dire risolto il problema propostomi; nondimeno venni raccogliendo un numero tale di fatti, parte de' quali inattesi, che forse non è inutile averli annunziati in questa Memoria, poichè quand'anche io non potessi continuare le mie investigazioni, possono nondimeno in altri svegliare la curiosità di esaminarli più innanzi. Dirò che si tratta di un lavoro minuzioso, lungo ed a condurre il quale occorrono non poche cautele, e che perciò non si può spingere innanzi con quella sollecitudine che sempre è desiderata. Comunque sia, restringerò il complesso del mio lavoro in queste brevi conclusioni.

1.° L'idrogeno fosforato, l'acido solfidrico ed i sali ferrosi, rendono più attiva la reazione fra lo zinco e l'acido solforico diluito, a somiglianza di quello che osservai altra volta pel fosforo e per l'acido ipofosforoso.

2.° Il fosforo e l'idrogeno fosforato operano ugualmente quando anche lo zinco sia messo a reagire con una soluzione alcalina.

3.° Lo zinco precipita su di sè il fosforo o dall'acqua in cui è stemperato, o dall'alcole assoluto in cui è sciolto; fa lo stesso per l'idrogeno fosforato in soluzione acquosa, pei sali ferrosi in soluzione acida, e toglie l'idrogeno solforato dalla sua soluzione.

4.° L'immersione dello zinco in un liquido fosforato conduttore o nella soluzione dell'idrogeno fosforato, dà nascimento ad una lieve corrente elettrica, la quale si mantiene sensibile per tre ore circa, e poi cessa.

5.° Lo zinco estratto dall'uno o dall'altro liquido, dopo la cessazione di tale corrente, e trasportato in un acido diluito, reagisce più vivamente che non altro zinco, uguale, che fu tenuto semplicemente pel tempo indicato nell'acqua distillata.

6.° Comunemente lo zinco che stette nell'acqua fosforata o nella soluzione alcoolica di fosforo nelle condizioni esposte, e lavato più volte, si dimostra più attivo per la reazione chimica, ma fornisce una corrente minore in paragone dello zinco vergine, manifestando con ciò che consuma intimamente molta parte dell'elettrico sviluppato.

7.° Qualora si tenga il detto metallo più giorni nella soluzione d'idrogeno fosforato, acquista, oltre alla maggiore attività chimica, la proprietà di fornire la elettricità svolta, in corrente maggiore rispetto allo zinco vergine, e ciò in opposto di quanto succede collo zinco tenuto nell'acqua fosforata o nella soluzione alcoolica di fosforo.

8.° Gli effetti galvanometrici ottenuti colle soluzioni acide si hanno poco diversi colle soluzioni alcaline.

9.° Lo zinco stato nell'uno o nell'altro dei liquidi fosforati, quantunque lavato più e più volte con acqua, alcole ed etere, nondimeno mostra di contenere del fosforo superficialmente, perchè l'idrogeno che se ne può sprigionare col mezzo di un acido dà i contrassegni di contenere dell'idrogeno fosforato.

10.° La materia fosforica aderente sullo zinco, vi rimane con tanta forza da non isprigionarsi neppure stando a lungo nel vuoto od a temperatura ordinaria od a caldo fino a 140° in afflusso continuo di anidride carbonica.

11.° Il solo solfuro di carbonio è capace di sottrarre quella parte del fosforo che rimase aderente al metallo; il cloroformio ne toglie soltanto qualche traccia.

12.° Lo zinco introdotto in forma di limatura in un'atmosfera d'idrogeno fosforato non vi produce contrazione di volume, sebbene se ne impossessi di una certa quantità.

13.° Lo zinco con fosforo aderente, dibattuto con acqua in contatto dell'aria, reagisce, ed il fosforo si stacca in forma di un composto che passa nel liquido.

14.° Date certe condizioni, la soluzione cloridrica del cloruro ferroso, dacchè stette in contatto collo zinco, se venga precipitata col nitrato d'argento in una data eccedenza, depone col tempo una pellicella di ossido *ferroso-ferrico*, purchè in contatto dell'aria.

Ora si può chiedere che io pensi della precipitazione del fosforo e dell'idrogeno fosforato sullo zinco, dimandando se avviene per azione chimica o per semplice aderenza superficiale nel modo già da me congetturato.

Rispondo che dal complesso dai risultati ottenuti pare veramente che sia per un fatto di aderenza:

a) perchè non saprebbesi immaginare quale azione chimica di combinazione possa succedere tra quel metallo ed il fosforo sciolto nell'alcole, o l'idrogeno fosforato sciolto nell'acqua;

b) perchè il fosforo sebbene in istretta aderenza sullo zinco, tanto da resistere all'alcole ed all'etere, pure è tolto dal solfuro di carbonio;

c) perchè non si vede combinazione immaginabile tra fosforo ed idrogeno fosforato sullo zinco in piena reazione con acidi, e spoglio per ciò di quello qualsivoglia velo di sottossido o di aria da cui primitivamente fosse coperto;

d) perchè lo zinco in limatura lucida e recente, privo di ossido, attrae l'idrogeno fosforato quando questo è in atmosfera, e senza l'intervento di altri corpi;

e) perchè l'azione del fosforo e dell'idrogeno fosforato è indipendente dal mezzo liquido, od acido od alcalino che sia.

Con questo non intendo di pronunciare un giudizio assoluto: altre ricerche abbisognano, più estese, più particolareggiate per dedurne una conclusione che non sollevi de'dubbî o delle obbiezioni, ricerche che ignoro se possa istituire, opponendovisi o le altre mie occupazioni, oppure i mezzi di cui dispongo.

Effemeride e statistica del fiume Tevere prima e dopo la confluenza dell'Aniene e dello stesso fiume Aniene durante l'anno 1877.

Memoria del Socio ALESSANDRO BETOCCHI

letta nella seduta del 2 giugno 1878.

In conformità di quanto ho praticato negli anni decorsi mi reco ad onore di presentare a questa R. Accademia l'effemeride e la statistica delle altezze del pelo di acqua del fiume Tevere misurate al mezzodì di ciascun giorno del decorso anno 1877 tanto all'idrometro di Orte quanto all'idrometro di Ripetta; ossia prima e dopo la confluenza dell'Aniene. A queste unisco eziandio l'effemeride e la statistica delle altezze del pelo di acqua dello stesso Aniene misurate all'idrometro collocato all'imbocco dei cunicoli di Tivoli. Completo le une e le altre colla rispettiva rappresentazione grafica, la quale rende visibile a colpo d'occhio il movimento ascensionale e discensionale delle acque verificatosi in prossimità di ciaschedun idrometro, ed i relativi confronti.

L'esame di queste effemeridi, e meglio ancora delle sopradette rappresentazioni grafiche dimostra come l'anno 1877 va anche più del precedente, contato fra quelli in cui il Tevere fu oltremodo benigno.

Infatti ritenendo come di consueto che la scala idrometrica del Tevere a Ripetta rappresenti la magra fino ai metri 6, lo stato ordinario dai 6 agli 8 metri, lo stato d'intumescenza dagli 8 ai 12 e lo stato di vera piena dai 12 metri in avanti, numerando i giorni in cui il livello del pelo di acqua del Tevere misurato al detto idrometro a mezzodì si rinvenne rispettivamente entro i suddetti limiti, si trova che nel decorso anno 1877 il Tevere corse a detta ora in magra 127 volte, in stato ordinario 204, per sole 32 volte in stato d'intumescenza e 2 volte soltanto in piena e cioè nei giorni 28 marzo e 4 dicembre.

La prima di queste due piene, la quale segnò met. 12,37 al mezzodì del giorno sopradetto si trovava già in decrescenza avendo segnato precedentemente dalle 6 alle 7 del mattino met. 12,51; la seconda, la quale segnò met. 12,04 al mezzodì del 4 dicembre era anch'essa già in decremento avendo toccato il colmo alle 12 della sera precedente e mantenutolo fino alle 2 mattutine del detto dì, segnando met. 12,42. Ma tanto l'una che l'altra di queste piene di tanto poco si discostano dallo stato di semplice intumescenza e furono di così breve durata da meritare appena di essere considerate come vere piene, ond'è che mi dispenso di esibire le rispettive tabelle orarie coi relativi incrementi e decrementi.

Quanto alle intumescenze prescindendo da quelle segnate dal 24 al 30 marzo e da quelle dal 30 novembre al 7 dicembre, le quali fanno parte delle piene sopraindicate, delle altre una sola superò i 10 metri giungendo fino a met. 11,48 e fu quella dei giorni dal 18 al 23 aprile.

Del resto dalle statistiche dedotte dalle effemeridi sopradette ne risulta che l'altezza massima presentata a mezzodì nei varî giorni dell' anno 1877 dal pelo di acqua del Tevere all'idrometro di Ripetta fu di met. 12,37 la quale resta di met. 4,64 inferiore alla massima verificatasi il dì 28 dicembre 1870 in met. 17,01; la minima fu di met. 5,63, la quale supera di met. 0,29 la minima assoluta verificatasi dal 1822 ad oggi che fu di met. 5,34 e si verificò negli anni 1834 e 1835.

Che la massima differenza di altezza verificatasi nell'anno 1877 fu di met. 6,74, la quale è di met. 4,61 inferiore a quella che ebbe luogo nel sopradetto anno 1870 e che fu di met. 11,35.

Finalmente che l'altezza media verificatasi nei singoli mesi oscillò da met. 5,67 a met. 7,75, mentre l'altezza media generale dell'intero anno fu di met. 6,60, la quale supera di met. 0,91 la minima delle medie annuali verificatesi dal 1822 ad oggi, e cioè quella del 1834, che fu di met. 5,69; ed invece resta di met. 1,04 inferiore alla massima delle medie verificatesi in detto periodo, e cioè quella del 1845 la quale fu di met. 7,64.

EFFEMERIDE del TEVERE ossia Registro giornaliero dell'alte
al mezzodì di cias

Giorni del mese	**Gennaro** Altezza osservata Met. lin.	**Febbraro** Altezza osservata Met. lin.	**Marzo** Altezza osservata Met. lin.	**Aprile** Altezza osservata Met. lin.	**Maggio** Altezza osservata Met. lin.	**Giugn** Altezza oss Met. lin.
1	1, 80	2, 60	1, 86	2, 00	2, 00	1, 60
2	1, 80	2, 00	1, 80	2, 00	2, 00	1, 60
3	1, 40	1, 90	1, 80	2, 00	2, 00	1, 60
4	1, 40	1, 60	1, 80	1, 90	2, 00	1, 50
5	1, 40	1, 60	1, 80	1, 90	2, 00	1, 50
6	1, 40	1, 60	2, 80	1, 90	2, 00	1, 50
7	2, 10	1, 60	2, 80	2, 00	2, 80	1, 50
8	2, 10	1, 60	2, 80	2, 00	2, 60	1, 50
9	1, 70	1, 60	2, 80	2, 00	2, 60	1, 50
10	1, 70	1, 60	2, 30	2, 00	3, 40	1, 50
11	1, 70	1, 60	2, 30	2, 00	2, 20	1, 50
12	1, 70	1, 60	2, 00	2, 00	2, 00	1, 50
13	2, 20	1, 60	2, 00	2, 00	2, 00	1, 50
14	2, 30	1, 60	1, 90	2, 00	1, 90	1, 50
15	2, 30	1, 60	1, 90	1, 80	1, 90	1, 50
16	2, 00	1, 60	1, 90	1, 60	1, 80	1, 50
17	1, 90	1, 60	1, 90	1, 60	1, 80	1, 50
18	1, 80	1, 70	1, 90	4, 70	1, 80	1, 50
19	1, 80	1, 70	1, 90	3, 30	1, 80	1, 50
20	1, 80	1, 70	1, 90	2, 80	1, 80	1, 50
21	1, 80	1, 70	1, 90	2, 80	1, 80	1, 50
22	1, 80	1, 70	1, 90	2, 60	1, 80	1, 50
23	1, 80	2, 40	2, 90	2, 60	1, 80	1, 50
24	1, 80	2, 20	3, 40	2, 80	1, 80	2, 00
25	1, 70	2, 20	2, 50	2, 00	1, 80	2, 20
26	1, 60	2, 20	2, 90	2, 00	1, 80	1, 80
27	1, 60	2, 10	5, 00	1, 80	1, 80	1, 50
28	1, 60	2, 10	3, 20	1, 80	1, 80	1, 50
29	1, 60		2, 70	1, 80	1, 80	1, 50
30	1, 60		2, 60	1, 80	1, 80	1, 50
31	1, 60		2, 60		1, 80	
Sommata	54, 80	50, 60	73, 70	65, 50	62, 20	46, 80
Media	1, 75	1, 81	2, 38	2, 18	2, 01	1, 56
Massima	2, 30	2, 60	5, 00	4, 70	3, 40	2, 20
Minima	1, 40	1, 60	1, 80	1, 60	1, 80	1, 50
Differenza	0, 90	1, 00	3, 20	3, 10	1, 60	0, 70

ello di acqua del fiume Tevere all' idrometro di Orte
) dell'anno 1877.

uglio Altezza osservata Met. lin.	Agosto Altezza osservata Met. lin.	Settembre Altezza osservata Met. lin.	Ottobre Altezza osservata Met. lin.	Novembre Altezza osservata Met. lin.	Dicembre Altezza osservata Met. lin.
1, 50	1, 30	1, 20	1, 40	1, 20	4, 80
1, 50	1, 20	1, 20	1, 30	1, 20	2, 60
1, 50	1, 20	1, 20	1, 30	1, 20	5, 60
1, 50	1, 20	1, 20	1, 30	1, 20	3, 60
1, 50	1, 20	1, 20	1, 70	1, 20	2, 80
1, 80	1, 20	1, 20	1, 30	1, 20	2, 50
1, 80	1, 20	1, 20	1, 30	1, 20	2, 50
1, 80	1, 20	1, 20	1, 30	1, 20	2, 50
1, 60	1, 20	3, 20	1, 30	1, 20	2, 50
1, 50	1, 20	3, 20	1, 30	1, 20	2, 50
1, 50	1, 20	2, 40	1, 40	1, 70	2, 50
1, 50	1, 20	2, 00	1, 40	1, 70	2, 50
1, 30	1, 20	1, 90	1, 40	1, 70	2, 50
1, 30	1, 20	1, 20	1, 40	1, 60	2, 50
1, 50	1, 20	1, 20	1, 40	1, 60	2, 50
1, 30	1, 20	1, 20	1, 30	1, 50	3, 50
1, 30	1, 20	1, 20	1, 30	1, 50	2, 20
1, 40	1, 20	1, 20	1, 30	1, 30	2, 20
1, 40	1, 20	1, 20	1, 30	1, 30	1, 20
1, 40	1, 20	1, 20	1, 30	1, 30	1, 20
1, 40	1, 20	1, 20	1, 30	1, 20	1, 20
1, 40	1, 20	1, 20	1, 30	1, 20	1, 80
1, 40	1, 20	1, 20	1, 30	1, 20	1, 80
1, 40	1, 20	2, 90	1, 30	2, 30	1, 80
1, 40	1, 20	3, 90	1, 20	2, 40	1, 80
1, 30	1, 20	2, 60	1, 20	2, 20	1, 80
1, 20	1, 20	2, 90	1, 20	1, 70	1, 80
1, 20	1, 20	2, 60	1, 20	1, 70	1, 50
1, 20	1, 20	2, 50	1, 20	2, 00	1, 50
1, 20	1, 20	2, 40	1, 20	2, 40	1, 30
1, 20	1, 20		1, 20		1, 30
4, 20	37, 30	54, 10	40, 60	45, 50	72, 30
1, 43	1, 20	1, 80	1, 31	1, 32	2, 33
1, 80	1, 30	3, 90	1, 70	2, 40	5, 60
1, 20	1, 20	1, 20	1, 20	1, 20	1, 20
0, 60	0, 10	2, 70	0, 50	1, 20	4,40

EFFEMERIDE dell'ANIENE ossia Registro giornaliero dell'altezza del pelo di a
al mezzodì di cia

Giorni del mese	Gennaro Altezza osservata Met. lin.	Febbraro Altezza osservata Met. lin.	Marzo Altezza osservata Met. lin.	Aprile Altezza osservata Met. lin.	Maggio Altezza osservata Met. lin.	Giug Altezza os Met. li
1	1, 50	1, 40	1, 20	1, 60	1, 60	1, 3
2	1, 50	1, 40	1, 20	1, 40	1, 60	1, 3
3	1, 50	1, 30	1, 20	1, 40	1, 50	1, 3
4	1, 50	1, 30	1, 20	1, 40	1, 50	1, 3
5	1, 50	1, 30	1, 20	1, 40	1, 50	1, 3
6	1, 70	1, 30	2, 00	1, 30	1, 50	1, 3
7	1, 60	1, 30	1, 80	1, 30	1, 50	1, 2
8	1, 60	1, 20	2, 00	1, 30	1, 50	1, 2
9	1, 50	1, 20	1, 90	1, 30	1, 80	1, 2
10	1, 50	1, 20	1, 90	1, 30	1, 80	1, 2
11	1, 30	1, 20	1, 80	1, 50	1, 60	1, 2
12	1, 30	1, 20	1, 80	1, 40	1, 60	1, 2
13	1, 80	1, 20	1, 80	1, 40	1, 50	1, 6
14	1, 40	1, 20	1, 80	1, 40	1, 50	1, 4
15	1, 40	1, 20	1, 50	1, 40	1, 50	1, 4
16	1, 40	1, 20	1, 30	1, 30	1, 50	1, 4
17	1, 30	1, 20	1, 30	1, 50	1, 40	1, 4
18	1, 30	1, 30	1, 30	2, 90	1, 40	1, 4
19	1, 30	1, 30	1, 10	2, 40	1, 40	1, 5
20	1, 30	1, 25	1, 10	2, 40	1, 40	1, 3
21	1, 30	1, 20	1, 10	2, 00	1, 40	1, 3
22	1, 30	2, 22	1, 10	1, 70	1, 40	1, 3
23	1, 30	1, 70	1, 10	1, 50	1, 30	1, 2
24	1, 30	1, 30	1, 50	1, 50	1, 30	1, 2
25	1, 30	1, 30	1, 70	1, 50	1, 30	1, 2
26	1, 30	1, 20	2, 10	1, 50	1, 30	1, 2
27	1, 30	1, 20	2, 30	1, 50	1, 30	1, 4
28	1, 20	1, 20	1, 90	1, 35	1, 30	1, 3
29	1, 20		1, 70	1, 35	1, 30	1, 2
30	1, 20		1, 60	1, 35	1, 30	1, 2
31	1, 20		1, 60		1, 30	
Sommata	43, 10	36, 47	48, 10	46, 55	45, 10	39, 0
Media	1, 39	1, 30	1, 55	1, 88	1, 46	1, 3
Massima	1, 80	2, 22	2, 30	2, 90	1, 80	1, 6
Minima	1, 20	1, 20	1, 20	1, 30	1, 30	1, 2
Differenza	0, 60	1, 02	1, 10	1, 60	0, 50	0, 4

ume Aniene all'idrometro esistente all'imbocco del cunicolo sinistro presso Tivol
o dell'anno 1877.

uglio za osservata Met. lin.	Agosto Altezza osservata Met. lin.	Settembre Altezza osservata Met. lin.	Ottobre Altezza osservata Met. lin.	Novembre Altezza osservata Met. lin.	Dicembre Altezza osservata Met. lin.
1, 25	1, 20	1, 10	1, 20	1, 10	2, 10
1, 20	1, 20	1, 10	1, 20	1, 10	1, 80
1, 20	1, 20	1, 10	1, 20	1, 10	3, 05
1, 20	1, 20	1, 10	1, 20	1, 10	2, 45
1, 20	1, 15	1, 10	1, 20	1, 10	1, 60
1, 20	1, 15	1, 10	1, 20	1, 10	1, 50
1, 20	1, 15	1, 10	1, 10	1, 10	1, 50
1, 20	1, 15	1, 10	1, 10	1, 10	1, 50
1, 20	1, 15	1, 30	1, 10	1, 10	1, 50
1, 20	1, 10	1, 20	1, 30	1, 10	1, 50
1, 20	1, 10	1, 20	1, 20	1, 10	1, 50
1, 20	1, 10	1, 10	1, 15	1, 60	1, 70
1, 20	1, 10	1, 25	1, 15	1, 20	1, 40
1, 20	1, 10	1, 20	1, 15	1, 20	1, 30
1, 20	1, 10	1, 15	1, 15	1, 20	1, 30
1, 15	1, 10	1, 15	1, 15	1, 90	1, 30
1, 15	1, 10	1, 15	1, 10	1, 20	1, 30
1, 15	1, 10	1, 10	1, 10	1, 20	1, 30
1, 15	1, 10	1, 10	1, 10	1, 20	1, 30
1, 15	1, 10	1, 10	1, 10	1, 20	1, 30
1, 15	1, 10	1, 10	1, 20	1, 20	1, 25
1, 15	1, 10	1, 10	1, 20	1, 30	1, 25
1, 15	1, 10	1, 10	1, 10	1, 40	1, 25
1, 15	1, 10	1, 20	1, 10	1, 60	1, 25
1, 15	1, 10	1, 20	1, 10	1, 95	1, 40
1, 15	1, 10	1, 15	1, 10	1, 10	1, 60
1, 15	1, 10	1, 20	1, 10	1, 40	1, 30
1, 15	1, 10	1, 20	1, 10	1, 70	1, 30
0, 50	1, 10	1, 20	1, 10	2, 30	1, 30
1, 20	1, 10	1, 20	1, 10	1, 80	1, 30
1, 20	1, 10		1, 10		1, 30
5, 90	34, 75	34, 45	35, 45	40, 35	46, 70
1, 16	1, 12	1, 14	1, 14	1, 34	1, 51
1, 25	1, 20	1, 30	1, 30	2, 30	3, 05
0, 50	1, 10	1, 10	1, 10	1, 10	1, 25
0, 75	0, 10	0, 20	0, 20	1, 20	1, 80

EFFEMERIDE del TEVERE ossia Registro giornaliero dell'alt
al mezzodì di cias

Giorni del mese	Gennaro Altezza osservata Met. lin.	Febbraro Altezza osservata Met. lin.	Marzo Altezza osservata Met. lin.	Aprile Altezza osservata Met. lin.	Maggio. Altezza osservata Met. lin.	Giugn Altezza osse Met. lin
1	6, 91	6, 40	6, 61	7, 74	7, 70	6, 29
2	6, 81	7, 44	6, 73	7, 63	7, 70	6, 26
3	6, 72	6, 91	6, 60	7, 37	7, 18	6, 26
4	6, 63	6, 58	6, 46	7, 19	6, 95	6, 56
5	6, 56	6, 45	6, 37	7, 09	6, 84	6, 36
6	6, 56	6, 38	7, 41	7, 02	6, 77	6, 23
7	6, 75	6, 33	8, 69	7, 05	6, 77	6, 18
8	6, 98	6, 29	8, 08	6, 86	8, 24	6, 16
9	6, 64	6, 26	8, 60	6, 77	7, 92	6, 14
10	6, 50	6, 26	8, 38	6, 71	7, 98	6, 16
11	6, 43	6, 28	7, 75	6, 73	9, 23	6, 21
12	6, 41	6, 28	7, 40	7, 13	7, 54	6, 21
13	9, 62	6, 32	7, 14	7, 02	7, 14	6, 27
14	8, 61	6, 30	6, 97	6, 88	7, 02	6, 35
15	7, 48	6, 29	6, 86	6, 76	6, 91	6, 21
16	7, 15	6, 27	6, 77	6, 65	6, 82	6, 16
17	6, 94	6, 24	6, 72	6, 62	6, 93	6, 10
18	6, 80	6, 22	6, 75	10, 63	6, 84	6, 05
19	6, 83	6, 24	6, 83	11, 48	6, 67	6, 06
20	6, 68	6, 34	6, 80	10, 11	6, 61	6, 07
21	6, 58	6, 27	6, 77	9, 12	6, 77	6, 10
22	6, 48	6, 52	6, 80	8, 81	7, 00	6, 05
23	6, 44	7, 63	7, 06	8, 14	7, 02	6, 03
24	6, 38	7, 33	9, 80	7, 83	6, 76	6, 00
25	6, 32	6, 93	9, 09	7, 65	6, 59	6, 27
26	6, 28	6, 80	8, 14	7, 39	6, 72	6, 54
27	6, 25	6, 64	11, 91	7, 24	6, 72	6, 35
28	6, 26	6, 57	12, 37	7, 10	6, 59	6, 29
29	6, 26		9, 27	6, 99	6, 44	6, 31
30	6, 29		8, 35	7, 19	6, 37	6, 06
31	6, 23		7, 96		6, 33	
Sommata	209, 88	182, 77	240, 44	228, 90	219, 07	186, 2
Media	6, 77	6, 53	7, 75	7, 63	7, 07	6, 2
Massima	9, 62	7, 63	12, 37	11, 48	9, 23	6, 5
Minima	6, 23	6, 22	6, 37	6, 62	6, 33	6, 0
Differenza	3, 39	1, 41	6, 00	4, 86	2, 90	0, 5

…lo di acqua del fiume Tevere all'idrometro di Ripetta
… dell'anno 1877.

…glio …osservata …t. lin.	Agosto Altezza osservata Met. lin.	Settembre Altezza osservata Met. lin.	Ottobre Altezza osservata Met. lin.	Novembre Altezza osservata Met. lin.	Dicembre Altezza osservata Met. lin.
…, 00	5, 73	5, 63	5, 85	5, 69	8, 71
…, 94	5, 72	5, 63	5, 84	5, 69	10, 05
…, 94	5, 71	5, 63	5, 82	5, 68	10, 56
…, 17	5, 74	5, 64	5, 79	5, 68	12, 04
…, 80	5, 73	5, 73	5, 78	5, 68	10, 81
…, 36	5, 71	5, 70	6, 02	5, 68	8, 66
…, 04	5, 71	5, 70	5, 79	5, 68	8, 93
…, 93	5, 71	5, 67	5, 79	5, 67	7, 81
…, 88	5, 71	5, 70	5, 79	5, 67	7, 43
…, 86	5, 69	8, 37	5, 84	5, 67	7, 58
…, 93	5, 69	8, 22	5, 93	5, 67	7, 48
…, 88	5, 69	6, 58	6, 08	5, 67	7, 10
…, 82	5, 69	6, 04	6, 01	6, 04	7, 23
…, 80	5, 67	5, 90	5, 88	6, 01	6, 88
…, 80	5, 67	5, 84	5, 82	6, 01	6, 90
…, 79	5, 67	5, 80	5, 80	5, 90	9, 42
…, 82	5, 67	5, 78	5, 77	5, 82	7, 57
…, 77	5, 66	5, 77	5, 76	5, 78	7, 05
…, 96	5, 66	5, 76	5, 75	5, 73	6, 81
…, 95	5, 65	5, 76	5, 74	5, 72	6, 59
…, 81	5, 65	5, 76	5, 74	5, 68	6, 52
…, 78	5, 64	5, 78	5, 74	5, 68	6, 45
…, 77	5, 63	5, 78	5, 73	6, 61	6, 36
…, 75	5, 63	8, 75	5, 71	6, 06	6, 31
…, 74	5, 63	9, 00	5, 74	5, 93	6, 25
…, 75	5, 63	6, 86	5, 72	5, 90	6, 27
…, 75	5, 63	6, 30	5, 72	6, 31	6, 57
…, 75	5, 63	6, 18	5, 72	6, 40	6, 56
…, 77	5, 63	5, 99	5, 73	6, 28	6, 54
…, 74	5, 63	5, 91	5, 72	10, 02	6, 60
…, 75	5, 63		5, 70		6, 42
…2, 80	175, 84	187, 16	179, 82	180, 01	236, 46
…, 89	5, 67	6, 24	5, 80	6, 00	7, 63
6, 80	5, 74	9, 00	6, 08	10, 02	12, 04
5, 74	5, 63	5, 63	5, 70	5, 67	6, 25
1, 06	0, 11	3, 37	0, 38	4, 35	5, 79

ANNO 1877.

STATISTICA DEL FIUME TEVERE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO DI ORTE OSSIA INNANZI LA CONFLUENZA DELL'ANIENE

MESI	ALTEZZA MENSILE sommata — Met. lin.	ALTEZZA MENSILE media — Met. lin.	ALTEZZA Massima — Met. lin.	ALTEZZA Minima — Met. lin.	DIFFERENZE — Met. lin.
Gennaro	54, 80	1, 75	2, 30	1, 40	0, 90
Febbraro.	50, 60	1, 81	2, 60	1, 60	1, 00
Marzo	73, 70	2, 38	5, 00	1, 80	3, 20
Aprile	65, 50	2, 18	4, 70	1, 60	3, 10
Maggio	62, 20	2, 01	3, 40	1, 80	1, 60
Giugno	46, 80	1, 56	2, 20	1, 50	0, 70
Luglio.	44, 20	1, 43	1, 80	1, 20	0, 60
Agosto.	37, 30	1, 20	1, 30	1, 20	0, 10
Settembre	54, 10	1, 80	3, 90	1, 20	2, 70
Ottobre	40, 60	1, 31	1, 70	1, 20	0, 50
Novembre	45, 50	1, 32	2, 40	1, 20	1, 20
Dicembre	72, 30	2, 33	5, 60	1, 20	4, 40
	647, 40				

Altezza media generale dell'anno m.l. 1,77

Altezza massima dell'intero anno m.l. 5,00 }
» minima » » » 1,20 } Differenza massima m.l. = 3,80

ANNO 1877.

STATISTICA DEL FIUME ANIENE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO COLLOCATO ALL'IMBOCCO DEL CUNICOLO SINISTRO PRESSO TIVOLI

MESI	ALTEZZA MENSILE sommata — Met. lin.	ALTEZZA MENSILE media — Met. lin.	ALTEZZA Massima — Met. lin.	ALTEZZA Minima — Met. lin.	DIFFERENZE — Met. lin.
Gennaro.	43, 10	1, 39	1, 80	1, 20	0, 60
Febbraro	36, 47	1, 30	2, 22	1, 20	1, 02
Marzo.	48, 10	1, 55	2, 30	1, 20	1, 10
Aprile.	46, 55	1, 88	2, 90	1, 30	1, 60
Maggio	45, 10	1, 46	1, 80	1, 30	0, 50
Giugno	39, 05	1, 30	1, 60	1, 20	0, 40
Luglio	35, 90	1, 16	1, 25	0, 50	0, 75
Agosto	34, 75	1, 12	1, 20	1, 10	0, 10
Settembre.	34, 45	1, 14	1, 30	1, 10	0, 20
Ottobre	35, 45	1, 14	1, 30	1, 10	0, 20
Novembre.	40, 35	1, 34	2, 30	1, 10	1, 20
Dicembre	46, 70	1, 51	3, 05	1, 25	1, 80
	485, 97				

Altezza media generale dell'anno m.l. 1,33

Altezza massima dell'intero anno m.l. 3,05 }
» minima » » » 0,50 } Differenza massima m.l. =2, 55

ANNO 1877.

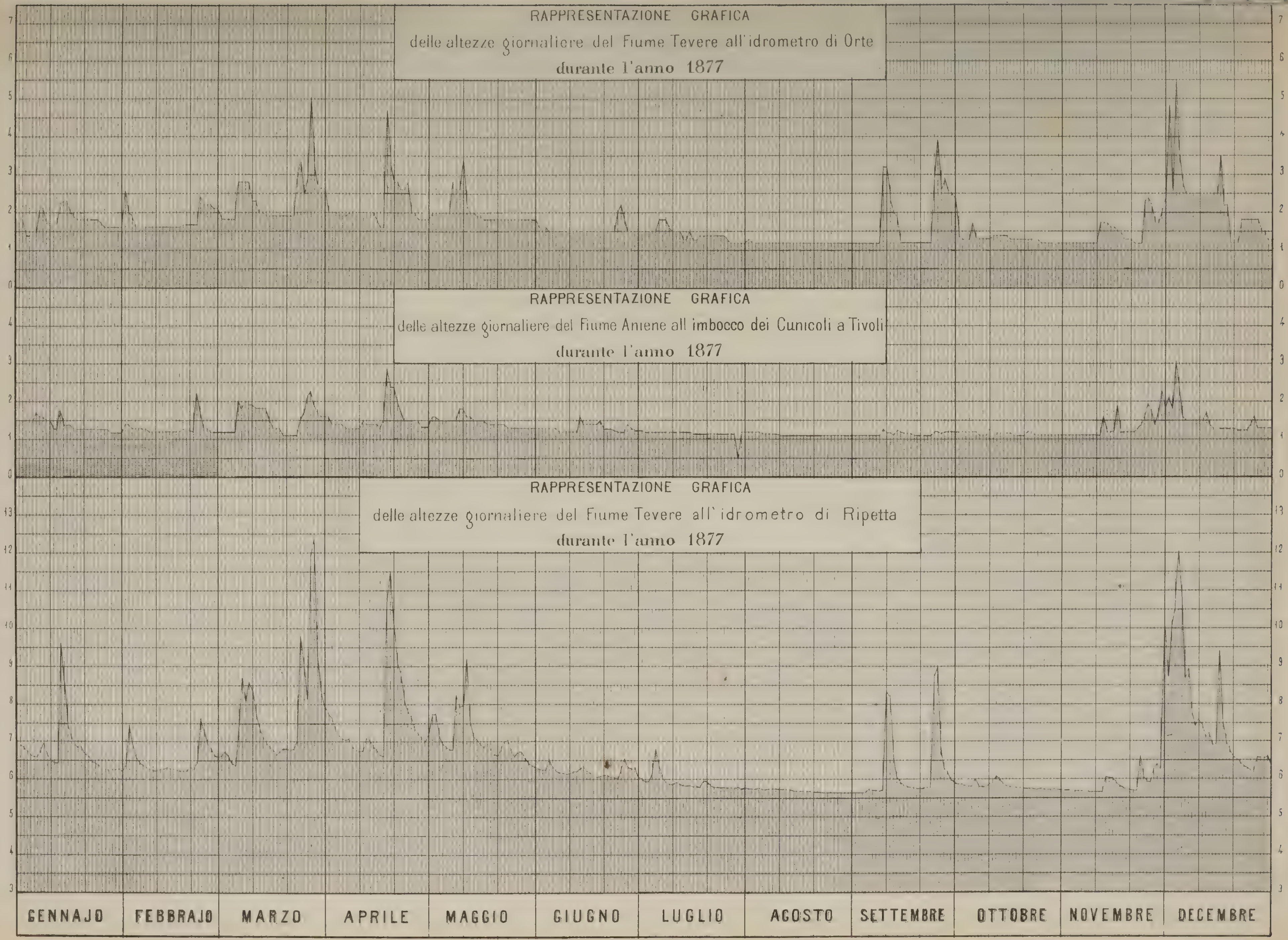
STATISTICA DEL FIUME TEVERE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO DI RIPETTA OSSIA DOPO LA CONFLUENZA DELL'ANIENE

MESI	ALTEZZA MENSILE sommata — Met. lin.	ALTEZZA MENSILE media — Met. lin.	ALTEZZA Massima — Met. lin.	ALTEZZA Minima — Met. lin.	DIFFERENZE — Met. lin.
Gennaro	209, 88	6, 77	9, 62	6, 23	3, 39
Febbraro	182, 77	6, 53	7, 63	6, 22	1, 41
Marzo	240, 44	7, 75	12, 37	6, 37	6, 00
Aprile	228, 90	7, 63	11, 48	6, 62	4, 86
Maggio	219, 07	7, 07	9, 23	6, 33	2, 90
Giugno	186, 29	6, 21	6, 56	6, 00	0, 56
Luglio	182, 80	5, 89	6, 80	5, 74	1, 06
Agosto	175, 84	5, 67	5, 76	5, 63	0, 11
Settembre	187, 16	6, 24	9, 00	5, 63	3, 37
Ottobre	179, 82	5, 80	6, 08	5, 70	0, 38
Novembre	180, 01	6, 00	10, 02	5, 67	4, 35
Dicembre	236, 46	7, 63	12, 04	6, 25	5, 79
	2409, 44				

Altezza media generale dell'anno m.l. 6,60

Altezza massima dell'intero anno m.l. 12,37 }
» minima » » » 5,63 } Differenza massima m.l. = 6,74


RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
delle altezze giornaliere del Fiume Tevere all'idrometro di Orte
durante l'anno 1877
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
delle altezze giornaliere del Fiume Aniene all imbocco dei Cunicoli a Tivoli
durante l'anno 1877
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
delle altezze giornaliere del Fiume Tevere all'idrometro di Ripetta
durante l'anno 1877
GENNAJO
FEBBRAJO
MARZO
APRILE
MAGGIO
GIUGNO
LUGLIO
AGOSTO
SETTEMBRE
OTTOBRE
NOVEMBRE
DECEMBRE

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

Sul serpentino di Verrayes in Valle d'Aosta.
Nota del Socio ALFONSO COSSA
letta nella seduta del 5 maggio 1878.

Tra le molte roccie serpentinose delle Alpi piemontesi distinguesi quella trovata a Verrayes nella Valle d'Aosta, perchè è per la massima parte costituita di quella varietà di serpentino, che a motivo della sua purezza viene distinto col nome di *nobile* o *prezioso*.

Per quanto si riferisce alla giacitura di questa roccia trascrivo testualmente le notizie che mi furono cortesemente comunicate dal prof. Michele Baretti.

« Non ho dati precisi sulla giacitura della serpentina verde-gialla di Verrayes giacchè questa località è sul versante settentrionale di Valle d'Aosta ed il rilevamento geologico di questo versante non è ancora cominciato, tuttavia quello che so di certo dall'ingegnere Santelli, che mi fece tenere quella serpentina, si è che questa trovasi in massi dentro una fanghiglia morenica presso Verrayes allo sbocco della Valle di Saint Barthélemy; per conseguenza può darsi che essa esista in istrati di una certa potenza in qualche parte della Valle, ovvero che trovisi in posto al disotto della morena stessa; il che credo più probabile stante l'abbondanza grandissima di tali massi serpentinosi in un'area poco ampia. Se così fosse il banco serpentinoso sarebbe intercalato a dei calceschisti grigio-rossicci di facilissima disaggregabilità. — Identica serpentina trovasi nella stessa Valle d'Aosta a Cogne proprio sotto la massa di ferro magnetico che costituisce la famosa miniera di ferro di Cogne. Qui è decisamente intercalata a calcari cristallini ed a calceschisti. — Nell'ultima campagna geologica trovai identica serpentina al Colle di Bassac (3100 metri) tra la Valle di Rhème e Valgrisanche. Il banco serpentinoso è anche qui intercalato a dei calceschisti grigio-rossicci d'innoltrata degradazione ».

Il serpentino di Verrayes esaminato in grossi frammenti ha un colore verde cupo, interrotto qua e là da macchie di aspetto metallico di colore grigio nerastro e prodotte da nuclei di magnetite. È fragile, e la sua frattura è scagliosa a superficie irregolare.

La determinazione del peso specifica di questa roccia, privata meccanicamente da ogni traccia di magnetite, diede i risultati seguenti:

con grammi	1,447	2,587	a + 12°,5
»	2,811	2,560	»
»	3,025	2,546	»
	Densità media	2,564	

Quando senza ricorrere ad alcun mezzo d'ingrandimento si osservano sezioni sottili di questa roccia, quali sono quelle rappresentate in dimensioni naturali nelle

figure 1 e 2, si scorge che questa roccia è principalmente composta di due minerali ben distinti, cioè di serpentino che forma una massa compatta omogenea di un colore verde, trasparente, in cui sono irregolarmente disseminati dei frammenti cristallini di magnetite. In tre chilogrammi di roccia ho trovato appena un solo cristallo completo di questo minerale, ed era un ottaedro perfetto le di cui facce misuravano solamente due millimetri di lato.

In alcuni esemplari (fig. 2) il colore della roccia è di un verde che trae al giallo e le chiazze di magnetite circondano dei piccoli ammassi di una materia di un color bianco latteo d'aspetto cristallino.

Il serpentino di Verrayes ha una struttura molto differente da quella delle più comuni roccie serpentinose del Piemonte (1) nelle quali o la magnetite forma un tessuto reticolare che imprigiona i residui della più o meno avanzata degradazione del peridoto; oppure i componenti della roccia sono disposti in zone quasi parallele impartendo alla roccia un aspetto fibroso. Questa diversità di struttura apparisce molto evidente dall'esame di sezioni sottili dei serpentini di Corio e di Favaro (Biella) che sono disegnate nelle figure 3 e 4.

La roccia di Verrayes si rassomiglia invece moltissimo al così detto serpentino nobile di *Snarum* dal quale differisce soltanto per non contenere cristalli ancora inalterati di peridoto che caratterizzano il serpentino di Norvegia.

Esame microscopico. — Esaminato nella luce ordinaria il serpentino presenta una struttura finamente lamellare; la magnetite appare attraversata da minuti cristalli di abito prismatico molto allungati, ed a sezioni perfettamente rettangolari. Nella luce polarizzata la massa del serpentino depolarizza confusamente la luce a guisa della calcedonia. I cristalli inmagliati nella magnetite, quando le due sezioni principali dei nicol sono inclinate ad angolo retto, appariscono colorati per lo più intensamente in azzurro, e presentano tutti i caratteri dei cristalli trimetrici.

Trattando una sezione della roccia, in un punto in cui trovasi un cristallo di magnetite, con dell'acido cloridrico, l'acido scioglie il minerale metallico e apparisce un ammasso di cristalli prismatici che resistono all'azione dell'acido, e che prima trovavansi nascosti da un involucro di magnetite.— Le figure 4 e 5 rappresentano un cristallo di magnetite ingrandito 140 volte ed osservato nella luce ordinaria prima e dopo il trattamento coll'acido cloridrico.

In alcuni preparati ho osservato che la magnetite oltre a cristalli prismatici conteneva pure dei granuli di forma irregolare che presentavano tutti i caratteri del peridoto. Trattando il preparato con acido cloridrico si osservava che la materia granulare si decomponeva depositando sul porta-oggetti della silice gelatinosa (fig. 7).

Qualche rara volta la magnetite presenta indizio di alterazione ed è circondata da una materia rossa amorfa costituita molto probabilmente da idrato ferrico (fig. 8).

Tentai di separare nel modo seguente la sostanza cristallina prismatica inclusa nella magnetite. Da una certa quantità di roccia finamente polverizzata separai con la calamita la magnetite che levigai ripetutamente con acqua per liberarla dalla

(1) Nella denominazione di roccie serpentinose comprendo solamente quelle che sono per la massima parte formate da serpentino. Rimangono pertanto escluse la lherzolite e le roccie congeneri.

maggior parte del polviscolo di serpentino che vi aderiva. Trattai con acido cloridrico a caldo la magnetite; lavai il residuo con acqua, e poi ripetutamente con una soluzione bollente di carbonato sodico per esportare la silice separatasi dalla decomposizione della olivina che accompagna il minerale prismatico. Dopo queste operazioni ebbi una sostanza che fondeva al cannello, conteneva silice, magnesia, pochissima calce ed ossido di cromo. Non mi fu possibile di avere tanta materia in uno stato di purezza tale da poterla sottoporre utilmente all'analisi quantitativa. Mi devo perciò limitare a ritenere che il minerale inchiuso nella magnetite è costituito o da enstatite o da qualcuno dei molti silicati di magnesia che trovansi di solito associati al serpentino.

Composizione chimica del serpentino di Verrayes. — Per le ricerche chimiche ho scelto dei frammenti affatto privi di magnetite. La roccia anche in schegge molto sottili si fonde assai difficilmente. Nella fiamma ossidante prima annerisce, poi si scolora completamente. Riscaldata in tubo chiuso emette del vapor d'acqua che condensato ha una reazione affatto neutra. Non contiene traccia di materie carboniose. Trattata con acido cloridrico a caldo si decompone completamente con formazione di silice fioccosa. Contiene ossido di cromo, di nichelio, tracce di acido fosforico, di manganese, di calce; nessuna traccia di allumina e di vanadio.

L'analisi quantitativa diede i risultati seguenti:

	I	II
Anidride silicica	40,90	40,86
Anidride fosforica.	tracce	tracce
Magnesia	41,31	41,37
Ossido ferroso.	4,70	4,59
Ossido cromico	0,02	0,03
Ossido di nichelio	0,08	0,09
Calce.	0,02	0,03
Ossido di manganese. . .	tracce	tracce
Acqua	13,40	13,08
	100,43	100,05

I serpentini che anche per la loro composizione chimica si rassomigliano alla roccia di Verrayes sono quelli di Newburyport nel Massachusetts e di Snarum nella Norvegia, di cui trascrivo la composizione desunta dalle analisi di Petersen, Scheerer e Hartwall.

	Newburyport (Petersen)	Snarum (Scheerer)	Snarum (Hartwall)
Anidride silicica	41,76	40,71	42,97
Allumina.	tracce	2,39	0,87
Ossido ferroso	4,06	2,43	2,28
Magnesia	41,40	41,48	41,66
Acqua	13,40	12,61	12,02
	100,62	99,62	100,00

Ho pure analizzato i serpentini di Corio e di Favaro, e dai risultati ottenuti appare evidentemente che anche per la composizione chimica queste due roccie differiscono dal serpentino di Verrayes.

	Serpentino di Corio $ps = 2,65$ a $+ 17°$	Serpentino di Favaro (Biella) $ps = 2,68$ a $+ 11°$
Anidride silicica	40,88	50,43
Allumina	tracce	tracce
Ossido ferroso	10,21	12,67
Ossido ferrico.	2,05	2,08
Ossido di cromo	tracce	tracce
Ossido di nichelio	0,51	0,06
Magnesia	34,94	23,81
Acqua	11,74	10,65
	100,33	99,70

Nella terza parte delle sue interessantissime ricerche sulla formazione degli aereoliti, Daubrée [1] accenna d'aver pur fuso il serpentino di Favaro da me ora per la prima volta analizzato, e di aver ottenuto dei cristalli di peridoto misti ad una maggior quantità di cristalli di enstatite. Ripetei queste ricerche, e fondendo senza alcuna aggiunta di magnesia del serpentino di Favaro in un crogiuolo di platino ad una temperatura molto elevata, ottenni una massa fusa perfettamente cristallina e che superiormente era formata da prismi rettangolari schiacciati caratteristici del peridoto, quali non di rado si osservano nelle scorie dei forni d'affinazione della ghisa.— Questi cristalli ingranditi circa dieci volte sono fedelmente rappresentati nella figura 9.

Fondendo il serpentino di Verrayes ottenni parimente una massa costituita superficialmente di cristalli di peridoto ed internamente di enstatite. Sezioni sottili della parte interna di questo serpentino fuso sono disegnate nelle fig. 10 e 11 quali appaiono osservate nella luce polarizzata.

Riuscii pure ad ottenere direttamente l'enstatite fondendo insieme silice e magnesia, senza bisogno di ricorrere come fondente a cloruro di magnesio, come venne fatto da Hautefeuille. Si ottiene così assai facilmente una massa cristallina, disseminata da cristalliti di enstatite raggruppati sotto forma dendritica (fig. 12).— L'analisi di questi cristalli fece conoscere ch'essi avevano la composizione seguente, assai vicina a quella del bisilicato magnesiaco puro.

		$MgSiO_3$
Silice	59,65	60
Magnesia	41,50	40
	101,15	100

[1] *Expériences synthétiques relatives aux météorites.* Comptes rend. de l'Ac. des Sciences T. LXII (1866) pag. 660.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tavola I.

Fig. 1. Sezione sottile del serpentino di Verrayes. Grandezza naturale. Numero 107 della mia collezione di tagli delle roccie del Piemonte.

» 2. Altra sezione sottile della roccia precedente. Grandezza naturale. Numero 91 della mia collezione.

Tavola II.

» 3. Sezione sottile del serpentino di Corio. Grandezza naturale. Numero 22 della mia collezione.

» 4. Sezione sottile del serpentino di Favaro (Biella). Grandezza naturale. Numero 105 della mia collezione.

Tavola III.

» 5. Cristallo di magnetite nel serpentino di Verrayes. Ingrandimento 140.

» 6. Lo stesso cristallo della figura precedente, osservato nella luce ordinaria dopo il trattamento con acido cloridrico.

» 7. Sezione del serpentino di Verrayes contenente due ammassi di magnetite, in uno dei quali si trova inchiusa una sostanza cristallizzata in prismi trimetrici identici a quelli delle due figure precedenti; nell' altro una materia in granuli di forma irregolare che si decompone facilmente coll'acido cloridrico. Ingrandimento 140. Nicol a 45°.

» 8. Sezione del serpentino di Verrayes in cui si osservano cristalli di magnetite circondati da aureola di idrato ferrico.

Tavola IV.

» 9. Cristalli di peridoto ottenuti per la fusione del serpentino di Favaro; ingranditi dieci volte.

» 10 e 11. Sezione del serpentino di Verrayes fuso e convertito in un ammasso di cristalli di enstatite. Ingrandimento 140. Nicol a 90°.

» 12. Cristalliti di enstatite artificiale. Ingrandimento 140. Luce ordinaria.

Fig. 1

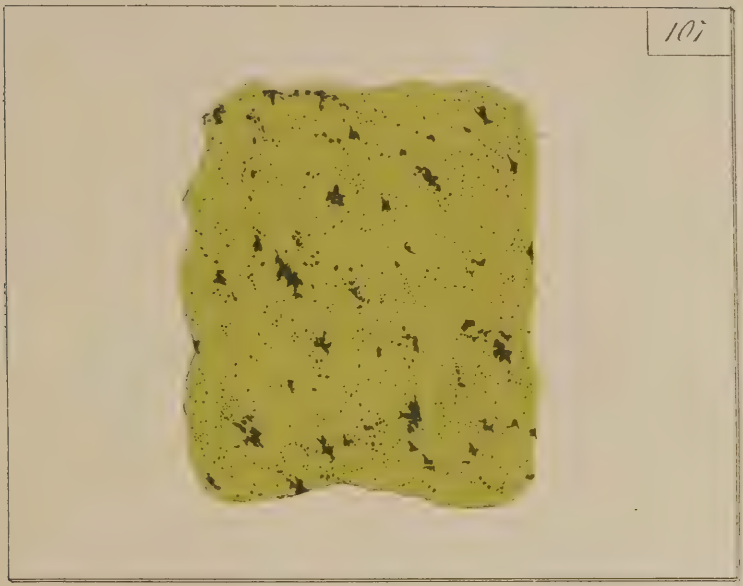


Fig. 2

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Atti R. Accad. dei Lincei - Serie III, Vol. 2° *Memorie della Classe di Scienze fisiche ecc*

Fig. 3.

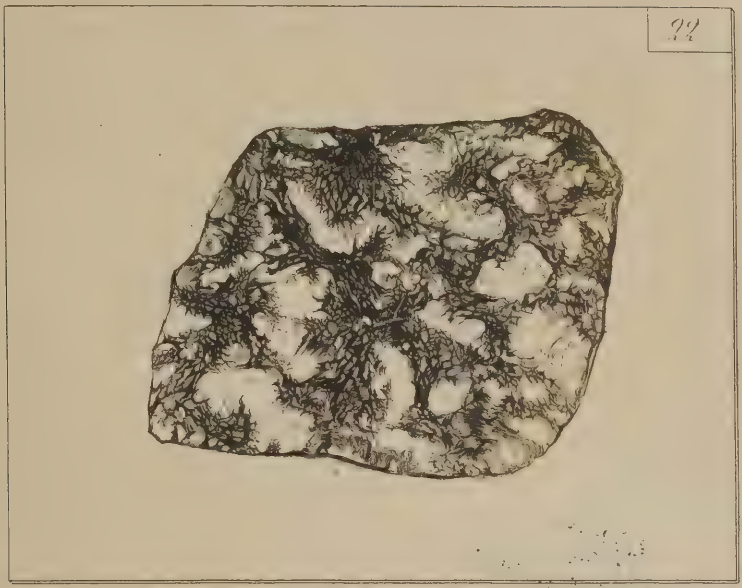


Fig. 4.

Fig. 5

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

Torino, Lit. F.lli Doyen

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

Atti R. Accad. dei Lincei - Serie III, Vol. 2.° Memorie della Classe di Scienze fisiche ecc.

Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

Torino, Lit. F.lli Doyen

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

Sopra un nuovo Sirenio fossile scoperto nelle colline di Brà in Piemonte.

Memoria del barone ACHILLE DE ZIGNO

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia

nella seduta del 2 giugno 1878.

Dopo la bella Memoria del dott. G. D. Brunò, stampata nel 1839 ed in cui descrive e figura varie ossa fossili di un talassoterio, scoperte nelle colline presso Montiglio nel Monferrato (1), trascorsero circa trent'anni, senza che più si facesse menzione di ossa fossili di Sirenî trovati in Italia; ed è soltanto dopo il 1868, che nelle Memorie del Suess (2) e del Bayan (3) sui terreni terziarî del Vicentino, veggiamo citati per incidenza dei frammenti di coste di *Halitherium*, come provenienti dai terreni eocenici e miocenici di quella regione.

Altri frammenti si rinvennero di poi, anche nelle arenarie miocene delle colline poste al sud della Follina, nel Trivigiano. Qualche anno dopo comparve la Memoria dell'illustre prof. Capellini (4) nella quale, descrivendo un magnifico teschio trovato nel terreno pliocene di Riosto, nel territorio bolognese, e porzione d'altro teschio proveniente dallo stesso terreno, dei contorni di Siena, pone in chiara luce la loro appartenenza a due specie diverse, in cui ravvisò il tipo di un nuovo genere di Sirenio che denominò *Felsinotherium*, dimostrando in pari tempo come esso rappresentasse allo stato fossile un tipo halicoreforme affine al Dugongo dell'epoca attuale. A questo tipo egli pur anco riferisce l'*Halitherium Serresii* di Gervais delle sabbie plioceniche di Montpellier ed il Sirenio di Montiglio dal Bruno denominato *Cheirotherium subapenninum* e con molta ragione comprende queste due specie nel suo genere *Felsinotherium*.

All'incirca in quel torno, l'arenaria miocena del Bellunese mi svelava l'esistenza di un altro Sirenio, che descrissi sotto il nome di *Halitherium Bellunense* (5), e contemporaneamente si scoprivano, nei terreni eoceni e mioceni del Veronese e del Vicentino, parecchi teschî e moltissime vertebre e coste appartenenti ad altre specie di quest'ultimo genere.

(1) Bruno G. D., *Illustrazione di un nuovo Cetaceo fossile.* Mem. R. Acad. Sc. Torino, ser. 2ª vol. I pag. 143.

(2) Suess E., *Sur les dépôt tert. du Vicentin.* Atti Soc. Sc. Nat. Milano, vol. XI pag. 643.

(3) Bayan F., *Sur les ter. tert. de la Vénétie.* Bull. Soc. Geol. Fr. ser. 2ª

(4) Capellini G., *Sul Felsinoterio* ecc. Bologna, 1872.

(5) Zigno, *Sirenii fossili del Veneto,* nelle Mem. R. Istituto veneto di sc. lett. ed arti, vol. XVIII. Venezia, 1875.

Sul monte Scuffonaro presso Lonigo nel Vicentino, negli strati calcari a *Leoipedina Tallavignesii* Cotteau, si trovò quella bella serie di vertebre e di costole che si conserva nel R. Museo di Fisica e Storia naturale in Firenze e di cui tenne parola il prof. Gervais nella sua Memoria sui mammiferi fossili dell'Italia (1). Recentemente il ch. prof. Cesare d'Ancona, nel curare l'estrazione di queste ossa dalla massa calcare, fece una importantissima scoperta, avendo potuto imbattersi nelle ossa del bacino; e dal confronto dei modelli (di cui mi fece dono cortese) colle ossa della pelvi dell'*Halitherium Schinzii* figurate da Kaup e da Gervais, è agevole riconoscere quanto siano fra loro diverse.

È pure in istrati appartenenti allo stesso orizzonte geologico, ch'io trovai sul monte Zuello di Grumolo presso Roncà nel Veronese, moltissime ossa e parecchi cranî di *Halitherium*, mercè i quali riconobbi l'esistenza di tre nuove specie di questo genere, che descrissi nella mia Memoria sui Sirenî fossili trovati nel Veneto (2).

Finalmente nel dicembre del 1876, il prof. Federico Craveri scopriva nelle colline delle vicinanze di Brà in Piemonte, un ammasso di ossa ridotte in frantumi, che sottopose all'esame dell'illustre prof. B. Gastaldi, il quale con lungo e paziente lavoro giunse a trovare il posto di cadaun frammento ed a ricostituire per tal modo un bellissimo cranio, che molto giustamente considerò appartenere ad un Sirenio affine all'*Halitherium Serresii* del Gervais. Essendomi recentemente occupato con qualche amore dei Sirenii fossili, il sullodato prof. Gastaldi volle cortesemente inviare a me questo splendido esemplare, invitandomi ad esternare intorno ad esso la mia opinione ed a pubblicare que' risultamenti che fossero scaturiti da un accurato studio di questo fossile rimarchevole.

Corrispondendo al gradito incarico, io mi faccio a porgere la descrizione e la figura del Sirenio di Brà, notando i caratteri che svelano il tipo generico cui appartiene e quelli che m'indussero a ritenerlo distinto dalle specie di questo genere finor conosciute.

I resti trovati a Brà consistono in una costa ed in un cranio mancante della mandibola.

Queste ossa si trovarono in una collina, poco lungi dalla città di Brà, mentre si lavorava ad una strada percorrente il pendio di un vigneto appartenente alla nobile famiglia Balbi di Serralunga. In quanto alla composizione geologica di quella collina ed all'orizzonte in cui furono trovati questi resti, io mi attengo alle indicazioni che mi furono gentilmente somministrate dal prof. Gastaldi intorno ai terreni terziarî e quaternarî di quella regione.

Ivi le marne e le argille del terreno miocenico superiore, sono ricoperte da marne e da argille azzurrognole dell'epoca pliocenica, sulle quali si adagiano delle sabbie gialle contenenti conchiglie marine, spettanti alla stessa epoca.

A queste *sabbie*, sopraincombe direttamente, senza soluzione di continuità, uno strato ghiaioso, ricco di sesquiossido di ferro e di ossidrato di manganese, che il

(1) Gervais, *Coup d'oeil sur les Mammifères fossiles de l'Italie*, nel *Journal de Zoologie*, tom. I pag. 225. Paris, 1872.

(2) Zigno, Mem. R. Istituto veneto, vol. XVIII. Venezia, 1875.

prof. Gastaldi ebbe già a distinguere col nome di *strato delle alluvioni plioceniche*, e nel quale altrove si scoperse una rilevante quantità di ossa di pachidermi e di ruminanti. Superiormente questa serie di strati è ricoperta dai depositi dell'epoca quaternaria.

Secondo quanto riferisce il prof. Craveri, il vigneto ove furono scavate le ossa del Sirenio di cui ci occupiamo è collocato sull'orizzonte delle sabbie marine plioceniche, soggiacenti allo strato ghiaioso sopra accennato, ed il prof. Gastaldi ritiene potersi ragionevolmente conchiudere che il teschio in discorso provenga dai più recenti depositi del pliocene.

Io divido intieramente questa opinione e sono d'avviso che il Sirenio di Brà abbia vissuto nel grande golfo del Po, verso il finire dell'epoca pliocenica, durante la quale pur vissero il *Cheirotherium subapenninum* di Bruno, trovato a Montiglio, l'*Halitherium Serresii* di Gervais, delle sabbie di Montpellier, ed i Felsinoterî del prof. Capellini; forme tutte che appartengono allo stesso tipo generico; tipo che io ritengo proprio dell'epoca pliocenica ed al quale riferisco il Sirenio di Brà, che mentre presenta tutti i caratteri del genere fondato dal Capellini, svela però alcune differenze che lo distinguono dalle altre specie di questo genere.

Ed in vero, avendo istituito accurati confronti coi caratteri che presentano i cranî del *Felsinotherium Foresti* Cap., del *Felsinotherium Gervaisii* Cap., del *Felsinotherium Serresii* Gerv. e del *Felsinotherium subapenninum* (Bruno) Cap., ho potuto convincermi che il cranio di Brà spetta ad una specie nuova, di cui presento la descrizione e le figure segnalandone principalmente i caratteri differenziali ed intitolando la specie all'illustre professore B. Gastaldi, le cui molteplici ed importanti pubblicazioni, tanto giovarono alla miglior conoscenza della geologia e paleontologia dell'Italia ed alla cui profonda dottrina anatomica dobbiamo la meravigliosa ricostituzione del bellissimo teschio di Brà.

Felsinotherium Gastaldi Zigno

Tav. I-VI.

Il cranio trovato nelle colline di Brà presenta chiaramente nella sua forma generale il tipo halicoreforme che distingue il genere fondato dal commendatore Capellini, e s'avvicina di molto alla specie che denominò *Felsinotherium Foresti*. Se non che esaminando minutamente la forma e le relative dimensioni delle varie ossa che il compongono, e raffrontandole con quelle degli altri cranî dei Felsinoterî che conosciamo, si rilevano delle sensibili differenze, che non si possono attribuire nè alla diversa età degli individui, nè ad effetti prodotti dalla fossilizzazione.

L'osteologia dei Sirenî, sì fossili che viventi, avendo formato scopo agli studî de'più illustri zoologi del secolo presente, io non mi soffermerò a descrivere tutte le ossa del cranio, limitandomi a notarne le diverse dimensioni, ed a porgere la descrizione di quelle parti soltanto, in cui ravvisai caratteri sufficienti ad istabilire, come la specie di Brà sia diversa dalle altre.

Cranio — La lunghezza del cranio, misurata conducendo una retta dalla superficie articolare dei condili occipitali alla estremità degli incisivi, raggiunge i sessantadue centimetri e dalla cresta occipitale alle apofisi anteriori dei frontali risulta di centimetri ventotto.

La larghezza, presa nel punto del maggior diametro cioè a traverso le apofisi zigomatiche temporali, è di trentun centimetri, corrispondendo così precisamente alla metà della lunghezza del cranio; mentre nel *Felsinotherium Foresti* Cap. la lunghezza del cranio supera di dieci centimetri il doppio della sua maggiore larghezza.

L'altezza (esclusa la mandibola, che manca nel cranio di Brà) misurata all'occipite, riesce di centimetri diecinove, e presa conducendo una verticale dal piano sincipitale alla estremità delle apofisi pterigoidee, giunge ai ventitre centimetri.

Queste misure che accennano a dimensioni maggiori di quelle dei cranî di tutte le altre specie di questo genere, dimostrano in pari tempo come nella specie di Brà tutta quella parte del cranio che sta fra l'occipite e le orbite sia più lateralmente espansa e rotondata, in causa della curva assai sporgente delle apofisi zigomatiche temporali e della maggiore divaricazione delle apofisi posteriori delle ossa malari. E questo è uno dei principali caratteri che distinguono la nostra specie dalle altre.

Occipitale — L'occipitale superiore o porzione squammosa si compone di una placca robusta di forma pentagonale schiacciata, il cui diametro trasversale, ove è più largo, misura tredici centimetri, ed il verticale dieci. Esso si distingue da quello delle altre specie per le sue protuberanze ossee assai marcate. Nel mezzo è percorso verticalmente da una costa a guisa di carena e sotto alla cresta molto sporgente, con cui si congiunge al parietale, ha due grosse protuberanze divergenti con curva obliqua verso i lati esterni. Fra queste e la carena mediana vi ha una profonda infossatura per parte, di forma triangolare. La vertebra occipitale combacia perfettamente colla porzione squammosa ed è più larga e più massiccia che nel *Felsinotherium Foresti* Cap. Egualmente più robusto è il basi-occipitale che si divide, come negli altri Sirenî, in tre rami, dei quali i due posteriori sono più brevi e divergono per congiungersi agli ex-occipitali, cadauno formando la base di uno dei condili occipitali. Questi ultimi hanno la superficie articolare molto convessa e di forma ampiamente obovata, la cui lunghezza è di nove centimetri ed il diametro nella porzione più espansa è di cinque centimetri. La forma del basi-occipitale e dei condili occipitali della specie di Brà s'approssima piuttosto a quella che si riscontra nei Lamantini che a quella che si osserva nel Dugongo e negli altri Felsinoterî. Il foro occipitale è grande e di forma trasversalmente ovale rotondata. Il suo diametro verticale è di cinque centimetri ed il trasversale di sei. La forma di questo foro è affatto diversa da quella che presenta il foro occipitale nel Dugongo, nei Lamantini, negli Haliterî e nel *Felsinotherium Foresti* Cap., nei quali il detto foro è cordiforme coll'estremità appuntata rivolta in alto.

Parietale — Come in tutti i Sirenî fossili che ho potuto osservare, il parietale è unico ed anchilosato coll' occipitale superiore, formando ivi una cresta rilevata molto sporgente oltre il piano del parietale; cresta che non si riscontra nei cranî del *Felsinotherium subapenninum* Bruno, e del *Felsinotherium Foresti* Cap. La lunghezza del parietale dalla cresta occipitale al centro della sutura che lo

congiunge ai frontali, è di otto centimetri e la sua larghezza nel punto ove si unisce all'occipitale superiore, misura undici centimetri. Sottili e ben marcate sono le creste temporo-parietali, che limitano lateralmente il piano superiore del parietale, e quest'ultimo va lentamente stringendosi verso il punto di congiunzione coi frontali, ove la sua larghezza si riduce a sette centimetri.

La sua unione coi frontali si opera col mezzo di una sutura curvilinea, carattere comune a tutti i Felsinoterî, mentre negli Haliterî questa sutura è di forma sagittale.

Frontali — La lunghezza dei frontali, dal punto mediano della sutura che li congiunge al parietale alla estremità delle loro apofisi sopraorbitali, giunge ai venti centimetri. Queste apofisi sono assai robuste, più arcuate di quelle del *Felsinotherium Foresti*, ma assai meno di quelle del *Felsinotherium Gervaisii*, ed hanno i loro angoli più rotondati. Fra questi angoli la loro larghezza nel senso antero-posteriore è di sei centimetri.

Temporali — I temporali scendono lateralmente dal margine superiore del parietale, con quello stesso andamento che si osserva negli altri Felsinoterî, ad eccezione del *Felsinotherium Foresti* Cap., in cui hanno una direzione più verticale. Sono poi affatto diversi da quelli degli Haliterî, in cui la porzione squammosa, poco sotto le creste temporo-parietali, palesa una convessità ragguardevole, che rigonfia in quel punto ambo i lati del cranio. Convessità che non si riscontra nei Felsinoterî e la cui mancanza costituisce un carattere importantissimo da aggiungersi agli altri che distinguono questo genere. Le creste temporo-parietali, sebbene abbiano pure lo stesso andamento di quelle delle altre specie di questo genere, sono però nella nostra specie più marcate e salienti, sporgendo ben cinque millimetri sopra il piano del parietale.

Apofisi zigomatiche temporali — Queste apofisi paragonate con quelle degli Haliterî, del Dugongo, dei Lamantini, non che degli altri Felsinoterî, ci presentano delle marcatissime differenze, che chiariscono maggiormente come la specie di Brà non possa riferirsi ad alcuna delle conosciute. La loro lunghezza seguendone la curva esterna è di centimetri diecinove nell'apofisi destra, e di centimetri venti nell'apofisi sinistra, differenza che si osserva pure negli Haliterî. Il loro diametro in senso verticale, nel punto ove è maggiore la loro altezza, risulta di centimetri otto e mezzo. Esse rappresentano la forma di un'ala rovesciata, o di una grossa e curva falce col taglio rivolto in alto e sono molto distaccate dai temporali; dalle cui creste al margine dell'estremità posteriore delle dette apofisi corre una distanza di sette centimetri, che procedendo allo innanzi, si fa sempre maggiore e giunge fino ai dieci; indi decresce verso l'estremità anteriore, per cui le apofisi zigomatiche temporali colla loro divaricazione descrivono ai lati del cranio un'ampia curva colla convessità rivolta all'infuori. All'incontro nel *Felsinotherium Foresti* Cap., le apofisi zigomatiche temporali non presentano questa arcuazione, ma corrono quasi parallele ai lati del cranio mantenendosi in tutta la loro lunghezza ad una distanza di cinque centimetri nel lato sinistro e di sei nel lato destro. Nella nostra specie piegano alquanto all'indentro colla loro estremità posteriore rotondata, poscia si allargano rapidamente in senso verticale, sporgendo però assai più col margine superiore assottigliato, che si espande da prima considerevolmente in altezza, e poi scende verso l'estremità anteriore dell'apofisi, descrivendo una curva colla concavità rivolta in alto, per modo

che mentre l'altezza al punto della maggiore sporgenza verticale misura, come dicemmo, otto centimetri e mezzo, alla distanza di quattro centimetri dall'apice anteriore dell'apofisi si riduce a soli trentacinque millimetri. All'incontro il margine inferiore ha in principio tre centimetri di grossezza, e poscia procedendo verso l'estremità anteriore, va gradatamente stringendosi fino ad avere quindici soli millimetri di diametro trasversale. Esso descrive una curva continua colla convessità rivolta in basso, ed ha la superficie irregolarmente appianata, specialmente ove l'apofisi poggia sul giugale.

Malare — Il malare o giugale, che colla sua parte posteriore acuminata sorregge l'apofisi zigomatica temporale per un tratto di dieci centimetri, si espande poscia all'ingiù in senso verticale assottigliandosi verso il margine inferiore, mentre col suo margine superiore, molto ingrossato, forma la placca suborbitale, che si congiunge alla piattaforma che dal mascellare si estende orizzontalmente all'infuori e fa protendere il piano inferiore dell'orbita ben due centimetri oltre il tetto. La forma del malare, nella nostra specie, è più svelta di quella dei malari del *Felsinotherium Foresti* e *Felsinotherium Serresii.* Inoltre il margine superiore è più rotondato e l'inferiore descrive una curva semicircolare meglio definita; anche la divaricazione delle estremità posteriori dei malari è maggiore, superando di dieci centimetri quella del *Felsinotherium Foresti.*

Mascellare — Il mascellare superiore è più ampio e massiccio di quello del *Felsinotherium Foresti* e coi suoi robusti processi nasali e malari circoscrive i fori post-orbitali. Nel nostro esemplare è fornito di soli tre molari per parte, dei quali manca nel lato destro il terz'ultimo di cui si scorge soltanto l'alveolo colle cavità lasciate dalle radici.

Orbita — L'orbita nel Felsinoterio di Brà è quasi perfettamente rotonda e presenta una forma più regolare o meglio circoscritta di quella delle orbite del *Felsinotherium Foresti* e del *Felsinotherium Serresii.* Il suo diametro interno è di sette centimetri e l'esterno di centimetri dieci.

Il foro collocato innanzi alle orbite è circoscritto dalla branca orbitale del malare, dalla branca ascendente del mascellare e da quella che negli intermascellari fiancheggia l'apertura nasale.

Questo foro, che nel *Felsinotherium* di Riosto è rotondo, e rivolto obliquamente all'ingiù, nella nostra specie è triangolare cogli angoli rotondati e rivolto in alto. Ciò avviene per la sporgenza del suo margine inferiore, che si avanza per trentacinque millimetri oltre il margine superiore, mentre nel *Felsinotherium Foresti* è quest'ultimo che sporge trentadue millimetri più innanzi del margine inferiore.

Ossa intermascellari — La porzione sinfisaria rostriforme di queste ossa ha una lunghezza di ventun centimetri, che supera d'un solo centimetro quella del rostro del *Felsinotherium Foresti.* Egualmente il maggior diametro verticale, misurato subito dopo il termine dell'apertura nasale, risulta di undici centimetri, mentre nel *Felsinotherium* di Riosto è di dieci.

Però la inclinazione del rostro è assai minore, presentando essa un angolo molto più ottuso e che supera di undici gradi l'angolo d'inclinazione del *Felsinotherium Foresti.* Il rostro della specie di Brà è pure rotondato superiormente ed appianato nella

faccia inferiore, ove la larghezza maggiore, che si palesa subito dopo la barra che sta dinanzi ai molari, misura undici centimetri in senso trasversale, indi gradatamente si fa più angusta, finchè a quattro centimetri di distanza dall' estremità si riduce ad otto centimetri: poi nuovamente si espande ed all'apice giunge a dieci centimetri di diametro trasversale. Questa espansione del rostro verso l'apice non si osserva nella specie di Riosto. Le branche posteriori, o fronto-mascellari degli intermascellari che vanno a congiungersi ai frontali e formano il contorno dell' apertura nasale sono robuste e superiormente rotondate e si curvano tanto all'indentro, quanto all'insù per cui di profilo il cranio si mostra in quella parte leggermente incavato. L'apertura nasale è ellittica, ma sul dinanzi si fa prima alquanto più angusta e poscia termina rotondata. Per cui l'estremità anteriore ha la forma di quella del *Felsinotherium Serresii* e la posteriore quella del *Felsinotherium Foresti*.

Incisivi o zanne — Manca il nostro esemplare dell'incisivo sinistro di cui si scorge solo l'alveolo, del quale però non puossi misurare la profondità, essendovi rimasta per entro porzione del dente. La zanna destra sporge sette centimetri dall'alveolo. Il suo diametro verticale è di cinquantacinque millimetri e lo spessore in senso trasversale si limita a trentacinque millimetri. La circonferenza, presa al punto ove la zanna esce dall'alveolo, misura sedici centimetri. Queste proporzioni non sono gran fatto diverse da quelle che presentano (bensì su scala minore) le zanne dei Felsinoterî di Riosto e di Montpellier.

Dalla direzione della zanna si scorge che tutte e due le zanne, uscendo dall'alveolo si volgeano all'infuori divergendo l'una dall'altra.

Ed in vero, mentre presso gli alveoli non sono fra loro discoste che due centimetri, gli apici delle zanne risultano distanti l'uno dall'altro ben otto centimetri. Le zanne inoltre nella nostra specie si curvano all'ingiù, mostrando con ciò una direzione diversa da quelle del *Felsinotherium Foresti* che, secondo il Capellini, hanno la concavità rivolta in alto come si osserva in grande nelle zanne dell' elefante. L'estremità della zanna è molto schiacciata lateralmente e mostra nel lato esterno di essere logorata verso l'apice, per un tratto di cinque centimetri, onde ne risulta un piano obliquo, che va a congiungersi anteriormente col piano convesso del lato interno, formando così un contorno tagliente che termina la zanna, la cui estremità per tal modo presenta nel profilo del lato esterno una forma triangolare lanceolata coll'apice rotondato.

La porzione logorata è perfettamente levigata, come se avesse subìto un continuo strofinamento contro un'altra zanna od altro oggetto duro, e presenta l' aspetto di quanto si osserva nelle zanne superiori dell' ippopotamo, le quali incontrandosi col lato interno delle zanne uscenti dalla mandibola si logorano nel loro lato esterno. Ma quanto sappiamo dell'osteologia dei Sirenî, non permette di ammettere la possibile esistenza di zanne inferiori nel sirenio di Brà; e quindi converrà ricorrere a qualche altra cagione per ispiegare questo singolare logoramento del lato esterno delle zanne, che forse è dovuto al modo con cui l'animale adoperava gli incisivi, sia per istaccare le piante marine dalle roccie, sia per attaccarsi ed arrampicarsi sugli scogli.

Molari — Procedendo all'indietro verso i molari superiori il piano inferiore del rostro rapidamente stringendosi va a formare una barra lunga circa cinque centimetri

e larga sei, rotondata ai lati, ed alquanto schiacciata nel piano che va a congiungersi col palato. In mezzo ad essa corre un solco longitudinale largo dodici millimetri, percorso nel mezzo da una sottile costa rilevata a guisa di carena. Nel *Felsinotherium Foresti* e nel *Felsinotherium Serresii* i bordi del solco sono molto rilevati e formati dalla continuazione dei bordi inferiori degli intermascellari; nella specie di Brà questi bordi sono piani e punto rilevati. Dopo questa barra s'incontrano i molari, che come già accennai, sono tre nel lato sinistro e due nel destro, scorgendosi solo l'alveolo del molare mancante. I molari del lato sinistro essendo i meglio conservati, ci limiteremo alla descrizione di questi. I tre molari occupano nel senso antero-posteriore una lunghezza di settantacinque millimetri. Il primo molare ha la corona assai logorata di forma subquadrata, cogli angoli rotondati. Lo smalto ha uno spessore di un millimetro, e presenta due pieghe nel lato interno ed una nel lato esterno, che accennano alle colline in cui era partita la corona. Il piano superiore di quest'ultima misura in senso trasversale ventun millimetri e nel senso antero-posteriore, millimetri venti. Il secondo e penultimo molare ha pure la corona di forma sub-quadrata cogli angoli rotondati, ma coi lati più eguali misurando tanto dall'innanzi all'indietro, che dal di dentro al di fuori, millimetri ventiquattro. Essa è molto logorata e lo smalto in alcuni punti dei lati varia nel diametro da un millimetro e mezzo ai due millimetri. Mostra una forte piega che si volge obliquamente allo innanzi alla metà del lato esteriore ed un' altra più piccola, posta sullo stesso lato, è collocata alla metà dello spazio che corre fra la prima ed il termine anteriore della corona. Il terzo ed ultimo molare è pure assai logoro. La corona è di forma oblunga, schiacciata ove tocca il molare precedente, ed ivi rotondata nei lati, poscia si prolunga con sinuoso contorno e va a formare il lato posteriore che è perfettamente rotondato. Essa è divisa trasversalmente nel mezzo da due straterelli flessuosi di smalto, che indicano il limite delle due principali colline in cui partivasi la corona. Delle colline che direm secondarie troviamo lieve traccia nelle pieghe dello smalto delle quali, due si scorgono nel lato interno, e due presso alla metà della linea mediana del lato esterno. Presso il margine esterno della parte anteriore si scorge pure il residuo di un tubercolo e dallo stesso lato nella parte posteriore due isolette formate dallo smalto accennano a due altri tubercoli. La corona nel senso antero-posteriore è lunga trenta millimetri e la sua maggiore larghezza non oltrepassa i ventitre millimetri. Nella parte posteriore si riduce a millimetri ventidue, prima di stringersi e formare la curva semicircolare che rotondeggia il lato posteriore della corona.

Palato — La larghezza dello spazio costituente la regione palatina fiancheggiata nei due lati dai molari, misura quarantadue millimetri: sarebbe quindi eguale a quella del Felsinoterio di Riosto, però la smarginatura posteriore del palato è più lunga e si allarga di più nella specie di Brà.

Apofisi pterigoidee — Queste apofisi, un poco meno massiccie di quelle del *Felsinotherium Foresti,* sono molto più divaricate. Esse sono perfettamente unite e formano tutt'uno col palatino e la placca ptegoide dello alisfenoide, e dietro questi, la base del cranio si contrae, lasciando una larga apertura dall'una e dall'altra parte del basi-occipitale, fra l' alisfenoide dinanzi e l'ex-occipitale di dietro, aperture in parte occupate dal timpanico e dal periotico.

Apparato dell'udito — L'apparato dell'udito paragonato con quello del Felsinoterio di Riosto, così esattamente descritto dal prof. Capellini, non mi è sembrato presentare alcuna sensibile differenza come era da prevedersi, trattandosi di una specie dello stesso genere.

Costa — La lunghezza della costa trovata a Brà, misurata seguendo l'andamento della sua curva giunge a sessantaquattro centimetri. La sua circonferenza, presa alla metà (ove è più grossa e rotondata) misura quattordici centimetri ed alla estremità inferiore si riduce a dieci. Nel terzo superiore è molto schiacciata e nel punto ove è collocato il tubercolo si espande considerevolmente in altezza. Ivi essa ha una circonferenza di diciasette centimetri ed un diametro verticale di sette, compreso il tubercolo. Il diametro trasversale nel lato superiore è di due centimetri, ma poscia diminuisce considerevolmente stringendosi verso il bordo inferiore che riesce quasi tagliente.

Il capo si espande in una superficie articolare doppia che riesce cordiforme e dista sei centimetri dal tubercolo la cui superficie articolare è rotonda e molto convessa. Sul dorso della costa, a sette centimetri di distanza dall'estremità del tubercolo, si scorge una piccola apofisi e procedendo due centimetri più innanzi se ne incontra una assai maggiore ed assottigliata, che sporge a guisa di cresta per cinque millimetri di altezza oltre il contorno della costa e si piega all'indietro. Dopo questa prominenza, la costa comincia a farsi più grossa, rotondandosi nella faccia anteriore e superiore. Nel terzo inferiore va attenuandosi verso l'estremità, perdendo della sua rotondità e ciò a cagione di una depressione longitudinale che a guisa di doccia appianata percorre la faccia posteriore assottigliandone considerevolmente il margine esterno.

L'estremità inferiore della costa lievemente si dilata verso l'apice ove termina tronca e presenta nel senso della sua maggior larghezza una sezione di forma ovale allungata molto schiacciata ai lati. Il modo con cui finisce senza rotondarsi ed assottigliarsi all'apice, palesa chiaramente che essa appartiene alla serie delle coste sternali e tenendo conto delle sue dimensioni, credo di non andare errato classificandola per la quarta costa sternale del lato destro.

Le impressioni longitudinali che si osservano sulla faccia posteriore, le protuberanze che ho accennato, la forma particolare del capo e del tubercolo, il grande schiacciamento nel senso antero-posteriore della porzione più vicina alla colonna vertebrale, distinguono ricisamente questa costa da quelle degli altri Sirenî sì fossili, che viventi.

Dal fin qui esposto oso lusingarmi che possa risultare dimostrato come il Felsinoterio di Brà ci porga caratteri sufficienti per ritenerlo diverso dalle altre specie di questo genere. E per vero, solo che si ponga mente alla sua maggiore larghezza nella metà posteriore del cranio, alla forma particolare ed alla grande arcuazione delle sue apofisi zigomatiche temporali, alla minore inclinazione del rostro, alla differente forma e direzione degli incisivi e dei fori collocati dinanzi alle orbite, nonchè alla forma pure diversa del foro e dei condili occipitali ed alle rilevanti protuberanze ossee dell'occipitale superiore, riuscirà facile convincersi che la specie di Brà non può riferirsi ad alcuna delle finor conosciute.

Atti della R. Accad.ª de Lincei Serie III. Vol. II.

G. B. Lago dis. Torino, Cromolit. V.ᵈᵃ Doyen O. G. Rapetti lit.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

G. B. Lago dis. Torino, Cromolit. F.lli Doyen O G. Rapelli lit.

Atti della R. Accad.ª de' Lincei Serie III. Vol. II. Memorie della Classe di Scienze Fisiche ecc.

G. B. Lago dis. Torino, Cromolit. F.lli Doyen O. G. Rapetti lit.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

G. B. Lago dis. Torino, Cromolit. F.lli Doyen. O. G. Rapetti Lit.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

Fig. 1.

Fig. 2.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 1.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

Sui rilevamenti geologici fatti nelle Alpi piemontesi durante la campagna del 1877.

Lettera del Socio B. GASTALDI al Presidente Q. SELLA

letta nella seduta del 2 giugno 1878.

Carissimo Amico

Torino 1 maggio 1878

Nel 1868 io terminava il rilevamento geologico delle tre valli di Lanzo ed aveva comunicazione dal prof. M. Baretti degli analoghi lavori che egli aveva fatto nella adiacente valle dell'Orco. Il complesso di quei lavori mi suggeriva l'opportunità di suddividere i terreni cristallini delle citate regioni in due grandi zone, quella del gneiss antico e quella delle *pietre-verdi*. Tale suddivisione ci servì di guida nei successivi nostri lavori sulle Alpi, ed oggidì che il professore M. Baretti ha spinto i suoi rilevamenti sino al massiccio del monte Bianco e che io coi miei lavori sono giunto sino ai limiti del massiccio gneissico del Mercantour, ben vedo che se non avessi proposta sin da dieci anni fa quella suddivisione, sarei ora condotto a proporla.

Gettando gli occhi su quella parte della carta geologica delle Alpi piemontesi già condotta a termine (1) si vedono spiccare tre massicci di gneiss antico, quello del Gran Paradiso, quello del Gran Cournour attorno ai quali si estende con grande regolarità la zona delle *pietre-verdi* ed in ultimo il massiccio gneissico del Mercantour. Lungo la base di questo massiccio, verso Piemonte, corre dal colle Pourriac a quello di Tenda una gran zona calcare ed un'altra zona, di minor larghezza di grè nummulitico.

Entro i limiti accennati quelle due zone erano già state rilevate geologicamente nel 1876 dal mio collaboratore professore Carlo Bruno e nello stesso anno io già aveva scoperto il prolungamento di quella stessa zona calcare nella valle Macra.

Nell'anno scorso fu còmpito mio percorrere in ogni senso quella zona a partire dal colle di Tenda sino a quello della Maddalena e dal colle della Scaletta sino a quello di Sautron in val Macra. Ebbi a compagni in quella perlustrazione, che durò oltre a quaranta giorni, il sig. Paolo De Ferrari ingegnere di miniera, il nostro amico sig. G. Michelotti ben noto per i suoi lavori sulla fauna miocenica del Piemonte ed il mio preparatore sig. L. Bottan. Lo scopo nostro era sopratutto quello di trovare fossili che ci permettessero di determinare l'età dei terreni componenti quella zona, la quale essendo in molta parte calcarea presentava serie difficoltà a motivo del numero già grande di varietà di calcare che si incontrano nelle Alpi.

(1) Essa comprende 25 fogli della carta topografica del Piemonte alla scala di 1:50000 riuniti in un rettangolo di $3^m,50$ circa di lato. (V. tav. II).

Ed a proposito non sarà superfluo che io dia qui un cenno sommario di quei calcari alpini e della posizione che essi occupano nelle varie vallate.

Nelle Alpi piemontesi abbiamo due orizzonti di calcari cristallini, quello del gneiss antico e quello della zona delle *pietre-verdi;* sono gli orizzonti dei marmi bianchi e dei bardigli.

Verso la Sesia ed il Ticino, a Roasio, a Sostegno, al monte Fenera, ad Arona ad Angera vi sono calcari che posano direttamente sul porfido. Questi calcari, vanno, a quanto pare, ascritti al trias, al lias, al giurassico e fors' anche al cretaceo.

Nei dintorni di Ivrea, di Lessolo, di Rivara, di Levone vi sono altri calcari alternanti con grauvacche, con scisti rasati, e con ftaniti che mi parvero e mi paiono di epoca paleozoica, ma nei quali non riuscimmo sinora a trovare tracce di organismo.

Nella valle di Aosta, oltre agli accennati calcari paleozoici di Montaldo-Dora e di Lessolo; oltre ai calcari cristallini del gneiss antico e della zona delle *pietre-verdi* abbiamo verso il piccolo s. Bernardo ed in correlazione col terreno antracitifero — come risulta dai rilevamenti del prof. Baretti — taluni lembi di calcare i quali, per la posizione che occupano, appartener devono a quella stessa zona che rilevammo in val Macra, in val Stura di Cuneo, in val Gesso, in val Vermenagna, ed in val Bormida di Millesimo.

La tav. II. che è una carta geologica delle Alpi piemontesi alla scala di 1: 100000 indicherà, meglio di quello che io possa fare colle parole, l'andamento di quella gran zona calcare che io cercava di scindere in sottozone e di classificarle cronologicamente.

La valle dell' Orco, le tre valli di Lanzo sono aperte nel gneiss antico e nella zona delle *pietre-verdi*, rocce nelle quali non si trovano che calcari più o meno cristallini: quelle valli d'altronde, essendo state con molta diligenza studiate, non è guari probabile che in esse venga a scoprirsi un calcare fossilifero. Non così per le valli della Riparia e del Chisone ove, direttamente sul serpentino e talvolta sul grè antracitifero, giaciono calcari fossiliferi.

Vengono, in seguito, le valli del Pellice, del Po e della Varaita; queste tre valli non essendo, al pari di quelle dell' Orco e di Lanzo, che profondi solchi aperti trasversalmente alle zone del gneiss antico e delle *pietre-verdi* non possono offrire calcari fossiliferi.

Troviamo in ultimo le valli della Macra, della Stura di Cuneo, del Gesso, della Vermenagna e del Tanaro che sono o trasversalmente tagliate o longitudinalmente percorse da quella lunga e relativamente stretta zona di calcari della quale ho parlato più sopra.

Ritorno ora ai calcari della Dora Riparia ossia del Chaberton che già erano stati riconosciuti fossiliferi e classificati dai geologi francesi nel lias. Questi calcari posano direttamente, come già ho detto, sulla serpentina, sull' eufotide o sopra il grè antracitifero ed io, giudicando dal fatto della diretta sovrapposizione di quei calcari alle rocce della zona delle *pietre-verdi,* edotto da lunga esperienza che in questa zona le rocce non sono fossilifere e che le stesse rocce antracitifere sul nostro versante non ci diedero mai reliquie di corpi organici, credetti che quei calcari dolomitici fossero strati del paleozoico antico e che convenisse abbassare al livello del siluriano anche gli strati antracitiferi.

La prima volta che io parlai della geologia delle Alpi Cozie (¹) io diceva: « Ammessa l'epoca remota delle rocce componenti la zona delle *pietre verdi*, facilmente si vedrà che lo stesso terreno antracitifero attraversato dalla galleria del Fréjus presso Modane deve essere di epoca anteriore al carbonifero ».

Sette anni di ulteriori studî e di esperienza mi convinsero ancora maggiormente che io aveva ragione nel ritenere di epoca ben remota le rocce componenti la zona delle *pietre-verdi*, ma par proprio deciso che io debba aver torto nel credere che l'antracite sia più antica del carbonifero. Che v'abbia dunque ad essere nelle nostre Alpi un *hiatus* comprendente il siluriano ed il devoniano?

Nel 1875 il nostro amico sig. G. Michelotti dietro mia preghiera si recava ad esplorare il Chaberton e vi raccoglieva alcuni fossili che io pubblicava nell'anno successivo (²).

Ho già detto che di que'calcari fossiliferi non trovai traccia nelle valli del Pellice, del Po e della Varaita ma che ne rilevai la presenza in valle Macra verso la sua parte culminante presso la frontiera francese ed io non dubito che quei calcari fossiliferi siano il prolungamento di quelli del Chaberton.

Ho esaminato quei calcari alla Ciapera, al colle Sautron, al colle delle Monache ed al colle della Scaletta e vidi che essi si estendono nella valle della Stura di Cuneo ed in quella del Gesso ove già era stata segnalata la presenza di un ammonite allo stato di ciottolo rotolato.

Mentre io lavorava in val Macra, il prof. C. Bruno mio collaboratore percorreva le valli della Vermenagna, del Gesso e della Stura di Cuneo e vi raccoglieva una serie di fossili che studiati parimenti dal Michelotti io pubblicava lo scorso anno (³).

Per tal modo io andava illudendomi e persisteva nella mia credenza che i calcari dolomitici formanti quella lunghissima zona, la quale ad intervalli ora corona le Alpi, ora corre lungo il thalweg, ora taglia i contrafforti di molte delle valli alpine ed apenniniche aperte tra Susa e Genova appartenessero al siluriano.

Dopo la pubblicazione dell'ultima mia Memoria sui fossili paleozoici delle Alpi e dell'Apennino io pregai l'egregio collega ed amico mio il professore Meneghini di esaminare i fossili in detta Memoria descritti. Egli volle aderire alla mia domanda e studiatili mi rispose che, a parer suo, quei fossili, anzichè paleozoici erano di epoca secondaria. Io non poteva non dare un gran peso alla opinione di un paleontologo di tanta e sì meritata fama e partii subito per le Alpi, col proposito di visitare tutte le località dalle quali provenivano i fossili descritti dal Michelotti e da noi ritenuti paleozoici. Percorremmo, come già ho detto più sopra, tutta la zona calcarea fossilifera, dal colle di Tenda a quello di Pourriac e dal colle della Scaletta alla Ciapera. Trovammo parecchi fossili, i più, mal conservati ed indeterminabili; fummo tuttavia colpiti al vedere l'*Encrinus entrocha* che scoprimmo, ben conservato, su alcuni massi

(¹) Lettera al sig. Enea Bignami pubblicata nel libro *Moncenisio e Fréjus* (Firenze, 1871).

(²) *Sui fossili del calcare dolomitico del Chaberton studiati da G. Michelotti.* Nota di B. Gastaldi (Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma, 1876).

(³) *Su alcuni fossili paleozoici delle Alpi marittime e dell'Apennino ligure studiati da G. Michelotti* (Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma, 1877).

staccatisi da strati affioranti al di sopra dell'antracite. Altri fossili raccolse il professore Bruno nelle sue escursioni. Il Michelotti radunò tutti i fossili da noi raccolti e li mandò al sig. professore Zittel di Monaco in Baviera il quale, per tratto di squisita cortesia, volle incaricarsi di studiarli interessando anche a tal proposito il professore Gümbel.

La presenza dell'antracite ben constatata alla Ciapera ed a Prariond in val Macra, nel vallone di Monfiej in valle Stura di Cuneo ed a Calizzano in valle Bormida di Millesimo; i risultati ottenuti dai sig. professori Zittel e Gümbel ci permisero di comporre il seguente quadro dei terreni stratificati che si incontrano nelle cinque valli della Macra, della Stura di Cuneo, del Gesso, della Vermenagna e della Bormida di Millesimo.

Paleozoico

Antracite non accompagnata da impronte: alla Ciapera ed a Prariond in val Macra; a Monfiej in valle Stura di Cuneo; a Calizzano in valle Bormida di Millesimo.

Triasico

Muschelkalk e Wettersteinkalk

Encrinus entrocha nel calcare soprastante all'antracite della Ciapera e di Prariond in val Macra e nel calcare del vallone di Roburent, valle Stura di Cuneo.

Gyroporella Gümbel (*Diplopora*) Beneck.

Gyroporella anulata Schaph.
» *debilis* Gümbell.
» *discita* »
» *multiserialis* »
» *aequalis* »

Villanova e Torre Mondovì.

Lias inferiore

Ammonites (arietites) vicinissimo alla specie *Spiratissimus Quensted: Belemnites* del gruppo dei Paxillosi. Bersezio, regione Colombaro, valle Stura di Cuneo.

Lias medio

Ammonites Kurrii Oppel: calcare grigio di Sambuco, valle Stura di Cuneo.

Cretaceo medio

Ammonites Rhotomagensis Lamk.: in ciottolo rotolato nella Grotta del bandito in val Gesso.

Nummulitico

Nummulites Brongniarti; N. Ramondi: ponte superiore presso Bersezio in valle Stura di Cuneo; Palanfré e colle di Tenda in valle Vermenagna.

Dal complesso di questo quadro risulta che sinora fra i fossili trovati nelle Alpi piemontesi non ve ne ha uno che accenni ad essere di epoca più remota del carbonifero.

La disillusione da me provata nella campagna geologica del 1877 fu certamente

amara essendo andate fallite le speranze che io aveva di scoprire nelle valli delle Alpi marittime qualche fossile che ponesse in sodo la esistenza del terreno siluriano. E non solo fu amara la disillusione ma volle altresì avere il suo lato comico. Dal mio collaboratore sig. C. Bruno erami stata indicata una località ove egli aveva raccolto alcuni polipai fossili ed io mi affrettai ad andarvi col mio amico G. Michelotti e col mio preparatore L. Bottan. Giunti sul luogo di buon' ora nel mattino deliberammo di dedicare alle ricerche tutte intiere le sei ore della giornata che ci rimanevano disponibili. Quella località porta il nome di Palanfré ed è posta in un vallone le cui acque discendono alla Vermenagna presso il paese di Vernante. Andandovi da questo paese avevamo da prima tagliato un gran banco di quarzite a struttura quasi di puddinga, che nei dintorni del paese viene utilizzata per macine; avevamo quindi tagliato una zona di calcare grigio e grigio scuro nel quale vedemmo che si erano fatte ricerche di antracite.

Man mano che procedevamo verso l' alto del vallone il calcare andava cangiando di tinta e diveniva più bianco senza però cangiare di struttura, dimodochè noi credevamo di camminare tuttavia sopra un calcare antico, di trovarci su terreno paleozoico. Non è facile stabilire delle suddivisioni in quella gran zona perchè i calcari che la costituiscono si rassomigliano l'un l'altro; la tinta loro variando dal nero intenso al bianco niveo, variando la struttura dalla cristallina alla compatta. Devo inoltre ricordare che lungo le valli della Stura di Cuneo, del Gesso e della Vermenagna corre una relativamente piccola zona nummulitica rappresentata da grè, da scisti marnosi scuri e da calcari. L'esistenza di questo terreno in quelle regioni è già accennato nelle Carte del Sismonda e del Pareto.

Giunti sul luogo ed iniziate le ricerche fummo fortunati a segno da trovar subito parecchi polipai ramosi, non uno però dei quali ci mostrasse quello che con tanto ardore cercavamo, i tavolati. Ebbimo la costanza di continuare le nostre ricerche per cinque ore e finalmente arrivammo a questa inattesa scoperta che cioè ci trovavamo sul terreno nummulitico. Se qualcuno ci avesse visti inginocchiati sul nudo calcare, colle mani poggiate sul suolo, colla testa inclinata e gli occhi intenti a contemplare que' piccoli fossili che a tenore della nostra aspettazione avrebbero dovuto essere *trilobiti, orthis* o *leptenee* ed erano nummuliti, si sarebbe accorto che noi non eravamo nel più felice momento della nostra vita.

Tutto ben sommato pare sufficientemente dimostrato che nelle Alpi nostre non si è ancora scoperto traccia di fossili al disotto dell' orizzonte antracitifero e che al di sopra di questo orizzonte si trova una serie di strati secondarî e terziarî a cominciare dal trias sino al nummulitico, al pliocenico, al quaternario.

Noterò ancora che probabilmente sul nostro versante vi sono due orizzonti di antracite. Infatti nella valle della Stura di Cuneo troviamo un sottile strato di calcescisto addossato all' eufotide e giacenti sul calcescisto banchi di scisto quarzoso cloritico che racchiudono l'antracite.

Nella valle Macra, per contro, tra le *pietre-verdi* e l' antracite è molto più potente la serie di rocce interposte ed in fatti alla Ciapera l'antracite è racchiusa in banchi calcarei da uno dei quali posto superiormente all' antracite provengono i detriti racchiudenti l' *Encrinus entrocha*.

Non ostante il prosaico ed il comico delle mie disillusioni io debbo andar soddisfatto di aver messo in rilievo, dopo due anni di penose ricerche, la esistenza, nelle più volte citate valli, del triasico, del liasico e del cretaceo.

Un altro risultato mi arreca non lieve soddisfazione ed è la scoperta di parecchi affioramenti di serpentina i quali collegano assieme il gran banco di *pietra-verde* che costituisce il Mon Viso col gran massiccio serpentinoso eufotico della Liguria occidentale. Per tal modo le *pietre-verdi* dell'Apennino si trovano così direttamente ed evidentemente unite a quelle delle Alpi che diviene irragionevole il volerle separare, il voler farne una cosa a parte. E ciò è tanto più vero in quanto che non sarebbe meno irragionevole il voler separare geologicamente le Alpi dall'Apennino.

Ciò premesso, anche a costo di fare soverchie ripetizioni, ecco il posto che occupano le *pietre-verdi* nelle Alpi marittime e nell'Apennino ligure.

Nella valle della Macra la serpentina è coperta da un banco di calcescisto che sottostà ad uno strato di calcare semicristallino. Viene quindi un gran banco di quarzite, che a sua volta, è coperto da un banco di calcare compatto e dolomitico racchiudente le antraciti della Ciapera; il tutto ricoperto poi dal muschelkalk, dal lias, dal cretaceo e dal nummulitico.

Nella valle della Stura di Cuneo (vallone di Monfiej presso Demonte) sull'eufotide e sul calcescisto che formano il monte Pergo giace una zona di scisti quarzoso-cloritici racchiudente scisti nerastri con antracite.

A Torre Mondovì la serpentina è coperta dal calcare triasico con *Gyroporella.*

Nella valle della Bormida di Aqui, a Spigno, nella valle dell'Erro la serpentina ed altre *pietre-verdi* sono coperte direttamente dalle marne, dalle arenarie e dai conglomerati del miocene inferiore (eocene superiore del sig. Mayer).

Altrove, come in valle Staffora nell'Apennino di Bobbio, la serpentina è coperta dai calcari alberesi, dalle argille scagliose, dal macigno, dai conglomerati a grandi massi.

In val Polcevera la serpentina è coperta da scisti marnosi nerastri a vene di calcare spatico bianco (eocenico), dal calcare e dalle argille scagliose.

La serpentina, in poche parole, ovunque si esamini e si studii, vuoi nelle Alpi marittime, vuoi nell'Apennino ligure si trova ricoperta da terreni stratificati e fossiliferi di ogni età, ed essa non ricopre che rocce cristalline di epoca più remota.

E generalizzando, si osserva nelle Alpi che là dove non affiorano che terreni cristallini la serpentina non è che raramente coperta o lo è solo da rocce della propria zona; là dove, come al Chaberton, alla Rougnousa ecc. affiorano i terreni antracitiferi ed i calcari dolomitici — qualunque possa essere la età loro — questi terreni ammantano, ricoprono, velano la serpentina; là ove, come nelle Alpi marittime, nella Liguria, nella Emilia, nella Toscana ai terreni antracitiferi, ai calcari dolomitici vengono ad aggiungersi terreni più recenti o quelli mancando, questi grandemente si estendono, la serpentina si riduce a sparsi e talvolta piccoli ed anche minimi affioramenti.

Nelle Alpi i monti di *pietra-verde* hanno forma di piramidi, di punte, di picchi; la stessa forma conservano que'monti nelle regioni apenniniche ove però di essi non appare che la estremità, essendo le falde e la base loro ricoperte, rivestite, velate da rocce che nella massima parte dei casi sono di gran lunga più recenti.

Nell'autunno scorso io mi recai a Villanova ed a Torre Mondovì per studiare la posizione che i calcari a *Gyroporella* occupano relativamente alla serpentina; feci quindi una escursione sin verso Savona onde vedere da vicino alcune rocce che affiorano nei dintorni di quella città.

I geologi che hanno studiato quel gruppo di monti nei quali i geografi pongono la separazione delle Alpi dall'Apennino, segnalarono fra Savona, il colle di Cadibona ed Altare un massiccio di protogino e di gneiss protoginico. Questo massiccio occupa una estesa regione poichè lo si incontra nella valle del Tanaro ed in quella della Bormida di Millesimo ove si estende pel colle di Mologna fin verso il Mediterraneo nei dintorni di Finale; lo si ritrova a Montenotte ed è tagliato per lungo tratto dalla linea ferrata di Savona tra la stazione di s. Giuseppe e quella del Santuario.

Frequentemente incontrasi in quel massiccio una roccia formata di feldspato, di quarzo e di una sostanza verde che ha l'aspetto della clorite; il feldspato però e meglio ancora il quarzo hanno la forma di noccioli anzichè di cristalli. Il primo non offre ben netti i piani di sfaldatura che generalmente spiccano nell'ortosio, è pastoso anzichè a struttura cristallina ed il quarzo è meno vitreo che nelle rocce granitiche e gneissiche ed è inoltre appannato e di tinta grigio-azzurrognola. Quando i noccioli di feldspato sono grossi, come osservasi al colle di Cadibona nei lavori di sterro per le fondamenta del forte che si sta costruendo o come osservasi a Calizzano ove quella roccia serve di base al terreno antracitifero, essa rossomiglia, a prima vista, al gneiss centrale porfiroide. Per breve tratto di tempo io fui ingannato da quelle apparenze e rimasi meravigliato di trovare del gneiss antico in quelle regioni. Esaminando però da vicino la roccia e vedendola più ricca che non si convenisse di quarzo, esaminando la natura stessa del quarzo nonchè la forma e l'aspetto del feldspato cessò l'inganno e fin d'allora quella roccia mi parve cosa nuova.

Quest'inverno ebbi in Roma opportunità di esaminare le pietre raccolte dal nostro amico ingegnere F. Giordano nel massiccio del Gran-Cervino e non senza meraviglia vi notai una roccia che ha molta analogia con quella qui sopra citata; ne differisce però per maggior abbondanza di clorite e per la forma generale del feldspato che è più poliedrica. Avuta dall'amico comunicazione del solo esemplare che egli possedeva, lo portai a Torino e lo rimisi — unitamente ad uno di quelli che io aveva raccolto lungo la linea ferrata di Savona — all'amico, collega Cossa con preghiera di studiarlo. Egli trovò che la roccia dei dintorni del Gran-Cervino è identica, per composizione a quella dei dintorni di Savona e che il feldspato di ambedue le rocce è triclino od a base di soda e potassa.

La posizione che quella roccia occupa nelle Alpi marittime e nell'Apennino ligure, la sua ricchezza in feldspato triclino, la deficienza di cristallinità nella sua struttura mi fanno persuaso che qualora quella roccia debba annoverarsi fra le cristalline il suo posto è indicato nella parte superiore della zona recente ossia della zona delle *pietre-verdi*. Tale è altresì la opinione dell'ing. Giordano per la roccia da lui scoperta nei dintorni del Gran-Cervino.

Mi propongo di studiar meglio quella singolare pietra, sia dal lato della estensione del massiccio, sia dal lato della struttura e parendomi sin d'ora che essa meriti di portare un nome speciale mi propongo di chiamarla *Apenninite* appellativo che ci ricorda la sua presenza nelle Alpi Pennine e nell'Apennino.

Già da parecchi anni io intrapresi e continuai il rilevamento geologico delle nostre Alpi e nel compiere questo lungo e faticoso lavoro io dovetti, in ordine alle genesi ed alla classificazione di talune rocce, adottare ed esporre opinioni talora affatto opposte a quelle della generalità dei geologi. Ciò mi pone nella non invidiabile situazione di dover lottare con quasi tutti i miei colleghi in geologia. Ma la lotta è la vita e non è punto intenzione mia cessarla così presto. Le mie opinioni, appunto perchè sorte da lungo, pertinace lavoro, rimangono tenacemente fisse ed in particolare quella che tutte le rocce cristalline delle regioni alpine ed apenniniche da me studiate sono rocce sedimentarie che hanno subìto tale metamorfosi per cui divennero cristalline. A meglio esprimere questa mia opinione ho unito a questo scritto una sezione ideale mostrante la serie e la disposizione delle principali rocce delle Alpi piemontesi (tav. I). Con questa sezione io desidero dimostrare che le rocce ritenute plutoniche sono disposte in zone, sono stratificate — ammettendo che in generale non lo siano colla regolarità colla quale le raffigurai —; e desidero di dimostrare altresì che il gneiss antico è la base di tutte le altre rocce.

Questo gneiss è poverissimo di minerali e, per contro, ne è molto ricca la sovrapposta zona delle *pietre-verdi* nella quale si incontrano o in masse di contatto (filoni-strati), o in vene, o filoni propriamente detti, o disseminati irregolarmente. Questi minerali non possono venire da grande profondità poichè non hanno certamente attraversato il sottoposto gneiss antico. Essi adunque furono e sono elementi costituenti della zona stessa i quali, per secrezione, per movimento molecolare, per trasporto operato dall'acqua sovente andarono ad occupare le soluzioni di continuità prodottesi per frattura delle rocce.

Tuo affezionatissimo
B. Gastaldi

Nel correggere le bozze di stampa di questa mia lettera io vidi l'opportunità di aggiungervi un' appendice la quale sfiorando alcuni risultati ottenuti nella campagna geologica del corrente anno (1878) mi permetta di meglio compiere il resoconto dei lavori eseguiti nel 1877.

Per la terza volta sono andato a studiare la parte estrema della valle Macra ed ho, in tale studio, impiegato una quindicina di giorni. Il mio preparatore e collaboratore sig. Luigi Bottan ebbe da me l'incarico di esaminare il giacimento antracitifero di Prariond che, come quello della Ciapera, si trova rinchiuso in un banco calcareo e, come accadde a me l'anno scorso alla Ciapera, egli vi trovò, fra i detriti caduti dall'alto, l'*Encrinus entrocha*. Parimenti lo stesso sig. Bottan discese pel colle Sautron sul versante francese e risalì quindi il colle di Nubiera onde visitare il vallone di Stroppia al quale, dal versante nostro non si arriva che per un sentiero disastroso. Al colle di Nubiera sul versante francese egli trovò alcuni massi calcari racchiudenti l'*Encrinus entrocha*.

È quindi ben confermata la presenza del muschelkalk nelle Alpi marittime al di sopra ed a contatto quasi del banco di antracite e l'orizzonte del wettersteinkalk non è meno ben determinato dal banco a Gyroporella di Torre e di Villanova Mondovì ove non esiste l'orizzonte carbonifero ed il banco triasico è quasi direttamente sovrapposto alla serpentina.

Il terreno triasico cui serve di base, sul versante nostro, l'antracitifero o terreni di epoca più remota è ricoperto dal lias inferiore e medio, dai banchi cioè ad *Ammonites spiratissimus* e *Kurrii* di Bersezio e di Sambuco. Non posso per ora dare la misura della potenza di quel terreno; dirò solo che tra l'antracite di Prariond e la località ove fu trovato dal professore C. Bruno l'*Ammonites spiratissimus* corrono oltre nove chilometri e che gli strati sono, in generale, quasi verticali.

Se ho ben visto, ben osservato e rettamente giudicato il trias nostro racchiude una singolare zona composta: 1° di un banco di quarzite bianca a struttura arenacea o ghiaiosa che qua e là presenta elementi colorati in roseo od in rosso; 2° di un banco di roccia ora scistosa ora compatta di color verde scuro con vene di quarzo latteo e di epidoto, roccia della quale dovrò parlare in altro scritto; 3° di un gran banco di gesso a struttura ed a tinta generalmente nivea accompagnato da carniola; 4° di scisti rossigno-violacei e talvolta anche verdastri.

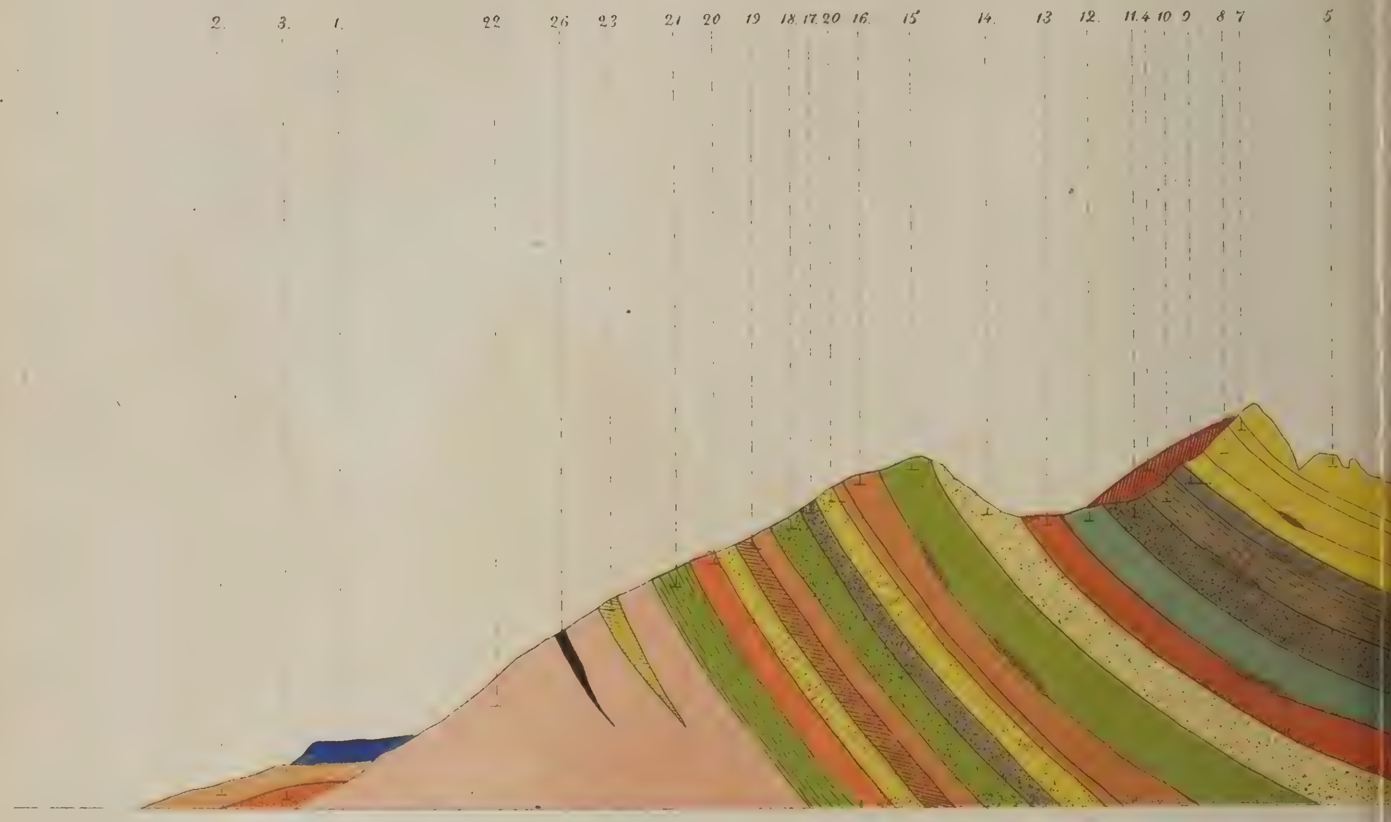
Il gesso e la quarzite non sono rocce esclusive o caratteristiche del trias. La quarzite già compare nel gneiss antico, nel gneiss centrale; prende notevole sviluppo nella zona delle *pietre-verdi,* nell'antracitifero e nel trias. Il gesso è la sola roccia alpina di qualche importanza che non sia stata ancora osservata nel gneiss antico; è sviluppatissimo nella zona delle *pietre-verdi* e nel trias e ricompare un po' più in alto nel trias superiore o nel lias inferiore (banco presso l'Argentera sulla strada al colle della Maddalena). Ciò premesso mi limito a notare che il trias del versante nostro differisce di non poco da quello del versante opposto descritto dai professori Lory e Favre nel quale amendue fecero entrare il grande orizzonte del calcescisto, orizzonte che comprende la serpentina. Noterò parimenti che, tenuto conto dei fossili triasici da noi scopertivi, il *calcaire du Briançonnais* diviene qualche cosa di più complesso di quello che pareva al professore Lory poichè, oltre al lias comprenderebbe il carbonifero ed il triasico.

La sovrapposizione al gneiss antico delle rocce formanti la zona delle *pietre-verdi;* la sovrapposizione dell'antracitifero a questa zona e la successiva sovrapposizione del trias e degli altri terreni secondarî all'orizzonte antracitifero mi pare così regolare e così chiara; l'assenza di grandi spostamenti che abbiano potuto disturbare quella regolare successione mi pare così evidente che io non dubito convincerebbe chiunque venisse ad esaminarla. Alla serie dei terreni paleozoici mancano però sempre il devoniano ed il siluriano, terreni che io erroneamente credetti potessero essere rappresentati dall'antracitifero e dai sovrapposti calcari.

Fra le soddisfazioni che vennero a compensarmi della provata disillusione vi ha pur quella, che, in ordine alle età dell'antracite io mi trovo ora d'accordo coi geologi che tanto si occuparono di quella questione e che dopo molti anni di osservazioni, di studî e di discussioni riescirono a porre in sodo la età carbonifera dell' antracite, solidamente stabilendo uno dei più rilevanti fatti della geologia alpina. Sarò poi tanto più lieto se, colla scoperta del trias sul versante nostro potrò, intorno a quel terreno somministrare ai miei colleghi di oltr'alpe dati di tale entità che valgano a farlo meglio conoscere e definire sul versante loro.

SEZIONE

per mostrare la serie e la sovrapposizione



1 Morene antiche

2 Diluvium

3 Pliocene.

7 Cretaceo

8 Lyas inf. e medio.

9 Trias (*Calcare e quarziti*)

13 Calcescisti

14 Gessi e cargneule.

15 Serpentine, Eufotidi, ecc.

21 Dioriti, afaniti, serpentine, enfotidi.

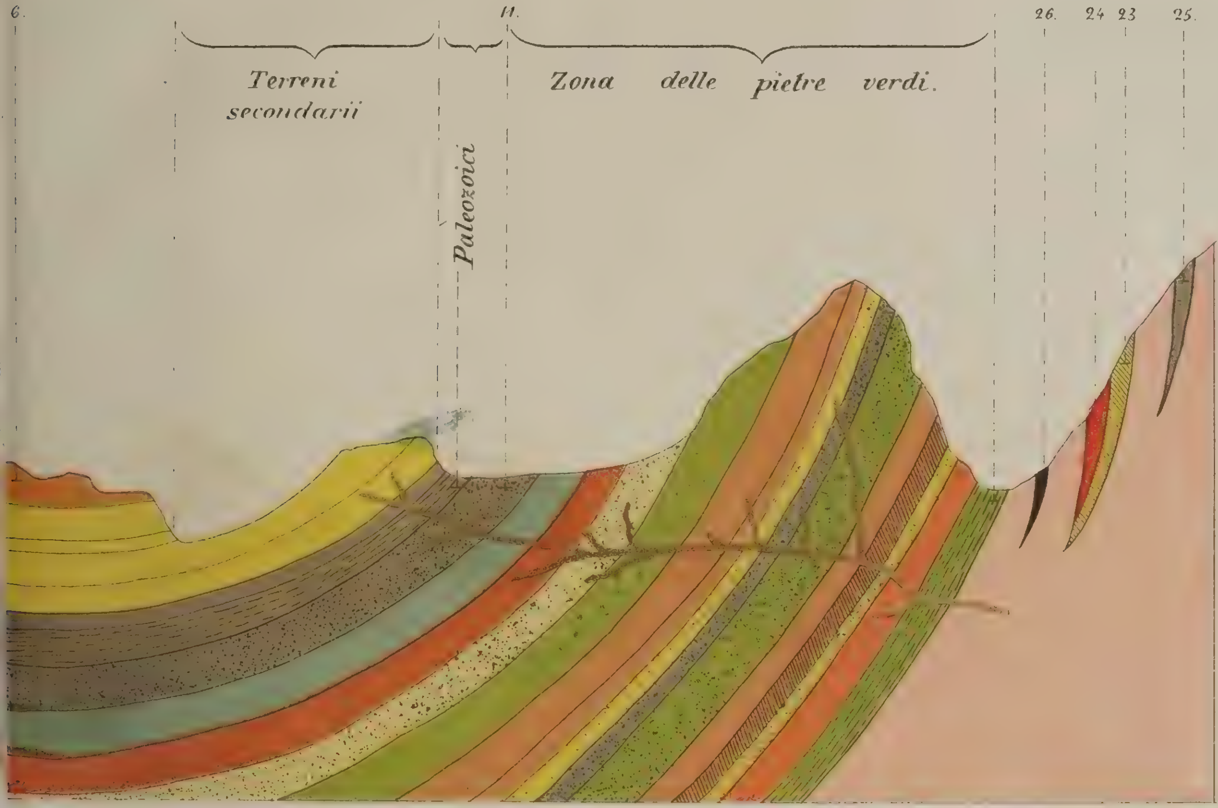
22 Gneiss antico-porfiroide-granito, ecc.

23 Calcare cristallino del gneiss antico.

29 Minerali in lenti, masse e filoni strat

DEALE

le principali rocce delle Alpi piemontesi.



Miocene	5 Calcare nummulitico.	6 Gré nummulitico
Antracitifero con antracite.	11_17_25 Quarziti	12 Porfidi
19 Gneiss recente e granito.	18 Anfiboliti, pietre ollari, epidotite, steatite verde	20 Calcescisto e calcare cristallino
Steatite bianca del gneiss antico.	26 Grafite del gneiss antico.	27 Minerali disseminati.
Minerali in filoni, vene, ecc.		

Lit. F.lli Doyen _ Torino.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

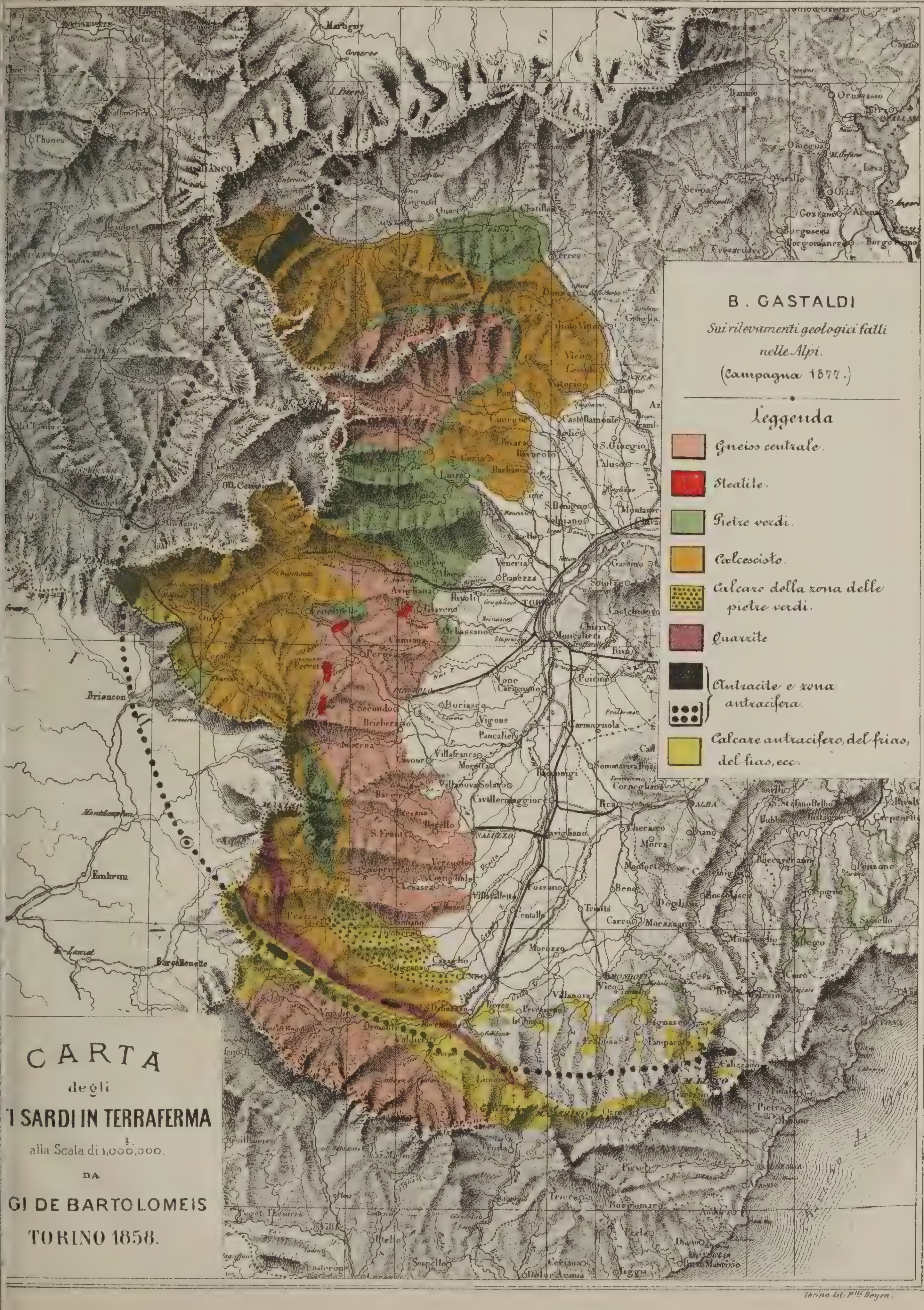
TAVOLA II.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA II.

Carta geologica delle Alpi piemontesi in piccola scala; essa ha per scopo di mostrare la curva regolarissima che descrive il terreno antracitifero affiorando, a riprese, ora sul territorio italiano, ora su quello francese.

La curva descritta dal terreno antracitifero è con quasi eguale regolarità seguita dal calcescisto, dalle *pietre verdi* e dalla zona calcareo-dolomitica del carbonifero, del trias, del lias e dei terreni più recenti. Questo prova che non vi sono spostamenti o che non sono tali da interrompere l'andamento regolare delle varie zone.

La carta dimostra altresì il progressivo e regolare affioramento delle *pietre verdi* dalle Alpi all'Apennino ligure. Molte delle parti lasciate in bianco tra Cuneo e Genova sono occupate dall'Apennite, il primo massiccio della quale compare presso Cuneo e forma la montagna detta la Besimauda.



Torino Lit. F.lli Doyen.

Sui rilevamenti geologici fatti nelle Alpi piemontesi durante la campagna 1877.

Nota di M. BARETTI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 2 giugno 1878.

INTRODUZIONE

Nell'anno 1875 io compiva il rilevamento geologico e la corrispondente coloritura della grande carta alla scala di $^1/_{50000}$ pel gruppo orografico del Gran Paradiso. Veniva per conseguenza ad essere ultimato il lavoro per le seguenti valli secondarie scendenti da ovest, sud-ovest e sud alla Dora Baltea entro i limiti della valle d'Aosta, valle di Champorcher, valle di Champ de Praz, valle di Valmariana, valle del Ponton, valle di Fenis, valle di S^t Marcel, valle di Lôres, valle di Cogne e valle di Valsavaranche, compresi tutti i valloni interposti e scavati nei contrafforti separanti le accennate valli. L'area occupata dall'assieme di queste valli viene a misurare presso a poco 900 chilometri quadrati, vale a dire poco più del quarto dell'area dell'intiera valle d'Aosta.

Geologicamente o meglio stratigraficamente parlando il gruppo del Gran Paradiso si estende molto più e verso la valle dell'Orco e le valli di Lanzo a sud, le valli dell'Arc e dell'Isère in Savoia a sud-ovest ed ovest, e verso il monte Bianco ad ovest e nord-ovest. La valle dell'Orco e le valli di Lanzo erano già state rilevate in precedenti campagne geologiche, ed in queste ultime erasi di già fissato esattamente il limite stratigrafico del gruppo; le valli savoiarde non entrano nel compito dei geologi piemontesi essendo fuori di territorio provinciale e nazionale. Era quindi necessario procedere in avanti col rilevamento geologico ad ovest ed a nord-ovest, alla ricerca del limite divisorio fra il gruppo del Gran Paradiso e quello del monte Bianco. Si presentava per conseguenza ad imporsi per un lavoro ordinato lo studio successivo delle valli di Rhêmes, di Grisanche, della Thuille e dell'Allée Blanche fino ai piedi dell'ellissoide del monte Bianco, le quali valli tutte scendono da sud alla Dora Baltea e si succedono l'una all'altre da est ad ovest.

L'area compresa tra lo spartiacque fra Valsavaranche, e val di Rhêmes ed il torrente dell'Allée Blanche dal colle della Seigne ad Entrèves sopra Courmayeur è di circa 500 chilometri quadrati, troppo vasta conseguentemente da poter nutrire la speranza di rilevarla coscienziosamente nel breve termine di due mesi concesso alle escursioni montane. In base di che dovetti restringere il compito fissatomi alle tre valli di Rhêmes, Grisanche e della Thuille, astrazion fatta da piccolo tratto presso allo sbocco di Valsavaranche, tanto più che la valle dell'Allée Blanche essendo proprio alla base del nucleo cristallino più interno dell'ellissoide del monte Bianco io era certo di non

dovere avanzarmi fin là per incontrare il ricercato limite stratigrafico tra gli ellissoidi del Gran Paradiso e del monte Bianco.

Così limitata l'area di studio raffigura un grande triangolo rettangolo, i cui cateti sarebbero rappresentati: uno dalla linea di circa 20 chilometri da Villeneuve lungo la Dora Baltea fino a Pré S^t Didier e dalla linea che da Pré S^t Didier per la catena divisoria tra l'Allée Blanche e la Thuille sale per circa 10 chilometri quasi fino al monte Broglio, sul confine tra la valle d'Aosta e la Tarantasia; l'altro da una linea di circa 28 chilometri che da Villeneuve pel contrafforte divisorio tra Valsavaranche, val d'Orco e val di Rhêmes sale fino alla cima di Bousson tra val d'Orco, val di Rhêmes e la Tarantasia; l'ipotenusa sarebbe rappresentata dal confine italo-franco dalla cima di Bousson per circa 58 chilometri al monte Broglio. Lo sviluppo perimetrico del triangolo verrebbe ad essere approssimativamente di 110 a 120 chilometri e l'area di circa 420 chilometri quadrati. Rappresentano poi quest'area: la valle di Rhêmes collo sbocco a Villeneuve, la Valgrisanche collo sbocco a Liverogne, i diversi valloncini che scendono da sud a Derby e Morgex, e la valle della Thuille sboccante a Pré S^t Didier. Tutta l' area trovasi poi formare la massima parte del versante italiano delle Alpi Graie settentrionali.

Il lavoro di rilevamento cominciò il 12 agosto, e terminò il 30 settembre, durò cioè 49 giorni, diffalcandone una diecina per riposo e per soggiorno forzato pel cattivo tempo. Dividendo poi questo spazio di tempo per le tre vallate, il lavoro per la valle di Rhêmes (compresa parte di Valsavaranche) durò dal 12 al 27 agosto, quello per Valgrisanche (compresi i valloni a sud di Derby e Morgex ed una corsa in Savoia) dal 27 agosto al 15 settembre, quello per la valle della Thuille dal 15 al 30 settembre incluso.

Valle di Rhêmes

La valle di Rhêmes ha comune lo sbocco nella grande valle di Aosta colla Valsavaranche; la Savara e la Dora di Rhêmes si riuniscono in basso del poggio di roccia ricoperto di morenico, su cui stanno il villaggio, il castello e la chiesa di Introd a circa due chilometri dalla Dora Baltea. Strettissima e chiusa tra rupi selvaggie ad ovest, e chine di detriti ad est la valle sale dirigendosi a sud 5° ovest. Si allarga alquanto a Rhêmes S^t Georges, per restringersi nuovamente fra Créton e Melignon, per poi ampliarsi a Chanavay nel bacino ridente di Rhêmes Notre Dame. Più in alto si ramifica in diversi valloni che fanno capo a diversi bacini glaciali, fra i quali primeggiano per splendidezza e di campi di ghiaccio e di picchi fantastici quelli della Goletta e di Bassagne. L'andamento generale della valle è a sud 5° ovest; misura circa 28 chilometri di lunghezza da Villeneuve alla base della punta di Tzantalena, e la massima larghezza di 8 chilometri nella sua parte superiore misurata dalla vetta del Tou Blanc a quella della Becca di Foss, l'una sullo spartiacque da Valsavaranche, l'altra sullo spartiacque da Valgrisanche.

La valle di Rhêmes è tutta scavata nel mantello di roccie formanti la *zona delle pietre verdi* (terreni cristallini recenti), che si addossa rialzandosi ad est ed a sud-est al nucleo centrale (terreni cristallini antichi) del gruppo del Gran Paradiso. Gli strati che corrispondentemente a val di Rhêmes rappresentano parte di tal zona

sono diretti in prima da nord-est a sud-ovest, poi da nord-nord-est a sud-sud-ovest, poi da nord a sud e finalmente da nord-nord-ovest a sud-sud-est, descrivendo così col complesso delle loro testate una curva piuttosto ampia, la quale non coincide colla direzione della valle. Ne deriva come conseguenza che la valle di Rhêmes non sarà in tutto il suo percorso una valle d'interstratificazione, cioè compresa tra le facciate di strati inferiori ad est e le testate di strati superiori ad ovest, tutti rialzati ad est. Dal suo sbocco a Rhêmes S^t^ Georges è valle d'interstratificazione e di erosione contemporaneamente tagliando obliquamente gli strati; si mantiene valle d'interstratificazione da Rhêmes S^t^ Georges fino a Thumel, donde ramificasi in diversi valloni, i più orientali d'interstratificazione, gli occidentali d'interstratificazione e di erosione contemporaneamente. Nella sua parte superiore l'orografia risulta più complicata per la presenza di lembi di calcari e quarziti più recenti che in stratificazione discordante salgono dalla Tarantasia e si rovesciano sul versante italiano formando alcuni picchi elevati di forme slanciate e bizzarre.

Conseguentemente all'essere la valle di Rhêmes in prevalenza valle d'interstratificazione in un complesso di roccie cristalline stratificate cogli strati rialzati ad est e sud-est ne risulta che il fianco orientale della valle (corrispondente in genere a facciate di strati) sarà a declivio non troppo ripido e più sviluppato, mentre l'occidentale sarà rappresentato da pareti o pendii rocciosi ripidissimi corrispondenti a testate di strati. Ed è ciò che realmente si verifica. Quindi ancora ad oriente più numerosi e più ampî i pascoli e le chine imboschite che non ad occidente.

La roccia dominante è il gneiss recente grigio chiaro, che può localmente trasformarsi in micaschisto od in calceschisto. A questa roccia predominante s'intercalano però altre forme petrografiche che ordinariamente l'accompagnano nei terreni cristallini recenti, così abbiamo:

Calcari cristallini bianchi o grigi a Pramont presso Rhêmes S^t^ Georges, in alcuni tratti del fianco occidentale sopra a Frassiney, Melignon, Notre Dame de Rhêmes, Chantarré, e sul fianco orientale alla Vaudaletta; questi banchi di calcare cristallino sono generalmente accompagnati da depositi e colate tufacee;

Quarziti bianche o grigie poco schistose alla Bioula (versante orientale) a Chavanay, Rhêmes Notre Dame, Sotze (versante occidentale);

Schisti amfibolici alla Becca di Toss, alla Grande Rousse, al Col de Bassac pel versante occidentale, nei valloni d'Entrelavi, di Vaudaletta e di Vaudala pel versante orientale;

Schisti serpentinosi alla Becca di Tei, al Col de Bassac, alla Traversière, alla base della Granta Parey pel versante occidentale, nel vallone d'Entrelavi, di Vaudaletta pel versante orientale; ai piedi del gran ghiacciaio di Bassagne trovasi del talcoschisto.

I calcari semicristallini od anche compatti più recenti e le quarziti bianche tabulari, da noi prima tenuti come paleozoici, e considerati come triassici e liassici dai geologi francesi, si trovano in bellissimi lembi a forme slanciate nell'alto della valle a formare il Berio dell'Allée Noire, la svelta cima della Granta Parey (metri 3506), quella di Tzantalena (metri 3617), la Pointe de Calabre (metri 3363) e la Cima di Bousson (metri 3336).

I terreni di trasporto sono rappresentati da morenico assai sviluppato a Rhêmes Notre Dame, a Melignon, a Rhêmes S^{t} Georges, a Tâche e Introd; si aggiungono i terreni di frana e i coni di deiezione abbondantemente sviluppati tutto lungo la valle.

Sotto il punto di vista della produzione la valle di Rhêmes si può dire che, fatta astrazione dei calcari cristallini e compatti, non ha alcun prodotto minerale utilizzabile, essendo anche le roccie poco atte a dare materiali da costruzione di un certo pregio. Poco numerose e ristrette le aree imboschite, potendo considerarsi come veri boschi di conifere solamente quello che sopra Introd riveste la terminazione della catena spartiacque da Valsavaranche, e quello che riveste i contrafforti tra il vallone di Chaussietta, quello di Sort e quello di Entrelavi fino alla base della Becca di Sambeina. Una bella foresta al piede della Bioula fu in questi ultimi anni quasi intieramente distrutta.

Pochi campi e prati si trovano fra Introd e Rhêmes S^{t} Georges ed attorno a quest'ultimo villaggio. Da Rhêmes S^{t} Georges a Melignon la valle è poverissima di aree coltivabili, se si fa astrazione da ristretti ripiani morenici, roccie nude, aree desolate da valanghe e frane attristano la valle. Da Melignon in alto la valle si amplia, quindi larghi prati occupano il bacino di Rhêmes Notre Dame, e questi prati danno vita all'industria dell'allevamento delle bovine, tanto che una fiera annua si tiene a Notre Dame de Rhêmes, cui accorrono negozianti italiani, francesi e svizzeri. L'alta elevazione del piano di Rhêmes Notre Dame (metri 1731) non permette la coltura in grande dei cereali. Le patate riescono bene.

Poca cosa sono i pascoli alpini del basso della valle, bellissimi però quelli dell'alta valle, specialmente nel bacino più elevato di Sotze e Lavassei, nei valloni di Vaudala, Vaudaletta ed Entrelavi sul fianco orientale; l'abbondanza delle acque, e le roccie facilmente riducibili in terra contribuiscono a questa ricchezza di pascoli che insieme col contrasto di ampli ghiacciai e picchi elevati ed a forme spigliate danno un valore pittorico alla valle alta, che non ha la sterile, ristretta e desolata parte inferiore di questa valle.

Valle di Grisanche

La Valgrisanche dal suo sbocco a Liverogne fino al confine italo-franco al Col della Glieretta o Sassière misura in lunghezza circa 29 chilometri con una larghezza massima di 8800 metri misurata dal Col de Mont alla vetta della Grande Rousse. Invece di terminare in alto con un ampio bacino glaciale coronato dalle vette del primario clinale delle Graie ed essere separata dalle valli finitime italiane da catene secondarie, questa valle termina in punta al valico della Glieretta o Sassière, e mentre ad est una catena secondaria la divide dalla valle di Rhêmes, ad ovest è lateralmente separata dalla Tarantasia da un tratto del clinale alpino di circa 18 chilometri dalla Grande Sassière (metri 3763) al Pic de Loydon; da questo fino a Ruinaz sulla Dora Baltea è divisa dalla valle della Thuille e da altri valloncini paralleli dalla catena secondaria Rutor-Paramont. Mentre la valle di Rhêmes si mantiene unica e rettilinea pel suo lungo ed in alto si scinde in diversi rami, contando pochi e brevi valloni laterali, la Valgrisanche si mantiene unica fino all'apice, ricevendo da est e da ovest lo sbocco di rilevanti valloni laterali; di più è nel suo andamento piuttosto

incurvata colla convessità ad ovest e la concavità ad est. Difatti dal suo sbocco a Revers per 8 chilometri è diretta a sud-ovest, da Revers agli alpi di Vaudet per 19 chilometri sale verso sud 5° ovest, e da questi al colle di Glieretta (metri 3323) a sud 5° est.

La Valgrisanche col suo decorso sinuoso accompagna più fedelmente la direzione degli strati rocciosi in che ella è scavata. Questi sono ancora dipendenti dal gruppo del Gran Paradiso interamente, meno qualche lembo di calcari e quarziti più recenti, e dei terreni antracitiferi che dalla Savoia giungono fino allo spartiacque con Valgrisanche; sono ancora i terreni cristallini recenti negli strati superiori ma di andamento paralleli a quelli di valle di Rhêmes. Ancora per la Valgrisanche abbiamo generalmente pendii più dolci ad oriente, più ripidi ad occidente, come pure i due versanti differenziano per ampiezza di pascoli come in valle di Rhêmes. La Valgrisanche però più vicina al limite esterno del gruppo del Gran Paradiso presenta maggiori accidentalità; così due grandi valloni, per non dire dei minori, si protendono ad occidente, e sono il vallone di Planaval, e quello che tende al lago di S[t] Grat sotto al Rutor.

La valle, stretta da Liverogne a Planaval fra pareti di roccie e grandi terrazze laterali coperte di pascoli o di folte foreste, a Revers comincia ad allargarsi a formare il bacino di Valgrisanche; altro bacino alluvionale più elevato è quello di Supplan; ai Fornets riceve lo sbocco del vallone del Col du Mont, poi si restringe fra pendii ripidi vestiti in basso da enormi frane per dilatarsi al suo termine nel gran ghiacciaio di Glieretta. È questa valle molto più pittoresca nelle varie sue parti della vicina valle di Rhêmes.

La roccia dominante è ancora il gneiss recente localmente trasformato in micaschisto e calceschisto; si sviluppano pure interstratificati al gneiss:

Calcari cristallini; sul fianco occidentale a monte Colomb nei valloni d'Orfeuille, Avalanche, Arpsvieilles, al lago di S[t] Grat, al Col du Clou; e sul fianco orientale nei valloni di Toss, Plonta e S[t] Martin, con accompagnamento di tufi;

Amfiboloschisti a Revers, Becca de l'Auille, a Bône, al ghiacciaio del Château Blanc, al Col du Clou, a monte Forçat, agli Alpi Vaudet;

Serpentine e *serpentinoschisti* ad Orfeuille, al Château Blanc, a Saxe Ponton, al Col de Bassac, al Col du Clou.

Un piccolo lembo di calcari e quarziti più recenti dei terreni della *zona delle pietre verdi* trovasi nel vallone che da Saxe Ponton sale al Col du Clou, come pure un tenue lembo di schisti grigio-plumbei della zona antracitifera si trova alla Becca di Suesse.

L'apparato glaciale è rappresentato in Valgrisanche da numerosi e rilevanti segni; così abbiamo le morene di Vaudet, di Fornets, di Valgrisanche, di La Frasse, di Bourogne, delle Combes, di Planaval, e le belle roccie levigate di Valgrisanche, Bône, Revers. Al disopra di Fornets sono frequenti le frane ed i coni di deiezione.

La produzione minerale della Valgrisanche è rappresentata da buone pietre da costruzione, gneiss ed amfiboliti, da calcari, alcuni veri marmi saccaroidi, da qualche giacimento ferrifero (magnetite e limonite), da amianto (Vaudet), da torbe; non crediamo però che possa aversene qualche forte profitto.

I numerosi piani morenici, e le chine di detriti si prestano molto bene a prati

ed a coltivazione di cereali e patate, difatti estesa è l'area coltivata in tal modo tanto nella bassa come nell'alta valle fino ai Fornets.

I pascoli alpini sono molto più sviluppati che non nella valle di Rhêmes; così abbiamo sul fianco occidentale quelli del Glacier nel vallone di Planaval, di Orfeuille, di Miollet, d'Arpsvieilles, Champagny, e sul fianco orientale quelli amplissimi di Chamin, Provence, Bourogne, Verconey, Toss, Plonta, Nua, Chalet, Saxe Ponton, Saxe Savoie, Vaudet.

Una grande foresta stendesi dal Grand Aury a Verconey per circa 5 chilometri al basso del fianco orientale, come pure a Planaval, a Miollet, a Bône, a Rocher esistono ancora bei boschi.

Nel suo assieme di boschi, pascoli, roccie levigate, ghiacciai, cascate, pareti di roccie, picchi, la Valgrisanche si presenta più pittoresca che non la valle di Rhêmes.

Montagne di Derby e Morgex

Da Liverogne fin quasi a Pré S^t Didier, cioè dallo sbocco di Valgrisanche a quello della valle della Thuille, scendono alla Dora Baltea alcuni valloncini che sono affatto indipendenti e dall'una e dall'altra valle, vanno quindi considerati a parte. Dal Paramont, in alto del vallone di Planaval in Valgrisanche ed alla estremità nord-est del ghiacciaio del Rutor in valle della Thuille, scende a nord-est un contrafforte a Liverogne, il cui versante sud-est guarda Valgrisanche, ed un altro in direzione nord-nord-ovest, il cui versante ovest-sud-ovest guarda in valle della Thuille. Fra questi due contrafforti e la Dora Baltea intercede un'area triangolare divisa in diversi valloni che cominciando da est sono:

Vallone della Villotta, che sbocca presso al ponte d' Equiliva, di poco più di 2 chilometri;

Vallone della Froche, che sbocca presso l' Oratoire de l'Êtroit, di poco più di 4 chilometri;

Vallone d'Interey o d'En haut, ramificantesi in alto nei valloncini di Paramont e di Gênet, sboccante di fronte al Villair, di circa 8 chilometri;

Vallone Gonter, sboccante di fronte al Pont della Salle, di poco più di 4 chilometri;

Vallone de l'Harp, sboccante di fronte a Morgex, di circa 8 chilometri.

La porzione orientale di questo assieme di valloni e corrispondente ai due primi valloni è costituita da gneiss recente, calceschisto e schisti amfibolici rialzantisi a sud-est cioè verso il gruppo del Gran Paradiso, mentre la porzione occidentale corrispondente ai due terzi inferiori del vallone de l'Harp è formata di calceschisto e calcari cristallini rialzantisi a nord-ovest cioè verso il gruppo del monte Bianco. Per conseguenza nella restante parte mediana dell'area deve passare il limite tra i due gruppi di sollevamento. Di fatti il restante dell'area corrispondente alla sella tra i due sollevamenti in senso inverso è totalmente occupata da roccie più recenti, quelle della zona antracitifera, il cui seguito vedremo nella vicina valle della Thuille. Le roccie di questa zona si rialzano da un lato a nord-ovest dall'altro a sud-est e sono rappresentate dalle inferiori alle superiori:

1° da grés micaceo semicristallino con intercalazione di schisti neri, o grigio piombo, grafitosi;

2° dallo stesso grés privo però di schisti neri;

3° da una puddinga a nuclei cristallini, schiacciati, laminati.

La puddinga occupa la parte mediana dell'intiera area, mentre le altre due formazioni formano colle loro testate i margini della zona antracitifera. Non risulta però che siasi incontrato dell'antracite, ma è evidente essere tale complesso di formazioni la continuazione di quello delle roccie contenenti l'antracite in valle della Thuille.

Lo sfasciume delle roccie antracitifere pare si presti ammirabilmente alla vegetazione arborea, difatti tutta questa falda montuosa di questo complesso di valloni è potentemente rivestita di magnifiche foreste fino a grande elevazione, nelle quali cominciano sgraziatamente a serpeggiare troppo frequenti le strade da slitte ed i sentieri dei carbonai bergamaschi. Si può dire che una sola foresta comincia al monte Colomb sopra la Villotta sullo spartiacque con Valgrisanche e termina alla cappella di S[t] Charles sopra i trinceramenti del principe Tommaso sullo spartiacque con valle della Thuille. Questa zona di foresta può avere una lunghezza di 14 chilometri con una larghezza media di 2, 5 chilometri, un'area approssimativa di 35 chilometri quadrati. Questa grande area imboschita fu già ristretta di molto in basso per creare striscie e spianate di prati e campi, in alto per dar luogo a magrissimi pascoli. Sarebbe desiderabile che i comuni di Derby, della Salle e di Morgex sapessero usufruire con saviezza di sì vistoso capitale in boschi.

Valle della Thuille

La valle della Thuille ha una orografia e per conseguenza una idrografia ben diversa da quelle delle valli di Grisanche e di Rhêmes. Nella sua parte inferiore ristrettissima, si allarga tanto in alto che la linea del clinale alpino che la divide dalla Tarantasia dal Pic de Loydon al monte Broglio non misura meno di 33 chilometri, diretta generalmente a nord-ovest. Il contrafforte divisorio da Valgrisanche ed i diversi valloni precedentemente accennati corre a Pré S[t] Didier dal Pic de Loydon, pella Tête du Rutor, il Paramont, monte Colmet e Tête de l'Harp in una generale direzione da sud-sud-est a nord-nord-ovest per chilometri 18 all'incirca, mentre il contrafforte divisorio dall'Allée Blanche corre dal monte Broglio a Pré S[t] Didier in direzione generale est-nord-est, pel Fortin e il Cramont, su una lunghezza approssimativa di 14 chilometri. Ne consegue che questa valle mentre misura una larghezza di 4 chilometri presso allo sbocco, misurata dalla vetta della Tête de l'Harp e quella del Cramont, ha nella sua parte più elevata una larghezza di 18 chilometri dalla Tête du Rutor al Fortin.

Ciò proviene dal fatto che lo sviluppo in lunghezza dei valloni laterali è maggiore di quello della valle principale; difatti prendendo a considerare i due maggiori valloni laterali uno di destra e l'altro di sinistra troviamo che, partendo dal bacino della Thuille come punto di convergenza di essi colla principal valle, il vallone di Chavannes a sinistra misura una lunghezza di 12 chilometri fino alla sua origine, e quello del Rutor 11 chilometri, mentre la valle principale dalla Thuille fino al colle del Piccolo San Bernardo misura appena da 7 ad 8 chilometri; se poi aggiungiamo i 6 chilometri da Pré S[t] Didier alla Thuille la lunghezza totale della valle principale risulta appena di 14 chilometri con una larghezza massima di 18 chilometri.

Negli angoli superiori di questa valle triangolare si annidano due grandi bacini glaciali: quello del Rutor a levante, quello del Broglio e Chavannes a ponente, formato ciascuno dall'unione di diversi ghiacciai. Questi due bacini laterali danno gran copia di acque, mentre il torrente principale che non è alimentato da alcun ghiacciaio è meschinissimo in confronto dei suoi tributarî.

Notiamo ancora una particolarità; mentre dal fianco occidentale della valle scendono ad essa numerosi valloni indipendenti fra loro, quali quelli del Broglio, di Chavannes, d'Orgève, di Youla, di Plan Pra, dal fianco ad est un solo vallone scende che raccoglie tutte le acque dell'angolo superiore orientale.

Tutto il fianco occidentale della valle della Thuille e la porzione del suo fianco orientale inferiormente al villaggio della Thuille sono costituiti da strati di roccie appartenenti alla *zona delle pietre verdi,* terreni cristallini recenti rialzati a nord-ovest verso il gruppo del monte Bianco; ciò spiega come mentre ripido e ristretto è il versante orientale della valle della Thuille a Pré S[t] Didier, si amplii invece quello occidentale. Le roccie della *zona delle pietre verdi* ricompaiono nella gran conca del ghiacciaio del Rutor all'estremo superiore sud-est della valle; ma ivi si rialzano invece a sud-est cioè verso il Gran Paradiso. Tutto il restante della valle è costituito dalla zona antracitifera formante una sella cogli strati rialzantisi a nord-ovest da un lato verso il monte Bianco ed a sud-est dall'altro verso il Gran Paradiso. Come conseguenza la valle principale diretta da nord-est a sud-ovest è valle d'interstratificazione direttamente tra la *zona delle pietre verdi* e la zona antracitifera dal colle del Piccolo San Bernardo alla Thuille, e d'interstratificazione obliqua leggermente dalla Thuille a Pré S[t] Didier. I valloni laterali sono invece tutti normali all'andamento degli strati, cioè di erosione. I torrenti del fianco occidentale sono di poca mole perchè essendo questo fianco solcato da più valloni indipendenti, ogni torrente non riceve che piccolo contingente laterale dai valloni secondarî d'interstratificazione; invece tutti i valloni secondarî del fianco orientale portano le loro acque all'unico torrente del Rutor, il quale per conseguenza porta un volume d'acque ben più considerevole.

Le roccie della *zona delle pietre verdi* nella conca del Rutor sono rappresentate da gneiss con qualche rara intercalazione di schisti amfibolici e serpentinosi. Sul fianco occidentale della valle sono:

Calceschisti in grande predominanza, che localmente passano a micaschisti e gneiss talora a struttura granitoide, come nell'alto vallone del Broglio;

Calcari cristallini bianchi o bigi in numerosissimi strati intercalati ai calceschisti;

Quarziti grigie, grigio-rossiccie, bianche come presso alla Thuille, alla Balma, nel vallone d'Orgève, alla Torvera di Broglio;

Serpentina alla Torvera di Broglio;

Diorite e *schisti amfibolici* specialmente nel vallone del Broglio;

Gessi terrosi o semicristallini sulla linea di contatto fra la *zona delle pietre verdi* e quella antracitifera.

La zona antracitifera è rappresentata passando dalle più profonde alle roccie superficiali:

1° *Grés micaceo semicristallino* con schisti neri grigio-plumbei, grafitosi in rapporto ai quali stanno gli affioramenti di lenti di antracite;

2° *Grés*, lo stesso senza gli schisti neri o grigio-plumbei;

3° *Puddinga* ad elementi cristallini, schiacciati, laminati, modificazione strutturale della puddinga bene caratterizzata nella vicina Tarantasia.

Abbiamo inoltre alcuni lembi di quarziti e calcari dolomitici più recenti, come quelli già segnalati in valle di Rhêmes ed in Valgrisanche, alla Toriassa presso il colle del Piccolo San Bernardo ed alla base nord della Lancebranlette.

Segnaliamo ancora larghi tratti morenici a valle del lago Verney, nell'alto vallone di Chavannes, alla Thuille, in basso dei trinceramenti del principe Tommaso, nel vallone di Youla, a Pré S^t Didier.

Per ciò che riguarda la produzione mineraria la valle della Thuille presenta maggior ricchezza che non le valli di Rhêmes e Grisanche, quantunque, astrazion fatta dalle antraciti, oggidì l'industria sia ridotta al nulla. Molte miniere si coltivavano in tempi antichi. Citiamo un giacimento di galena argentifera a mezza via tra la Thuille e la Joux nel vallone del Rutor; questo giacimento fu escavato per mezzo di quattro piani di gallerie, si cessò l'escavazione del minerale nel 1793; la lavorazione meccanica si faceva sul luogo. Cessò pure da qualche anno la lavorazione alla miniera plumbo-argentifera al principio della forra profonda per cui la Dora della Thuille sbocca a Pré S^t Didier. Diverse esplorazioni si fecero nel vallone di Chavannes ed in quello del Broglio per ricerca di minerali di antimonio, piombo argentifero e rame, ma, per quanto siansi incontrate traccie di giacimenti, finora non diedero risultati notevoli. Antiche gallerie attribuite ai Romani si trovano nell'alto del vallone del Broglio per l'escavazione probabilmente di pirite aurifera. Frequentemente trovasi nello stesso vallone del Broglio ferro magnetico, ferro oligisto; un bel giacimento di talco steatitoso trovasi alla Torvera del Broglio. I calceschisti di Lancebranlette sono impregnati di siderite.

I calcari cristallini sono utilizzati come materiale da costruzione e da cemento; sono adoperati pure i gessi, le quarziti, i tufi. I calceschisti scuri del Piccolo San Bernardo danno bellissime lastre tegolari. In alcuni piani torbosi presso il colle del Piccolo San Bernardo si escava una torba di buona qualità.

Fra i prodotti minerarî della valle della Thuille quello che indubbiamente presenta maggiori speranze e più sicure è l'antracite. I giacimenti di antracite si presentano sotto forma di lenti di diverso spessore, interstratificate al grés ed agli schisti neri e bigio-scuri lucenti, ed allineate nella stessa direzione della zona antracitifera dai trinceramenti del principe Tommaso fino all'ospizio del Piccolo San Bernardo. Le lenti sono allineate per modo da formare dei veri strati a rigonfiamento, i quali variano da 1 a 6 metri di spessore. Per maggior parte le escavazioni si fanno nella foresta detta del Buic, al disotto del ridotto di Buic, di faccia al borgo di Touve, a poco più di un chilometro ad est del villaggio della Thuille. Sono 5 grandi allineamenti di lenti antracitiche, sovrapposti gli uni agli altri sulla verticale di circa 200 metri, tutti con identica direzione da nord-est a sud-ovest ed inclinazione generale a sud-est di 15° a 30°. L'allineamento delle lenti di antracite non si arresta al torrente del Rutor, ma escavazioni si attivano, specialmente nell'inverno, alla Suche, a Terres Noires, al Belvedere, fino all'ospizio del Piccolo San Bernardo. Il costo di escavazione è minimo; la quantità di antracite che può escavarsi da questo regolarissimo

giacimento grandissima; l'antracite di buona qualità. Le antraciti della Thuille saranno forse sorgente di nuova energia per le industrie della valle di Aosta. Noi ci riserviamo di svolgere con apposita Memoria tutte le nozioni mineralogiche, chimiche, stratigrafiche ed economiche su questo importantissimo giacimento quando avremo raccolto i dati tutti che ancora non potemmo radunare.

Indipendentemente dai prodotti riferentisi alle praterie ed ai campi della bassa valle, la valle della Thuille è ricchissima di pascoli alpini per la buona esposizione, la ricchezza di acque e la facile disgregabilità dei calceschisti e delle roccie antracitifere. Meritano menzione speciale gli stupendi pascoli del vallone di Chavannes, il quale può dirsi un enorme pascolo nel suo assieme, come pure i pascoli allo sbocco del vallone del Broglio e quelli che da Pont Serrand salgono fino al colle del Piccolo San Bernardo.

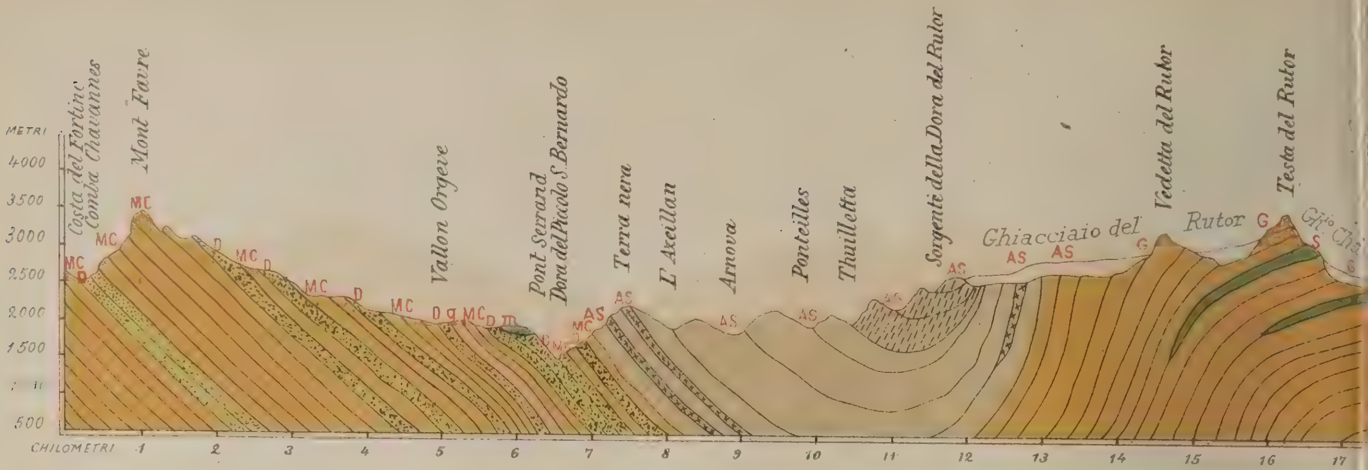
Infine i boschi occupano ancora quasi in totalità l'estremo del contrafforte che separa la valle principale dal vallone del Rutor, spiegandosi in alto nelle gole di Arnova, Ponteilles, Thuillette e Bellecombe.

Sotto il punto di vista delle bellezze alpine la valle della Thuille merita tanto quanto altre più decantate la visita degli alpinisti.

CONCLUSIONE

Concludendo, l'area montuosa sul fianco meridionale di valle d'Aosta compresa tra lo spartiacque Valsavaranche-Val di Rhêmes, la Dora Baltea da Villeneuve a Pré St Didier, lo Spartiacque, la Thuille-Allée Blanche, ed il clinale alpino dal monte Broglio alla cima di Bousson, quest'area di circa 420 chilometri quadrati, di una elevazione massima di 3763 metri sul livello del mare (Grande Sassière), divisibile in tre grandi valli secondarie facienti capo al clinale alpino, la val di Rhêmes, la Valgrisanche e la valle della Thuille, ed in diversi valloncini interclusi tra lo sbocco delle due ultime valli, quest'area intercede tra i due nuclei di sollevamento del Gran Paradiso e del monte Bianco, per modo che le due valli di Rhêmes e Grisanche si trovano completamente scavate negli strati della *zona delle pietre verdi* rialzantisi verso il Gran Paradiso, e tutto il fianco occidentale della valle della Thuille si trova nella istessa zona, ma cogli strati rialzati verso il monte Bianco. Una parte della valle della Thuille e dei valloni scendenti a Derby, la Salle e Morgex è occupata dalle formazioni antracitifere, distinte in tre forme litologiche, disposte in sella, ed occupanti la depressione tra i due sollevamenti. Questa zona antracitifera seguita in Tarantasia, e sul settentrionale fianco della valle d'Aosta. Di più lembi di terreni calcarei e quarzosi più recenti (calcari dolomitici e quarziti tabulari bianche), paleozoici o mesozoici, si trovano in stratificazioni discordanti in tutte tre le grandi valli secondarie percorse.

Direz.e dello spaccato O. 50° N. _ E. 50° S. _ Incl.e generale ...



LEGGENDA

Terreni cristallini antichi

- G — Gneiss centrale

Terreni cristallini recenti

- G — Gneiss recente
- M — Micaschisto
- MC — Calceschisto
- q — Quarzite
- — Calcare cristallino
- — Calcare cavernoso
- S — Roccia serpentinosa
- A — Roccia amfibolica

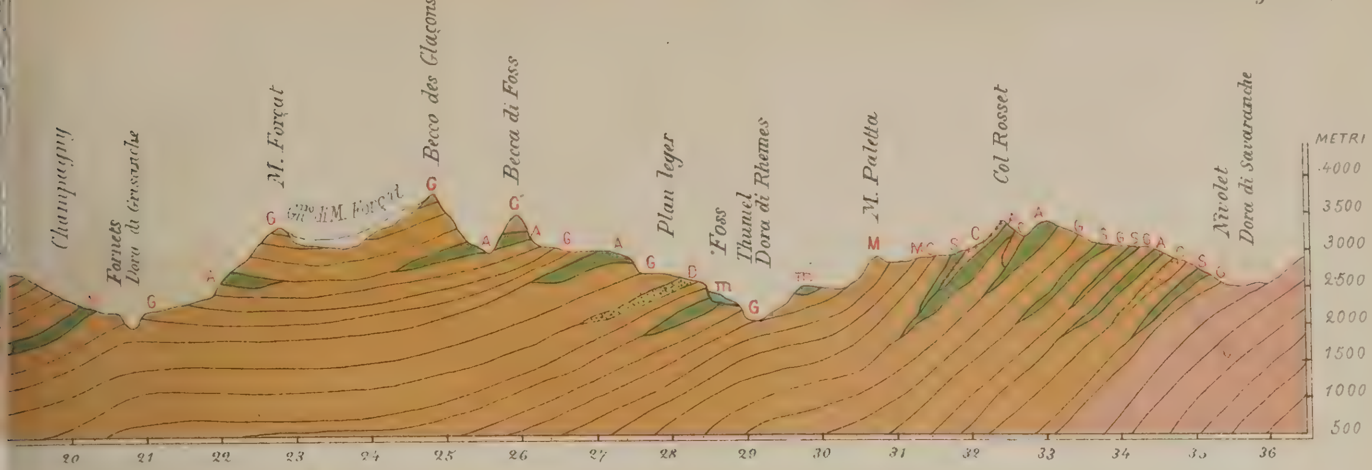
Terreni paleozoici e secondarii?

- AS — Grés antracitifero
- AS — Schisto antracitifero
- AS — Puddinga antracitifera
- C — Calcare dolomitico
- q — Quarzite

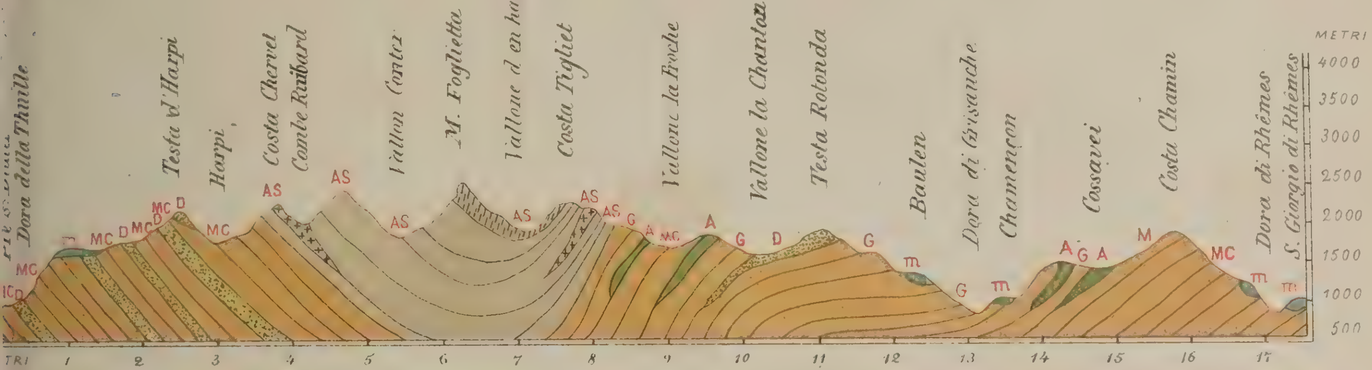
Terreni quaternarii

- m — Morenico

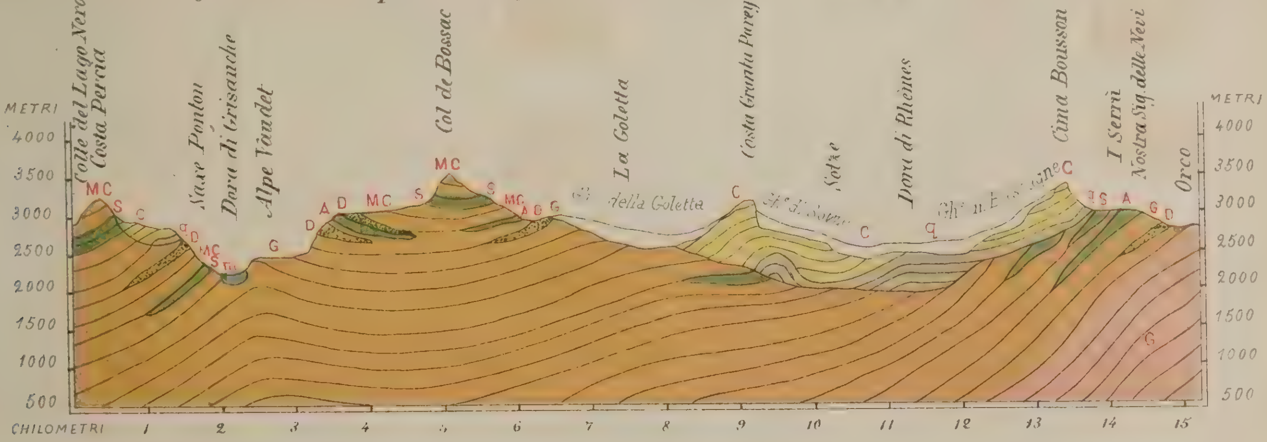
…r.e __ Spaccato Geologico dal Fortino (Val della Thuille) alla Nuvoletta (Val di Savaranche)



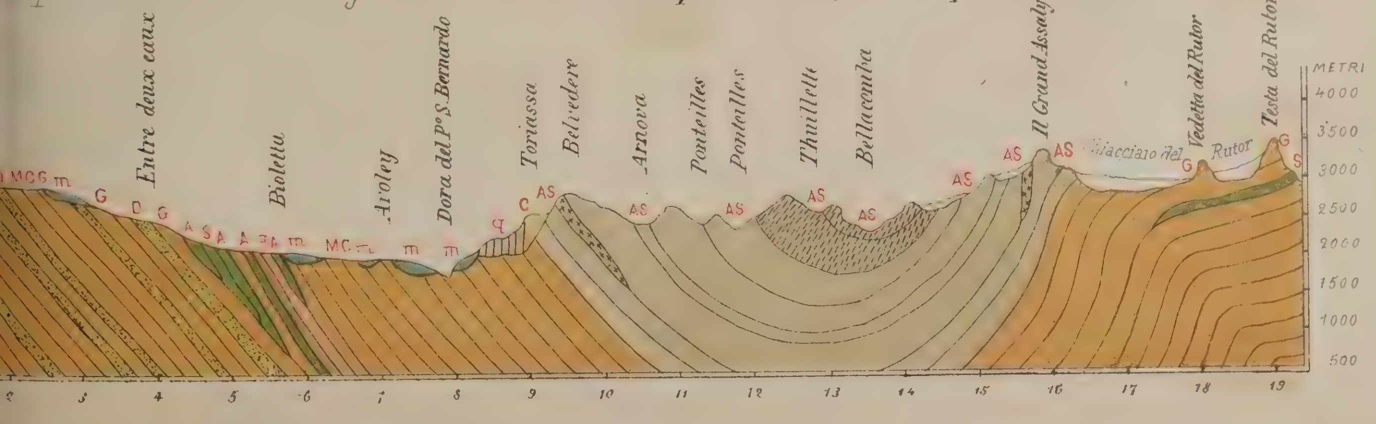
…llo spaccato O. 45°N°. = E 45°. S. Incl.e generale normale alla dir.e __ Spaccato Geologico da Pré S. Didier a Rhêmes (S. Giorgio)



…llo spaccato O. 52°N = E. 52°S. Incl.e generale a N O. __ Spaccato Geologico dal Colle del Lago Nero (Grisanche) a N. S.ra delle Nevi (Val d'Orco)



…llo spaccato O. 42°N = E. 42°. S. Incl.e generale normale alla dir.e __ Spaccato Geologico dalla punta Lechaud alla testa del Rutor



LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

Declinazioni medie pel 1875,0 di 285 stelle dalla 1ª alla 6ª grandezza, comprese fra i paralleli di declinazione nord 20° e 64°; dedotte dalle osservazioni fatte al R. Osservatorio del Campidoglio.

Memoria del Socio LORENZO RESPIGHI

letta nella seduta del 5 maggio 1878.

L'esatta determinazione della declinazione delle stelle è senza dubbio una delle più importanti operazioni della pratica astronomia, non solamente perchè questo elemento è indispensabile per la soluzione di molte e delicate questioni astronomiche, ma eziandio perchè esso costituisce uno dei dati necessarî alla ricerca della forma e grandezza della terra, alla misura cioè delle latitudini geografiche.

Quantunque attualmente si posseggano numerosi ed eccellenti cataloghi, nei quali è fissata con grande approssimazione la declinazione di molte stelle, pure nelle loro riduzioni e confronti si incontrano ancora tali disaccordi, da dover confessare che assai scarso è il numero di quelle stelle, la declinazione delle quali possa ritenersi portata al grado di approssimazione richiesto per alcune delicate ricerche, e specialmente per la misura della latitudine delle stazioni geodetiche.

Questa deficienza di dati si è manifestamente riconosciuta nella gigantesca impresa della misura dei gradi del meridiano centrale europeo, cosicchè la Commissione internazionale, cui è affidata quella operazione, faceva appello agli astronomi, perchè volessero colmare questa lacuna colla esatta verifica della declinazione di un numero notevole di stelle, opportunamente distribuite ed adatte per la misura delle latitudini nei varî paralleli, e coi diversi metodi a questo scopo indicati.

Mentre parecchi Osservatorî nella parte settentrionale di Europa si assumevano questo incarico, si riconosceva però come necessario che a questo lavoro prendesse parte anche qualche Osservatorio più meridionale, sia per estendere maggiormente le zone di declinazione senza pericolo di errori od incertezze di osservazione, sia per avere dati di confronto o di controllo coi risultati ottenuti in condizioni climatologiche differenti.

Convinto della importanza e necessità di questa operazione, per la quale si presentava come assai opportuna l'ubicazione del nostro Osservatorio, e sicuro della bontà dello strumento a ciò disponibile, quale è il nostro circolo meridiano di Ertel, di mediocri dimensioni, ma di ottima costruzione e collocato nelle condizioni di stabilità richieste dalla scienza, mi decisi a prender parte a questo lavoro, proponendomi per ora la verifica della declinazione delle stelle dalla 1ª alla 6ª grandezza inclusiva, comprese fra i paralleli nord 20° e 64.° Con che si avrebbe avuto il vantaggio di potere determinare la latitudine per ogni stazione con un numero abbastanza grande di stelle e coi varî metodi a ciò indicati; e quindi colla probabilità di ottenere convenientemente compensate le piccole incertezze delle declinazioni, gli errori accidentali e sistematici delle divisioni dei circoli ecc.

Non potendomi però dissimulare la gravissima difficoltà di questo lavoro e la scarsità dei mezzi per me disponibili ad assicurarne un conveniente successo, mi trovai nella necessità di studiare il metodo più spedito ed opportuno a raggiungere lo scopo, ad ottenere cioè risultati meritevoli di considerazione e fiducia.

La determinazione delle declinazioni delle stelle avrebbe potuto intraprendersi nel nostro strumento per mezzo delle distanze zenitali assolute, applicando agli archi letti tutte le necessarie correzioni; ma ciò avrebbe richiesto la conoscenza degli errori delle singole divisioni del circolo, per la quale era indispensabile una operazione difficile, molto gravosa e di risultato non abbastanza sicuro, specialmente trattandosi di un circolo diviso di 2′ in 2′.

L'operazione poteva però facilitarsi determinando gli errori sistematici del circolo in varî punti del medesimo, p. es. di 5° in 5°, prendendo come punto normale dell'arco quello risultante dal medio delle letture fatte a 3, o 5 divisioni vicine; e facendo poi per le distanze zenitali la lettura sopra tre o cinque divisioni simmetriche rispetto allo zero dei microscopî, allo scopo di eliminare e compensare gli errori accidentali delle divisioni stesse.

Il nostro strumento meridiano è fornito di due circoli egualmente divisi di 2′ in 2′, e per uno di essi gli errori sistematici di 10° in 10° si possono già ritenere con sufficiente approssimazione determinati per un accurato esame da me fatto sulle divisioni del medesimo nel 1867; del quale esame resi conto nella mia Memoria sulla latitudine dell'Osservatorio del Campidoglio pubblicata nel 1868 nel volume XXI degli Atti della Pontificia Accademia dei Lincei.

Questi dati, se potevano tornare utili per qualche controllo o verifica, non erano però abbastanza dettagliati, per poter essere presi come termini o punti di partenza, per fissare con sicurezza l'errore sistematico nelle varie parti del circolo in corrispondenza alle varie distanze zenitali; al quale scopo sarebbe stato necessario di ripetere tale esame in più vasta scala e con mezzi superiori a quelli di cui avrei potuto disporre.

D'altronde riconoscendo la grande difficoltà di poter ottenere colla dovuta esattezza tutti gli altri dati necessarî per rendere le osservazioni veramente assolute, mi sono deciso a rinunziare a questo sistema di osservazione, per adottare quello delle osservazioni relative, combinate però in modo da eliminare o compensare gli errori costanti o sistematici; procurandomi poi nello stesso tempo, per mezzo dei dati istrumentali, già approssimativamente conosciuti, la certezza od almeno una grande probabilità sulla richiesta compensazione od eliminazione dei varî errori.

Rinunziando al metodo delle osservazioni assolute non credo di avere perduto dal lato della esattezza dei risultati; poichè a quelle costanti istrumentali, i cui valori non sono mai dati a priori, ma che debbono praticamente determinarsi per mezzo di osservazioni o di esperienze più o meno sicure, ma non mai esenti da errori, ho sostituito invece altre costanti, dedotte, è vero, da osservazioni o misure prese sopra quantità affette anch'esse da errori costanti, ma combinate però in modo da rendere questi errori opportunamente compensati nel valore medio ottenuto per ognuna di quelle costanti, e con errore probabile dello stesso ordine di quello delle costanti direttamente determinate; e forse con minore probabilità o pericolo di cadere in altri errori costanti o sistematici, che difficilmente possono escludersi dai metodi e dai mezzi usati nella determinazione delle costanti istrumentali.

Se con opportuni criterî ed artifizî si instituisse un rigoroso esame sui risultati delle osservazioni assolute, fatte cogli strumenti i più perfetti, e studiati ed esaminati colla più scrupolosa attenzione e coi mezzi più efficaci, io ritengo che facilmente si dimostrerebbe, che i valori adottati per le costanti istrumentali sono in generale ben lontani da quel grado di approssimazione, che sembrerebbe ad essi assicurato dai processi usati nella loro determinazione. A conferma di questa opinione potrei addurre prove di fatto da me ricavate dall' esame di alcune importanti serie di osservazioni, se da ciò non fossi dispensato dal fatto incontestabile dei sensibili disaccordi o differenze che si riscontrano fra i valori ottenuti per le stesse quantità da diverse serie di osservazioni, che singolarmente considerate si mostrano meritevoli di piena fiducia, e con errori probabili di un ordine inferiore alle differenze effettivamente risultanti dal confronto delle varie serie di osservazioni.

Nella mia Nota II, *Sulla latitudine del R. Osservatorio del Campidoglio* pubblicata nel vol. I della 3ª serie delle Memorie della R. Accademia dei Lincei, ho avuto occasione di esporre il metodo adottato per le nostre osservazioni, e che mi sembra, pel nostro strumento almeno, il più adatto a somministrare i valori delle declinazioni delle stelle in modo da potersi ritenere l'influenza degli errori costanti o sistematici ed accidentali, se non del tutto eliminata o compensata, ristretta però nei limiti d'approssimazione attendibili in questo genere di osservazioni.

Gli errori costanti o sistematici che principalmente sono a tenersi a calcolo in queste osservazioni sono:

1.° Gli errori delle divisioni dei circoli;

2.° La flessione del cannocchiale;

3.° L'inclinazione del filo o dei fili equatoriali usati nella collimazione per le distanze zenitali;

4.° L'errore nella determinazione del punto zenitale del circolo o del nadir;

5.° L'errore personale nella collimazione delle stelle in relazione alla loro posizione sud o nord, diretta o riflessa;

6.° Il valore delle rivoluzioni delle viti micrometriche dei microscopî destinati alla lettura del circolo;

7.° L'errore personale nella lettura degli archi;

8.° L'inesattezza della tavola delle rifrazioni;

9.° L'errore nel valore della latitudine del luogo di osservazione.

Rinunziando alla determinazione diretta degli errori assoluti della graduazione del circolo, ossia alla determinazione delle differenze fra gli archi letti per le varie distanze zenitali e gli archi od angoli reali ad essi corrispondenti, mi sono proposto di eliminare l'influenza di questi errori per mezzo delle latitudini istrumentali, determinate per le varie distanze zenitali con opportuni gruppi di stelle fondamentali, o di declinazione molto approssimativamente conosciuta, e prendendo le declinazioni medie da varî e buoni cataloghi, per procurare ai piccoli errori od incertezze delle medesime quel carattere di accidentalità, che ne potesse rendere più probabile ed approssimata la compensazione nei risultati medî o finali.

Ottenuta così la latitudine istrumentale in funzione della distanza zenitale, da essa poteva ricavarsi la declinazione delle varie stelle già molto approssimativamente

corretta non solo dagli errori sistematici del circolo, ma eziandio dalla flessione del cannocchiale, indipendentemente dalla conoscenza della sua costante e dalla legge della sua variazione in rapporto alla distanza zenitale.

Allo scopo di meglio assicurare il valore delle latitudini istrumentali, e renderle più indipendenti dagli errori accidentali delle divisioni del circolo, ho creduto opportuno di determinarle in due distinti modi; e cioè per mezzo delle osservazioni dirette e delle osservazioni riflesse, rendendo le une indipendenti dalle altre col riferire le distanze zenitali al nadir, determinato colla massima accuratezza per mezzo della riflessione del filo equatoriale sull'orizzonte a mercurio.

In questo modo si aveva il vantaggio di potere dedurre, per le stelle osservabili per riflessione, le declinazioni con due diverse costanti, e quindi formare in certo modo due distinti cataloghi, meritevoli quasi della stessa fiducia, essendo in generale l'errore probabile delle osservazioni riflesse ben poco superiore a quello delle dirette.

Per estendere questo vantaggio al maggior numero possibile di stelle mi sono deciso ad osservare per riflessione tutte le stelle cominciando da 4° dal nadir, quantunque a questa distanza e sin verso gli 8° la riflessione dei raggi stellari non si estenda che ad una parte soltanto dell'obiettivo.

Quantunque per questa circostanza si rendesse probabile, per non dire certa, l'introduzione di un altro errore costante o sistematico, e cioè uno spostamento del centro apparente dell'immagine delle stelle; pure questo nuovo errore, essendo compenetrato in quello della latitudine istrumentale, non poteva influire nel valore della declinazione, perchè dedotto da osservazioni affette dallo stesso errore. È poi evidente che l'uso di queste latitudini istrumentali escludeva probabilmente anche l'influenza possibile dell'errore personale nella collimazione della stella, quando però tutte le osservazioni fossero state fatte dallo stesso osservatore.

L'esattezza di queste latitudini istrumentali non dipendeva però dalle sole declinazioni delle stelle, ma benanche dall'esattezza dei risultati delle osservazioni fatte sulle singole stelle; ed è perciò che furono stabilite alcune norme relative al numero ed al metodo delle osservazioni per ottenere convenientemente compensati gli errori accidentali; e queste norme furono accuratamente seguite, non solo per le osservazioni destinate alla determinazione delle latitudini istrumentali, ma anche per le osservazioni di tutte le stelle comprese nel catalogo.

Siccome le osservazioni dovevano ripartirsi fra tre osservatori e cioè fra me e i due assistenti sig. dott. Alfonso Di Legge e dott. Francesco Giacomelli, e ciò per rendere il lavoro più spedito e breve, così venne primieramente intrapresa una serie speciale di osservazioni di confronto per verificare, se fra noi esistevano errori personali nella collimazione delle stelle e nella lettura dei microscopî, quantunque per ricerche antecedenti si avesse già ragione di ritenere questi errori compresi in limiti molto ristretti: e ciò appunto venne confermato da queste ultime osservazioni, dalle quali risultò, che tanto nella collimazione delle stelle, quanto nel medio delle letture fatte ai quattro microscopî, i nostri errori relativi sono così piccoli da poter essere trascurati, specialmente per la circostanza che le osservazioni sulle varie stelle sono state fatte promiscuamente dai tre osservatori, e prossimamente nelle stesse proporzioni.

Probabilmente la piccolezza di questi errori personali relativi deriva dal modo

usato nella collimazione e dalla nitidezza e finezza delle divisioni dei circoli e dalla chiarezza dei microscopî.

La collimazione delle stelle si è sempre fatta col filo equatoriale fisso, usato per la determinazione del nadir, bisecando l'immagine della stella col filo oscuro in campo oscuro.

Le norme stabilite per le osservazioni furono le seguenti:

Prendere come principio di numerazione per le distanze zenitali il nadir determinato colla riflessione dei fili sull' orizzonte a mercurio, puntando coi microscopî costantemente la stessa divisione, e deducendo il nadir stesso dal medio di quattro osservazioni successive, alternando in esse la posizione dell'osservatore dal nord al sud; e ripetere più volte nella stessa sera questa operazione durante le osservazioni per verificare, se e quali spostamenti in esso punto si producevano.

Fare sopra ogni stella non osservabile per riflessione almeno 16 osservazioni di distanza zenitale.

Osservare le stelle, distanti del zenit più di 4°, almeno 20 volte, 10 direttamente e 10 per riflessione; facendo però in ogni passaggio sopra ogni stella una sola delle due osservazioni; e ciò allo scopo di evitare l'inconveniente di una osservazione troppo affrettata, e di poter fare la collimazione in grande prossimità al meridiano, affine di evitare l'influenza di qualche possibile inclinazione nel filo equatoriale, e finalmente per evitare qualche possibile irregolarità della flessione del cannocchiale nel suo rapido passaggio in posizioni molto diverse; ciò che sarebbe stato inevitabile facendo le due osservazioni nello stesso passaggio.

L' esattezza dei risultati delle osservazioni dipendendo principalmente dalla esatta determinazione del nadir, si è posta in questa operazione la massima cura; e fatte pochissime eccezioni, essa fu eseguita costantemente da me, allo scopo di potere garantire la costanza di questo dato, per rendere veramente paragonabili le osservazioni fatte nelle varie sere, e le osservazioni dirette di una stessa stella colle osservazioni riflesse. Ed è anche a questo scopo che il nadir è sempre stato riferito alla stessa divisione del circolo, l'errore costante della quale veniva incorporato nelle latitudini istrumentali, e quindi eliminato poi nelle declinazioni delle stelle.

Tanto nella determinazione del nadir quanto nella collimazione delle stelle si è sempre usato lo stesso filo equatoriale fisso, escludendo totalmente l'uso del filo di declinazione mobile, pel timore di introdurre nuovi errori, e di togliere all'apparato micrometrico la dovuta stabilità ed invariabilità.

Tanto l'osservazione delle stelle, quanto quella del nadir si è sempre fatta collo stesso oculare dell'ingrandimento di 120 volte, attraverso al quale veniva introdotta la luce di una lampada per rischiarare i fili del micrometro o il campo del cannocchiale, per mezzo di un opportuno apparato applicato sopra l'oculare stesso al momento della determinazione del nadir.

L'osservazione del nadir si faceva generalmente più volte in ogni sera di osservazione; e tanto più spesso quanto più marcate erano le variazioni di temperatura, in causa delle quali si avevano sensibili differenze e talora anche di qualche secondo; e in questi casi, ed in generale ogni volta che nelle successive determinazioni del nadir si trovavano differenze sensibili, per la riduzione delle osservazioni delle stelle si applicava un zenit o nadir istrumentale variabile in relazione alle trovate differenze.

I valori in arco delle rivoluzioni delle viti dei microscopî vennero verificati di tratto in tratto durante il corso delle osservazioni, ma le differenze ottenute nelle varie verifiche, si trovarono così piccole da potersi ritenere come costante il valore medio delle rivoluzioni delle quattro viti, il quale venne fissato in

$$r'' = 59'',248:$$

e con questa costante veniva valutato l'arco corrispondente al medio delle letture fatte ai quattro microscopî.

D'altronde una piccola incertezza o variazione in questa quantità non poteva influire sensibilmente nella misura dell'arco; perchè essendosi, per ragioni che ora vado ad esporre, stabilito di fare la lettura dei microscopî sopra la divisione più vicina allo zero determinato col nadir, od al più ad una delle due divisioni che comprendevano questo punto, l'arco misurato coi microscopî era sempre minore di 2', ossia di due rivoluzioni delle viti.

Supponendo determinate nel modo sopra indicato le latitudini istrumentali per le varie distanze zenitali, per es. di 2° in 2°, si potrebbe ritenere contenuto in esse l'errore sistematico della graduazione del circolo negli archi loro corrispondenti, quando però il numero delle divisioni usate nella osservazione delle stelle fosse abbastanza grande, e la loro disposizione prossimamente simmetrica od uniforme rispetto all'estremità dell'arco.

Quantunque queste condizioni fossero molto approssimativamente verificate nelle nostre osservazioni, ciò non pertanto a rendere l'errore sistematico e la latitudine istrumentale più indipendente dagli errori accidentali delle divisioni, si era stabilito di leggere per ciascuna stella gli archi sopra tre divisioni successive, o di fare di osservazione in osservazione la lettura alternativamente su queste tre divisioni.

Ma verificato in atto pratico, che il primo progetto importava troppa perdita di tempo, e che pel secondo riesciva troppo imbarazzante l'alternamento regolare della lettura sulle tre divisioni, furono entrambi abbandonati, per ridurre la lettura in ogni microscopio alla sola divisione più vicina allo zero, oppure all'una od all'altra delle due fra cui era compreso lo 0 stesso: riservandoci poi di determinare gli errori accidentali delle divisioni usate nella lettura degli archi, e quindi le rispettive correzioni da applicarsi agli archi letti.

Questi errori accidentali nelle divisioni del nostro circolo sono fortunatamente abbastanza piccoli, e tali da potersi ritenere convenientemente compensati in ogni gruppo di tre o al più di cinque divisioni successive: e in base a ciò fu stabilito di valutare l'errore accidentale di ogni divisione colla differenza della lettura fatta su questa divisione e col medio delle tre o cinque divisioni, fra le quali essa è compresa. Determinando gli errori accidentali o con tre o con cinque divisioni, generalmente si trovano risultati poco differenti; ma per ottenere valori più approssimativi si è convenuto di prendere, come errore definitivo di ogni divisione, il medio dei due risultati.

Quantunque questa operazione richiedesse molto tempo e fatica, trattandosi di fare quel minuto esame sopra 44 gradi del circolo, pure essa era indispensabile, non tanto per la determinazione delle latitudini istrumentali, quanto per la riduzione della declinazione delle stelle, per le quali si era sempre fatto la lettura sopra una sola divisione od al più sopra due: ne venne però rimessa l'esecuzione a lavoro compiuto, cioè dopochè fossero state ultimate le osservazioni delle stelle.

Su queste norme vennero intraprese nel marzo del 1875 le osservazioni, le quali potevano ritenersi già ultimate nel marzo 1877, essendosi già fatto a quell' epoca sopra ognuna delle 1470 stelle, componenti il catalogo, lo stabilito numero di osservazioni, fatta eccezione di pochissime stelle, sulle quali rimanevano ancora a farsi alcune osservazioni.

Il numero totale delle osservazioni supera le 30,000, delle quali sono state scartate quelle sole, che erano state qualificate come incerte, o sulle quali si ebbe occasione di verificare nella loro riduzione qualche equivoco o di lettura o di collimazione.

Attualmente è già compita la riduzione delle distanze zenitali apparenti, e trovasi già abbastanza innoltrato anche il calcolo delle distanze zenitali medie. Ma siccome quest'ultimo lavoro richiederà ancora non poco tempo, specialmente perchè le osservazioni delle varie stelle sono generalmente sparse ed isolate nella durata del periodo di osservazione; così nel frattanto credo opportuno di pubblicare i risultati ottenuti per un certo numero di stelle, fra le quali sono comprese molte di quelle raccomandate dalla Commissione internazionale del grado per la misura delle latitudini nelle stazioni astronomiche della grande rete geodetica, destinata alla verifica della forma e grandezza della terra: intendendo con questa pubblicazione di poter concorrere colle nostre osservazioni alla determinazione dei valori da assegnarsi alle declinazioni medie di queste stelle, sui quali si sta ora discutendo.

Queste declinazioni però non potevano ricavarsi dalle osservazioni, se prima non fossero state determinate le latitudini istrumentali, e dedotte le correzioni per gli errori accidentali delle divisioni del circolo usate nelle osservazioni delle varie stelle.

Nella citata Nota II, *Sulla latitudine dell'Osservatorio del Campidoglio*, non solamente mi proponeva di determinare il valore della nostra latitudine assoluta, ma di più combinando opportunamente i valori ottenuti per la latitudine dalle varie stelle, distribuite in varî gruppi in relazione alla loro distanza zenitale, mostrava come potevano ricavarsi anche i valori approssimativi della latitudine istrumentale per le varie parti del circolo, e cioè di 4° in 4° di distanza zenitale, tanto per le osservazioni dirette come per le riflesse; dalle quali poi per interpolazione si sarebbero potute ottenere le latitudini istrumentali pei paralleli intermedî.

I valori in allora ricavati per queste latitudini istrumentali vennero però da me considerati come soltanto approssimativi, specialmente perchè in alcuni gruppi il numero delle stelle era troppo scarso, per poter ritenere convenientemente compensati gli errori delle declinazioni e gli errori accidentali delle divisioni del circolo, ed anche perchè era troppo scarso il numero delle osservazioni fatte sopra alcune stelle.

Attualmente la determinazione della latitudine istrumentale pei varî archi può basarsi sopra dati più numerosi, più esatti e più completi; avendosi 285 stelle di declinazione già molto approssimativamente nota; essendosi fatto sopra ciascuna di esse il numero prefisso di osservazioni, e di più essendosi determinate le correzioni per gli errori accidentali delle divisioni del circolo. Riguardo a queste correzioni farò avvertire che esse furono dedotte nel modo superiormente indicato, assumendo come valore definitivo dell'errore il medio dei risultati ottenuti da tre osservazioni o letture fatte con tutta la possibile accuratezza; in modo da poter presumere la loro approssimazione compresa nei limiti di $\pm 0'',1$. Per ottenere le latitudini istrumentali indipendenti da errori sistematici, da cui potessero essere affette le declinazioni delle stelle, ho trovato

necessario di prendere queste declinazioni da più cataloghi meritevoli di fiducia; cosicchè per 40 stelle le declinazioni sono state prese dal Nautical Almanac di Londra, per 53 dalla Connaissance des Temps, per 163 dal Catalogo della Vierteljahrsschrift 1869, Heft 4 della Società astronomica di Germania, e per 29 dal Catalogo dell'Associazione geodetica internazionale.

Per verità il numero delle declinazioni prese dal Catalogo della Società astronomica di Germania è troppo grande in confronto di quelli delle declinazioni prese dagli altri cataloghi; e si potrebbe quindi sospettare che i valori, da esse dedotti per le latitudini istrumentali, potessero risentire l'influenza di possibili errori sistematici esistenti in questo catalogo, malgrado le correzioni applicate nel 1875 alla maggior parte delle declinazioni da noi usate. Ma senza escludere la possibilità di tale influenza, ritengo però, in base anche ai risultati delle nostre osservazioni, controllati cogli errori istrumentali già molto approssimativamente conosciuti, che tale influenza possa ritenersi come insufficiente ad alterare sensibilmente i valori delle ricercate latitudini istrumentali.

I dati sui quali sono state dedotte le latitudini istrumentali sono contenuti nel seguente Specchio I, nel quale sono riportati i valori ottenuti per la latitudine da ciascuna stella, tanto dalle osservazioni dirette quanto dalle riflesse, coi rispettivi numeri delle osservazioni, col medio dei due risultati e col numero totale delle osservazioni.

Le stelle sono state ordinate secondo le loro declinazioni crescenti, od in rapporto alla loro distanza dal nostro zenit; e ciò allo scopo di rendere facilmente percettibile l'influenza degli errori sistematici dello strumento; e sonosi riunite in gruppi compresi dai paralleli di 2° in 2° partendo dal zenit verso il sud e verso il nord.

Sono riportate nello stesso Specchio le declinazioni medie pel 1875,0 usate per la determinazione della latitudine, coll'indicazione dei rispettivi cataloghi, designati nella colonna intestata « Autorità » colle lettere iniziali: N. A. Nautical Almanac; C. T. Connaissance des Temps; M. G. Gradmessung; A. G. Astronomische Gesellschaft.

Le declinazioni apparenti sono state prese dal Nautical Almanac e dalla Connaissance des Temps per le stelle in essi contenute, e per le altre stelle dal Mittlere und scheinbare Oerter für das 1875, 1876 und 1877 von 539 Sternen ecc. pubblicato dalla Redazione del Berliner Astronomischen Jahrbuchs.

Alle osservazioni è stata applicata soltanto la correzione per la rifrazione e per gli errori accidentali del circolo, per cui le latitudini dedotte sono affette dall'errore sistematico della graduazione del circolo, dalla flessione e dai possibili errori sistematici di collimazione; potendosi poi ritenerle indipendenti dagli errori personali degli osservatori, sia per la piccolezza di questi errori, sia pel modo con cui sono state ripartite le osservazioni fra gli osservatori stessi.

Riguardo alle rifrazioni, trattandosi di distanze zenitali non superiori a 22° si sono ritenute abbastanza esatte le tavole date dalla Connaissance des Temps, sulle quali sono state calcolate, tenendo il dovuto conto delle indicazioni del barometro e termometro, osservati colla dovuta frequenza nel corso delle osservazioni giornaliere.

Il seguente Specchio I, identico in quanto alla forma allo Specchio I della mia Memoria II, *Sulla latitudine del R. Osservatorio del Campidoglio,* ne diversifica però per l'aggiunta di nuove stelle, per l'aggiunta di nuove osservazioni e per l'applicacazione delle correzioni per gli errori accidentali delle divisioni del circolo.

SPECCHIO I. **Latitudini apparenti**

STELLA	Declinazione media 1875,0	Autorità	Numero delle Osservazioni: dirette	Numero delle Osservazioni: riflesse	Latitudine 41° 53′+: dirette	Latitudine 41° 53′+: riflesse	Latitudine 41° 53′+: medio
	+						
β Ariete	20° 11′ 45″,59	N. A.	22	12	34″,41	32″,75	33″,58
110 Ercole	20 25 40,53	A. G.	8	10	34,58	32,65	33,62
γ^1 Leone	20 28 22,62	N. A.	12	9	34,69	33,45	34,07
ε Ariete	20 50 20,60	C. T.	9	10	34,81	34,16	34,49
η Cancro	20 51 50,68	N. A.	11	11	34,44	33,01	33,73
ζ Toro	21 3 50,45	A. G.	9	10	34,63	33,09	33,86
δ Leone	21 12 29,27	N. A.	18	11	34,58	33,64	34,11
ι Toro	21 24 33,21	A. G.	11	11	34,73	33,79	34,26
ν Ariete	21 25 10,31	A. G.	10	10	35,04	33,98	34,51
20 Chioma	21 35 18,01	A. G.	10	10	33.93	32,31	33,12
109 Ercole	21 42 51,06	A. G.	10	11	34,08	33,18	33,63
β Ercole	21 45 48,50	C. T.	12	10	35,09	33,60	34,35
δ Gemelli	22 12 37,19	N. A.	14	24	34,23	33,29	33,76
η Gemelli	22 32 27,10	C. T.	10	11	35,05	34,15	34,60
μ Gemelli	22 34 31,20	N. A.	17	30	34,18	33,46	33,82
τ Toro	22 42 54,25	A. G.	12	10	34,32	33,28	33,80
υ Pegaso	22 42 58,60	C. T.	10	10	34,04	32,91	33,48
α Ariete	22 52 12,87	N. A.	23	15	34,55	33,32	33.94
λ Pegaso	22 54 30,23	G.M.	10	11	35,06	34,15	34,61
τ Pegaso	23 3 22,65	A. G.	9	11	34,14	33,13	33,64
23 Chioma	23 19 4,20	C. T.	10	10	34,58	33,21	33.90
ζ Andromeda	23 55 12,37	A. G.	9	11	34,44	32,93	33,69
27 Toro	23 40 9,23	A. G.	10	11	34,51	33,21	33.86
η Toro	23 43 0,16	N. A.	24	12	34,20	33,58	33,89
17 Toro	23 43 6,05	A. G.	11	11	34,10	33,21	33,66
41 Leone	23 50 31,01	A. G.	10	10	33,99	33,15	33,57
μ Pegaso	23 56 30,70	A. G.	10	13	34,35	33,25	33,80
ζ Leone	24 2 22,20	A. G.	11	11	34,91	34,07	34,49
24 Volpetta	24 17 13,44	A. G.	11	10	34,37	33,04	33,71
ε Leone	24 20 54,95	N. A.	17	18	34,83	33,87	34,35
χ Gemelli	24 41 45,22	A. G.	10	10	35,44	34,19	34,81
ι Pegaso	24 44 7,00	A. G.	10	10	34,77	33,75	34,26
δ Ercole	24 59 16,90	C. T.	11	11	34,61	33,92	34,27
χ Pegaso	25 4 16,68	A. G.	10	11	35,55	34,58	35,07
ε Gemelli	25 15 9,57	A. G.	10	11	34,71	33,87	34,29
16 Pegaso	25 20 15,56	N. A.	10	10	34,26	33,59	33,93
d Boote	25 41 4,50	A. G.	11	13	34,28	33,56	33,92
μ Leone	26 35 40,40	C. T.	11	13	34.84	33,81	34,33
υ Pesci	26 36 23,18	A. G.	10	13	34,74	33.82	34,28
γ Corona	26 41 34,12	A. G.	10	10	34,84	33,54	34,19
41 Ariete	26 44 37,30	C. T.	10	11	33,46	32,58	33,02
α Corona	27 8 11,86	N. A.	11	10	35,24	34;27	34,76
35 Ariete	27 10 25,22	A. G.	11	10	33,43	32,99	33,21
ε Corona	27 14 28,16	A. G.	10	10	35,07	34,67	34,87
β Pegaso	27 24 18,80	C. T.	11	10	35,32	34,11	34,72
ψ Boote	27 26 9,95	N. A.	12	10	34,81	33.46	34,14
32 Volpetta	27 34 59,27	N. A.	10	11	34,00	33,34	33,67
ε^2 Boote	27 36 7,93	N. A.	11	10	34,10	33,28	33,69
β Cigno	27 41 54,50	C. T.	11	10	34,96	33,97	34,47
μ Ercole	27 47 42,04	N. A.	16	11	35,05	34,19	34,62

STELLA	Declinazione media 1875,0	Autorità	Numero delle Osservazioni: dirette	Numero delle Osservazioni: riflesse	Latitudine 41° 53′+: dirette	Latitudine 41° 53′+: riflesse	Latitudine 41° 53′+: medio
	+						
11 Boote	27° 59′ 27″,55	A.G.	15	12	34″,16	33″,48	33″,82
ι Gemelli	28 2 40,10	A.G.	9	11	34,36	33,93	34,15
6 Cancro	28 8 34,02	N.A.	20	22	34,50	33,95	34,23
β Gemelli	28 19 34,09	N.A.	6	7	34,59	33,22	33,91
α Andromeda	28 24 0,76	N.A.	10	12	34,66	34,03	34,35
β Toro	28 29 57,83	N.A.	18	11	33,70	32,80	33,25
β Chioma	28 30 44,80	C. T.	13	10	34,15	33,76	33,96
ε Andromeda	28 37 57,80	A.G.	10	10	34,90	33.89	34,40
ο Ercole	28 44 47,60	A.G.	10	10	34,75	33,72	34,24
α Triangolo	28 58 8,11	A.G.	10	10	34,62	34,01	34,32
ι Cancro	29 12 54.71	A.G.	10	10	34,12	33,67	33,90
ξ Ercole	29 15 43,87	A.G.	10	15	34,41	33,25	33,83
τ Pesci	29 25 31,29	A.G.	10	10	34,51	33,66	34,09
β Corona	29 32 15,16	A.G.	10	11	34,62	33,77	34,20
η Pegaso	29 34 4,80	C. T.	11	10	34,90	33,90	34,40
ζ Cigno	29 42 54,04	N.A.	10	10	33,95	33,22	33,58
δ Andromeda	30 10 35,26	A.G.	10	12	34,71	33,91	34,31
72 Pegaso	30 38 6,90	A.G.	10	11	33.48	32,46	32,97
η Corona	30 44 25,10	C. T.	11	10	34,54	33,65	34,10
ρ Boote	30 55 15,87	N.A.	11	10	34,60	33,92	34,26
57 Cancro	31 3 3,31	A.G.	10	9	34,00	33,37	33,69
ε Ercole	31 6 42,80	C. T.	10	10	34,76	34,04	34,40
42 Leone	31 20 23,02	A.G.	12	10	33,77	33,00	33,39
ζ Perseo	31 30 37,80	C. T.	11	10	34,80	34,02	34,41
θ Corona	31 46 55,06	A.G.	10	10	33.35	32,39	32,88
ζ Ercole	31 49 50,00	N.A.	10	10	34,80	34,43	34,62
ο Perseo	31 53 25,77	A.G.	12	11	34,38	33,98	34,18
ρ Gemelli	32 1 50,36	A.G.	10	10	33,41	32,90	33,16
α^2 Gemelli	32 9 37,77	N.A.	28	12	34,66	34,12	34,39
ξ Orsa magg.	32 13 55,80	C. T.	15	11	35,96	34,78	35,37
γ Lira	32 31 10,20	C. T.	10	10	34,28	33,58	33,93
$27\pi^1$ Pegaso	32 33 45,40	A.G.	8	7	35,30	34,15	34,73
π^2 Pegaso	32 33 55,73	A.G.	11	13	34,70	33,56	34,13
w Ercole	32 37 47,80	C. T.	10	10	34,87	34,07	34,47
ι Auriga	32 57 56,99	N.A.	39	11	33,87	33,25	33,56
π Andromeda	33 1 51,63	A.G.	11	10	34.26	33,77	34,02
β^1 Lira	33 13 7,28	N.A.	10	10	34,29	33,50	33,90
γ Triangolo	33 16 3,27	A.G.	10	10	33,54	32,83	33,19
ε Cigno	33 30 10,90	C. T.	11	10	34,45	34,02	34,24
π Gemelli	33 43 11,92	A.G.	11	10	33,34	32,77	33,06
ν Orsa magg.	33 46 33,55	A.G.	11	10	34,22	33,36	33,79
δ Boote	33 46 56,30	C. T.	10	10	35,38	34,55	34,97
θ Gemelli	34 6 34,40	C. T.	10	10	34,61	33,87	34,24
σ^1 Corona	34 10 34,20	C. T.	13	10	34,56	33,81	34,19
54 Perseo	34 15 44,85	A.G.	10	10	33,7[illegible]	32,52	33,11
β Triangolo	34 23 41,94	G.M.	10	10	34.57	33,59	34,08
46 Leon. min.	34 53 18,47	A.G.	13	10	35,11	34,38	34,75
α Lince	34 55 11,00	C. T.	10	10	34,19	33,89	34.04
β Andromeda	34 57 26,80	C. T.	15	16	34,53	34,12	34,33
ξ Perseo	35 25 46,20	A.G.	12	9	33,11	32,92	33,02

Specchio I. Latitudini apparenti

Stella	Declinazione media 1875,0	Autorità	Numero delle Osservazioni: dirette	Numero delle Osservazioni: riflesse	Latitudine 41° 53′+ dirette	Latitudine 41° 53′+ riflesse	Latitudine 41° 53′+ medio
	+						
ι Lira	35° 54′ 18″,33	A. G.	11	10	33″,46	33″,42	33″,44
λ Cigno	36 1 55,17	A. G.	12	12	33,77	33,32	33.55
25 Cani da c.	36 55 53,00	C. T.	10	9	34,45	34,07	34,26
10 Leon. min.	36 57 3,58	A. G.	10	11	34,02	33,93	33,98
π Ercole	36 57 4,90	C. T.	10	11	34,37	34,31	34,34
ζ Corona	37 2 32,92	A. G.	12	11	34,49	33,91	34,20
15 Cigno	37 3 11,65	A. G.	11	11	33,57	32.86	33,22
θ Auriga	37 12 4,10	C. T.	12	10	33,53	33.50	33,52
θ Ercole	37 16 5,61	A. G.	10	10	34,78	34,48	34,63
38 Lince	37 19 49,20	A. G.	10	10	34,07	34,37	34,22
31 Leon min.	37 20 47,93	A. G.	12	10	32,81	32,93	32,87
τ Cigno	37 30 46,40	C. T.	28	10	34,08	34,32	34,20
μ Boote	37 48 59,26	A. G.	13	10	34,09	33,89	33,99
μ Andromeda	37 49 14,92	A. G.	12	10	33,35	33,13	33,24
17H Cani da c.	37 49 23,06	A. G.	10	10	34,04	34,02	34,03
θ Lira	37 54 42,76	A. G.	16		33,62		
61^2 Cigno	38 7 59.30	C. T.	17		34,00		
61^1 Cigno	38 8 8,36	N. A.	17		33,55		
μ Auriga	38 20 2,23	G. M.	20		34,17		
ρ Perseo	38 21 15,44	A. G.	16		34,09		
10 Lucertola	38 24 0,00	A. G.	16		33,98		
1450 Groombr.	38 26 34,32	A. G.	17		33,07		
α Lira	38 40 5,95	N. A.	20		33,74		
γ Boote	38 51 20,66	A. G.	17		33,43		
σ Cigno	38 52 17,50	C. T.	18		34,28		
3097 B. A. C.	38 57 0,50	C. T.	18		33,17		
α Cani da c.	38 59 38,06	N. A.	16		34,11		
ν Auriga	39 6 35,07	A. G.	15		35.67		
η Ercole	39 9 39,76	A. G.	16		34,86		
17 Cani da c.	39 9 48,40	A. G.	16		33,93		
5ε Lira med.	39 28 58,57	A. G.	16		34,33		
51 Auriga	39 29 53,41	A. G.	18		33,73		
63 Auriga	39 31 19,00	A. G.	17		33.82		
4ε Lira prec.	39 32 25,11	A. G.	17		34,21		
ε Perseo	39 38 47,02	A. G.	17		34,13		
6 Cani da c.	39 42 43,06	A. G.	16		33,36		
74 Cigno	39 51 8.55	A. G.	27		33,39		
γ Cigno	39 51 27,3	C. T.	16		34,14		
λ Auriga	39 59 7,70	C. T.	16		34,27		
ν Andromeda	40 23 51,90	C. T.	15		34,[illegible]3		
β Perseo	40 28 20,70	C. T.	17		34,40		
2415 Groombr.	40 40 48,68	A. G.	17		33,88		
ν Cigno	40 41 12,09	A. G.	16		34.11		
φ Boote	40 45 40,07	A. G.	16		33,12		
β Boote	40 53 4,50	C. T.	16		34.26		
ζ Auriga	40 53 27,21	A. G.	16		33,72		
η Auriga	41 3 46,87	G. M.	15		33 25		
64 Auriga	41 6 9,54	A. G.	16		33.25		
13 Lucertola	41 9 47,86	A. G.	16		32,85		
20 Cani da c.	41 13 51,42	A. G.	17		33,88		
ν Boote pre.	41 15 57,02	G. M.	18		34,68		
ν Boote seg.	41° 19′ 28″.58	A. G.	16		34″,23		
2 Cani da c.	41 21 21,52	A. G.	16		33,53		
19 Leon min.	41 38 58,10	A. G.	17		32,72		
ο Andromeda	41 39 16,42	G. M.	45		34,07		
γ Andromeda	41 43 43,37	A. G.	38		34,08		
8 Cani da c.	42 2 12,31	A·G.	24		33,19		
2533 Groombr.	42 7 3,32	A. G.	41		34,70		
μ Orsa magg.	42 7 38,40	G. M.	46		34,40		
ν Perseo	42 10 52,80	A. G.	28		33,93		
10 Orsa magg.	42 16 33.51	A. G.	17		33,81		
ι Andromeda	42 34 34,80	C. T.	16		34,01		
σ Ercole	42 41 45,13	G. M.	14		34,14		
ξ Cigno	43 25 47,14	A. G.	18		33,89		
λ Orsa magg.	43 32 14.36	A. G.	18		33,61		
31 Lince	43 35 13,13	A. G.	14		33,79		
ε Auriga	43 38 9,23	G. M.	16		33,69		
χ Andromeda	43 38 31,48	A. G.	17		33,82		
ψ^5 Auriga	43 41 57,02	A. G.	16		33,07		
36 Lince	43 43 52,71	A. G.	16		33,45		
13R Lira	43 46 55,92	A. G.	15		33,03		
58 Orsa magg.	43 51 32,60	A. G.	19		33,52		
δ Cigno	44 49 35,90	C. T.	15		33,40		
α Cigno	44 50 4,04	N. A.	22		33,75		
β Auriga	44 55 55.80	C. T.	16		34,34		
33 Boote	44 56 40,91	A. G.	16		33,20		
ψ Boote	45 10 34,40	C. T.	16		33,90		
φ Ercole	45 15 48,65	A. G.	16		33,73		
22 Andromeda	45 22 34,86	A. G.	18		33,45		
λ Andromeda	45 46 50,62	A. G.	10		32,73		
α Auriga	45 52 5,22	N. A.	35		33,08		
g Cigno	45 59 23,28	A. G.	12	10	33,65	32″,89	33″,27
ι Ercole	46 4 24,48	A. G.	10	11	33,60	33.06	33,33
ο Cigno	46 21 47,11	G. M.	11	10	33,84	33,35	33,60
τ Ercole	46 36 42,41	A. G.	10	10	33,49	3[illegible],19	33,34
λ Boote	46 39 47,27	G. M.	11	10	33,49	33,80	34,15
c Perseo	47 22 34,52	A. G.	10	10	33,55	32,82	33,19
δ Perseo	47 23 8,30	C. T.	23	10	33,66	33,00	33,33
σ Perseo	47 33 41.58	A. G.	9	9	33,68	33,13	33,40
ο Cassiopea	47 35 59,71	G. M.	9	9	34,43	34.12	34.28
κ Orsa magg.	47 38 55,72	A. G.	10	10	33,18	32,80	32,99
26 Lince	47 53 10,67	A. G.	10	11	33,87	33,32	33,60
υ Perseo	47 59 38,67	G. M.	11	10	33,69	32,67	33,18
χ Ercole	48 21 56,72	A. G.	12	10	34,37	33,22	33,80
χ Orsa magg.	48 28 20,85	G. M.	19	11	34,54	33,56	34,05
ι Orsa magg.	48 31 50,54	N. A.	10	10	33,32	32,64	32.98
θ Perseo	48 41 52,80	A. G.	10	10	33,27	32.26	32,77
π^2 Cigno	48 43 53,81	A. G.	18	11	33,76	33,05	33,41
ι Perseo	49 8 2,51	A. G.	10	10	35,05	34,36	34,71
ψ^1 Auriga	49 20 55,50	A. G.	10	12	33,83	32,80	33,32

Specchio I.

Latitudini apparenti

Stella	Declinazione media 1875,0	Autorità	Numero delle Osservazioni: dirette	Numero delle Osservazioni: riflesse	Latitudine 41° 53′+: dirette	Latitudine 41° 53′+: riflesse	Latitudine 41° 53′+: medio
	+						
α Perseo	49° 24′ 51″,03	N.A.	28	10	33″,57	32″,51	33″,04
7α Lucertola	49 38 25,00	G.M.	10	10	33,86	32,73	33,30
ο Auriga	49 46 7,10	A.G.	12	9	33,33	32,46	32,90
θ Cigno	49 55 56,61	G.M.	10	11	33,59	33,10	33,35
η Orsa magg.	49 56 15,40	N.A.	11	10	33,78	33,41	33,60
φ Andromeda	50 3 28,30	C. T.	21	10	33,40	32,63	33,02
1757 Groombr.	50 9 28,70	A.G.	11	9	33,76	32,74	33,25
6 Perseo	50 29 1,35	A.G.	10	10	33,63	33,20	33,42
ι^2 Cigno	51 27 51,04	G.M.	12	10	33,84	33,47	33,66
γ Dragone	51 30 14,91	N.A.	11	11	32,91	32,38	32,65
3β Lucertola	51 36 11,75	G.M.	9	10	33,81	33,45	33,63
27 Lince	51 51 52,30	A.G.	10	10	32,91	32,73	32,82
ι Boote	51 56 39,41	A.G.	12	10	32,78	32,49	32,64
ψ Cigno	52 6 27,84	G.M.	11	10	33,50	33,16	33,33
θ Orsa magg.	52 14 43,57	N.A.	10	12	33,39	32,70	33,05
τ Perseo	52 14 56,99	G.M.	9	11	34,01	33,95	33,98
β Dragone	52 23 40,11	N.A.	10	10	33,42	32,89	33,16
θ Boote	52 25 45,30	G.M.	20	11	33,58	33,11	33,35
γ Perseo	53 0 53,64	A.G.	10	12	33,40	32,63	33,02
κ Cigno	53 8 18,60	G.M.	11	11	33,87	33,54	33,71
1460 Groombr.	53 8 50,42	A.G.	10	11	32,70	32,35	32,53
ζ Cassiopea	53 12 31,04	G.M.	8	10	33,00	32,45	32,73
1 Giraff. seg.	53 38 10,93	A.G.	12	9	32,68	32,47	32,58
δ Auriga	54 16 19,14	G.M.	10	11	33,59	33,59	33,59
μ Cassiopea	54 18 23,30	C. T.	10	10	33,83	33,51	33,67
γ Orsa magg.	54 23 22,46	N.A.	17	16	32,58	32,32	32,45
1051 Groombr.	54 46 28,34	A.G.	11	11	32,36	32,14	32,25
2296 Groombr.	55 6 12,28	A.G.	10	10	32,55	32,61	32,58
ν Drag. seg.	55 15 30,64	A.G.	10	10	32,68	32,39	32,53
ν Drag. prec.	55 16 12,38	A.G.	12	10	32,40	32,51	32,46
η Perseo	55 22 29,99	A.G.	10	10	33,47	33,31	33,39
2343 Groombr.	55 29 23,78	A.G.	11	11	33,78	33,13	33,46
19 Lince seg.	55 30 50,15	A.G.	10	11	32,77	32,47	32,62
ζ Orsa magg	55 34 42,70	C. T.	9	11	33,15	32,54	32,85
α Cassiopea	55 51 5,11	N.A.	11	12	33,22	32,64	32,93
33 Cigno	56 11 8,51	G.M.	13	5	32,70	32,59	32,65
3007 Brad.	56 28 41,57	A.G.	11	10	33,03	32,59	32,81
4 Giraffa	56 31 55,64	A.G.	10	10	32.80	32,41	32,61
36 Orsa magg.	56 37 14,17	G.M.	10	10	32.96	32,58	32,77
ε Orsa magg.	56 38 18,30	C. T.	12	10	32,73	32,15	32,44
ρ Cassiopea	56 48 13,18	A.G.	11	11	32,97	32,56	32,77
ξ Dragone	56 53 34,12	A.G.	12	10	33,77	33,59	33,68

Stella	Declinazione media 1875,0	Autorità	Numero delle Osservazioni: dirette	Numero delle Osservazioni: riflesse	Latitudine 41° 53′+: dirette	Latitudine 41° 53′+: riflesse	Latitudine 41° 53′+: medio
	+						
13H Cefeo	56° 55′ 26″,69	A.G.	10	9	32″,57	32″,41	32″,49
2377 Groombr.	57 0 20,13	A.G.	10	10	32,45	32,43	32,44
β Orsa magg.	57 3 6,50	C. T.	10	10	33,54	33,21	33,38
6H Cefeo	57 7 53,19	A.G.	10	10	33,86	33,60	33,73
η Cassiopea	57 9 7,43	A.G.	10	10	33,25	33,14	33,20
ζ Cefeo	57 35 7,90	C. T.	10	10	32,63	32,70	32,67
37 Orsa magg.	57 43 31,65	A.G.	9	10	32,59	33,08	32,84
δ Orsa magg.	57 43 38,30	G.M.	13	14	34,00	33,87	33,94
δ Cefeo	57 46 32,08	A.G.	10	10	32,04	32,15	32,10
β Cassiopea	58 27 36,40	C. T.	10	11	33,11	33.04	33,08
15 Lince	58 35 0,42	G.M.	10	11	33,00	33,24	33,12
b Dragone	58 43 43,39	A.G.	18	10	32,76	32,91	32,84
θ Dragone	58 53 58,33	G.M.	11	11	32,09	32,34	32,22
24 Lince	58 59 59,43	A.G.	11	10	32,48	33,03	32,76
2 Lince	59 3 9,74	A.G.	10	10	32,49	32,89	32,69
74 Orsa magg.	59 5 36,48	G.M.	10	10	32,64	32,83	32,74
ο Dragone s.	59 14 9,32	A.G.	10	12	33,12	32,80	32,96
ι Dragone	59 24 17,10	C. T.	11	11	33,36	33,57	33,47
3415 Groombr.	59 28 22,58	A.G.	11	11	32,67	32,41	32,54
2H Giraffa	59 30 8,15	A.G.	10	10	33,42	33,02	33,22
δ Cassiopea	59 35 5,00	C. T.	10	9	33,28	33,03	33,16
υ Orsa magg.	59 37 10,00	G.M.	11	10	33,14	33,48	33,31
2164 Groombr.	59 48 8,74	A.G.	16	10	32,24	32,50	32,37
γ Cassiopea	60 2 21,80	C. T.	11	10	33,23	33,50	33,37
β Giraffa	60 15 23,00	C. T.	27	10	32,97	33,58	33,28
69 Orsa magg.	60 35 30,17	A.G.	11	13	32,82	33,49	33,16
53 Giraffa	60 39 48,11	A.G.	10	11	32,90	33,09	33,00
9H Giraffa	60 44 23,86	A.G.	9	10	32.93	33,20	33,07
2125 Groombr.	60 46 36,29	A.G.	10	10	31.93	32,24	32;09
ο Orsa magg.	61 7 59,70	A.G.	11	11	32,81	33,07	32,94
η Cefeo	61 21 26,98	A.G.	10	10	33,14	33,21	33,17
8 Lince	61 35 15,42	A.G.	10	10	32,56	32.94	32,75
4 Cassiopea	61 35 47,51	A.G.	10	10	32,62	32,82	32,72
η Dragone	61 47 52,00	C. T.	11	9	33,40	33,59	33,50
α Cefeo	62 3 22,08	N.A.	10	10	32,24	32,66	32,45
20 Cefeo	62 10 34,46	A.G.	10	10	33,60	33;80	33,70
κ Cassiopea	62 14 29,96	A.G.	11	10	32,98	33,50	33,24
α Orsa magg.	62 25 30,55	N.A.	12	11	32,61	32,85	32,73
θ Cefeo	62 34 27,70	A.G.	12	10	32,78	32,82	32,80
30 Cefeo	62 56 5,77	A.G.	10	10	33,33	33,75	33,54
17 Giraffa	62 57 33,47	A.G.	8	11	33,28	33,49	33,39
ε Cassiopea	63 3 11,54	G.M.	13	10	32,67	32,98	32,83
82 Brad.	63 33 58,88	A.G.	10	10	32,95	33,35	33,15

Dall'esame di questo specchio risulta manifestamente l'influenza di errori sistematici, dipendentemente dalle varie distanze zenitali delle stelle e dalla loro posizione relativamente al sud ed al nord, e fra le osservazioni dirette e riflesse; in causa delle quali influenze i valori della latitudine dedotta dai varî gruppi di stelle riescono sensibilmente diversi, malgrado il numero abbastanza grande delle stelle componenti ciascun gruppo, per poter ritenere in grande parte almeno compensati gli errori o le incertezze delle declinazioni delle singole stelle.

Allo scopo di rendere più manifesta l'influenza di questi errori sistematici, e di scoprire possibilmente il loro andamento, si sono riuniti nel seguente Specchio II i valori della latitudine, dedotti dai risultati medî dei varî gruppi di stelle di 2° in 2°, e da 0° a 22° sud e nord dal zenit.

Specchio II. — Latitudini apparenti alle varie distanze zenitali

Distanza zenitale sud	Numero delle stelle	Numero delle osser.		Latitudine 41° 53′ +			Distanza zenitale nord	Numero delle stelle	Numero delle osser.		Latitudine 41° 53′ +		
		dir.	rifl.	Osser. dir.	Osser. rifl.	Medio			dir.	rifl.	Osser. dir.	Osser. rif.	Medio
Da 0° a 2°	18	343	—	33″,81	—	—	Da 0° a 2°	16	335	—	33″,73	—	—
» 2° a 4°	23	399	—	33″,94	—	—	» 2° a 4°	9	164	—	33″,51	—	—
» 4° a 6°	15	183	155	33″,93	33″,76	33″,85	» 4° a 6°	11	116	101	33″,67	33″,13	33″,40
» 6° a 8°	8	93	85	34″,30	33″,64	33″,97	» 6° a 8°	11	150	113	33″,88	32″,93	33″,41
» 8° a 10°	15	188	154	34″,44	33″,68	34″,06	» 8° a 10°	9	105	91	33″,51	33″,01	33″,26
» 10° a 12°	11	117	113	34″,29	33″,55	33″,92	» 10° a 12°	11	123	117	33″,30	32″,89	33″,10
» 12° a 14°	16	182	181	34″,43	33″,64	34″,04	» 12° a 14°	12	131	133	33″,03	32″,76	32″,89
» 14° a 16°	13	144	139	34″,60	33″,71	34″,16	» 14° a 16°	16	171	159	32″,99	32″,81	32″,90
» 16° a 18°	11	121	126	34″,73	33″,79	34″,26	» 16° a 18°	14	159	146	32″,85	32″,94	32″,90
» 18° a 20°	14	179	187	34″,39	33″,36	33″,88	» 18° a 20°	11	130	114	32″,86	33″,16	33″,01
» 20° a 22°	12	142	125	34″,58	33″,30	33″,94	» 20° a 22°	9	96	92	32″,93	33″,24	33″,09
Somme e medî	156	2091	1265	34″,32	33″,60	34″,01	Somme e medî	129	1680	1055	33″,30	32″,97	32″,97

Le sensibili differenze nel valore della latitudine presentano nel loro andamento una regolarità abbastanza manifesta, per riconoscere tosto nelle medesime l'influenza di errori sistematici o costanti; a fronte dei quali possono ritenersi quasi eliminati o trascurabili gli errori accidentali delle osservazioni, e gli errori delle declinazioni delle stelle.

Ritenendo in ogni gruppo convenientemente compensati gli errori di declinazione delle stelle e gli errori accidentali, dal riportato specchio si rileva che per gli errori sistematici del nostro circolo il valore della latitudine può oscillare entro i limiti di circa 2″, secondochè viene determinato con varie parti del circolo, o colle varie distanze zenitali delle stelle, e secondochè viene determinata con osservazioni dirette o riflesse.

Nei singoli risultati di questo specchio gli errori sistematici sono fra loro combinati o fusi in modo, da non permettere l'immediata percezione delle loro speciali influenze: ma ciò non impedisce che per mezzo di opportune combinazioni non si possano isolare ed anche apprezzare, almeno in modo abbastanza approssimativo, i principali

di questi errori, e riconoscere quindi l'influenza da ognuno di essi esercitata nella misura della latitudine, o delle distanze zenitali delle varie stelle.

Ma prima di venire a questo esame, credo opportuno di ricavare dai dati di questo specchio il valore assoluto o vero della nostra latitudine, combinando le osservazioni in modo da compensare od eliminare i varî errori sistematici o costanti, come già feci nelle mie due antecedenti Note, *Sulla latitudine dell'Osservatorio del Campidoglio.*

Latitudine assoluta dell'Osservatorio. — Se dallo specchio II prendiamo i quattro valori della latitudine ottenuti da due gruppi di stelle simmetrici rispetto allo zenit, osservati direttamente e per riflessione, dal medio dei quattro valori possiamo ritenere rappresentato il valore della latitudine esente da tutti gli errori sistematici o costanti, perchè opportunamente compensati, o dalle osservazioni dirette colle riflesse, o dalle osservazioni al sud con quelle al nord. Infatti nel medio delle osservazioni dirette e riflesse dello stesso gruppo è compensata la flessione del cannocchiale e l'errore della divisione usata per la determinazione del nadir; mentre nel medio delle osservazioni dei due gruppi sud e nord sono compensati gli errori sistematici delle varie parti del circolo corrispondenti a quei gruppi, con tutta la probabilità di avere compensati anche gli errori dipendenti dal modo di collimazione nel passaggio dalle stelle dirette alle riflesse, e dalle stelle al nord a quelle al sud.

In questo medio può inoltre ritenersi compensato anche l'errore proveniente dalla deformazione dell'immagine delle stelle osservate per riflessione a tale vicinanza allo zenit, da potersi ottenere la riflessione dei raggi sopra una parte soltanto dell'obiettivo; perchè nelle osservazioni al sud lo spostamento del centro apparente dell'immagine è probabilmente simmetrico a quello prodotto nelle osservazioni al nord.

Non resterebbe quindi nel medio stesso altra incertezza che quella dipendente dagli errori accidentali delle osservazioni e dagli errori delle declinazioni delle stelle componenti i due gruppi; ma il numero notevole delle osservazioni, ed il numero abbastanza grande delle stelle osservate e la probabile piccolezza degli errori di queste declinazioni, se non permettono di ritenere completamente compensati questi errori, ci autorizzano però a considerare la loro influenza sul valore della latitudine confinata in limiti assai ristretti. E ciò viene confermato dalla piccolezza delle differenze presentate dai valori della latitudine dedotti dalle nove coppie di gruppi simmetrici contenuti nelle nostre osservazioni.

Infatti prendendo nello specchio II per ogni coppia il medio dei risultati delle osservazioni dirette e riflesse, si ottiene:

Gruppi								Latitudine	N.° delle stelle
4°	a	6°	I	Nord	e	I	Sud	41°. 53′. 33″,62	26
6	»	8	II	»		II	»	33, 69	19
8	»	10	III	»		III	»	33, 61	24
10	»	12	IV	»		IV	»	33, 51	22
12	»	14	V	»		V	»	33, 47	28
14	»	16	VI	»		VI	»	33, 53	29
16	»	18	VII	»		VII	»	33, 58	25
18	»	20	VIII	»		VIII	»	33, 45	25
20	»	22	IX	»		IX	»	33, 52	21
							Medio	41°. 53′. 33, 55	Somma 219

Le differenze dei valori della latitudine, dedotti dalle varie coppie, col medio generale arrivano appena al decimo di secondo, escludendo la seconda coppia per la quale la differenza ammonterebbe a 0″,14, il che è probabilmente dovuto al troppo scarso numero delle stelle osservate al sud.

La quasi identità dei valori della latitudine ottenuti dalle varie coppie di gruppi, malgrado la diversità ed indipendenza degli elementi o dati usati, mentre ci autorizza a ritenere nel medio generale rappresentato con tutta la desiderabile approssimazione il valore assoluto della latitudine del nostro Osservatorio, ci dà motivo poi di ritenere come assai probabile, che nei singoli valori ottenuti per ogni gruppo, tanto nelle osservazioni dirette che nelle riflesse, siano convenientemente compensati gli errori accidentali delle osservazioni e gli errori delle declinazioni delle stelle: e che perciò i valori della latitudine ottenuti dai varî gruppi siano affette soltanto dagli errori sistematici o costanti.

In questa determinazione della latitudine sono naturalmente escluse le osservazioni dei primi due gruppi sud e nord, da 0° a 2° e da 2° a 4°, ne' quali le stelle non poterono osservarsi che direttamente; e volendo far concorrere anche queste osservazioni alla misura della latitudine, è necessario di ricorrere ad un altro processo per applicare ai risultati ottenuti le correzioni relative agli errori sistematici o costanti.

Prendendo il medio dei valori della latitudine ottenuti dai due gruppi 0° a 2° sud, 0° a 2° nord, e dai due gruppi 2° a 4° sud, 2° a 4° nord abbiamo:

Gruppi	Latitudine	N.° delle stelle
0° — 2° Sud e 0° — 2° Nord	41°. 53′. 33″,77	34
2° — 4° Sud e 2° — 4° Nord	33,73	32
	Medio 41. 53. 33,75	Somma 66

In questi medî parziali e nel medio generale possiamo ritenere compensata la flessione del cannocchiale e molto probabilmente anche l'errore possibile nella collimazione delle stelle dal sud al nord, ma restano tuttora le influenze degli errori delle divisioni del circolo; e cioè l'errore sistematico della graduazione e gli errori accidentali delle divisioni.

Trattandosi però di un arco esteso a soli 8 gradi, e nel quale l'errore sistematico varia quasi proporzionalmente all'arco, stabilito il punto zenitale come origine degli archi, gli errori dal sud al nord essendo di segno contrario e prossimamente simmetrici, la loro influenza può ritenersi compensata nel medio dei risultati di ognuna delle due coppie di gruppi, e quindi nel loro medio generale.

Ma ciò non esclude l'esistenza di un errore costante nei medî stessi, e quindi nel valore della latitudine, potendo la divisione, sulla quale si è costantemente puntato il nadir, e che sul circolo corrisponde all'arco 11°.56′, 101°.56′, 191°.56′ e 281°.56′, essere affetta da un errore accidentale, ossia non corrispondere esattamente al posto normale dell'arco letto.

Per verificare se realmente esista in questa divisione un errore accidentale, e per determinarne il senso e la grandezza, si è stabilito di collimare coi quattro microscopî le divisioni 11°.......52′,54′, 56′, 58′, 60′, di prendere quindi il medio delle

cinque letture fatte, ed il medio delle tre letture fatte a 54′, 56′, 58′, e considerare come punto normale dell'arco 11°.56′, il medio di questi due medî, ossia il punto di mezzo fra il medio delle cinque e quello delle tre divisioni comprendenti quella del nadir. La differenza fra questo medio e la lettura fatta sulla divisione 11°.56′ veniva a costituire l'errore accidentale della divisione stessa, e quindi l'errore costante del nadir rispetto alla graduazione del circolo.

Quando ho parlato di letture fatte sulle divisioni 52′, 54′..........non intendeva di parlare delle singole letture fatte a ciascun microscopio, ma bensì del medio delle letture fatte ai quattro microscopî sopra ciascuna divisione. D'altronde questo processo è quello stesso adottato e seguìto nella determinazione degli errori accidentali della graduazione del circolo.

Ripetuta questa operazione per 18 volte si è ottenuto come risultato medio

$$\text{Punto normale} - 11^\circ.56' = + 0'',23, \text{ coll'errore probabile } \pm 0'',0085.$$

Ciò prova che il nadir, costantemente determinato col medio delle letture fatte ai quattro microscopî sulle divisioni 11°, 101°, 191°, 281°.56′, non corrispondeva sulla graduazione del circolo a 56′, ma bensì a 56′ — 0″,23; cosicchè gli archi letti per le distanze zenitali riescivano aumentati della costante 0″,23: e per conseguenza riescivano di altrettanto aumentati i valori ottenuti per la latitudine dalle osservazioni dirette, e di altrettanto diminuiti quelli ottenuti dalle osservazioni riflesse; producendo l'indicato errore l'effetto di uno spostamento apparente dello zenit dal sud verso il nord di 0″,23.

Nella latitudine determinata col medio dei risultati ottenuti dalle osservazioni dirette e riflesse quest'errore veniva eliminato o compensato; ma nella latitudine dedotta dalle sole osservazioni dirette esso esiste tanto per le osservazioni al sud che al nord; e perciò deve applicarsi ai risultati la relativa correzione — 0″,23.

Applicando questa correzione alla latitudine ottenuta dal risultato medio dei gruppi 0° a 2° sud, 0° a 2° nord; e 2° a 4° sud, 2° a 4° nord, si ottiene:

Gruppi	Latitudine
0° — 2° Sud e 0° — 2° Nord	41°.53′. 33″,54
2° — 4° Sud e 2° — 4° Nord	33, 50
Medio	41°.53. 33 , 52

valore quasi identico a quello ricavato dalle osservazioni dirette e riflesse.

Questo risultato tende poi a mostrare che nella determinazione del nadir, se non può ritenersi assolutamente esclusa qualche incertezza dovuta al modo di collimazione del filo diretto col riflesso, od al modo di illuminazione dei fili o del campo del cannocchiale, l'errore dovuto a questa causa deve però ritenersi come assai piccolo e ragionevolmente trascurabile. E certamente questo vantaggio è dovuto alla grande cura usata in tale operazione, ed ai modi di verifica e di controllo coi quali si è cercato di escludere dai risultati qualunque errore sistematico o costante.

Dal complesso di tutte le osservazioni la nostra latitudine resterebbe definita nel valore:

$$\varphi = 41^\circ.53'.\,33'',55$$

che diversifica di soli 0″,04 dai valori antecedentemente trovati collo stesso metodo, ma con un numero minore di stelle, e senza applicare alle osservazioni le correzioni per gli errori accidentali della graduazione del circolo.

L'esattezza, o la grande approssimazione di questo valore della nostra latitudine, è poi confermata col risultato quasi identico ottenuto dalle osservazioni dirette e riflesse della polare nel suo passaggio superiore ed inferiore al meridiano, per le quali si è avuto:

$$\varphi = 41°.53'.\ 33'',51.$$

Latitudine istrumentale. — Se nei valori della latitudine ottenuti pei varî gruppi di stelle, quali sono riportati nello specchio II, potessimo ritenere pienamente compensati gli errori delle declinazioni delle stelle stesse, si potrebbero considerare questi valori come rappresentanti le latitudini istrumentali alle varie distanze zenitali di 2° in 2°, dalle quali poi per interpolazione potrebbero ricavarsi anche le latitudini istrumentali pei gradi intermedî.

La piccolezza delle differenze presentate dai valori della latitudine, ottenuti dalle osservazioni dirette e riflesse delle nove coppie di gruppi simmetrici rispetto alla verticale, ci ha già provato che questa compensazione degli errori delle declinazioni delle stelle nei varî gruppi, se non può ritenersi compiutamente verificata, pure essa può considerarsi come già portata ad un notevole grado di approssimazione. Ma allo scopo di meglio assicurare questa conclusione, e di accertare il grado di fiducia che può accordarsi ai valori delle latitudini istrumentali dati dallo specchio II, credo opportuno di instituire il confronto fra gli errori istrumentali, già per altra via approssimativamente determinati, e gli errori corrispondenti ricavati da opportune combinazioni dei risultati delle osservazioni.

Flessione del cannocchiale. — Se per ogni coppia di gruppi simmetrici rappresentiamo con φ_s, φ'_s i valori ottenuti per la latitudine dalle osservazioni dirette e riflesse del gruppo sud, e con φ_n e φ'_n quelli ottenuti dalle osservazioni dirette e riflesse del gruppo nord, nei due medî $\frac{\varphi_s + \varphi'_n}{2}$ e $\frac{\varphi_n + \varphi'_s}{2}$ si possono ritenere compensati gli errori sistematici della graduazione del circolo e l'errore del nadir, restando però la sola flessione F con segno opposto; dimodochè, facendo astrazione da qualunque altro errore sistematico o costante, si avrebbe

$$\frac{\varphi_s + \varphi'_n}{2} - \frac{\varphi_n + \varphi'_s}{2} = 2\,\mathrm{F} = 2\,k \operatorname{sen} z, \text{ e quindi } \frac{\varphi_s + \varphi'_n}{4} - \frac{\varphi_n + \varphi'_s}{4} = \mathrm{F} = k \operatorname{sen} z,$$

chiamando k la costante della flessione, e z la distanza zenitale media dei due gruppi di stelle. Ma conoscendosi già il valore approssimativo della costante k del nostro cannocchiale, che è di 0″,94, si possono calcolare i valori di F o di k sen z per tutti i nove gruppi, mentre dai valori di φ dati dallo specchio II si possono ricavare i valori stessi, e quindi verificare quale accordo esista fra gli F calcolati e gli osservati.

Ma questo accordo non è ragionevolmente sperabile altro che pei gruppi lontani dallo zenit più di 8°; perchè nei gruppi più vicini il valore della latitudine può essere affetto da un altro errore costante, e cioè dallo spostamento apparente del centro dell'immagine riflessa della stella, in causa della riflessione dei raggi sopra una parte

soltanto dell'obiettivo, e precisamente sopra la parte del medesimo più lontana dalla verticale dello stromento. Che anzi per questi gruppi le differenze fra i valori calcolati di F e quelli dati dall'osservazione potrebbero servire di norma per determinare il senso e la grandezza approssimativa di questo nuovo errore sistematico.

Ciò posto, prendendo dallo specchio II i valori $\frac{\varphi_s + \varphi'_n}{4} - \frac{\varphi_n + \varphi'_s}{4} = F$ per le varie coppie di gruppi, e calcolando la formola k sen $z = 0'',94$ sen z pei diversi valori di z corrispondenti ai gruppi stessi si trova:

Distanza zenitale	Flessione		Distanza zenitale	Flessione	
	Calcolata	Osservata		Calcolata	Osservata
21°	+ 0″,34	+ 0″,38	11°	+ 0″,18	+ 0″,08
19	0, 31	0 ,34	9	0 ,15	+ 0 ,06
17	0 ,27	0 ,30	7	0 ,11	— 0 ,07
15	0 ,24	0 ,18	5	0 ,08	— 0 ,16
13	0 ,21	0 ,13			

Esclusi i due gruppi più vicini allo zenit nei quali la latitudine, come ho indicato, può essere affetta da un altro errore sistematico oltre la flessione, il valore di F osservato si accorda col calcolato non solamente pel segno, ma anche nella grandezza, specialmente nei gruppi più distanti dallo zenit, nei quali le differenze sono ristrette a pochi centesimi di secondo.

Le differenze aumentano col diminuire delle distanze zenitali, giungendo fino a 0″,10, ma ciononostante esse possono sempre riguardarsi come abbastanza piccole, valutandole non col valore di F, ma colla influenza od alterazione da esse prodotta nel valore delle distanze zenitali o della latitudine; non essendo poi escluso che l'aumento quasi sistematico di queste differenze colla diminuzione della distanza zenitale possa anche provenire dal non essere nel nostro cannocchiale rigorosamente verificata la supposta legge della flessione $F = k$ sen z, cioè che nelle piccole distanze zenitali la flessione stessa diminuisca più rapidamente.

Riguardo ai valori di F dei due gruppi più vicini allo zenit, i quali riescono di segno contrario ai calcolati, la spiegazione deve ricercarsi nello spostamento apparente dell'immagine delle stelle, prodotto dai raggi riflessi sopra una porzione soltanto dell'obiettivo; il quale spostamento si ridurrebbe ad un aumento della distanza zenitale di circa 0″,2 per le stelle del gruppo a 7° di distanza media dallo zenit, e di circa 0″,3 per quelle del gruppo a 5°.

Questo errore, influendo in senso opposto sul valore della latitudine dedotto dai gruppi sud e nord, devesi ritenere compensato nella latitudine ricavata dal medio delle osservazioni sud e nord; ma esso sussiste necessariamente nelle latitudini istrumentali.

La piccolezza di questo errore mi sembra tale da giustificare la determinazione presa di spingere l'osservazione per riflessione anche a piccole distanze zenitali; poichè ciò facendo si è ottenuto il vantaggio di avere per la maggior parte delle stelle un doppio sistema di osservazioni, molto opportuno per l'eliminazione o compenso degli errori sistematici o costanti di maggiore entità; col solo inconveniente di introdurre

un piccolo errore, la cui influenza, mentre non altera il valore della latitudine assoluta, resta poi eliminata nella deduzione della declinazione delle stelle per mezzo delle rispettive latitudini istrumentali, essendo da tale errore affette egualmente, tanto queste latitudini quanto le distanze zenitali delle stelle.

Errore del nadir o zenit. — Combinando i quattro valori φ_s, φ'_s, φ_n e φ'_n, ottenuti da una qualunque coppia di gruppi simmetrici di stelle, nel modo seguente

$$\frac{\varphi_s + \varphi_n}{2} - \frac{\varphi'_s + \varphi'_n}{2},$$

questa quantità deve rappresentare il doppio dell' errore del nadir, perchè questo errore cambia di segno dalle osservazioni dirette alle riflesse, tanto al sud che al nord, e perchè in essa sono compensati gli errori sistematici del circolo e la flessione: per cui chiamatolo N, supponendo compensati gli errori delle declinazioni delle stelle componenti ciascun gruppo, avremo:

$$\frac{\varphi_s + \varphi_n}{4} - \frac{\varphi'_s + \varphi'_n}{4} = \text{N}.$$

Se quindi coi dati dello Specchio II dedurremo per ogni coppia di gruppi il valore di questa differenza, essa dovrà riescire costante ed eguale prossimamente a 0″,23 valore già trovato direttamente per N.

Prendendo dallo Specchio II queste differenze, e disponendole in ordine alla loro distanza zenitale decrescente, si ha

Coppie dei gruppi a	Errore del nadir
21°	+ 0″,25
19	0, 19
17	0, 21
15	0, 27
13	0, 26
11	0, 29
9	0, 31
7	0, 40
5	0, 21
Medio	+ 0, 27

Il medio di queste differenze non diversifica che di 0″,04 dal valore di N dedotto dalle misure dirette, e il massimo allontanamento dal medio è dato dalla coppia a 7° dallo zenit, per la quale si è già fatto rilevare essere troppo scarso il numero delle stelle al sud, e quindi meno probabile la compensazione degli errori delle declinazioni delle stelle stesse. Facendo astrazione da questa coppia gli allontanamenti dal medio, che sarebbe 0″,26, sono tutti inferiori a 0″,08. Questi risultati, se non ci permettono di ritenere compiutamente compensati nei valori delle latitudini istrumentali gli errori delle declinazioni usate, ci autorizzano però a ritenere questa compensazione come convenientemente approssimata, e tale da assicurare nella determinazione della declinazione delle stelle minore incertezza di quella che in generale può, e deve temersi dal metodo delle osservazioni assolute.

Errori della graduazione del circolo. — Un'altra prova della conveniente approssimazione di queste latitudini istrumentali, può ricavarsi col combinare le latitudini φ_s, φ'_s, φ_n e φ'_n in modo da far emergere la differenza degli errori sistematici del circolo nei due archi corrispondenti per ogni gruppo alle osservazioni dirette e riflesse, o ciò che torna lo stesso nei due archi corrispondenti alle osservazioni dirette sud e dirette nord dei due gruppi simmetrici componenti ciascuna coppia.

Chiamati E, E′ gli errori sistematici della graduazione del circolo nelle parti corrispondenti a due gruppi simmetrici, supponendo compensati gli errori delle declinazioni delle stelle, avremo:

$$\frac{\varphi_s + \varphi'_s}{2} - \frac{\varphi_n + \varphi'_n}{2} = \mathrm{E} - \mathrm{E}'$$

essendo in questa differenza compensato l'errore del nadir e la flessione: cosicchè per ogni coppia di gruppi si potrà coi dati dello Specchio II determinare la differenza dei due errori.

Ciò posto, siccome dall'esame anteriormente fatto della graduazione del circolo sono già approssimativamente noti gli errori sistematici di 10° in 10°, determinando per interpolazione gli errori corrispondenti ai gradi intermedî, si potranno ottenere anche per questa via i valori di E—E′ per le indicate coppie, e quindi verificare quale accordo esista fra questi e quelli.

Chiamando i valori di E—E′, dati dallo Specchio II, valori *osservati*, e chiamando *misurati* quelli ottenuti dall'esame della graduazione del circolo, si ottiene la seguente tavola di confronto:

Coppie di gruppi a	E—E′		Differenze
	Osservati	Misurati	
21°	+ 0″,90	+ 1,16	— 0″,26
19	0 ,87	1,22	— 0 ,35
17	1 ,36	1,24	+ 0 ,12
15	1 ,22	1,15	+ 0 ,07
13	1 ,14	1,05	+ 0 ,09
11	0 ,87	0,82	+ 0 ,05
9	0 ,80	0,62	+ 0 ,18
7	0 ,56	0,44	+ 0 ,12
5	0 ,50	0,32	+ 0 ,18

Considerando che gli errori della graduazione del circolo sono stati determinati soltanto di 10° in 10°, che i loro valori sono soltanto approssimativi, e che il loro andamento alle distanze zenitali maggiori di 18° è troppo irregolare per permettere una sicura interpolazione per gli archi intermedî a quelli esaminati, non si troveranno certamente troppo grandi le differenze risultanti fra gli errori osservati ed i misurati. Che anzi escluse le prime due coppie di gruppi per le quali tali differenze giungono

a circa 0″,3, per le altre coppie l'accordo fra gli errori osservati e misurati può ritenersi come molto soddisfacente, specialmente avuto riguardo alle molteplici cause che possono concorrere, anche indipendentemente dagli errori delle declinazioni delle stelle, alla produzione di tali differenze.

Riguardo alle più sensibili differenze trovate per le coppie a 19° e 21°, ritengo che esse si debbano piuttosto ripetere dalla irregolarità dell'andamento degli errori della graduazione del circolo, anzichè dalla influenza degli errori delle declinazioni delle stelle; essendo ciò confermato anche dal fatto che per queste coppie l'errore del nadir e la flessione risultano quasi identici ai valori per essi direttamente determinati.

Dal complesso di questi confronti e dai risultati ottenuti mi sembra manifestamente confermato, che le latitudini apparenti od istrumentali riportate nello Specchio II si possono ritenere come quasi totalmente indipendenti dagli errori delle declinazioni delle stelle, dalle quali furono dedotte; e certamente poi come dati molto più approssimativi e sicuri di quelli che si potrebbero ricavare dalle costanti istrumentali determinate con qualunque altro processo. Cosicchè servendoci di queste latitudini istrumentali per la riduzione delle declinazioni medie delle stelle, io sono convinto che i risultati riesciranno molto meno soggetti all' influenza degli errori sistematici e costanti di quello, che si potrebbe sperare dal metodo delle osservazioni assolute.

Ma volendo pure ammettere che negli indicati valori delle latitudini istrumentali sussista una qualche incertezza od un qualche piccolo errore, in causa del numero troppo limitato delle stelle componenti qualche gruppo, queste incertezze od errori potrebbero molto probabilmente diminuirsi, facendo concorrere alla determinazione di ogni latitudine istrumentale un maggior numero di stelle; ciò che potrebbe ottenersi in varî modi: per esempio o estendendo i gruppi a zone di 3° o 4° di distanza zenitale, oppure determinando le latitudini stesse di 2° in 2°, deducendo però il loro valore dal medio delle latitudini ottenute dalle stelle contenute in due gruppi successivi, quali sono indicati dallo Specchio II.

Quest'ultima combinazione è appunto quella che io ho preferito per istabilire i valori definitivi della latitudine istrumentale, formando a questo scopo il seguente Specchio III, nel quale la latitudine data per le distanze zenitali, 0°, 2°, 4° .... è il medio dei risultati ottenuti da due gruppi successivi dello Specchio II; cosicchè per es. la latitudine istrumentale a 10° sud è il medio dei valori ottenuti dai due gruppi 8° a 10° e 10° a 12° sud: la latitudine istrumentale a 0° è il medio dei risultati avuti dai gruppi 0° a 2° sud, 0° a 2° nord.

Invece di prendere il medio dei risultati dei due gruppi, si sarebbe potuto prendere il medio generale delle latitudini date dalle stelle comprese dai due gruppi stessi, ma mentre i risultati sabbero riesciti pochissimo differenti, probabilmente poi sarebbero riesciti meno concordanti colla legge di variazione degli errori nelle varie distanze zenitali.

A tutto rigore le latitudini istrumentali così determinate non corrispondono esattamente colle distanze zenitali loro assegnate, perchè le stelle non sono distribuite nei varî archi uniformemente e simmetricamente; ma siccome per ogni gruppo le irregolarità sono piuttosto piccole, così non si è creduto necessario di tenerne conto.

Specchio III. Latitudini istrumentali

Distanza zenitale sud	Numero delle stelle	Latitudine 41° 53′ + Osserv. dirette	Osserv. riflesse	Medio	Distanza zenitale nord	Numero delle stelle	Latitudine 41° 53′ + Osserv. dirette	Osserv. riflesse	Medio
0°	34	33″,77	—	—	0°	34	33″,77	—	—
2	41	33, 87	—	—	2	25	33, 62	—	—
4	38	33, 93	33″,82	33″,87	4	20	33, 59	33″,20	33″,40
6	23	34, 12	33, 70	33, 91	6	22	33, 78	33, 03	33, 40
8	23	34, 37	33, 66	34, 02	8	20	33, 70	32, 97	33, 34
10	26	34, 37	33, 62	34, 00	10	20	33, 41	32, 95	33, 18
12	27	34, 36	33, 60	33, 98	12	23	33, 17	32, 83	33, 00
14	29	34, 52	33, 68	34, 10	14	28	33, 01	32, 78	32, 90
16	24	34, 67	33, 75	34, 21	16	30	32, 92	32, 88	32, 90
18	25	34, 56	33, 58	34, 07	18	25	32, 86	33, 05	32, 95
20	26	37, 49	33, 33	33, 91	20	20	32, 90	33, 20	33, 05
22	—	34, 67	33, 27	33, 97	22	—	32, 96	33, 28	33, 12
Medî	—	34, 31	33, 60	34, 00	Medî	—	33, 31	33, 00	33, 12

Senza pretendere che i dati contenuti in questo specchio possano ritenersi esatti fino ai centesimi di secondo, non credo però esagerato l'ammettere che la loro approssimazione sia assicurata sino al decimo di secondo; approssimazione già per se stessa molto notevole, avuto riguardo alla moltiplicità delle cause di errore da cui possono essere affette quelle quantità, e che ben difficilmente potrebbe essere raggiunta col metodo delle osservazioni assolute, anche cogli strumenti meridiani più stimati e meglio studiati, che sono attualmente in uso per la misura delle declinazioni medie delle stelle.

In questa convinzione, procuratami dall'esame critico istituito sopra questi risultati colle sopra descritte ricerche e confronti, e con altre che per brevità tralascio di riferire, ritengo di non poter essere accusato di cadere in un circolo vizioso, se assumendo queste latitudini istrumentali come quantità o costanti assolute, indipendenti dai dati speciali da cui furono dedotte, ne farò una applicazione alla correzione delle declinazioni delle stelle contenute nello Specchio I, quantunque queste declinazioni siano state usate nella determinazione delle costanti stesse.

Declinazioni medie pel 1875,0 *di* 285 *stelle.* — Le riduzioni delle osservazioni di tutte le stelle da noi osservate richiedendo ancora qualche tempo, specialmente per la circostanza di essere le osservazioni di ogni stella separate da lunghi intervalli di tempo che non ammettono interpolazioni, ed anche per la mancanza di appositi calcolatori, come ho già accennato, mi sono deciso a pubblicare anticipatamente le declinazioni delle stelle contenute nello Specchio I, perchè in esse sono comprese molte stelle usate nella misura delle latitudini geografiche delle stazioni astronomiche, sparse

sulla grande rete geodetica internazionale, destinata alla misura dei gradi del meridiano centrale europeo.

Nella quinta conferenza generale dell' Associazione geodetica internazionale, tenuta a Stuttgart nello scorso anno 1877, la discussione delle declinazioni medie di queste stelle formava oggetto di uno speciale rapporto, nel quale riconoscendosi l'incertezza tuttora esistente sulle medesime, e l'impossibilità di ottenere risultati di maggiore fiducia col materiale di osservazione già posseduto, si faceva rimarcare la necessità di intraprendere a questo scopo nuove osservazioni e determinazioni.

Opportunissima pertanto mi si presentava la pubblicazione dei risultati delle nostre osservazioni, le quali pel loro numero, per l'accuratezza ed unità del metodo con cui furono fatte, per la brevità del tempo in cui furono raccolte, e per la loro prossimità all'epoca attuale, sono rese indipendenti dalle incertezze che s' incontrano nella riduzione di osservazioni, sparse in lunghi intervalli di tempo, e troppo lontane dall'epoca alla quale debbono essere ridotte.

In relazione a ciò si è formato il seguente Specchio IV nel quale sono date le declinazioni medie pel 1875,0 delle indicate stelle, quali risultano dalle distanze zenitali medie per la detta epoca ottenute dalle nostre osservazioni, coll' applicazione della correzione richiesta per gli errori accidentali delle divisioni, ed usando per ogni stella la relativa latitudine istrumentale dedotta per interpolazione dallo Specchio III.

Di queste 285 stelle ne abbiamo 219, per le quali la declinazione media può essere determinata in due modi distinti ed indipendenti; e cioè per mezzo delle osservazioni dirette e per mezzo delle osservazioni riflesse; le quali non hanno di comune altri dati che le declinazioni delle stelle che hanno servito per la determinazione delle latitudini istrumentali.

Mentre nel medio dei due risultati così ottenuti si ha ragione di ritenere meglio determinato il valore delle declinazioni, dal loro confronto poi si può formare un concetto ben fondato sul grado di approssimazione raggiunto nelle osservazioni e nella valutazione delle latitudini istrumentali, e così delle correzioni applicate per gli errori accidentali delle divisioni usate per le singole stelle. Ed è appunto a questo scopo che nel seguente Specchio IV sono riportati, per le indicate stelle, i valori ottenuti per le declinazioni, tanto dalle osservazioni dirette quanto dalle osservazioni riflesse, ritenendo però come risultato definitivo il loro rispettivo medio.

In questo specchio è dato anche il numero delle osservazioni dirette e riflesse da cui è stata dedotta la declinazione media, e l'epoca media delle medesime contata dal 1875,0 in anni e frazioni di anno. Considerando come valore definitivo della declinazione media quello dato dalle osservazioni dirette per le stelle da 0° a 4° sud e nord, e il medio dei risultati delle osservazioni dirette e riflesse per le stelle distanti dallo zenit più di 4°, si sono inserite nello stesso specchio le differenze fra questi valori e quelli dati per ogni stella dai rispettivi cataloghi, aggiungendovi finalmente la precessione annua in declinazione, quale viene assegnata per ogni stella dal rispettivo catalogo.

Prendendo le differenze fra le declinazioni dedotte dalle osservazioni dirette, e quelle dedotte dalle osservazioni riflesse; fatte poche eccezioni si trova che esse oscillano

fra i limiti $\pm 0'',40$; e determinando la differenza od errore probabile fra l' uno e l'altro risultato, si trova

$$r = 0''.170;$$

ossia che la differenza od allontanamento probabile fra le declinazioni ottenute dai due diversi modi di osservazione non giunge a $0'',20$. Le differenze od allontanamenti fra i risultati delle osservazioni dirette e riflesse presentano poi nel loro andamento tutti i caratteri di errori puramente accidentali; avendosi 110 differenze positive il cui medio è $+ 0'',210$, e 106 negative il cui medio è $0'',210$; con tre differenze nulle.

La conveniente ristrettezza dei limiti fra i quali oscillano queste differenze mi sembra costituire una prova incontestabile della bontà delle nostre osservazioni, e della giustezza del metodo e degli elementi usati nella loro riduzione, specialmente per ciò che risguarda la determinazione del principio di numerazione delle distanze zenitali, l'influenza della flessione, e la valutazione degli errori accidentali delle divisioni del circolo. L'andamento poi di queste differenze escludendo l'esistenza di errori o variazioni sistematiche fra i risultati delle osservazioni dirette e riflesse, mi sembra giustificare pienamente la massima stabilita di prendere come valore definitivo delle declinazioni il medio dei due risultati.

Se dallo specchio seguente prendiamo la differenza delle declinazioni definitive, dedotte dalle nostre osservazioni, colle declinazioni date per le varie stelle dai rispettivi cataloghi da noi usati; e se le ordiniamo in quattro gruppi in corrispondenza ai quattro cataloghi, si trova che tanto la proporzione dei numeri delle differenze od allontanamenti positivi e dei negativi, quanto la grandezza del medio di codesti allontamenti positivi e negativi sono sensibilmente diversi da un catalogo all'altro: il che mostrerebbe l'esistenza di errori sistematici nei cataloghi stessi, diversi però di grandezza e di segno da catalogo a catalogo.

Riguardo alle proporzioni fra i numeri delle differenze od allontanamenti positivi e negativi, e le loro medie grandezze, risulta:

	Numeri delle differenze		Medio delle differenze	
	+	—	+	—
Osser. — N. A.	24	16	0'',34	0'',25
Osser. — C. T.	13	40	0, 34	0, 41
Osser. — G. M.	8	21	0, 31	0, 45
Osser. — A. G.	91	72	0, 45	0, 35
Somma	136	149	Media 0, 36	0, 36

Da questi dati si fa manifesto che in confronto colle declinazioni dedotte dalle nostre osservazioni, le declinazioni date dal Nautical Almanac e dal Catalogo della Società astronomica di Germania sono in risultato medio più piccole; mentre le declinazioni della Connaissance des Temps e quelle dell'Associazione geodetica sono maggiori delle nostre: cosicchè se nei singoli cataloghi esistono degli errori sistematici, questi però in gran parte almeno si possono ritenere compensati nelle latitudini istrumentali, dedotte dalla combinazione dei dati di tutti e quattro i cataloghi, e quindi eliminati dai valori ottenuti per le declinazioni medie delle singole stelle.

Specchio IV. **Declinazioni medie pel 1875,0**

Numero	Stella	Grandezza	Ascensione retta approssimata 1875,0 (h m s)	Declinazione media 1875,0 — Osservazioni — dirette (+ ° ′ ″)	Declinazione media 1875,0 — Osservazioni — riflesse (″)	Declinazione media 1875,0 — medio (″)	Numero delle Osservazioni — dirette	Numero delle Osservazioni — riflesse	Epoca media delle Osservazioni 1875,0+	Differenza fra le osservazioni e il catalogo Osser.— Catal. (″)		Precessione annua in declinazione (″)
1	α Andromeda	2	0 1 56	28 24 0,58	0,39	0,48	10	12	1,192	—0,28	N. A.	+19,907
2	β Cassiopea	2.3	0 2 31	58 27 36,20	36,29	36,25	10	10	1,252	—0,15	C. T.	19,850
3	22 Andromeda	5.6	0 3 50	45 22 35,01	—	35,01	18	—	0,422	+0,15	A. G.	20,050
4	κ Cassiopea	4.5	0 25 54	62 14 29,88	29,67	29,78	11	10	1,355	—0,18	A. G.	19,938
5	ζ Cassiopea	4	0 30 1	53 12 31,29	31,44	31,37	8	10	1,246	+0,33	G. M.	19,861
6	π Andromeda	4	0 30 12	33 1 51,74	51,53	51,64	11	10	0,332	+0,01	A. G.	19,889
7	ε Andromeda	4	0 31 57	28 37 57,40	57,60	57,50	10	10	1,302	—0,34	A. G	19,625
8	δ Andromeda	3.4	0 32 39	30 10 34,91	34,95	34,93	10	12	1,320	—0,33	A. G.	19,755
9	α Cassiopea	2.3	0 33 25	55 51 4,90	5,25	5,08	11	12	1,305	—0,03	N. A.	19,785
10	ο Cassiopea	5	0 37 46	47 35 59,03	58,65	58,84	9	9	1,257	—0,87	G. M.	19,778
11	ζ Andromeda	4	0 40 43	23 35 12,48	12,98	12,73	9	11	1,219	+0,36	A. G.	19,656
12	η Cassiopea	4.3	0 41 33	57 9 7,14	7,13	7,13	10	10	1,268	—0,30	A. G.	19,241
13	ν Andromeda	4	0 42 55	40 23 51,52	—	51,52	15	—	1,305	—0,38	C. T.	19,720
14	82 Brad.	6	0 43 9	63 33 58,88	58,80	58,84	10	10	1,353	—0,04	A. G.	19,671
15	γ Cassiopea	2	0 49 11	60 2 21,43	21,36	21,39	11	10	1,365	—0,41	C. T.	19,568
16	μ Andromeda	4	0 49 49	37 49 15,50	15,61	15,55	12	10	0,848	+0,63	A. G.	19,623
17	μ Cassiopea	5.6	0 59 58	54 18 22,62	22,62	22,62	10	10	1,275	—0,68	C. T.	17,860
18	β Andromeda	2.3	1 2 44	34 57 26,51	26,36	26,44	15	16	0,779	—0,36	C. T.	19,214
19	τ Pesci	4	1 4 47	29 25 31,18	31,25	31,21	10	10	1,360	—0,08	A. G.	19,224
20	υ Pesci	4	1 12 36	26 36 23,06	23,09	23,07	10	13	1,260	—0,11	A. G.	19,067
21	δ Cassiopea	3	1 17 39	59 35 4,59	4,99	4,79	10	10	0,847	—0,21	C. T.	18,872
22	υ Perseo	4.3	1 30 20	47 59 38,75	39,03	38,89	11	10	1,331	+0,22	G. M.	18,397
23	φ Andromeda	4	1 35 50	50 3 28,57	28,64	28,60	21	10	1,353	+0,30	C. T.	18,298
24	ε Cassiopea	3.4	1 45 25	63 3 11,80	11,81	11,80	13	10	1,880	+0,26	G. M.	17,953
25	α Triangolo	4.3	1 45 58	28 58 7,93	7,74	7,83	10	10	0,970	—0,28	A. G.	17,728
26	β Ariete	3.2	1 47 44	20 11 45,83	46,12	45,97	22	12	0,424	+0,38	N. A.	17,782
27	γ Andromeda	2.3	1 56 14	41 43 43,07	—	43,07	38	—	0,442	—0,30	A. G.	17,477
28	α Ariete	2	2 0 8	22 52 12,85	13,01	12,93	23	15	0,307	+0,06	N. A.	17,223
29	β Triangolo	3	2 2 7	34 23 41,68	42,02	41,85	10	10	0,968	—0,09	G. M.	17,239
30	6 Perseo	6	2 5 18	50 29 1,31	1,11	1,21	10	10	1,325	—0,14	A. G.	16,949
31	γ Triangolo	4.5	2 9 53	33 16 4,10	4,09	4,10	10	10	0,944	+0,83	A. G.	16,878
32	ν Ariete	6.5	2 31 43	21 25 9,81	9,65	9,73	10	10	0,958	—0,58	A. G.	15,797
33	θ Perseo	4	2 35 40	48 41 53,28	53,54	53,41	10	10	0,993	+0,61	A. G.	15,497
34	35 Ariete	4.3	2 36 7	27 10 26,41	25,96	26,18	11	10	1,240	+0,96	A. G.	15,561
35	η Perseo	5	2 41 35	55 22 29,57	29,48	29,53	10	10	0,975	—0,46	A. G.	15,271
36	41 Ariete	4	2 42 38	26 44 38,45	38,46	38,45	10	11	0,840	+0,15	C. T.	15,088
37	τ Perseo	4	2 45 24	52 14 56,35	55,97	56,16	9	11	1,322	—1,83	G. M.	15,033
38	ε Ariete	5	2 52 4	20 50 20,37	19,74	20,05	9	10	1,376	—0,55	C. T.	14,748
39	γ Perseo	3	2 55 45	53 0 53,50	53,89	53,70	10	12	0,580	+0,06	A. G.	14,422
40	ρ Perseo	4.3	2 57 10	38 21 15,25	—	15,25	16	—	1,317	—0,19	A. G.	14,255
41	β Perseo	2.4	3 0 2	40 28 20,14	—	20,14	17	—	0,310	—0,56	C. T.	14,181
42	ι Perseo	4	3 0 3	49 8 1,19	1,14	1,16	10	10	0,914	—1,35	A. G	14,127

Specchio IV. Declinazioni medie pel 1875,0

Numero	Stella	Grandezza	Ascensione retta approssimata 1875,0 h	m	s	Declinazione media 1875,0 — Osservazioni dirette °	′	″	riflesse ″	medio ″	Numero delle Osservazioni dirette	riflesse	Epoca media delle Osservazioni 1875,0+	Differenza fra le osservazioni e il catalogo Osser. — Catal.	Catal.	Precessione annua in declinazione ″
43	α Perseo	2	3	15	24	+49	24	51,18	51,51	51,35	28	10	0,369	+0,32	N.A.	+13,132
44	2H Giraffa	5.4	3	18	57	59	30	7,61	8,16	7,88	10	10	1,073	—0,28	A. G.	12,972
45	σ Perseo	5	3	21	46	47	33	41,65	41,51	41,58	9	9	1,535	0,00	A. G.	12,770
46	δ Perseo	3	3	34	2	47	23	8,38	8,38	8,38	23	10	0,385	+0,08	C. T.	11,868
47	ο Perseo	4	3	36	29	31	53	25,76	25,41	25,59	12	11	1,348	—0,18	A. G.	11,740
48	ν Perseo	4	3	36	42	42	10	52,62	—	52,62	28	—	0,370	—0,18	A. G.	11,721
49	17 Toro	4	3	37	27	23	43	6,51	6,40	6,45	11	11	1,546	+0,40	A. G.	11,637
50	η Toro	3	3	40	3	23	43	0,52	0,14	0,33	24	12	0,387	+0,17	N.A.	11,454
51	27 Toro	4	3	41	44	23	40	9,27	9,57	9,42	10	11	1,367	+0,19	A. G.	11,318
52	ζ Perseo	3	3	46	17	31	30	37,37	37,40	37,39	11	10	1,329	—0,41	C. T.	11,020
53	9H Giraffa	6	3	46	30	60	44	23,81	23,78	23,79	9	10	1,334	—0,07	A. G.	11,032
54	ε Perseo	3.4	3	49	28	39	38	46,77	—	46,77	17	—	0,603	—0,25	A. G.	10,793
55	ξ Perseo	4	3	50	51	35	25	47,27	46,97	47,12	12	9	1,356	+0,92	A. G.	10,693
56	c Perseo	4	3	59	36	47	22	34,70	34,77	34,74	10	10	0,959	+0,22	A. G.	10,010
57	54 Perseo	6	4	12	18	34	15	45,48	46,00	45,74	10	10	0,599	+0,90	A. G.	9,059
58	1 Giraffa seg.	6	4	22	8	53	38	11,45	11,31	11,38	12	9	0,956	+0,45	A. G.	8,295
59	τ Toro	4.5	4	34	45	22	42	54,47	54,41	54,44	12	10	1,074	+0,19	A. G.	7,264
60	4 Giraffa	6	4	37	36	56	31	55,82	56,04	55,93	10	10	0,971	+0,29	A. G.	6,899
61	ι Auriga	4	4	48	51	32	57	57,49	57,38	57,44	39	11	0,560	+0,45	N.A.	6,114
62	β Giraffa	4	4	52	18	60	15	22,90	22,50	22,70	27	10	0,240	—0,30	C. T.	5,830
63	ε Auriga	4	4	53	0	43	38	9,22	—	9,22	16	—	1,465	—0,01	G.M.	5,777
64	ζ Auriga	4	4	53	45	40	53	27,19	—	27,19	16	—	0,983	—0,02	A. G.	5,709
65	ι Toro	5	4	55	38	21	24	33,02	32,74	32,88	11	11	1,379	—0,33	A. G.	5,519
66	η Auriga	4.3	4	57	45	41	3	7,43	—	7,43	15	—	0,990	+0,56	G.M.	5,328
67	μ Auriga	6.5	5	4	53	38	20	1,98	—	1,98	20	—	0,654	—0,25	G.M.	4,709
68	α Auriga	1	5	7	27	45	52	5,73	—	5,73	35	—	0,398	+0,51	N.A.	4,134
69	λ Auriga	5	5	10	21	39	59	7,29	—	7,29	16	—	1,378	—0,41	C. T.	3,794
70	17 Giraffa	6	5	18	22	62	57	33,12	33,22	33,17	8	11	1,597	—0,30	A. G.	3,610
71	β Toro	2	5	18	23	28	29	58,60	58,69	58,65	18	11	0,429	+0,82	N.A.	3,427
72	ζ Toro	3.4	5	30	11	21	3	50,40	50,66	50,53	9	10	1,044	+0,08	A. G.	2,580
73	ο Auriga	6.5	5	36	13	49	46	7,47	7,61	7,54	12	9	1,548	+0,44	A. G.	2,045
74	ν Auriga	4	5	42	50	39	6	33,30	—	33,30	15	—	1,628	—1,77	A. G.	1,547
75	δ Auriga	4.5	5	49	14	54	16	8,69	8,37	8,53	10	11	1,019	—0,61	G.M.	0,818
76	β Auriga	2	5	50	22	44	55	55,07	—	55,07	16	—	1,078	—0,73	C. T.	0,834
77	θ Auriga	3	5	51	12	37	12	4,57	4,38	4,47	12	10	1,466	+0,37	C. T.	+ 0,661
78	η Gemelli	3.4	6	7	20	22	32	26,57	26,37	26,47	10	11	1,564	—0,63	C. T.	— 0,642
79	2 Lince	5.4	6	8	36	59	3	10,11	9,91	10,01	10	10	1,129	+0,27	A. G.	0,737
80	ψ¹ Auriga	5	6	15	16	49	20	55,39	55,68	55,54	10	12	1,030	+0,04	A. G.	1,353
81	μ Gemelli	3	6	15	24	22	34	31,54	31,16	31,35	17	30	0,274	+0,15	N.A.	1,489
82	8 Lince	6	6	26	16	61	35	15,75	15,66	15,70	10	10	1,080	+0,28	A. G.	2,562
83	51 Auriga	6.7	6	30	0	39	29	53,56	—	53,56	18	—	1,044	+0,15	A. G.	2,711
84	ε Gemelli	3.4	6	36	14	25	15	9,50	9,40	9,45	10	11	1,020	—0.12	A. G.	3,158

Specchio IV. Declinazioni medie pel 1875,0

Numero	Stella	Grandezza	Ascensione retta approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 — Osservazioni — dirette	riflesse	medio	Numero delle Osservazioni — dirette	riflesse	Epoca media delle Osservazioni 1875,0+	Differenza fra le osservazioni e il catalogo — Osser.—	Catal.	Precessione annua in declinazione
			h m s	+ ° ′ ″	″	″				″		″
85	ψ⁵ Auriga	6	6 37 44	43 41 57,59	—	57,59	16	—	1,130	+0,57	A. G.	— 3,113
86	θ Gemelli	3.4	6 44 33	34 6 34.13	34,19	34,16	10	10	1,059	—0,24	C. T.	3,903
87	15 Lince	5	6 46 26	58 35 0,32	0,12	0,22	10	11	0,655	—0,20	A. G.	4,188
88	63 Auriga	5	7 3 3	39 31 19, 6	—	19,06	17	—	1,057	+0,06	A. G.	5,429
89	64 Auriga	6	7 9 21	41 6 10,10	—	10,10	16	—	1,062	+0,56	A. G.	5,957
90	19 Lince seg.	5.6	7 12 39	55 30 50,45	50,47	50,46	10	11	1,497	+0,31	A. G.	6,307
91	δ Gemelli	3.4	7 12 39	22 12 37,47	37,27	37,37	14	23	0,312	+0,18	N. A.	6,274
92	ι Gemelli	4	7 17 58	28 2 40,25	39,84	40,04	9	11	0,655	—0,06	A. G.	6,779
93	ρ Gemelli	5	7 21 4	32 1 51,32	51,08	51,20	10	10	1,090	+0,84	A. G.	6,759
94	α² Gemelli	2.1	7 26 37	32 9 37,51	37,28	37,39	28	12	1,033	—0,38	N. A.	7,484
95	24 Lince	5	7 32 25	58 59 59,95	59,49	59,72	11	10	0,657	+0,18	A. G.	7,944
96	κ Gemelli	4.3	7 36 54	24 41 44,39	44,69	44,54	10	10	1,020	—0,68	A. G.	8,257
97	β Gemelli	1.2	7 37 40	28 19 33,98	34,53	34,25	6	7	1,503	+0,16	N. A.	8,353
98	π Gemelli	6	7 39 27	33 43 12,95	12,81	12,88	11	10	1,092	+0,96	A. G.	8.448
99	26 Lince	6.5	7 45 36	47 53 10,58	10,38	10,48	10	11	1,062	—0,19	A. G.	8,940
100	53 Giraffa	6	7 51 1	60 39 48,09	48,13	48,11	10	11	0,682	0,00	A. G.	9,367
101	6 Cancro	5	7 55 50	28 8 34,02	33,74	33,88	20	22	0,598	—0,14	N. A.	9,783
102	27 Lince	5.4	7 59 3	51 51 52,80	52,52	52,66	10	10	0,656	+0,36	A. G.	9,952
103	31 Lince	5	8 14 16	43 35 13,00	—	13,00	14	—	1,039	—0,13	A. G.	11,197
104	ο Orsa magg.	3.4	8 19 52	61 7 59,77	59,78	59,77	11	11	1,553	+0,07	A. G	11,635
105	1450 Groombr.	6.7	8 24 46	38 26 35,16	—	35,16	17	—	1,136	+0,84	A. G.	12,051
106	η Cancro	6	8 25 29	20 51 50,82	50,97	50,89	11	11	0,422	+0,21	N. A.	11,954
107	1460 Groombr.	6	8 30 1	53 8 50,98	50,94	50,96	10	11	1,136	+0,54	A. G.	12,241
108	ι Cancro	4	8 39 8	29 12 55,00	54,67	54,83	10	10	0,590	+0,12	A. G.	12,917
109	57 Canc. med.	6	8 46 37	31 3 3,67	3,55	3,61	10	9	1,070	+0,30	A. G.	13,348
110	ι Orsa magg.	3	8 50 38	48 31 50,98	50,91	50,94	10	10	0,570	+0,40	N. A.	13,873
111	10 Orsa magg.	4	8 52 31	42 16 33,44	—	33,44	17	—	0,374	—0,07	A. G.	13.984
112	1501 Groombr.	6	8 54 50	54 46 29,07	29,01	29,04	11	11	1,078	+0,70	A. G.	13,834
113	κ Orsa magg.	3.4	8 55 5	47 38 56,30	55,97	56,14	10	10	0,602	+0,42	A. G.	13,972
114	3097 B. A. C.	5	8 58 34	38 57 1,22	—	1,22	18	—	1,167	+0,72	C. T.	14,054
115	36 Lince	5	9 5 37	43 43 52.86	—	52,86	16	—	0,690	+0,15	A. G.	14,579
116	38 Lince	4	9 11 04	37 19 49,09	48,62	48,86	10	10	1,044	—0,34	A. G.	14,936
117	α Lince	3.4	9 13 26	34 55 11,06	10,79	10,93	10	10	1,104	—0,07	C. T.	14,991
118	θ Orsa magg.	3	9 24 29	52 14 43,55	43,80	43,67	10	12	0,261	+0,10	N. A.	16,185
119	10 Leon min.	5	9 26 34	36 57 3,59	3,41	3,50	10	11	1,090	—0,08	A. G.	15,740
120	ε Leone	3	9 38 45	24 20 54,71	54,71	54,71	17	18	0,324	—0,24	N. A.	16,386
121	υ Orsa magg.	4.3	9 42 5	59 37 30,74	30,63	30,68	11	10	0,758	—0,32	G. M.	16,730
122	μ Leone	4	9 45 39	26 35 40,17	40,31	40,24	11	13	0,328	—0,16	C. T.	16,761
123	19 Leon min.	5	9 50 1	41 38 59,16	—	59,16	17	—	0,214	+1,06	A. G.	16,936
124	λ Orsa magg.	3.4	10 9 33	43 32 14,40	—	14,40	18	—	0,245	+0,04	A. G.	17,857
125	ζ Leone	3	10 9 44	24 2 21,88	21,73	21,80	11	11	1,737	—0,40	A. G.	17,764
126	γ¹ Leone	2	10 13 5	20 28 22,55	22,45	22,50	12	9	0,699	—0,12	N. A.	18,063

SPECCHIO IV. Declinazioni medie pel 1875,0

Numero	STELLA	Grandezza	Ascensione retta approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 — Osservazioni — dirette	riflesse	medio	Numero delle Osservazioni — dirette	riflesse	Epoca media delle Osservazioni 1875,0+	Differenza fra le osservazioni e il catalogo Osser. — Catal.		Precessione annua in declinazione
			h m s	° ′ ″	″	″				″		″
127	μ Orsa magg.	3	10 14 52	42 7 37,75	—	37,75	46	—	0,245	—0,65	G.M.	—17,976
128	31 Leon. min.	4.5	10 20 39	37 20 49,09	48,79	48,94	12	10	1,214	+1,01	A. G.	19,301
129	36 Orsa magg.	5	10 22 37	56 37 14,19	14,41	14,30	10	10	0,750	+0,13	G.M.	18,319
130	37 Orsa magg.	5	10 27 6	57 43 31,99	31,44	31,71	9	10	0,749	+0,06	A. G.	18,419
131	41 Leon. min.	5	10 36 37	23 50 31,58	31,44	31,51	10	10	1,117	+0,50	A. G.	18,741
132	42 Leon. min.	5	10 38 75	31 20 23,61	23,63	23,62	12	10	1,119	+0,60	A, G.	18,858
133	46 Leon. min.	4	10 46 19	34 53 17,61	17,77	17,69	13	10	1,189	—0,78	A. G.	19,273
134	β Orsa magg.	2.3	10 54 17	57 3 5,92	6,13	6,62	10	10	0,763	—0,48	C. T.	19,231
135	α Orsa magg.	2	10 56 0	62 25 30,85	30,92	30,89	12	11	1,638	+0,34	N. A.	19,369
136	ψ Orsa magg.	3	11 2 38	45 10 34,11	—	34,11	16	—	1,163	—0,29	C. T.	19,509
137	δ Leone	2.3	11 7 27	21 12 29,24	28,94	29,09	18	11	0,280	—0,18	N. A.	19,670
138	1757 Groombr.	6	11 9 39	50 9 28,60	28,93	28,77	11	9	0,746	+0,07	A. G.	19,585
139	ξ Ors.m.med.	4.3	11 11 31	32 13 54,21	54,64	54,43	15	11	0,769	—1,37	C. T.	20,191
140	ν Orsa magg.	3.4	11 11 43	33 46 33,70	33,85	33,78	11	10	0,645	+0,23	A. G.	19,586
141	58 Orsa magg.	6	11 23 45	43 51 33,70	—	33,70	19	—	0,763	+0,10	A. G.	19,719
142	χ Orsa magg.	4	11 39 27	48 28 20,07	20,30	20,19	19	11	1,136	—0,66	G.M.	19,978
143	γ Orsa magg.	2.3	11 47 17	54 23 23,01	22,96	22,99	17	16	0,288	+0,53	N. A.	20,024
144	δ Orsa magg.	3.4	12 9 14	57 43 37,23	37,31	37,27	13	14	0,204	—1,03	G.M.	20,061
145	2 Cani da C.	6	12 9 51	41 21 21,79	—	21,79	16	—	1,209	+0,27	A. G.	20,069
146	6 Cani da C.	5.6	12 19 41	39 42 43,58	—	43,58	18		1,296	+0,52	A. G.	20,026
147	20 Chioma	6	12 23 27	21 35 18,59	19,11	18,81	10	10	2,294	+0,89	A. G.	19,974
148	74 Orsa magg.	6	12 24 7	59 5 36,72	36,62	36,67	10	10	0,771	+0,20	A. G.	19,877
149	8 Cani da C.	4.5	12 27 48	42 2 12,87	—	12,87	24	—	0,285	+0,56	A. G.	19,614
150	23 Chioma	4.5	12 28 37	23 19 4,17	4,51	4,34	10	10	0,847	+0,14	C. T.	19,897
151	ε Orsa magg.	2	12 48 31	56 38 18,55	18,97	18,76	12	10	0,811	+0,46	C. T.	19,649
152	α Cani da C.	3	12 50 11	38 59 37,83	—	37,83	16	—	0,871	—0,23	N. A.	19,515
153	17 Cani da C.	6.7	13 4 19	39 9 48,36	—	48,36	16	—	1,828	—0,04	A. G.	19,219
154	β Chioma	4	13 6 2	28 30 45,12	44,69	44,90	13	10	0,796	+0,10	C. T.	18,332
155	20 Cani da C.	5.4	13 11 56	41 13 51,35	—	51,35	17	—	0,363	—0,07	A. G.	19,044
156	ζ Orsa magg.	2.3	13 18 53	55 34 42,59	42,95	42,77	9	11	0,344	+0,07	C. T.	18,932
157	69H Orsa magg.	5.6	13 23 52	60 35 30,22	29,79	30,00	11	13	0,799	—0,17	A. G.	18,719
158	17H Cani da C.	5	13 29 13	37 49 22,95	22,86	22,90	10	10	0,849	—0,16	A. G.	18,561
159	25 Cani da C.	5	13 31 54	36 55 52,58	52,68	52,63	10	9	0,888	—0,37	C. T.	18,501
160	η Orsa magg.	2	13 42 37	49 56 15,32	14,96	15,14	11	10	1,348	—0,26	N. A.	18,106
161	11 Boote	6	13 55 30	27 59 27,90	27,77	27,83	15	12	0,771	+0,28	A. G.	17,547
162	d Boote	5	14 4 42	25 41 4,88	4,68	4,78	11	13	0,775	+0,28	A. G.	17,212
163	λ Boote	4	14 11 38	46 39 46,45	46,59	46,52	11	10	1,356	—0,75	G.M.	16,720
164	ι Boote	4.5	14 11 44	51 56 40,04	39,87	39,96	12	10	1,293	+0,54	A. G.	16,762
165	θ Boote	4.3	14 20 56	52 25 45,07	45,11	45,09	20	11	0,775	—0,21	G.M.	16,805
166	ρ Boote	4.3	14 26 27	30 55 15,63	15,56	15,60	11	10	0,354	—0,27	N. A.	15,957
167	γ Boote	3.2	14 27 3	38 51 21,13	—	21,13	17	—	1,018	+0,47	A. G.	15,924
168	2125 Groombr.	6	14 28 19	60 46 37,24	37,17	37,20	10	10	2,367	+0,91	A. G.	16,026

Specchio IV. Declinazioni medie pel 1875,0

Numero	Stella		Grandezza	Ascensione retta approssimata 1875,0			Declinazione media 1875,0 — Osservazioni — dirette			riflesse	medio	Numero delle Osservazioni — dirette	riflesse	Epoca media delle Osservazioni 1875,0+	Differenza fra le osservazioni e il catalogo — Osser. — Catal.		Precessione annua in declinazione
				h	m	s	+ °	′	″	″	″				″		″
169	55	Boote	6	14	34	11	44	56	41,32	—	41,32	16	—	0,886	+0,41	A. G.	—15,701
170	ε²	Boote	2.3	14	39	32	27	36	8,37	8,34	8,35	11	10	0,836	+0,42	N.A.	15,378
171	2164	Groombr.	6	14	48	16	59	48	9,36	9,29	9,32	16	10	0,799	+0,58	A. G.	14,718
172	β	Boote	3	14	57	14	40	53	4,06	—	4,06	16	—	0,890	—0,44	C. T.	14,441
173	ψ	Boote	4.5	14	59	5	27	26	9,70	10,19	9,94	12	10	1,392	—0,01	N.A.	14,235
174	δ	Boote	3	15	10	28	33	46	55,09	55,41	55,25	10	10	0,971	—1,05	C. T.	13,621
175	η	Corona	5.6	15	18	2	30	44	24,92	25,06	24,99	11	10	0,937	—0,11	C. T.	13,268
176	μ	Boote	4.3	15	19	46	37	48	59,10	59,19	59,14	13	10	0,859	—0,12	A. G.	12,815
177	ι	Dragone	3	15	22	9	59	24	16,62	16,54	16,58	11	11	0,846	—0,52	C. T.	12,734
178	β	Corona	4.3	15	22	41	29	32	14,93	15,00	14,96	10	11	0,804	—0,20	A. G.	12,634
179	ν	Boote pr.	4.5	15	26	26	41	15	36,14	—	36,14	18	—	1,988	—0,88	A. G.	12,443
180	ν	Boote seg.	4.5	15	27	18	41	19	27,93	—	27,93	16	—	0,877	—0,63	A. G.	12,382
181	θ	Corona	4	15	27	53	31	46	56,08	56,29	56,18	10	10	0,903	+1,12	A, G.	12,410
182	α	Corona	2	15	29	24	27	8	11,20	11,30	11,25	11	10	0,852	—0,61	N.A.	12,319
183	φ	Boote	5	15	33	20	40	45	40,78	—	40,78	16	—	0,891	+0,71	A. G.	11,892
184	ζ	Corona seg.	4	15	34	40	37	2	32,45	32,78	32,61	12	11	1,380	—0,31	A. G.	11,926
185	γ	Corona	4.3	15	37	30	26	41	33,89	34,30	34,09	10	10	0,826	—0,03	A. G.	11,630
186	ε	Corona	4	15	52	25	27	14	27,65	27,22	27,43	10	10	0,784	—0,73	A. G.	10,621
187	2296	Groombr.	5.6	15	54	49	55	6	12,81	12,48	12,64	10	10	0,896	+0,36	A. G.	10,313
188	θ	Dragone	4.3	15	59	33	58	53	59,13	58,96	59,04	11	11	1,049	+0,71	G.M.	9,732
189	φ	Ercole	4	16	4	50	45	15	48,53	—	48,53	16	—	0,894	—0,12	A. G.	9,619
190	σ¹	Corona	6	16	10	0	34	10	33,97	34,06	34,01	13	10	0,907	—0,19	C. T.	9,368
191	τ	Ercole	3.4	16	15	59	46	36	43,58	43,36	43,47	10	10	0,849	+1,06	A. G.	8,772
192	2345	Groombr.	6.5	16	21	42	55	29	23,05	23,45	23,25	11	11	0,991	—0,53	A. G.	8,353
193	η²	Dragone sg.	3.2	16	22	18	61	47	51,50	51,61	51,55	11	9	0,978	—0,45	C. T.	8,195
194	β	Ercole	2.3	16	24	51	21	45	47,91	48,23	48,07	12	10	1,042	—0,43	C. T.	8,021
195	σ	Ercole	4	16	30	4	42	41	44,70	—	44,70	14	—	0,990	—0,43	G.M.	7,612
196	ζ	Ercole	3.2	16	36	35	31	49	49,57	49,19	49,38	10	10	0,811	—0,62	N.A.	5,688
197	η	Ercole	3	16	38	37	39	9	38,99	—	38,99	16	—	0,984	—0,77	A. G.	7,054
198	2377	Groombr.	5	16	42	56	57	0	20,65	20,53	20,59	10	10	0,933	+0,46	A. G.	6,561
199	ε	Ercole	3.4	16	55	30	31	6	42,40	42,37	42,39	10	10	0,744	—0,41	C. T.	5,540
200	2415	Groombr.	6	17	3	42	40	40	48,63		48,63	17	—	1,086	—0,05	A. G.	4,891
201	δ	Ercole	3	17	9	54	24	59	16,91	16,64	16,77	11	11	0,940	—0,13	C. T.	4,504
202	ζ	Ercole	3.4	17	10	42	36	57	4,56	4,35	4,45	10	11	0,796	—0,45	C. T	4,267
203	w	Ercole	6	17	15	59	32	37	47,30	47,37	47,34	10	10	0,949	—0,46	C. T.	4,906
204	x	Ercole	6	17	23	25	48	21	56,11	56,50	56,31	12	10	0,931	—0,41	A. G.	3,215
205	β	Dragone	3.2	17	27	37	52	23	40,04	40,14	40,09	10	10	1,465	—0,02	N.A.	2,824
206	ν	Dragone pr.	4.5	17	29	43	55	16	13,04	12,69	12,86	12	10	0,958	+0,48	A. G.	2,614
207	ν	Dragone s.	4.5	17	29	48	55	15	31,02	31,05	31,04	10	10	0,981	+0,40	A. G.	2,616
208	ι	Ercole	3.4	17	35	56	46	4	24,50	24,61	24,55	10	11	0,965	+0,07	A. G.	2,114
209	μ	Ercole	3.4	17	41	34	27	47	41,52	41,53	41,52	16	11	0,902	—0,52	N.A.	2,349
210	ξ	Dragone	3.4	17	51	22	56	53	33,32	33,36	33,34	12	10	0,970	—0,78	A. G.	0,683

SPECCHIO IV. Declinazioni medie pel 1875,0

Numero	STELLA	Grandezza	Ascensione retta approssimata 1875,0	Declinazione media 1875,0 — Osservazioni — dirette	Declinazione media 1875,0 — Osservazioni — riflesse	Declinazione media 1875,0 — medio	Numero delle Osservazioni — dirette	Numero delle Osservazioni — riflesse	Epoca media delle Osservazioni 1875,0+	Differenza fra le osservazioni e il catalogo Osser.—Catal.		Precessione annua in declinazione
			h m s	+ ° ′ ″	″	″				″		″
211	θ Ercole	4	17 51 58	37 16 4,82	4,91	4,86	10	10	0,989	—0,75	A. G.	— 0,684
212	ξ Ercole	4.3	17 52 54	29 15 43,86	44,23	44,05	10	15	1,012	+0,18	A. G.	0,659
213	γ Dragone	2.3	17 53 42	51 30 15,47	15,48	15,48	11	11	0,996	+0,57	N. A.	— 0,590
214	ο Ercole	4.3	18 2 40	28 44 47,30	47,53	47,41	10	10	0,974	—0,19	A. G.	+ 0,242
215	2533 Groombr.	6.5	18 11 45	42 7 2,39	—	2,39	41	—	0,526	—0,93	A. G.	1,032
216	109 Ercole	4	18 18 22	21 42 51,48	51,21	51,34	10	11	1,036	+0,28	A. G.	1,334
217	b Dragone	5	18 22 5	58 43 43,52	43,44	43,48	18	10	0,899	+0,09	A. G.	1,984
218	α Lira	1	18 32 42	38 40 6,12	—	6,12	20	—	1,016	+0,17	N. A.	3,133
219	4ε Lira a pr.	4.5	18 40 12	39 32 24,78	—	24,78	17	—	0,936	—0,33	A. G.	3,561
220	5ε Lira med.	5.4	18 40 14	39 28 58,12	—	58,12	16	—	1,028	—0,45	A. G.	3,587
221	110 Ercole	4	18 40 17	20 25 40,58	41,16	40,87	8	10	0,936	+0,34	A. G.	3,147
222	β Lira	var.	18 45 28	33 13 7,36	7,43	7,39	10	10	1,051	+0,11	N. A.	3,924
223	ο Dragone s.	5.4	18 49 21	59 14 9,08	9,52	9,30	10	12	1,067	—0,02	A. G.	4,297
224	13R Lira	4.5	18 51 32	43 46 56,52	—	56,52	15	—	1,204	+0,60	A. G.	4,548
225	γ Lira	3.4	18 54 16	32 31 10,29	10,26	10,28	10	10	0,978	+0,08	C. T.	4,706
226	ι Lira	5	19 2 51	35 54 18,99	18,61	18,80	11	10	0,992	+ 0,47	A. G.	5,424
227	θ Lira	4.5	19 12 2	37 54 43,07	—	43,07	16	—	1,061	+0,31	A. G.	6,187
128	κ Cigno	4	19 14 13	53 8 17,99	17,93	17,96	11	11	1,066	—0,64	G.M.	6,480
229	β^1 Cigno	3	19 25 41	27 41 54,08	54,22	54,15	11	10	0,993	—0,35	C. T.	7,337
230	ι^2 Cigno	4	19 26 33	51 27 50,68	50,52	50,60	12	10	0,966	—0,44	G.M.	7,499
231	θ Cigno	5.4	19 33 5	49 55 56,72	56,48	56,60	10	11	1,030	—0,01	G.M.	8,140
232	15 Cigno	5.6	19 39 46	37 3 12,09	12,56	12,32	11	11	1,074	+0,67	A. G.	8,489
233	δ Cigno	3	19 41 4	44 49 36,11	—	36,11	15	—	1,011	+0,21	C. T.	8,580
234	ψ Cigno	5	19 52 24	52 6 27,73	27,62	27,67	11	10	0,762	—0,17	G.M.	9,432
235	31ο Cigno	4	20 9 42	46 21 46,91	46,92	46,91	11	10	0,584	—0,20	G.M.	10,753
236	33 Cigno	6	20 10 30	56 11 8,81	8,72	8,76	13	5	2,129	+0,25	G.M.	10,875
237	24 Volpetta	6	20 11 26	24 17 13,65	14,01	13,83	11	10	1,514	+0,39	A. G.	10,862
238	γ Cigno	3.2	20 17 44	39 51 27,03	—	27,03	16	—	1,167	—0,27	C. T.	11,356
239	θ Cefeo	4	20 27 29	62 34 27,84	28,10	27,97	12	10	1,343	+0,27	A. G.	12,026
240	α Cigno	2.1	20 37 10	44 50 3,90	—	3,90	22	—	0,336	—0,14	N. A.	12,701
241	ε Cigno	3.2	20 41 9	33 30 18,78	10,55	10,66	11	10	1,046	—0,24	C. T.	13,294
242	6H Cefeo	5.4	20 42 15	57 7 52,29	52,43	52,36	10	10	1,151	—0,83	A. G.	12,794
243	λ Cigno	5.4	20 42 32	36 1 55,50	55,56	55,53	12	12	0,674	+0,36	A. G.	13,060
244	η Cefeo	4.3	20 42 45	61 21 26,73	26.93	26,83	10	10	1,693	—0,15	A. G.	13,892
245	32 Volpetta	5.6	20 49 14	27 34 59,82	59,62	59,72	10	11	1,108	+0,45	N. A.	13,500
246	ν Cigno	4	20 52 31	40 41 11,79	—	11,79	16	—	0,617	—0,30	A. G.	13,711
247	ξ Cigno	4	21 0 23	43 25 46,91	—	46,91	18	—	0,598	—0,23	A. G.	14,192
248	61^1 Cigno	5.6	21 1 19	38 8 8,73	—	8,73	17	—	1,082	+0,37	N. A.	17,476
249	62^2 Cigno	6	21 0 23	38 7 59,20	—	59,20	17	—	1,634	—0,10	C. T.	17,222
250	ζ Cigno	3	21 7 37	29 42 54,45	54,43	54,44	10	10	1,084	+0,40	N. A.	14,576
251	3415 Groombr.	6.5	21 8 37	59 28 22,78	23,18	22,98	11	11	0,634	+0,40	A. G.	14,686
252	τ Cigno	4	21 9 48	37 30 46,28	45,88	46,07	28	10	0,737	—0,33	C. T.	15,219

Specchio IV. Declinazioni medie pel 1875,0

Numero	STELLA	Grandezza	Ascensione retta approssimata 1875,0			Declinazione media 1875,0 — Osservazioni dirette			Osservazioni riflesse	medio	Numero delle Osservazioni: dirette	riflesse	Epoca media delle Osservazioni 1875,0+	Differenza fra le osservazioni e il catalogo: Osser. —	Catal.	Precessione annua in declinazione
			h	m	s	° +	′	″	″	″				″		″
253	σ Cigno	4.5	21	12	30	38	52	17,12	—	17,12	18	—	0,687	—0,38	C. T.	+14,872
254	α Cefeo	3.2	21	15	36	62	3	22,74	22,63	22,68	10	10	1,737	+0,60	N.A.	15,122
255	g Cigno	5	21	24	50	45	59	23,22	23,59	23,41	12	10	0,797	+0,13	A. G.	15,736
256	74 Cigno	5	21	31	56	39	51	9,03	—	9,03	27	—	0,849	+0,48	A. G.	16,022
257	13H Cefeo	6.5	21	35	5	56	55	27,09	27,11	27,10	10	9	0,898	+0,41	A. G.	16,162
258	κ Pegaso	4	21	38	59	25	4	15,71	15,78	15,75	10	11	1,206	—0,93	A. G.	16,407
259	π² Cigno	4.5	21	42	11	48	43	53,80	53,77	53,79	18	11	0,282	—0,03	A. G.	16,519
260	16 Pegaso	5.6	21	47	23	25	20	15,94	15,68	15,81	10	10	1,220	+0,25	N.A.	16,781
261	ι Pegaso	4	22	1	12	24	44	6,84	6,91	6,87	10	10	1,256	—0,13	A. G.	17,446
262	20 Cefeo	6	22	1	12	62	10	33,77	33,87	33,82	10	10	1,793	—0,64	A. G.	17,454
263	27π¹ Pegaso	5	22	3	41	32	33	44,47	44,88	44,68	8	7	1,197	—0,72	A. G.	17,522
264	π² Pegaso	4	22	4	26	32	33	55,40	55,80	55,60	11	13	1,207	—0,13	A. G.	17,552
265	ζ Cefeo	4.3	22	6	31	57	35	8,21	8,06	8,13	10	10	1,157	+0,23	C. T.	17,636
266	3β Lucertola	4.5	22	18	39	51	36	11,40	11,25	11,33	9	10	1,125	—0,42	G.M.	17,928
267	δ Cefeo	4	22	24	32	57	46	32,96	32,81	32,88	10	10	1,233	+0,80	A. G.	18,315
268	7 Lucertola	4	22	26	9	49	38	24,85	25,25	25,05	10	10	1,160	+0,05	G.M.	18,382
269	10 Lucertola	5	22	23	39	38	23	59,94	—	59,94	16	—	1,078	—0,06	A. G.	18,635
270	30 Cefeo	5.6	22	34	13	62	56	5,37	5,26	5,32	10	10	1,140	—0,45	A. G.	18,629
271	η Pegaso	3.4	22	37	9	29	34	4,29	4,51	4,40	11	10	1,682	—0,40	C. T.	18,734
272	13 Lucertola	6	22	38	31	41	9	48,81	—	48,81	16	—	1,185	+0,95	A. G.	18,812
273	λ Pegaso	4	22	40	31	22	54	29,70	29,54	29.62	10	11	1,200	—0,61	G.M.	18,849
274	μ Pegaso	4	22	43	58	23	56	30,91	31,03	30,97	10	13	0,746	+0,27	A. G.	18,933
275	o Andromeda	4.3	22	56	10	41	39	16,13	—	16,13	45	—	0,879	—0,29	G.M.	19,254
276	β Pegaso	2.3	22	57	43	27	24	18,04	18,39	18,21	11	10	1,174	—0,59	C. T.	19,465
277	3077 Brad.	6	23	7	16	56	28	41,53	41,79	41,66	11	10	1,157	+0,09	A. G.	19,792
278	τ Pegaso	5.4	23	14	27	23	3	23,04	23,00	23,02	9	11	1,788	+0,37	A. G.	19,638
279	υ Pegaso	5.4	23	19	8	22	42	59,08	59,13	59,10	10	10	1,220	+0,50	C. T.	19,764
280	4 Cassiopea	6	23	19	18	61	35	47,79	47,87	47,83	10	10	1,205	+0,32	A. G.	19,725
281	72 Pegaso	6	23	27	45	30	38	7,78	8,05	7,92	10	11	0,738	+1,02	A. G.	19,833
282	λ Andromeda	4	23	31	27	45	46	51,48	—	51,48	10	—	1,240	+0,86	A. G.	19,444
283	ι Andromeda	4	23	32	1	42	34	34,51	—	34,51	16	—	0,726	—0,29	C. T.	19,930
284	κ Andromeda	4	23	34	15	43	38	31,30	—	31,30	17	—	1,129	—0,18	A. G.	19,937
285	ρ Cassiopea	5	23	48	9	56	48	13,18	13,45	13,31	11	11	1,151	+0,13	A. G.	20,016

Osservazioni del diametro orizzontale del sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1877.

Nota del Socio L. RESPIGHI

letta nella seduta del 5 maggio 1878.

Fra le molteplici cause di errore, che si incontrano nella determinazione del diametro solare per mezzo della durata del passaggio meridiano, devesi certamente annoverare l'errore personale dell'osservatore nel fissare gli istanti nei quali avvengono ad ogni filo del micrometro i contatti dei due bordi orientale ed occidentale del disco del sole.

Se l'errore personale nell'osservazione dei due contatti fosse costante di grandezza e di segno, esso resterebbe eliminato nella differenza dei due tempi corrispondenti, e quindi nella durata del passaggio, risultante appunto da tale differenza; ma se questo errore varia o di grandezza o di segno nelle due osservazioni, la durata può riescire in conformità al medesimo errore più o meno sensibilmente alterata.

Considerando che i due contatti vengono da noi osservati in condizioni sostanzialmente differenti, quali sono l'opposto senso della curvatura dei bordi solari rispetto ai fili di contatto, il diverso stato di illuminazione di questi fili da un bordo all'altro, ecc. siamo costretti a ritenere le due osservazioni come essenzialmente diverse l'una dall'altra, perchè relative a due distinti fenomeni; e quindi vi ha tutta ragione di sospettare che il giudizio portato dall'osservatore sull'istante dei due contatti sia diverso, e quindi diverso il corrispondente errore personale.

Questa diversità di condizioni nelle due osservazioni può essere resa anche più sensibile e più rimarchevole per la varietà degli stati presentati dal bordo dell'immagine solare, in causa dello stato di ondulazione o diffusione prodotto in esso dalle rifrazioni irregolari o straordinarie della nostra atmosfera, e dal suo diverso grado di trasparenza: cosicchè mentre si ha ragione di sospettare che questo errore possa raggiungere valori piuttosto sensibili, si può anche sospettare che la sua grandezza sia variabile e collegata colle varie condizioni atmosferiche dominanti al momento delle osservazioni. Tocca però all'osservazione ed all'esperienza il mostrare l'entità e variabilità di questi errori, e quindi il grado di incertezza che ne può risultare nel valore del diametro solare dedotto da varî osservatori.

Lo studio di questa questione, mentre era già per se stesso abbastanza importante per la sicura definizione del valore assoluto del diametro solare, si è reso anche più importante in questi ultimi tempi, quando dalla diversità dei risultati ottenuti pel diametro stesso da varî osservatori e in varie epoche, alcuni distinti astronomi hanno non solo sospettato, ma conchiuso che questo elemento astronomico è soggetto a sensibili variazioni, sia a lungo sia a breve periodo.

Nelle mie antecedenti Note sulla misura del diametro solare, trattando delle varie cause alle quali possono attribuirsi le differenze dei risultati ottenuti in questa misura anche da lunghe serie di osservazioni, senza bisogno di ricorrere ad una ipotesi improbabile ed arbitraria, quale è quella delle reali variazioni del diametro o volume solare, non mancai di mostrare come la sola influenza dell'errore personale in tali osservazioni potrebbe in gran parte spiegare queste differenze di risultati. Conchiudendo quindi che la discussione di questa questione richiedendo risultati rigorosamente comparabili, non potrà ragionevolmente intraprendersi, senza la conoscenza di questi errori personali, o senza che speciali ricerche a questo riguardo non abbiano dimostrato, che la loro influenza è tanto piccola da poter essere trascurata.

La ricerca di questi errori nell'osservazione dei contatti dei bordi solari interessa poi all'astronomia anche per la determinazione del tempo del passaggio meridiano del centro del sole, ossia per la determinazione della sua ascensione retta; non potendosi ritenere che il detto tempo corrisponda al medio dei tempi ottenuti pei passaggi dei due bordi: cosicchè l'errore personale nell'osservazione del passaggio del centro del sole deve generalmente riescire diverso da quello corrispondente all'osservazione del passaggio delle stelle.

La necessità di studiare questa questione è già stata avvertita dagli astronomi, ma le ricerche finora fatte in proposito sono troppo scarse ed incomplete, riducendosi esse alla determinazione delle differenze dei valori del diametro solare ottenuti collo stesso strumento da varî osservatori, od alla ricerca degli errori probabili nelle osservazioni dei passaggi del bordo occidentale ed orientale del sole: mentre poi lo scarso numero delle osservazioni usate in queste ricerche, e la diversità dei tempi e delle condizioni atmosferiche, in cui furono fatte le osservazioni dai varî osservatori, tolgono ai risultati ottenuti la dovuta fiducia, potendosi ragionevolmente sospettare che essi siano piuttosto accidentali che definitivi.

E questo dubbio apparisce tanto più ragionevole, quando si considera, che in causa delle diverse condizioni atmosferiche dominanti nelle varie epoche dell'anno, la grandezza del diametro solare riesce sensibilmente diversa anche per uno stesso osservatore: cosicchè a rendere palesi e misurabili questi errori personali non può bastare l'uso dello stesso strumento, ma di più si richiede che le osservazioni dei varî osservatori siano sistematicamente intercalate le une alle altre, oppure protratte ad un periodo di tempo abbastanza lungo, per rendere probabile nel medio dei risultati ottenuti dai singoli osservatori, la compensazione delle influenze periodiche od accidentali dello stato atmosferico.

Per quanto mi è noto il più importante lavoro fatto a questo proposito è quello eseguito dall'astronomo dell'Osservatorio di Greenwich sig. E. Dunkin, il quale confrontando i risultati ottenuti dalle osservazioni dei passaggi meridiani del sole fatte da sei osservatori nel corso di varî anni dal 1864 al 1873, ha dedotto gli errori personali degli osservatori stessi nell'osservazione del lembo occidentale ed orientale, e della durata del passaggio del disco o diametro orizzontale del sole.

I risultati di queste ricerche furono dallo stesso sig. Dunkin pubblicati in una Nota inserita nel volume XXXV, n. 2 delle *Monthly notices of the astronomical Society of London*, 1874. Da questi risultati mentre viene manifestamente comprovata

l'esistenza di sensibili errori personali nelle singole osservazioni dei due bordi, e nella misura della durata del passaggio del diametro, il loro valore però rimane molto incerto in causa delle notevoli differenze, che si riscontrano da un anno all'altro, le quali non permettono di ammettere come valori definitivi di tali errori il medio generale ricavato dal numero totale degli anni di osservazione.

Senza dubbio questo disaccordo di risultati dipende principalmente dal non essere abbastanza numerose le osservazioni fatte da ciascun osservatore nei varî anni, e per la mancanza di una regolare o sistematica distribuzione delle osservazioni stesse in relazione alle varie stagioni. Ad ogni modo però il pregevole lavoro del sig. Dunkin ha confermato l'importanza di questa questione, quale l'aveva preveduta il celebre Direttore di quell'Osservatorio, sig. Airy; e comprovata quindi la necessità di tener conto di questi errori personali, sia nella determinazione dell'ascensione retta del sole, sia nella misura della durata del suo passaggio meridiano, da cui deducesi la grandezza del suo diametro.

L'Osservatorio del Campidoglio, che da varî anni si occupa delle osservazioni regolari e sistematiche del passaggio meridiano del sole, principalmente allo scopo di fornire numerosi e buoni dati per l'esatta misura del diametro solare, e per verificare quale fiducia possa accordarsi alle supposte variazioni di questo importante elemento astronomico, doveva necessariamente occuparsi della questione degli errori personali, sia per rendere paragonabili i risultati ottenuti dai varî osservatori, sia per mostrare in base ai medesimi il grado di fiducia meritato dalle nostre osservazioni.

Proponendomi nell'anno 1876 di intraprendere in proposito un accurato studio, dopo di avere esaminati i varî metodi a ciò indicati, mi decisi per quello delle osservazioni dei passaggi per projezione, come il più opportuno per la determinazione degli errori personali, quando però venisse dalla esperienza dimostrato che tali osservazioni sono almeno di egual peso o precisione di quelle fatte nel consueto modo sull'immagine diretta. Il principale vantaggio procurato da questo modo di osservazione è quello di permettere ai varî osservatori di fare simultaneamente l'osservazione dello stesso passaggio collo stesso strumento e nelle stesse condizioni atmosferiche, insomma sullo stesso fenomeno; e perciò colla sola influenza degli errori personali, i quali vengono quindi direttamente determinati dai risultati della osservazione.

Le osservazioni per projezione sull'immagine solare, già introdotte da molto tempo nella astronomia pratica, sono anche di presente usate da varî astronomi per alcune speciali ricerche; e cioè pel disegno delle macchie solari, pel rilievo della loro posizione, ecc., e di più furono anche applicate alla determinazione degli errori personali nell'osservazione dei passaggi meridiani degli astri; ed anzi negli Osservatorî di Madras e di Washington furono precisamente destinati alla determinazione degli errori personali nell'osservazione del bordo occidentale ed orientale del sole e della durata del passaggio del suo disco o diametro: ma per quanto m'è noto non è stato pubblicato fino ad ora alcun risultato importante di queste ultime osservazioni, le quali vennero forse abbandonate, perchè i risultati non riescivano abbastanza soddisfacenti.

Nel 1876 introducendo nel nostro Osservatorio questo genere di osservazioni, non solamente ebbi occasione di convincermi della loro incontestabile opportunità e convenienza per la speciale ricerca degli errori personali; ma di più potei verificare, che

fatte colle dovute cautele e con buoni strumenti, esse sono per lo meno altrettanto buone e precise come le osservazioni dirette, anche per la determinazione dell'ascensione retta del sole e per la misura della durata del suo passaggio meridiano.

Infatti, come esposi nella mia Nota, *Sulle osservazioni del diametro solare fatte al R. Osservatorio del Campidoglio* 1876 pubblicata nel vol. I serie 3ª degli Atti della R. Accademia dei Lincei 1877, dalla numerosa serie d'osservazioni fatte in quell'anno col metodo della projezione risultava, che l'errore probabile tanto nei singoli contatti osservati ad ogni filo, quanto nel medio dedotto per ogni passaggio dai sette fili, era alquanto minore di quello ottenuto nelle osservazioni dirette; con che veniva provato, che mentre le osservazioni per projezione dei singoli contatti sono per lo meno altrettanto buone come le osservazioni dirette, così i risultati medî ottenuti in ciascun passaggio nei varî giorni sono almeno dello stesso peso dei medî giornalieri ottenuti dalle osservazioni dirette.

Assicurato della bontà e sicurezza di questo modo di osservazione ho creduto opportuno l'adottarlo, non solamente per la speciale ricerca degli errori personali, per la quale era indicatissimo, ma eziandio per le ordinarie osservazioni del passaggio meridiano del sole e per la misura del suo diametro: perchè mentre le osservazioni sono almeno di eguale peso delle osservazioni dirette, si ha poi il vantaggio di moltiplicare il loro numero in ragione di quello degli osservatori, colla probabilità di ottenere nel medio dei risultati compensate almeno in parte le influenze degli errori personali. Perciò nello scorso anno 1877 tutti i passaggi del sole sono stati osservati col metodo di projezione, prendendovi parte simultaneamente due o tre osservatori ogni qualvolta erano a ciò disponibili.

Le norme seguite nelle osservazioni furono quelle stesse adottate nel 1876, e cioè l'immagine solare veniva projettata insieme ai fili del reticolo sopra una tavola, o quadro a superficie imbiancata, disposta perpendicolarmente all'asse del cannocchiale, ed a tale distanza che il diametro di detta immagine riesciva di 70 centimetri circa; portando per l'osservazione di ogni contatto il bordo dell'immagine del sole ed il filo nel centro del campo del cannocchiale per ottenerli ben distinti e ben definiti; notandosi poi il tempo del contatto stesso ad un buon cronometro Dent a tempo siderale, opportunamente messo alla portata della vista e dell'udito degli osservatori. In ogni passaggio venivano osservati i contatti ai sette fili del reticolo.

Le osservazioni, salvo pochissime eccezioni, furono fatte in ogni giorno sereno al mezzodì, ed il numero totale dei passaggi osservati nel corso del 1877 fu di 241, dei quali 27 con un solo osservatore, 163 con due osservatori e 51 con tre: cosicchè il numero totale delle osservazioni ammonta a 506, ripartite fra i tre osservatori nel seguente modo:

Respighi	156	osservazioni
Giacomelli	148	»
Di Legge	202	»
Totale	506	

Essendo queste osservazioni destinate principalmente alla determinazione degli errori personali, si è creduto necessario di tener conto anche di quelle fatte in condizioni atmosferiche anormali, e cioè a cielo nuvoloso o molto nebbioso, e con forti

agitazioni atmosferiche ecc.; interessando appunto di rilevare in questi casi il diverso criterio o giudizio col quale i varî osservatori fissano gli istanti dei contatti dei due bordi coi fili.

I risultati ottenuti da queste osservazioni in riguardo alla grandezza del diametro solare sono contenuti nello Specchio I, posto in fine alla presente Nota: nel quale in ordine di data sono riportate le durate del passaggio del disco solare osservate, col nome dell'osservatore, il relativo valore dato dal Nautical Almanac di Londra, la differenza fra la durata osservata e la calcolata, e finalmente il valore del semidiametro, calcolato sulla durata osservata e ridotto alla distanza media dalla terra al sole. Gli osservatori sono designati colle iniziali:

R = Respighi,
G = Giacomelli,
D = Di Legge.

Non avendo riguardo agli osservatori se prendiamo il medio delle differenze fra le durate osservate e le calcolate, troviamo:

Differenza media = Nautical Almanac — osservazione = — $0^s,059$

cogli estremi { in più, Nautical Almanac — osservazione = + 0,310
in meno, Nautical Almanac — osservazione = — 0,390

Prendendo invece le osservazioni separatamente per ciascun osservatore, si ottengono i seguenti risultati.

Differenze fra la durata osservata e la calcolata. Osservazione — Nautical Almanac

	media	massima	minima	n° osservazioni
Respighi	— $0^s,110$	+ $0^s,23$	— $0^s,39$	156
Giacomelli	— 0,059	+ 0,31	— 0,29	148
Di Legge	— 0,020	+ 0,30	— 0,31	202

Dalle osservazioni del 1877 si deduce quindi che le durate del passaggio del diametro solare, date dal Nautical Almanac di Londra, sono troppo grandi, e la correzione riescirebbe di — $0^s,063$, valutandola col medio delle differenze ottenute dai tre osservatori, risultato quasi identico a quello ottenuto dalle nostre osservazioni negli anni antecedenti; e che pochissimo diversifica da quello ricavato dalle osservazioni di Greenwich.

In quanto poi ai singoli risultati ottenuti dai tre osservatori si conferma ciò che risultava dalle osservazioni del 1876; e cioè che le durate del passaggio variano sensibilmente da osservatore ad osservatore, malgrado l'identità dello strumento e della immagine osservata.

Le differenze ritrovate nel 1876 sono

Respighi	— $0^s,128$	da 90	osservazioni
Giacomelli	— 0,072	» 54	»
Di Legge	—0,050	» 140	»

E qualora si consideri che esse furono dedotte da un numero più ristretto di osservazioni, e con due metodi diversi, e cioè parte direttamente e parte per projezione, non si troveranno certamente troppo discordanti da quelle del 1877: che anzi

avuto riguardo alla grande influenza delle condizioni atmosferiche su queste osservazioni, si possono ritenere i detti risultati in conveniente accordo.

Essendo tali differenze dedotte da un numero abbastanza grande di osservazioni, e sparse con una certa regolarità nell'intero corso dell'anno, potrebbero prendersi come dati abbastanza approssimativi per la determinazione degli errori personali relativi dei tre osservatori; ma per questa speciale ricerca sono certamente più opportuni i risultati ottenuti dalle osservazioni simultanee, dalle quali possono anche ricavarsi gli errori personali nelle osservazioni distinte dei due bordi, occidentale ed orientale.

Siccome i due osservatori Respighi e Giacomelli per le loro speciali attribuzioni non poterono partecipare assiduamente a queste simultanee osservazioni, ma soltanto ad intervalli nel corso dell'anno, i loro risultati non potrebbero ragionevolmente impiegarsi alla determinazione diretta del loro errore personale relativo, sia pel numero piuttosto ristretto delle osservazioni, sia per la circostanza di essere queste troppo irregolarmente sparse nelle varie stagioni, tanto più che a tutto rigore gli errori personali in queste osservazioni risultano, almeno per qualche osservatore, sensibilmente variabili da stagione a stagione: il che probabilmente avviene per la maggiore o minore prevalenza di quelle condizioni atmosferiche che influiscono maggiormente nel giudizio o criterio, secondo il quale viene da ogni osservatore fissato l'istante dei contatti nei due bordi.

Ma le osservazioni del Di Legge essendo più numerose e quasi regolarmente distribuite nel corso dell'anno, e di più essendo colle medesime intercalate con una certa regolarità le osservazioni simultanee di Respighi o Giacomelli, così prendendo come termini di confronto i risultati ottenuti dallo stesso Di Legge si ha un numero abbastanza grande ed opportunamente distribuito di osservazioni simultanee Di Legge—Respighi e Di Legge—Giacomelli, per dedurre i relativi errori personali.

Le osservazioni fatte simultaneamente da Di Legge e Respighi sono 121, e parimenti 121 quelle delle osservazioni simultanee fatte da Di Legge e Giacomelli: e prendendo le differenze di tempo fra i contatti dei due bordi osservati da ogni coppia di osservatori in ogni passaggio, si trovano i seguenti valori medî delle 121 osservazioni.

Differenze di tempo fra i passaggi

	Bordo occidentale	Bordo orientale
Di Legge—Respighi	$= -0^s,010$	$+0^s,072$
Di Legge—Giacomelli	$= -0,018$	$+0,026$

Dai quali deducendo le differenze nella durata del passaggio del diametro solare si ha:

Differenza della durata del passaggio

Di Legge-Respighi $= +0^s,082$

Di Legge-Giacomelli $= +0,044$

mentre prendendo questa differenza di durata dal complesso delle osservazioni fatte separatamente dai tre osservatori, quali sono superiormente riportate, risulta:

Differenza della durata del passaggio

Di Legge—Respighi $= +0^s,090$

Di Legge—Giacomelli $= +0,039$

quantità quasi identiche alle precedenti.

Se dagli errori personali relativi al Di Legge, deduciamo gli errori personali fra Respighi e Giacomelli si ottiene:

Differenza fra i tempi dei contatti

	Bordo occidentale	Bordo orientale
Respighi—Giacomelli	$= - 0^s,008$	$- 0^s,046$

e la differenza nella durata del passaggio sarebbe di $- 0^s,038$.

Prendendo invece queste differenze dalle osservazioni simultanee Respighi-Giacomelli si ha:

	Bordo occidentale	Bordo orientale
Respighi—Giacomelli	$= + 0^s,003$	$- 0^s,023$

e per la durata del passaggio del diametro

$$\text{Respighi—Giacomelli} = - 0^s,026,$$

quantità alquanto diverse dalle precedenti, quali potevano prevedersi per la diversità di epoca e di numero delle osservazioni.

Da questi risultati si deduce che i tre osservatori sono più concordi nell'osservazione del primo bordo che in quella del secondo, e che perciò la causa dell'errore personale nella misura della durata del passaggio del sole è riposta principalmente nella diversità del giudizio fatto dagli osservatori sull'istante del secondo contatto. La grandezza di questi errori è però abbastanza piccola e sensibilmente minore di quella trovata dal sig. Dunkin per gli errori personali degli osservatori di Greenwich; il che ci fa ritenere che la grandezza del diametro solare da noi dedotta dalle osservazioni dei singoli osservatori, e meglio ancora dal loro medio sia meritevole di molta fiducia.

Nell'ultima colonna dello specchio posto in fine alla presente Nota sono riportati i valori del semidiametro solare ridotti alla distanza media del sole, quali risultano dalle durate osservate del passaggio del diametro. Prendendo il medio di tutte le 506 osservazioni senza aver riguardo agli osservatori, si trova il valore Δ del semidiametro solare

$$\Delta = 961'',40$$

cogli estremi

$$\text{massimo} \quad \Delta = 964,\ 2$$
$$\text{minimo} \quad \Delta = 959,\ 0$$

Prendendo invece separatamente i medî delle osservazioni dei tre osservatori, si trova

	Δ	N.° osservazioni
Respighi	$\Delta = 961'',06$	156
Giacomelli	961, 42	» » 148
Di Legge	961, 69	» » 202
medio	961, 39	

cogli estremi

	Δ massimo	Δ minimo
Respighi	963'',3	959'',0
Giacomelli	964, 2	959, 7
Di Legge	964, 2	959, 1

Allo scopo di rendere sensibile l'influenza delle stagioni sui risultati di queste osservazioni, credo opportuno di esporre nei seguenti specchi i risultati parziali ottenuti da ciascun osservatore nelle varie stagioni o piuttosto nei quattro trimestri del 1877.

Semidiametro solare medio.

Stagioni	Respighi	Giacomelli	Di Legge
Inverno . . .	960″,78	961″,36	961″,62
Primavera .	961, 02	961, 44	961, 64
Estate. . . .	961, 23	961, 52	961, 82
Autunno . .	961, 16	961, 30	961, 65

Semidiametro solare massimo.

Stagioni	Respighi	Giacomelli	Di Legge
Inverno . . .	962″,7	963″,3	964″,0
Primavera .	962, 5	963, 1	964, 0
Estate. . . .	962, 3	964, 2	964, 2
Autunno . .	963, 3	962, 8	963, 2

Semidiametro solare minimo.

Stagioni	Respighi	Giacomelli	Di Legge
Inverno . . .	959″,0	960″,4	959″,9
Primavera .	959, 0	960, 2	959, 1
Estate . . .	959, 4	959, 7	960, 1
Autunno . .	959, 9	960, 2	960, 1

Quantunque da questi dati risulti che il semidiametro solare riesce minimo nei mesi invernali e massimo nella estate, pure le differenze non sono abbastanza grandi per escludere il dubbio che un tale risultato possa essere puramente accidentale; e questo dubbio è tanto più ragionevole, avuto riguardo alla diversità dei risultati ottenuti negli anni precedenti, i quali presentano andamenti diversi.

Perciò senza ammettere che la grandezza apparente del diametro solare, quale risulta dalle osservazioni, sia sistematicamente dipendente dalle varie stagioni o dalle varie epoche dell'anno, è però indubitato che le cause, le quali tendono ad esagerare o ad impicciolire questa quantità, possono prevalere, o nell'uno o nell'altro senso, pel corso di varî mesi, senza giungere ad una completa compensazione anche nel corso di un anno e forse di più anni.

Ed è appunto da questa inevitabile incertezza di risultati, resa anche maggiore dagli errori personali degli osservatori e dalla diversità degli strumenti, che ha tratto origine la infondata questione delle variazioni reali del diametro del sole.

Confrontando i risultati medî, ottenuti pel semidiametro dai tre osservatori, colle singole osservazioni, si trovano i seguenti allontanamenti od errori probabili:

Errore probabile di una osservazione	Respighi	0″,530
	Giacomelli	0, 559
	Di Legge	0, 638
Errore probabile del medio . . .	Respighi	0″,042
	Giacomelli	0, 046
	Di Legge	0, 044

Questi errori probabili non debbono però considerarsi come le misure del grado di precisione delle osservazioni dei tre osservatori, ma piuttosto come gli allontanamenti probabili delle singole osservazioni di ciascun passaggio dal medio risultato ottenuto da ogni osservatore: allontanamenti dipendenti principalmente dalla variabilità dello stato atmosferico, il quale da un giorno all'altro, modificando diversamente il contorno dell'immagine solare, ne altera più o meno sensibilmente la grandezza apparente, aumentando quindi o diminuendo la durata del suo passaggio. Queste alterazioni sono comuni per tutti gli osservatori in riguardo al senso, ma la loro influenza sulla misura della durata del passaggio può essere diversamente stimata o valutata dai varî osservatori; ed è principalmente in questa diversità di giudizio o di stima nel fissare gli istanti dei contatti dei due bordi che traggono origine gli errori personali nelle misure del diametro solare.

Perciò gli errori probabili superiormente determinati sono quasi indipendenti dall'osservatore, risiedendo la loro causa nella immagine stessa del sole; ed è probabilmente per questo che la loro grandezza riesce quasi identica per tutti gli osservatori.

Per valutare la bontà delle osservazioni in se stesse, o il grado di precisione raggiunto da ogni osservatore, bisogna determinare l'errore probabile nelle varie misure fatte da ogni osservatore in ciascun giorno, prendendo come errore accidentale la differenza fra la durata del passaggio osservato ad ogni filo e la durata media dedotta dai sette fili. Prese queste differenze od errori separatamente per ogni osservatore, e per un numero abbastanza grande di passaggi o per tutti i passaggi osservati, l'errore probabile su di essi calcolato potrà realmente ritenersi come misura della bontà o precisione delle osservazioni dei varî osservatori.

Avendo nella nostra serie di osservazioni 56 passaggi osservati simultaneamente da tutti e tre gli osservatori, essi si prestavano molto bene per questa ricerca; perchè in grazia della identità delle condizioni in cui vennero fatte le osservazioni, gli errori potevano ritenersi come rigorosamente fra loro comparabili. Su di essi pertanto si sono calcolati gli errori probabili di ogni osservatore, per la durata osservata ad ogni filo, e si sono ottenuti i seguenti risultati:

Errore probabile sul passaggio ad un filo

Respighi	$0^s,086$
Giacomelli	0, 098
Di Legge	0, 089

Dividendo questi numeri per 2 e riducendoli in arco moltiplicandoli per 15, si hanno approssimativamente gli errori probabili in secondi di arco nella misura del semidiametro, che sono:

Errore probabile pel semidiametro ad ogni filo

Respighi . . . . 0'',645,
Giacomelli 0, 715,
Di Legge 0, 667,

quantità di poco maggiori degli errori probabili ottenuti pei passaggi completi da un giorno all'altro: da cui si deduce che l'errore probabile nella misura del semidiametro ad un solo filo è per ogni osservatore di poco superiore alla differenza od errore probabile prodotto di giorno in giorno sulla grandezza apparente del diametro stesso dalla diversità delle condizioni atmosferiche.

Dividendo gli errori probabili della durata del passaggio ad ogni filo per $\sqrt{7}$, ossia per la radice del numero delle osservazioni di ciascun passaggio, si ottengono gli errori probabili del medio dei sette fili, ossia l'errore probabile sull'osservazione di un passaggio completo, i quali sono:

Errore probabile di un passaggio completo

Respighi . . . . 0^s,032,
Giacomelli 0, 037,
Di Legge . . . . 0, 034.

Da questi dati risulta che l'errore probabile nella osservazione della durata del passaggio meridiano del sole è quasi lo stesso per tutti e tre gli osservatori, e che il suo valore è di circa un terzo di secondo di tempo siderale; quantità che certamente può ritenersi come abbastanza piccola, avuto riguardo alla difficoltà della osservazione ed al ristretto numero dei fili.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1877.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore	Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac					Osservata	Nautical Almanac			
1877						1877					
Genn. 1	2m21s,89	2m22s,12	— 0,23	960″,3	R.	Febb. 11	2m14s,06	2m14s,14	— 0,08	961″,2	R.
»	21,96	» »	— 0,16	960,8	D.	»	14,21	» »	+ 0,07	962,3	D.
3	21,64	21,92	— 0,28	960,0	R.	13	13,41	13,72	— 0,31	969,6	R.
»	21,74	» »	— 0,18	960,6	D.	»	13,54	» »	— 0,18	960,9	D.
4	21,96	21,80	+ 0,16	962,9	D.	14	13,38	13,50	— 0,12	961,0	R.
8	21,18	21,28	— 0,10	961,2	R.	»	13,53	» »	+ 0,03	962,0	D.
»	21,30	» »	+ 0,02	961,9	D.	15	13,53	13,30	+ 0,23	763,5	D.
10	20,79	20,98	— 0,19	960,6	R.	16	12,91	13,08	— 0,17	960,6	R.
»	20,95	» »	— 0,03	961,6	D.	»	12,86	» »	— 0,22	960,2	D.
12	20,22	20,46	— 0,24	960,0	R.	18	12,68	12,68	0,00	961,8	R.
»	20,49	» »	+ 0,03	961,9	D.	»	12,73	» »	+ 0,05	962,1	D.
14	20,27	20,28	— 0,01	961,7	R.	19	12,37	12,50	— 0,13	960,9	R.
»	20,27	» »	— 0,01	961,7	D.	»	12,55	» »	+ 0,05	962,2	D.
15	19,90	20,10	— 0,20	960,5	R.	21	11,99	12,12	— 0,13	961,0	R.
»	20,08	» »	— 0,02	961,6	D.	»	12,16	» »	+ 0,04	962,2	D.
17	19,55	19,70	— 0,15	960,7	R.	23	11,37	11,76	— 0,39	959,0	R.
»	19,76	» »	+ 0,06	962,2	D.	»	11,51	» »	— 0,25	960,0	D.
18	29,59	19,50	+ 0,09	962,4	D.	25	11,43	11,42	+ 0,01	961,9	R.
19	19,22	19,30	— 0,08	961,2	D.	»	11,56	» »	+ 0,14	962,9	D.
20	19,01	19,10	— 0,09	961,2	R.	27	11,01	11,08	— 0,07	961,3	D.
»	19,10	» »	0,00	961,8	D.	28	10,77	11,94	— 0,17	960,6	G.
22	18,37	18,68	— 0,31	959,6	R.		10,77	» »	— 0,17	960,6	D.
»	18,44	» »	— 0,24	960,1	D.	Marzo 1	10,83	10,78	+ 0,05	962,2	G.
24	18,06	18,24	— 0,18	960,5	R.		10,81	» »	+ 0,03	962,0	D.
»	18,29	» »	+ 0,05	962,1	D.	2	10,58	10,64	— 0,06	961,3	R.
25	17,97	18,02	— 0,05	961,4	D.		10,63	» »	— 0,01	961,7	D.
28	17,13	17,34	— 0,21	960,3	R.	3	10,70	10,50	+ 0,20	963,3	G.
»	17,19	» »	— 0,15	960,7	D.	»	10,69	» »	+ 0,19	963,2	D.
29	16,98	17,12	— 0,14	960,8	R.	9	9,55	9,78	— 0,23	960,2	R.
»	16,98	» »	— 0,14	960,8	D.	»	9,81	» »	+ 0,03	962,1	D.
30	17,06	16,88	+ 0,18	963,0	D.	10	9,65	9,68	— 0,03	961,6	G.
Febb. 1	16,28	16,42	— 0,14	960,8	D.	»	9,65	» »	— 0,03	961,6	D.
2	16,03	16,20	— 0,17	960,7	R.	12	9,61	9,59	+ 0,11	962,7	R.
3	15,73	15,96	— 0,23	960,2	R.	»	9,79	» »	+ 0,29	964,0	D.
»	15,84	» »	— 0,12	960,9	D.	17	8,99	9,14	— 0,15	960,6	G.
4	15,57	15,74	— 0,17	960,7	R.	»	9,02	» »	— 0,12	960,9	D.
5	15,16	15,50	— 0,34	959,5	R.	18	8,93	9,10	— 0,17	960,6	R.
»	15,29	» »	— 0,21	960,3	D.	»	9,06	» »	— 0,04	961,6	G.
6	15,26	15,28	— 0,02	961,7	D.	19	8,86	9,04	— 0,18	960,5	R.
7	14,97	15,04	— 0,07	961,3	R.	»	8,98	» »	— 0,06	961,4	G.
»	15,11	» »	+ 0,07	962,3	D.	20	8,91	9,00	— 0,09	961,2	G.
8	14,82	14,82	0,00	961,9	R.	»	8,70	» »	— 0,23	960,2	D.
»	14,90	» »	+ 0,08	962,4	D.	22	8,77	8,94	— 0,17	960,6	D.
9	14,67	14,60	+ 0,07	962,4	R.	25	8,61	8,90	— 0,29	959,7	R.
»	14,88	» »	+ 0,28	963,9	D.	»	8,67	» »	— 0,23	960,2	D.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1877.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1877					
Mar. 27	$2^m\ 8^s,80$	$2^m\ 8^s,90$	— 0,10	961",2	R.
»	8,79	» »	— 0,11	961,1	D.
28	8,72	8,90	— 0,18	960,4	G.
»	8,66	» »	— 0,24	960,0	D.
29	8,89	8,92	— 0,03	961,6	R.
»	8,94	» »	+ 0,02	961,0	D.
Aprile 1	8,89	9,00	— 0,11	961,1	R.
»	9,11	» »	+ 0,11	962,7	G.
2	8,84	9,04	— 0,20	960,4	R.
»	8,85	» »	— 0,19	960,5	D.
3	8,69	9,08	— 0,39	959,0	R.
»	8,84	» »	— 0,24	960,1	D.
5	9,11	9,18	— 0,07	961,3	G.
»	9,26	» »	+ 0,08	992,4	D.
6	9,18	9,24	— 0,06	961,3	R.
»	9,14	» »	— 0,10	961,1	D.
7	9,31	9,30	+ 0,01	961,9	R.
»	9,26	» »	— 0,04	961,5	D.
8	9,19	9,36	— 0,17	960,5	R.
»	9,19	» »	— 0,17	960,5	D.
9	9,23	9,44	— 0,21	960,3	R.
»	9,22	» »	— 0,22	960,2	D.
12	9,57	9,70	— 0,13	960,9	R.
»	9,44	» »	— 0,26	960,0	D.
13	9,71	9,80	— 0,09	960,6	R.
»	9,81	» »	+ 0,01	962,0	D.
14	9,71	9,90	— 0,19	960,5	G.
»	9,66	» »	— 0,24	960,2	D.
15	9,91	10,00	— 0,09	961,2	R.
»	10,00	» »	0,00	961,8	D.
16	9,97	10,10	— 0,13	960,8	R.
»	9,99	» »	— 0,11	961,0	D.
21	10,55	10,70	— 0,15	960,6	G.
»	10,57	» »	— 0,13	960,8	D.
23	10,71	10,96	— 0,25	959,9	R.
»	10,60	» »	— 0,36	959,1	D.
24	10,94	11,10	— 0,16	960,6	G.
»	11,00	» »	— 0,10	961,0	D.
25	11,12	11,24	— 0,12	960,9	R.
»	11,18	» »	— 0,06	961,3	D.
27	11,52	11,54	— 0,02	961,7	G.
»	11,57	» »	+ 0,03	962,0	D.
30	11,88	12,00	— 0,12	961,0	R.
»	11,90	» »	— 0,10	961,1	D.
Magg. 1	11,99	12,16	— 0,17	960,6	G.
1877					
Magg. 1	$2^m11^s,96$	$2^m12^s,16$	— 0,20	960",4	D.
3	12,45	12,46	— 0,01	961,7	G.
»	12,49	» »	+ 0,03	962,0	D.
4	12,42	12,62	— 0,20	960,4	R.
»	12,41	» »	— 0,21	960,3	D.
6	12,74	12,94	— 0,20	960,3	G.
»	12,77	» »	— 0,17	960,5	D.
7	13,04	13,12	— 0,08	961,2	R.
»	13,08	» »	— 0,04	961,5	D.
8	13,19	13,28	— 0,09	961,2	G.
»	13,24	» »	— 0,04	961,6	D.
14	14,09	14,26	— 0,17	960,6	R.
»	14,20	» »	— 0,06	961,4	D.
16	14,54	14,58	— 0,04	961,5	R.
»	14,63	» »	+ 0,05	962,2	D.
18	14,83	14,90	— 0,07	961,3	R.
»	15,04	» »	+ 0,14	962,8	D.
20	15,14	15,22	— 0,08	961,3	G.
»	15,16	» »	— 0,06	961,5	D.
24	15,99	15,82	+ 0,17	963,1	G.
»	16,12	» »	+ 0,30	964,0	D.
27	16,32	16,24	+ 0,08	962,4	G.
»	16,44	» »	+ 0,20	963,3	D.
28	16,31	16,36	— 0,05	961,6	R.
»	16,46	» »	+ 0,10	962,7	D.
29	16,48	16,48	0,00	961,8	G.
»	16,54	» »	+ 0,06	962,3	D.
30	16,34	16,60	— 0,26	960,0	R.
»	16,41	» »	— 0,19	960,5	D.
31	16,71	16,72	— 0,01	961,7	G.
»	16,77	» »	+ 0,05	962,1	D.
Giu. 1	16,64	16,84	— 0,20	960,5	R.
»	16,58	» »	— 0,26	960,0	D.
2	16,87	16,94	— 0,07	961,4	R.
»	17,01	» »	+ 0,07	962,4	D.
3	16,89	17,04	— 0,15	960,8	R.
»	16,90	» »	— 0,14	960,9	D.
4	17,07	17,14	— 0,07	961,3	R.
»	17,10	» »	— 0,04	961,5	D.
5	17,32	17,24	+ 0,08	962,4	G.
»	17,33	» »	+ 0,09	962,5	D.
6	17,43	17,32	+ 0,11	962,5	R.
»	17,40	» »	+ 0,08	962,3	D.
7	17,27	17,40	— 0,13	960,9	G.
»	17,44	» »	+ 0,04	962,1	D.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1872.

Data		Durata del passaggio: Osservata	Durata del passaggio: Nautical Almanac	Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
1877						
Giu.	8	2^m17^s,54	2^m17^s,48	+ 0,06	962″,3	R.
	»	17,66	» »	+ 0,18	963,1	D.
	9	17,30	17,56	— 0,26	960,1	R.
	»	17,52	» »	— 0,04	961,6	D.
	10	17,68	17,62	+ 0,06	962,3	R.
	»	17,80	» »	+ 0,18	963,1	D.
	11	17,68	17,68	0,00	961,8	R.
	»	17,86	» »	+ 0,18	963,1	D.
	12	17,76	17,74	+ 0,02	962,0	G.
	»	17,92	» »	+ 0,18	963,2	D.
	13	17,62	17,78	— 0,16	960,7	R.
	»	17,79	» »	+ 0,01	962,0	D.
	14	17,71	17,82	— 0,11	961,1	G.
	»	17,72	» »	— 0,10	961,2	D.
	15	17,77	17,86	— 0,09	961,2	G.
	»	17,85	» »	— 0,01	961,8	D.
	16	17,80	17,88	— 0,08	961,3	R.
	»	17,96	» »	+ 0,08	962,4	D.
	20	17,66	17,92	— 0,26	959,9	R.
	»	17,76	» »	— 0,16	960,2	D.
	21	17,86	17,92	— 0,06	961,4	G.
	»	17,90	» »	— 0,02	961,7	D.
	22	17,91	17,92	— 0,01	961,8	G.
	»	17,84	» »	— 0,08	961,3	D.
	23	17,89	17,90	— 0,01	961,8	R.
	»	17,92	» »	+ 0,02	962,0	D.
	24	17,84	17,88	— 0,04	961,5	G.
	»	17,99	» »	+ 0,11	962,5	D.
	25	17,94	17,84	+ 0,10	962,5	R.
	»	17,97	» »	+ 0,13	962,7	D.
	26	17,66	17,80	— 0,14	960,8	R.
	»	17,84	» »	+ 0,04	962,1	D.
	27	17,72	17,76	— 0,04	961,5	R.
	»	17,66	» »	— 0,10	961,1	G.
	»	17,85	» »	+ 0,09	962,5	D.
	28	17,57	17,72	— 0,15	960,8	R.
	»	17,62	» »	— 0,10	961,2	G.
	»	17,80	» »	+ 0,08	962,5	D.
	29	17,64	17,66	— 0,02	961,7	R.
	»	17,63	» »	— 0,03	961,7	G.
	»	17,63	» »	— 0,03	961,7	D.
	30	17,41	17,60	— 0,19	960,6	R.
	»	17,36	» »	— 0,24	960,2	G.
	»	17,45	» »	— 0,15	960,9	D.
Lugl.	1	17,57	17,52	+ 0,05	962,2	R.

Data		Durata del passaggio: Osservata	Durata del passaggio: Nautical Almanac	Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
1877						
Lug.	1	2^m17^s,54	2^m17^s,52	+ 0,02	962″,0	G.
	»	17,59	» »	+ 0,07	962,3	D.
	3	17,25	17,36	— 0,11	961,0	R.
	»	17,07	» »	— 0,29	959,8	G.
	»	17,20	» »	— 0,16	960,7	D.
	4	17,29	17,28	+ 0,01	961,9	R.
	»	17,22	» »	— 0,06	961,5	G.
	»	17,19	» »	— 0,09	961,3	D.
	5	17,21	17,18	+ 0,03	962,0	R.
	»	17,18	» »	— 0,00	961,8	G.
	»	17,29	» »	+ 0,11	962,6	D.
	6	16,91	17,08	— 0,17	960,6	R.
	»	16,81	» »	— 0,27	959,9	G.
	»	16,85	» »	— 0,23	960,2	D.
	7	16,81	16,98	— 0,17	960,6	R.
	»	16,78	» »	— 0,20	960,4	G.
	»	16,84	» »	— 0,14	960,8	D.
	8	16,84	16,88	— 0,04	961,6	R.
	»	16,71	» »	— 0,17	960,6	G.
	»	16,78	» »	— 0,10	961,1	D.
	9	16,73	16,76	— 0,03	961,6	R.
	»	16,74	» »	— 0,02	961,7	G.
	»	16,81	» »	+ 0,05	962,2	D.
	11	16,49	16,52	— 0,03	961,7	R.
	»	16,43	» »	— 0,09	961,3	G.
	»	16,60	» »	+ 0,08	962,5	D.
	12	16,30	16,38	— 0,08	961,2	R.
	»	16,27	» »	— 0,11	961,0	G.
	»	16,36	» »	— 0,02	961,7	D.
	13	16,23	16,26	— 0,03	961,6	G.
	»	16,21	» »	— 0,05	961,5	D.
	14	15,94	16,12	— 0,18	960,5	R.
	»	15,89	» »	— 0,23	960,2	G.
	»	15,90	» »	— 0,22	960,3	D.
	15	15,81	15,98	— 0,17	960,6	R.
	»	15,80	» »	— 0,18	960,5	G.
	»	15,89	» »	— 0,09	961,2	D.
	16	15,74	15,84	— 0,10	961,1	G.
	»	15,82	» »	— 0,02	961,7	D.
	18	15,62	15,54	+ 0,08	962,4	R.
	»	15,62	» »	+ 0,08	962,4	G.
	»	15,54	» »	0,00	961,8	D.
	19	15,31	15,38	— 0,07	961,3	R.
	»	15,29	» »	— 0,09	961,1	G.
	»	15,25	» »	— 0,13	960,8	D.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1877.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1877					
Lug. 20	$2^m15^s,10$	$2^m15^s,24$	— 0,14	960″,9	R.
»	15.15	» »	— 0,09	961,2	G.
»	15,24	» »	0,00	961,9	D.
21	15,02	15,08	— 0,06	961,5	R.
»	15,02	» »	— 0,06	961,5	G.
22	14,89	14,92	— 0,03	961,7	R.
»	14,93	» »	+ 0,01	961,9	G.
23	14,72	14,74	— 0,02	961,6	R.
»	14,68	» »	— 0,06	961,3	G.
24	14,55	14,58	— 0,03	961,6	R.
»	14,44	» »	— 0,14	960,8	G.
»	14,51	» »	— 0,07	961,3	D.
27	14,02	14,08	— 0,06	961,4	R.
»	13,98	» »	— 0,10	961,1	G.
»	14,10	» »	+ 0,02	962,0	D.
28	13,86	13,89	— 0,03	961,5	R.
»	13,86	» »	— 0,03	961,5	G.
»	13,89	» »	0,00	961,8	D.
29	13,69	13,74	— 0,05	961,5	R.
»	13,69	» »	— 0,05	961,5	G.
»	13,74	» »	0,00	961,9	D.
30	13,48	13,56	— 0,08	961,2	R.
»	13,40	» »	— 0,16	960,6	G.
»	13,46	» »	— 0,10	961,1	D.
31	13,29	13,38	— 0,09	961,1	R.
»	13,28	» »	— 0,10	961,0	G.
»	13,45	» »	+ 0,07	962,3	D.
Agosto 1	13,24	13,20	+ 0,04	962,0	G.
»	13,37	» »	+ 0,17	963,0	D.
2	12,97	13,04	— 0,07	961,3	G.
»	13,01	» »	— 0,03	961,6	D.
3	12,92	12,86	+ 0,06	962,2	G.
»	12,94	» »	+ 0,08	962,4	D.
4	12,61	12,68	— 0,07	961,3	G.
»	12,74	» »	+ 0,06	962,3	D.
7	12,09	12,18	— 0,09	961,2	G.
»	12,17	» »	— 0,01	961,8	D.
8	11,99	12,00	— 0,01	961,7	G.
»	12,00	» »	0,00	961,8	D.
9	11,74	11,84	— 0,10	961,1	G.
»	11,60	» »	— 0,24	960,2	D.
11	11,34	11,50	— 0,16	960,6	G.
»	11,42	» »	— 0,08	961,2	D.
12	11,29	11,34	— 0,05	961,5	G.
»	11,36	» »	+ 0,02	962,0	D.

Data	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac			
1877					
Ag. 13	$2^m10^s,99$	$2^m11^s,18$	— 0,19	960″,4	G.
»	11,08	» »	— 0,10	961,1	D.
14	11,05	11,02	+ 0,03	962,0	G.
»	11,25	» »	+ 0,23	963,5	D.
17	10,44	10,56	— 0,12	960,9	G.
»	10,41	» »	— 0,15	960,7	D.
18	10,43	10,42	+ 0,01	961,9	G.
»	10,46	» »	+ 0,04	962,1	D.
19	10,34	10,28	+ 0,06	962,2	G.
»	10,32	» »	+ 0,04	962,1	D.
20	9,99	10,14	— 0,15	960,7	G.
»	10,06	» »	— 0,08	961,2	D.
21	9,99	10,00	— 0,01	961,8	G.
»	10,06	» »	+ 0,06	962,2	D.
22	9,93	9,88	+ 0.05	962,3	G.
»	9,92	» »	+ 0,04	962,2	D.
23	9,69	9,74	— 0,05	961,4	G.
»	9,57	» »	— 0,17	960,5	D.
24	9,70	9,62	+ 0,08	962,4	G.
»	9,70	» »	+ 0,08	962,4	D.
25	9,81	9,50	+ 0,31	964,1	G.
»	9,75	» »	+ 0,25	963,7	D.
26	9,41	9,38	+ 0,03	964,2	G.
»	9,41	» »	+ 0,03	964,2	D.
27	9,41	9,28	+ 0,13	962,8	G.
»	9,46	» »	+ 0,18	963,2	D.
28	9,11	9,16	— 0,05	961,5	G.
»	9,08	» »	— 0,08	961,2	D.
29	8,98	9,06	— 0,08	961,2	G.
»	9,01	» »	— 0,05	961,5	D.
30	9,04	8,96	+ 0,08	962,5	G.
»	9,17	» »	+ 0,21	963,4	D.
31	8,87	8,86	+ 0,01	961,8	G.
»	8,91	» »	+ 0,05	962,2	D.
Sett. 1	8,70	8,78	— 0,08	961,3	G.
»	8,80	» »	+ 0,02	962,1	D.
5	8,59	8,46	+ 0,13	962,7	G.
»	8,51	» »	+ 0,05	962,2	D.
6	8,40	8,40	0,00	961,8	G.
»	8,42	» »	+ 0,02	962,0	D.
7	8,32	8,34	— 0,02	961,7	G.
»	8,31	» »	— 0,03	961,6	D.
8	8,30	8,28	+ 0,02	961,9	G.
»	8,33	» »	+ 0,05	962,1	D.
11	8,04	8,18	— 0,14	960,8	G.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole
fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1877.

Data	Durata del passaggio: Osservata	Durata del passaggio: Nautical Almanac	Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
1877					
Sett. 11	2^m 8^s,07	2^m 8^s,18	— 0,11	961″,0	D.
12	8,15	8,14	— 0,01	961,7	G.
»	8,20	» »	+ 0,06	962,3	D.
13	8,09	8,12	— 0,03	961,6	G.
»	8,20	» »	+ 0,08	962,4	D.
14	8,12	8,10	+ 0,02	962,0	G.
»	8,10	» »	0,00	961,8	D.
15	8,29	8,10	+ 0,19	963,3	G.
»	8,27	» »	+ 0,17	963,1	D.
17	7,87	8,08	— 0,21	960,1	R.
»	7,81	» »	— 0,27	959,7	G.
»	7,89	» »	— 0,19	960,2	D.
20	7,87	8,12	— 0,25	959,9	R.
25	8,19	8,30	— 0,11	960,9	R.
26	8,14	8,36	— 0,22	960,2	R.
28	8,39	8,48	— 0,09	961,1	R.
29	8,49	8,56	— 0,07	961,3	R.
30	8,60	8,64	— 0,04	960,5	R.
Ott. 1	8,89	8,72	+ 0,17	963,1	R.
3	8,73	8,92	— 0,19	960,5	R.
8	9,30	9,48	— 0,18	960,4	R.
11	9,88	9,90	— 0,02	961,7	R.
12	9,99	10,06	— 0,07	961,4	R
13	10,11	10,20	— 0,09	961,1	R.
14	10,49	10,36	+ 0,13	962,7	R.
»	10,50	» »	+ 0,14	962,8	G.
15	10,58	10,54	+ 0,04	962,2	R.
»	10,50	» »	— 0,04	961,6	G.
16	10,61	10,70	— 0,09	961,1	R.
»	10,61	» »	— 0,09	961,1	G.
17	10,68	10,88	— 0,20	960,4	G.
18	10,99	11,06	— 0,07	961,4	R.
»	11,03	» »	— 0,03	961,7	G.
19	11,13	11,24	— 0,11	961,1	R.
»	11,03	» »	— 0,21	960,3	G.
»	11,18	» »	— 0,06	962,4	D.
21	11.41	11,62	— 0,21	960,3	R.
»	11,49	» »	— 0,13	960,9	G.
22	11,71	11,82	— 0,11	961,0	R.
»	11,87	» »	+ 0,05	962,2	G.
23	11,87	12,02	— 0,15	960,7	R.
»	11,97	» »	— 0,05	961,5	G.
24	12,10	12,22	— 0,12	961,0	R.
»	12,14	» »	— 0,08	961,3	G.
27	12,81	12,84	— 0,03	961,6	R.

Data	Durata del passaggio: Osservata	Durata del passaggio: Nautical Almanac	Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
1877					
Ott. 27	2^m12^s,83	2^m12^s,84	— 0,01	961″,8	G.
28	12,95	13,06	— 0,11	961,1	R.
»	13,02	» »	— 0,04	961,6	G.
29	13,15	13,28	— 0,12	960,8	R.
»	13,27	» »	— 0,01	961,7	G.
31	13,71	13,74	— 0,03	961,7	R.
»	13,64	» »	— 0,10	961,2	G.
Nov. 2	14,01	14,18	— 0,17	960,6	G.
3	14,28	14,42	— 0,14	960,9	R.
»	14,24	» »	— 0,18	960,6	G.
4	14,59	14,66	— 0,07	961,4	R.
»	14,69	» »	+ 0,03	962,0	G.
5	14,88	14,90	— 0,02	961,7	R.
»	14,85	» »	— 0,05	961,5	G.
6	15,02	15,12	— 0,10	961,1	R.
»	14,99	» »	— 0,13	960,9	G.
7	15,30	15,36	— 0,06	961,4	R.
»	15,43	» »	+ 0,07	962,3	G.
»	15,40	» »	+ 0,04	962,1	D.
8	15,46	15,60	— 0,14	960,8	R.
»	15,44	» »	— 0,16	960,6	G.
»	15,53	» »	— 0,07	961,3	D.
9	15,87	15,84	+ 0,03	962,0	R.
»	15,96	» »	+ 0,12	962,6	G.
»	16,03	» »	+ 0,19	963,1	D.
10	15,90	16,08	— 0,18	960,5	G.
»	15,94	» »	— 0,14	960,8	D.
13	16,58	16,80	— 0,22	960,2	G.
16	17,53	17,52	+ 0,01	961,9	R.
»	17,59	» »	+ 0,07	962,3	G.
»	17,61	» »	+ 0,09	962,5	D.
17	17,67	17,74	— 0,07	961,3	R.
»	17,64	» »	— 0,10	961,1	G.
»	17,77	» »	+ 0,03	962,0	D.
18	17,92	17,98	— 0,06	961,4	R.
»	17,92	» »	— 0,06	961,4	G.
»	18,08	» »	+ 0,10	962,5	D.
19	18,12	18,20	— 0,08	961,2	R.
»	18,20	» »	0,00	961,8	G.
»	18,39	» »	+ 0,19	963,1	D.
20	18,27	18,44	— 0,17	960,6	R.
»	18,24	» »	— 0,20	960‘5	G.
»	18,31	» »	— 0,13	961,0	D.
22	18,78	18,88	— 0,10	961,2	R.
»	18,81	» »	— 0,07	961,4	G.

Osservazioni del diametro orizzontale del Sole
fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1877.

DATA	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore	DATA	Durata del passaggio		Differenza	Semidiametro ridotto alla distanza media	Osservatore
	Osservata	Nautical Almanac					Osservata	Nautical Almanac			
1877						1877					
Nov. 22	$2^m18^s,81$	$2^m18^s,88$	— 0,07	961″,4	D.	Dec. 16	$2^m22^s,16$	$2^m22^s,42$	— 0,26	960″,1	R.
24	19,08	19,30	— 0,22	960,3	R.	»	22,33	» »	— 0,09	961,3	G.
»	19,14	» »	— 0,16	960,7	G.	»	22,34	» »	— 0,08	961,4	D.
»	19,22	» »	— 0,08	961,3	D.	17	22,23	22,46	— 0,23	960,2	R.
26	19,49	19,70	— 0,21	960,3	R.	»	22,41	» »	— 0,05	961,5	G.
»	19,64	» »	— 0,06	961,4	G.	»	22,42	» »	— 0,04	961,6	D.
»	19,71	» »	+ 0,01	961,8	D.	18	22,35	22,52	— 0,17	960,7	R.
27	19,62	19,90	— 0,28	959,4	R.	»	22,46	» »	— 0,06	961,6	G.
»	19,73	» »	— 0,17	960,7	G.	»	22,45	» »	— 0,07	961,5	D.
»	19,69	» »	— 0,21	960,4	D.	19	22,77	22,54	+ 0,23	963,3	R.
29	20,10	20,28	— 0,18	960,5	R.	»	22,69	» »	+ 0,15	962,8	G.
»	20,12	» »	— 0,16	960,7	G.	»	22,74	» »	+ 0,20	963,1	D.
»	20,20	» »	— 0,08	961,2	D.	20	22,46	22,56	— 0,10	961,1	R.
30	20,22	20,46	— 0,24	960,1	R.	»	22,63	» »	+ 0,07	962,3	G.
»	20,31	» »	— 0,15	960,7	G.	»	22,61	» »	+ 0,05	962,1	D.
»	20,35	» »	— 0,11	961,0	D.	22	22,34	22,58	— 0,24	960,1	R.
Dec. 5	21,11	21,28	— 0,17	960,6	G.	»	22,46	» »	— 0,12	961,0	G.
»	21,13	» »	— 0,15	960,7	D.	»	22,34	» »	— 0,24	960,2	D.
6	21,19	21,42	— 0,23	960,2	G.	23	22,42	22,58	— 0,16	960,7	R
»	21,24	» »	— 0,18	960,6	D.	»	22,50	» »	— 0,08	961,3	G.
7	21,45	21,56	— 0,11	961,1	G.	»	22,56	» »	— 0,02	961,7	D.
»	21,51	» »	— 0,05	961,5	D.	28	22,46	22,42	+ 0,04	962,1	R.
12	21,88	22,12	— 0,24	960,2	G.	»	32,51	» »	+ 0,09	962,4	G.
»	22,01	» »	— 0,11	961,1	D.	»	22,58	» »	+ 0,16	962,9	D.
13	22,01	22,20	— 0,19	960,5	R.	29	22,31	22,36	— 0,05	961,4	R.
»	22,01	» »	— 0,19	960,5	G.	»	22,39	» »	+ 0,03	962,0	G.
»	22,09	» »	— 0,11	961,1	D.	»	22,57	» »	+ 0,21	963,3	D.

Scheletri umani della caverna delle Arene candide presso Finalmarina in Savona.

Memoria del dott. ANGELO INCORONATO

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 2 giugno 1878.

In quel di Savona, nella contrada delle Arene candide presso Finalmarina, venivano eseguiti dall'egregio prof. Arturo Issel nel 1876 taluni scavi, per mandato avutone dal Ministero della Pubblica Istruzione.

Risultato di essi fu là scoperta di una caverna, in cui giacevano non poche ossa umane, la maggior parte aggruppate ancora in scheletri, ed altre sparse, ossami di animali, ed una discreta quantità di oggetti ed utensili, testimonî muti ma non equivoci della prima industria umana. Quali scheletri ed oggetti, che vedonsi nel Museo preistorico del Collegio romano, affidato alla prestantissima direzione del chiarissimo prof. Luigi Pigorini, fu riconosciuto, sia per se stessi, sia per le condizioni stratigrafiche del suolo, appartenere ad una epoca preistorica e propriamente a quella della *pietra polita* o *neolitica* dei paleoetnologi. Il sullodato prof. Pigorini volle incaricarmi dell'ordinamento e ricomposizione degli scheletri, abbenchè, onde ognuno si abbia il suo, è mestieri che io dica, come per le premurose cure prese dall' Issel nella spedizione dei medesimi, il mio còmpito fosse stato molto agevolato. Inoltre il Pigorini pur non ignorando, che Issel si accingeva a pubblicare una accurata ed erudita Memoria illustrativa degli scavi non solo, ma pure degli oggetti non escluso gli stessi scheletri (1) mostrò nondimanco vivo desiderio che di questi ne facessi oggetto di uno studio puramente descrittivo. Quale incarico accettai volentieri, quando lo stesso Issel a me scriveva con squisita cortesia, che a tal modo cotesta descrizione avrebbe potuto venire considerata come appendice complementare del suo lavoro; ecco adunque la origine della presente Memoria ed i limiti entro cui si svolgerà.

Le ossa umane per la maggior parte appartengono a sette individui, e per tal ragione ognuno di questi porta il suo numero corrispondente.

La età dei soggetti è ben diversa, e si mantiene tra un massimo ed un minimo, come si potrebbe verificare in una medesima famiglia. Sicchè ve ne ha uno, cui, credo non allontanarmi dal vero, assegnandogli oltre gli undici lustri, pur tenuto conto della vita selvaggia, la quale a parer mio deve non poco avere influenza sulla precocità della vecchiezza. Questo è lo scheletro che porta il n. II. Quello che è segnato col n. IV mostra essere tra il sesto e settimo lustro, come il n. III

(1) *Nuove ricerche sulle Caverne ossifere della Liguria.* Memoria del prof. Arturo Issel. Reale Accademia dei Lincei. Roma, 1878.

tra il quinto e sesto; mentre il n. I evidentemente è al disotto del ventesimoquinto anno. Appartiene il n. V ad un fanciullo poco maggiore dei dieci anni, gli altri due sono di bambini inferiori agli anni sette.

Stimo fuori proposito pel momento enumerare tutta la serie dei criterî che mi hanno determinato per cotesti apprezzamenti, i quali criterî, fra cui precipuamente quello delle varie formole dentarie, appariranno meglio nel prosieguo della descrizione.

Circa il sesso, e si intende per gli adulti, propenderei a crederlo maschile. Il n. IV veramente, se non in un modo assoluto, almeno per qualcuno dei caratteri sessuali, accenna potere essere probabilmente di donna, come sarà meglio specificato in seguito.

In quanto poi alla statura pare che sia alquanto inferiore alla nostra ordinaria, la quale comunemente in media vien fissata a met. 1,67. Infatti i tre scheletri completi, misurati per disteso, approssimativamente hanno dato in media met. 1,52.

Non tutti sono nel medesimo stato di conservazione, che anzi la parola scheletro, nel senso stretto della parola, può attribuirsi solo a' tre individui più adulti, essendo gli altri dei tre piccoli e dell' adulto più giovine assai incompleti per mancanza di molte ossa; e quelle stesse che restano, sono logore, poco solide e friabilissime.

Quello, che nella serie porta il n. I, conserva le ossa lunghe del solo sinistro lato; tutte le altre mancano, meno le loro epifisi nettamente staccate. Vi hanno parecchie costole, varie vertebre, alcune ossa delle mani e dei piedi. Non esistono le ossa della cintura pelvica, nè della scapulo-clavicolare. Il cranio mancante della base e delle regioni laterali, presenta la volta col frontale completo, alla cui porzione naso-orbitaria sono connessi i mascellari superiori e le ossa nasali. Le ossa zigomatiche sono erose ed incomplete; per l'opposto è ben conservato il mascellare inferiore, il quale porta 14 denti, forti, robusti, poco logorati nei loro piani masticatori, onde risaltano i tubercoli dei molari ed i taglienti degli incisivi. Manca l'ultimo molare non per anco spuntato nemmeno nella mascella superiore, i cui denti sono affatto uguali a quelli della inferiore, salvo la maggior grossezza degl' incisivi, che misurano non meno di 17 mill. in lunghezza. Cotesto scheletro non può essere appartenuto che ad un individuo molto giovine, appena nel ventesimoquinto anno.

Il n. V è ancora esso incompleto. L' occipitale ed il parietale sinistro sono le uniche ossa che avanzano del cranio; come della faccia i soli mascellari superiori, che portano i denti permanenti ed il primo molare grosso già fuoriuscito, mentre il secondo è tuttora nell'alveolo. Del tronco vi hanno quasi tutte le vertebre; le cervicali, le lombari e le ultime dorsali perfettamente ossificate, nelle altre i corpi sono ancora separati dagli archi. Il sacro diviso nelle sue varie vertebre rudimentarie, di cui la prima tuttavia è spartita in corpo e masse laterali. Vi sono quasi tutte le costole. Spartito ancora è l'osso iliaco nelle sue tre porzioni; manca però la pubica. Esistono le clavicole, ed anche ben conservate al pari delle scapule, i due femori, una tibia intera e l'altra spezzata in due frammenti, i peroni, i due omeri; queste ossa lunghe sono sprovviste dei capi articolari pel distacco delle epifisi. Le ossa degli avambracci sono rotte, ed infine vi hanno poche ossa delle mani e dei piedi.

Tale è lo stato di cotesto scheletro che io stimo essere di un fanciullo all'incirca di anni dieci.

Gli scheletri VI e VII sono in condizioni anche meno soddisfacenti. In effetti il primo, del cranio offre solo lo sfenoide intero, le ossa mascellari superiori con l'osso zigomatico destro, il mascellare inferiore coi denti primitivi.

Le poche vertebre che al pari delle costole sono in frantumi, hanno i corpi staccati dagli archi; e poi vi sono gli ossi iliaco ed ischiatico, i due femori, le due tibie coi peroni, le scapule, le clavicole, i due omeri, il radio ed il cubito del sinistro lato interi, quelli del lato destro rotti.

Il n. VII trovasi in peggiori condizioni. Manca tutta la base e le pareti laterali del cranio, tutte le ossa della faccia, meno il mascellare inferiore, diviso nella sinfisi e con pochi denti primitivi. Le parti iliache ed ischiatiche dell'osso ileo, i due femori, le due tibie, il perone sinistro ed un frammento del destro, la clavicola, l'omero, il radio del destro lato, ed un pezzo di cubito, sono le sole parti le quali restano di questo scheletro, che al pari del precedente, non può essere superiore di molto a cinque anni.

Gli altri tre scheletri in generale sono molto meglio conservati, perciò mi è riuscito ricomporli; e quindi mi hanno offerto la occasione di studiarne le particolarità, che ho creduto degne di nota, e rilevarne le principali misure, che ho stimato più necessarie ed utili pel presente lavoro, le quali sono riportate nella tabella annessa.

I tre scheletri adunque che dir si potrebbero completi, portano nella serie i n. II, III, IV.

Nello interesse della descrizione credo che sia più giovevole farla in comune per tutti e tre, salvo a notare le differenze individuali che possano esistere.

Il n. II, ch'è quello del vecchio, si appalesa con ossa robuste percorse da linee d'inserzioni muscolari rilevantissime. Anche nelle vertebre si manifesta cotale caratteristica ch'è comune alle coste ancora. Oltre a ciò le vertebre sono più larghe che alte ed i bordi delle loro superficie articolari, quasi come cigli sporgenti, sopravvanzano di molto la faccia del corpo. Pare come se le vertebre avessero subìta una pressione dall'alto in basso e ne fossero rimaste schiacciate, carattere non equivoco dell'età avanzata e forse pure del disagiato genere di vita.

Negli altri due scheletri che sono più giovani le vertebre si mostrano più piccine e quasi più alte che larghe, nè i bordi dei loro piani articolari sporgono oltre la superficie del corpo. Esse sono ben conservate ed al completo, mentre che nel vecchio ne manca qualcuna, e le prime dorsali sono abbastanza erose.

Riguardo alla direzione delle apofisi spinose delle vertebre dorsali non vi ha particolarità da rilevare, essendo che esse apofisi sono lunghe ed inclinate verso il sacro, come pure non si allontanano dallo stato normale le vertebre lombari, non avendo le loro apofisi spinose e trasverse inclinazione alcuna. Del pari le articolazioni fra vertebra e vertebra non si mostrano differenti dall'ordinario, sia nelle superficie dei loro corpi, sia nelle apofisi articolari, per cui le tre curvature alterne della colonna vertebrale umana agevolmente si rileverebbero, se le vertebre non fossero slegate, e fossero invece mantenute fisse da ligamenti artificiali; ed è cotesta pure la ragione perchè di esse curvature non può con esattezza precisarsi il grado.

Lo scheletro n. III possiede però 25 vertebre, e la soprannumeraria sembrami

appartenere alla serie delle dorsali; imperocchè ne ha tutti i caratteri tipici, non escluso le faccette articolari per le costole corrispondenti. Il numero incompleto di queste non permette di confortare con una prova meglio decisiva la presenza di cotesta vertebra soprannumeraria, ed è deplorevole; ma non perciò può insinuarsi menomamente il dubbio che essa provenga da altro individuo. Imperocchè a prescindere da' caratteri esterni qual si desumono dalla forma, dalla leggerezza e dal colorito, uguale a tutte le altre vertebre di cotesto scheletro, vi ha dippiù il fatto, che essendomi provato, nella composizione della colonna vertebrale, a sottrarre la vertebra eccedente, si notava subito la interruzione della colonna. Poichè è risaputo che le vertebre sono da considerarsi come tanti segmenti trasversi di una piramide triangolare, di guisa che il passaggio dall' uno all' altro, benchè leggermente graduale, pure è tale che ogni pezzo è necessario per l' armoniosa continuità del tutto. E per le medesime ragioni di successiva progressione nella forma e grossezza delle singole vertebre, non potrebbesi ad una colonna vertebrale aggiungere una vertebra che le sia estranea. Ho notato cotesto fatto della vertebra soprannumeraria unicamente per la esattezza della descrizione. Non lo comento perchè se da un lato offrir potrebbe materia di vaste considerazioni, massime trattandosi di razze antiche, d'altra parte per essere così individuale non può dar luogo a giusti apprezzamenti.

Le ossa iliache in genere non sono in buono stato di conservazione. Mi è riuscito però con grande cura a ricomporle alla meglio, ed in assieme all' osso sacro mantenerle siffattamente in rapporto da ottenere una sufficiente idea della cavità del bacino, di cui l'apertura distrettuale superiore è di figura triangolare, o come dicesi *cordiforme;* se non che nel vecchio detta cavità è molto svasata nella porzione superiore. Le tuberosità ischiatiche sono oltremodo robuste e grosse con scabrezze rilevantissime.

La cavità pelvica del n. III è la più ristretta, quella del N. II è la più ampia, mentre quella del n. IV per ampiezza sta nel mezzo. Tutte le cavità acetaboliche hanno, relativamente allo stato normale, maggiore ampiezza proporzionale rispetto alla profondità.

I femori sono nel n. II esageratamente sviluppati in grossezza, inarcati nella loro diafisi e con linea aspra oltremodo spiccata, che in giù verso i condili, ed in su verso le eminenze trocanteriche si biforca, onde la faccia posteriore di questo osso è percorsa da due creste diagonali intersecantesi al mezzo come la lettera X. Il collo del femore non è molto lungo, ma robusto, innestato sul corpo dell'osso sotto un angolo poco aperto.

Di poco differiscono i femori del n. III, la differenza riducendosi solo a diminuita esagerazione di quei caratteri. E molto meno esagerati si appalesano nel n. IV ove la stessa incurvatura è poco sensibile, come la linea aspra. Se non che l'angolo che il collo del femore fa col corpo dell'osso è quasi prossimo al retto, ed il collo benchè più esile è più lungo.

Le tibie appiattite, *platycnemiche,* offrono quella figura dagli antropologi paragonata ad una lama di sciabola; vi sono sviluppate le linee d' inserzioni muscolari. La sinistra del n. IV è mancante dei suoi condili.

Onde si abbia una precisa idea dello appiattimento di questo osso, riporto qui le misure prese dei diametri suoi orizzontali.

	N. II	N. III	N. IV
Diametro ant. post.	0^m,041	0^m,035	0^m,037
» trasv.	0^m,030	0^m,024	0^m,023

Il Broca sulla tibia di un individuo delle Eyzies trovò una differenza maggiore fra detti diametri. Però questa tibia benchè incompleta, pure fu stimata dall'Antropologo di Francia lunga possibilmente 410 mill. poichè quella razza era, a parer dell'illustre professore, molto robusta ed alta di statura. Le tibie dei nostri soggetti sono molto più corte, ma se i diametri orizzontali debbono essere in un certo rapporto con la lunghezza di un osso, l'appiattimento delle tibie, come è rappresentato dagli abitatori della caverna delle Arene candide, risulta proporzionatamente maggiore.

Nulla di notevole offrono le fibule, salvo la esagerazione delle impronte muscolari, ed una soverchia torsione sul proprio asse.

Nè tampoco le ossa dei piedi, quasi complete, solo nel n. II, offrono alcuna particolarità.

Le clavicole si sono conservate alquanto bene, e hanno sufficiente robustezza e torsione.

Le scapule all' opposto mal conservate, sono di una forma un po' stretta ed allungata.

Gli omeri poi davvero non hanno particolarità notevoli, se si eccettui la perforazione della fossa olecranica che si vede nei due omeri destri del n. III e del n. IV.

Non così le ossa dell'avambraccio che meritano speciali considerazioni.

È da notarsi precipuamente la maggior lunghezza del radio rispetto all' omero, di maniera che nella proporzionale, messo l'omero = 100, il radio si trova pel n. II come 78,12, pel n. III come 78,18, e pel n. IV come 80,76.

Il Broca trovò che il rapporto del radio con l'omero è presso le razze inferiori più sproporzionato che non presso gli Europei; così i Negri offrono una media per l'uomo di 79,43 per la donna 79,35, mentre gli Europei darebbero per gli uomini 73,82 e per le donne 74,02.

Il tubercolo bicipitale del radio è eccessivamente sviluppato. Si eleva di molto dalla superficie dell'osso. Sulla faccia corrispondente del cubito viceversa è scavata una larga superficie liscia, levigata, che risponde immediatamente al di sotto della piccola incavatura sigmoidea. Evidentemente essa fu prodotta dalla presenza del tubercolo bicipitale.

È cotesto un fatto tanto più importante perchè significativo della vita selvaggia ed in un laboriosa di quegli uomini. Oltre che è pure sorprendente, che simile disposizione anatomica trova una specie di analogia in taluni ordini di mammiferi, e propriamente in quelli, che dell'arto toracico si servono non solo pel sostegno e progressione, ma per l'arrampicarsi e la preensione. Così mentre di essa non offrono alcuna traccia i monodattili ed i didattili, invece cominciano a presentarla taluni generi di digitigradi, ed al massimo punto i plantigradi ed i quadrumani. L'avambraccio di questi servendo all' arrampicarsi ed alla preensione gode di movimenti rotatorî

abbastanza pronunziati fino al punto che la posizione più naturale è un medio tra la pronazione e la supinazione. Nell'uomo alla prima età la pronazione è più comune, infatti il radio in rapporto del cubito giace alquanto anteriormente nel piano articolare dell'articolazione omero-cubitale. Inoltre la pronazione quasi inconsapevolmente si prende anche dagli adulti quando, essendo a giacere in un piano orizzontale, vogliono sollevarsi, o quando sono assisi sul suolo con le natiche. Imperocchè in tal caso gli arti toracici venir debbono in aiuto dei muscoli del dorso, i quali esagerano i loro sforzi per sostenere il tronco in una posizione molto difficile e svantaggiosa per l'equilibrio. Infine quando l'uomo sul tardi della età appoggia il debole fianco ad un bastone ne impugna l'estremo pronando l'avambraccio. Tutto questo significa che naturale è la pronazione, quando l'arto toracico deve servire al sostegno. Nel fatto presente è da presumersi, che rientrando nelle loro caverne quegli uomini per riposarvi le stanche membra, non potevano che sedersi sul suolo; e se è vero, come è dimostrato dalla bella Memoria dell'Issel, che i nostri selvaggi lavoravano la creta e le ossa di animali per farsene utensili, sarà vero altresì che essi dovevano passare buona parte della loro vita stando a sedere; ed allora tra pel sostegno del corpo, tra pel lavoro, la pronazione dell'avambraccio diventava la posizione più naturale, perchè necessariamente imposta.

Le ossa delle mani non presentano poi nessuna caratteristica degna di nota. Esse sono robustissime nel vecchio, invece nel n. IV sono fine, sottili; e le falangi abbastanza svelte ed affilate offrono il vero tipo *femmineo* del Carus.

I cranî sono dolicocefali ed a forma *ogivale*, la quale, come ognun sa, è una variante della *piramidale* del Prichard. In quanto che le pareti laterali essendo alla base parallele fra loro, convergono verso il vertice, onde la volta craniena assume la figura precisa di un tetto. In una sezione trasversalmente eseguita, il contorno allora si mostra come un arco gotico a sesto ribassato.

Il tipo di questa forma è rappresentato perfettamente dal n. III, in cui per la mancanza assoluta di bozze parietali, la uniforme curvatura delle pareti laterali non viene menomamente disturbata.

La linea che traccia il profilo della fronte si eleva di poco dal piano della glabella ed arriva al vertice come se ascendesse per un dolce pendìo, sicchè la fronte offre una superficie quasi piana, bassa, inclinata, fuggente all'indietro, e per giunta stretta ove appena s'iniziano le bozze frontali.

Le arcate sopracigliari per l'inverso sono sviluppate e robuste, terminate in fuori da rozze e grosse apofisi orbitarie, mentre nel lato interno, ispessendosi sempreppiù, rendono la glabella assai prominente. Cotesto carattere è al massimo grado nel n. II, ove la sporgenza delle arcate sopracigliari e della glabella è così pronunziata, che la faccia ne resta davvero incorniciata.

La scaglia dell'occipitale si eleva sensibilmente come un cocuzzolo, devia a sinistra producendo una specie di asimmetria. Inoltre sono abbastanza rilevate le linee d'inserzioni muscolari sia alla base dell'occipite che all'arcata temporale.

Se non che tutti questi caratteri perdono un po' della loro esagerata ruvidezza nel n. IV. Sicchè la fronte è alquanto convessa, le bozze frontali ben appariscenti e le parietali anche di più. Le linee d'inserzioni muscolari sono meno salienti e

scabre; insomma in cotesto cranio, pur restando dolicocefalo, e mostrando allo stesso modo prominente ed asimmetrica la scaglia occipitale, tutto concorre ad ingentilirlo. E poichè in tale accordo convengono pure le altre ossa dello scheletro, che sono per soprappiù leggerissime, io inclinerei a credere detto scheletro di sesso femmineo.

Nulla può nel rincontro ricavarsi dal foro occipitale essendo incompleta per rotture, la base del cranio. Cotesta è stata pure la ragione per cui non ho potuto misurarne la capacità; come non l'ho potuto nemmeno sul n. II, perchè nella parete sinistra il cranio offriva delle fenditure.

Sarebbesi a ciò prestato il n. III per essere affatto integro; ma la sua cavità era così incrostata di creta che a dire il vero non avrebbesi potuto ricavarne un criterio preciso dalla cubazione. Aggiungasi che le ossa abbenchè robuste hanno una friabilità così esageratamente vitrea, che certo non avrebbero resistito al metodo, solitamente usato per la cubatura con pallini di piombo da caccia.

La sutura frontale nel n. II, come nel n. IV, già cominciava ad obliterarsi. Nel n. III invece oltre all' essere più avanzata la sinostosi fronto-parietale, la interparietale è affatto al completo.

Abbenchè le ossa mascellari superiori fossero in tutti e tre i soggetti abbastanza grosse, pure la faccia risulta piccina e stretta, con leggerissimo prognatismo alveolo-mascellare, pronunziato un po' di soverchio nel n. III, meno nel n. IV, e quasi per niente nel n. II; notisi però che in codesto cranio il bordo alveolare è tutto roso.

Le ossa zigomatiche svolgonsi in fuori ed in dietro; ed è questa la ragione precipua della strettezza della faccia. Le ossa nasali brevi e larghe, dal modo come sono articolate fra di loro e col frontale, lasciano presupporre un naso grosso e piatto molto probabilmente camuso, *platirrinico,* massime nel n. II.

Le cavità orbitarie poi sono più larghe che alte e quasi quadrangolari.

La volta palatina, specialmente nel n. III, è oltremodo larga. Nel n. II mancano tutti i denti della mascella superiore e dalla cicatrizzazione avvenuta nella maggior parte dell'alveolo può dedursene che buona parte dei denti abbia dovuto cadere anteriormente alla morte. E del pari nel n. IV mancano quasi tutti i grossi molari caduti in vita.

Il mascellare inferiore è abbastanza tozzo, triangolare anzichè parabolico, con branche verticali brevi e robuste le quali portano grossi condili molto allungati nel senso trasverso ed apofisi coronoide ben pronunziate. Gli angoli inferiori sono spiegati in fuori ed abbastanza sporgenti, percorsi in ambo le superficie da creste rilevate per inserzioni muscolari. Infine nella sinfisi si nota la spina normalmente rilevata che discende fino alla parte inferiore del mento, la quale si presenta triangolare prominente, faccettata.

Tutti questi caratteri sono comuni a tutti e tre gli ossi mascellari ed anche al mascellare del n. I, tanto che sembrano fatti sullo stesso stampo salvo la differenza proporzionale fra l'uno e l'altro. Infine nella faccia interna della sinfisi non mancano le apofisi geni, che sono anzi alquanto pronunziate.

I denti di quest'osso sono al completo in tutti i soggetti e relativamente all'età degli stessi, come appare dalle formole dentarie rispettive. Nel vecchio per lungo

uso è affatto appiattita la superficie masticatoria, gli incisivi hanno perfino perduto la loro forma a cuneo, mostrandosi piuttosto conici coi piani masticatori larghi ed arrotonditi, da sembrare quali piccoli molari.

La usura a tal modo di questi denti deve coincidere con la grande estensione dei movimenti rotatorî della mascella inferiore. E questi erano possibili, avuto riguardo alla superficie molto estesa nel senso trasverso dei condili mascellari, ed alla poca profondità della cavità glenoidea, da rendersi assai facili i moti di scivolamento del condilo mascellare sulla faccia articolare della radice trasversa dell'arcata zigomatica. Nel n. III sono a posto tutti i denti, meno un incisivo superiore caduto evidentemente dopo la morte. Mancano gli ultimi molari della mascella inferiore, non ancora spuntati.

Finalmente in quanto alla disposizione dei denti è da aggiungersi che la ringhiera dentaria in verun punto della sua estensione appare interrotta, e la grandezza dei molari grossi va decrescendo dal primo all'ultimo.

La serie degli scheletri delle Arene candide a me pare poco estesa per poterne, con sufficiente fondamento dai caratteri presentati, dedurre conseguenze relative al tipo di razza; sembrandomi che valga assai di più contentarsi della pura e semplice esposizione dei fatti, anzichè farsi invadere dalla smania febbrile del teorizzare, anche se le esigenze di una scienza ancora giovanile ed in evoluzione sembrassero poterlo quasi autorizzare.

Ma non pertanto i caratteri, almeno i principali, sono così scrupolosamente ripetuti nei nostri individui che questi, si potrebbe credere, appartenessero alla medesima famiglia. È per tale costante ripetizione, che non si cadrebbe in esagerazione, se il tipo da loro rappresentato, considerare si potesse come quello della razza; sapendosi come presso i selvaggi esso sia molto meno variabile e più fisso.

Or volendo dire in genere di quei selvaggi, bisogna convenirne, essi non erano i migliori rappresentanti dell'estetica, almeno come si considera oggigiorno, poichè i loro caratteri anatomici non trovano riscontro in nessun dei popoli ora viventi d'Italia. La loro statura non vantaggiosa e gli arti superiori abbastanza lunghi e mal proporzionati nei rapporti fra l'avambraccio ed il braccio, risvegliano subito il tipo negroide.

Inoltre lo appiattimento delle tibie, ristringendone la faccia posteriore, doveva produrre spostamento nelle masse muscolari di cotesta regione, onde molto probabilmente la gamba si presentava con le polpe in fuori. Carattere, non meno dei precedenti, sufficientemente tipico di razza inferiore.

Si aggiunga la strettezza del bacino, il dolicocefalismo, con cranio a forma ogivale, la fronte stretta, bassa, fuggente in dietro, i sopraccigli grossi, folti, perennemente corrugati, la faccia ampia nella sua porzione masticatoria, ristretta nella regione orbito-nasale, il naso platirrinico, la bocca grande, armata di formidabili denti, il mento aguzzo e triangolare, ed allora gli abitatori della caverna delle Arene candide dovevano necessariamente produrre una figura assai più spiacente di quella che potrebbe offrirci il tipo negroide.

Essi tuttavolta erano bello innanzi nelle vie della civilizzazione, lavoravano la

creta, appuntavano le ossa piccole di animali facendone punteruoli, coi quali probabilmente ne cucivano le pelli di cui si coprivano; e per giunta avevano già idee della imbellettatura e dell'ornamento, poichè usavano la ocra e foravano le conchiglie.

Ma tutto ciò prova solamente che l'uomo acquistato il suo posto zoologico, per privilegio di nascita, o per forza di progressive evoluzioni ha saputo conservarselo, traendo il maggior utile possibile dalle condizioni dell'ambiente, spiegando tutta l'energia nello adattamento; e dal suo cervello, o che fosse rinchiuso in una scattola craniena di figura ovale o ellissoidea, ovvero a forma di tetto o a piramide, ha saputo sempre ricavare tale attività intellettiva da lasciare tracce indelebili del suo passaggio, quali indarno si aspetterebbero da altri tipi animali, per quanto a lui ravvicinati da un morfologismo, che avesse pure apparenti rassomiglianze.

Se volessi varcare i limiti assegnati al presente lavoro, riporterei conchiudendo la serie dei caratteri scheletrici e cranioscopici di altre razze o tribù della stessa epoca neolitica già conosciute, e dalle comparazioni resterebbe affermato con altra prova, cosa per altro nota; cioè, la differenza più o meno accentuata fra le diverse razze della stessa epoca; come resta comprovato il dolicocefalismo in Europa essere stato preesistente alla immigrazione asiatica.

Tabella delle principali misure prese sulle ossa umane della caverna delle Arene candide.

		N. I.	N. II.	N. III.	N. IV.	Osservazioni
Misure del cranio	Diametro ant.-posteriore	$0^{m}.192$	$0^{m}.179$	$0^{m}.192$	$0^{m}.195$	Dalla glabella al mezzo della linea curva occipitale sup.
	» trasverso 1°	$0^{m}.099$	$0^{m}.102$	$0^{m}.104$	$0^{m}.097$	Fra le apofisi orbit. esterne.
	» detto 2°	$0^{m}.092$	$0^{m}.092$	$0^{m}.096$	$0^{m}.093$	Fra i punti più rientranti della linea temporale.
	» detto 3°	»	$0^{m}.135$	$0^{m}.128$	$0^{m}.140$	Fra le tuberosità parietali.
	» detto 4°	»	$0^{m}.127$	$0^{m}.133$	»	Alla base dell'apof. mastoide.
	Curva fronto-occipitale	$0^{m}.320$	$0^{m}.320$	$0^{m}.310$	$0^{m}.320$	Dal mezzo della glab. al mezzo della linea curva occip. sup.
	» trasversa	»	$0^{m}.290$	$0^{m}.282$	$0^{m}.290$	Da un foro auditivo all'altro.
	Circonferenza orizzontale	»	$0^{m}.510$	$0^{m}.510$	$0^{m}.550$	
Misure della faccia	Altezza della faccia	$0^{m}.067$	$0^{m}.062$	$0^{m}.068$	$0^{m}.060$	
	» del mascellare superiore .	$0^{m}.038$	$0^{m}.039$	$0^{m}.042$	$0^{m}.037$	
	Larghezza della faccia	»	$0^{m}.114$	$0^{m}.105$	$0^{m}.110$	Fra le sporgenze delle arcate zigomatiche.
	idem idem. 2°	»	$0^{m}.045$	$0^{m}.050$	$0^{m}.053$	Fra i forami sottorbitari.
	Lunghezza della volta palatina . .	»	$0^{m}.055$	$0^{m}.054$	»	
	Larghezza idem	»	$0^{m}.047$	$0^{m}.047$	»	
	Distanza della stessa dal foro occipitale	»	$0^{m}.044$	$0^{m}.042$	»	
	Altezza del mascellare inferiore . .	$0^{m}.029$	$0^{m}.030$	$0^{m}.046$	$0^{m}.029$	
	idem delle branche	$0^{m}.043$	$0^{m}.051$	$0^{m}.056$	$0^{m}.054$	
	Larghezza delle stesse	$0^{m}.034$	$0^{m}.040$	$0^{m}.038$	$0^{m}.034$	
	Diametro verticale delle orbite	$0^{m}.035$	$0^{m}.032$	$0^{m}.034$	$0^{m}.034$	
	» trasverso idem	$0^{m}.037$	$0^{m}.041$	$0^{m}.039$	$0 .037$	
	Lunghezza del femore	»	$0^{m}.413$	$0^{m}.380$	$0^{m}.390$	
	» della tibia	»	$0^{m}.340$	$0^{m}.310$	$0^{m}.330$	
	» dell'omero	$0^{m}.220?$	$0^{m}.288$	$0^{m}.275$	$0^{m}.260$	
	» del cubito	$0^{m}.180?$	$0^{m}.235$	$0^{m}.225$	$0^{m}.220$	
	» del radio	$0^{m}.170?$	$0^{m}.225$	$0^{m}.215$	$0^{m}.210$	
	Indice cefalico	»	75.41	66.66	71.79	
	detto del radio	»	78.12	78.18	80.76	

Formole dentarie.

N. I $g.m\,\frac{2}{2} + p.m\,\frac{2}{2} + c\,\frac{1}{1} + i\,\frac{4}{4} + c\,\frac{1}{1} + p.m\,\frac{2}{2} + g.m\,\frac{2}{2}$

N. II $g.m\,\frac{0}{3} + p.m\,\frac{0}{2} + c\,\frac{0}{1} + i\,\frac{0}{4} + c\,\frac{0}{1} + p.m\,\frac{0}{2} + g.m\,\frac{0}{3}$

N. III $g.m\,\frac{3}{2} + p.m\,\frac{2}{2} + c\,\frac{1}{1} + i\,\frac{3}{4} + c\,\frac{1}{1} + p.m\,\frac{2}{2} + g.m\,\frac{3}{3}$

N. IV $g.m\,\frac{0}{3} + p.m\,\frac{2}{2} + c\,\frac{1}{1} + i\,\frac{3}{3} + c\,\frac{1}{1} + p.m\,\frac{1}{2} + g.m\,\frac{1}{3}$

N. V $g.m\,\frac{1}{0} + p.m\,\frac{2}{0} + i\,\frac{1}{0} + p.m\,\frac{2}{0} + g.m\,\frac{1}{0}$

N. VI $p.m\,\frac{2}{2} + c\,\frac{1}{1} + i\,\frac{2}{4} + c\,\frac{1}{1} + p.m\,\frac{2}{2}$

N. VII $p.m\,\frac{0}{2} + c\,\frac{0}{1} + i\,\frac{0}{3}$

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

I cranî e le mascelle disegnate nelle due tavole appartengono a tre scheletri completi.

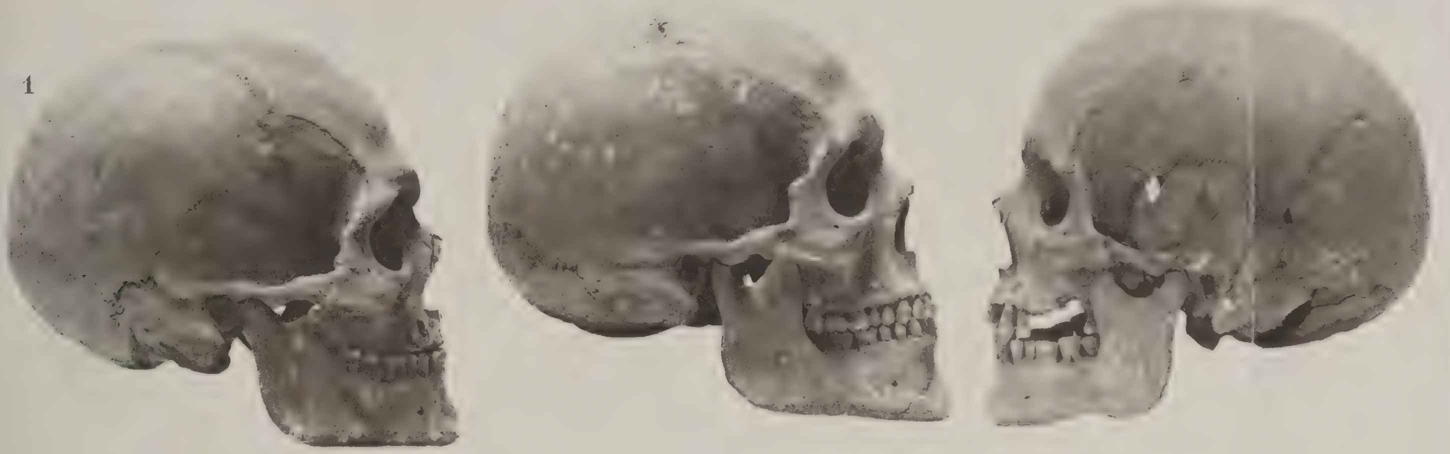
I cranî sono visti in cinque diverse posizioni:

1. di profilo; 2. di prospetto; 3. dall'occipite; 4. dal vertice; 5. dalla base.

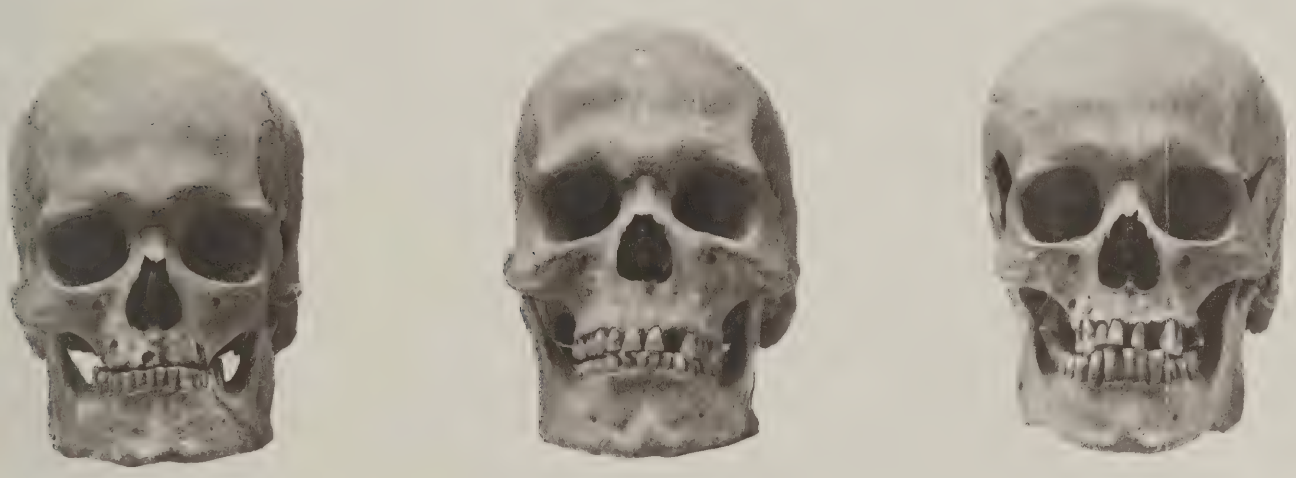
Le mascelle (6) sono viste dalla loro faccia interna.

Le figure dei cranî e delle mascelle della colonna a sinistra appartengono, in entrambi le tavole, allo scheletro n. II; quelle della colonna di mezzo al n. III, e quelle della colonna a destra al n. IV.

1



2



3

Roma Fototipia Danesi

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

4

5

6

Roma Fototipia Danesi

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Ricerche istologiche sull'epitelio retinico dei vertebrati.

Memoria del dott. ARNALDO ANGELUCCI

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del Cons. d'Amm. del 27 giugno 1878.

Lavoro eseguito nel Laboratorio d'Anatomia e Fisiologia comparata
della R. Università di Roma. XII

Dopo la pubblicazione del lavoro di Morano (1) fatta nel 1871 (oltre un altro lavoro dello stesso Morano che s'occupa d'una limitata questione) (2) sono venute alla nostra conoscenza due sole Memorie nelle quali viene trattata specialmente l'istologia del pigmento retinico. La prima di esse la dobbiamo allo Schwalbe, il quale nel suo lavoro sull'*Anatomia microscopica della retina* (3), descrivendone lo strato pigmentato, ha aggiunto parecchi nuovi risultati proprî; dopo di questo, sull'*Anatomia microscopica dell'epitelio pigmentato*, non fu altro pubblicato che una *comunicazione preventiva* (4) del Kuhnt (5).

In questo frattempo le nuove scoperte fisiologiche hanno fatto acquistare all'epitelio retinico una importanza sconosciuta fino ad oggi alla maggior parte dei micrografi. Colla scoperta della migrazione dei granuli di pigmento fu stabilito un rapporto funzionale di queste cellule colla luce percepita dalla retina, e fu reso molto probabile che questo epitelio fornisca alle impressioni luminose un mezzo d'interposizione fisiologica; inoltre molte altre ragioni militano contemporaneamente a sostegno d'una seconda ipotesi, cioè che una parte integrale di queste cellule, le così dette gocciole oleose, specialmente per la luteina che contengono, rappresentino il materiale per il quale durante la vita s'effettui la continua rigenerazione del rosso retinico consumato dalla luce.

Presentemente mentre le cognizioni sulle funzioni fisiologiche dell'epitelio retinico sono in un reale progresso, le conoscenze anatomiche lasciano molto a desiderare, poichè tanto la monografia di Morano (che si occupa solo dell'epitelio retinico

(1) *Die Pigmentschicht der Retina* (Aus dem physiologischen Laboratorium in Berlin). Archiv. f. mikr. Anatomie VIII, 81.

(2) *Stomata in der Pigmentschicht der Retina*, Centralblatt für die medicin. Wissensch, 1875, p. 67.

(3) *Gräfe und Saemisch.*, Handbuch der gesammten Augenheilkunde I, 424.

(4) *Zur Kenntniss des Pigmentepithels.* Centralblatt für die medicin. Wissensch, 1877, p. 337.

(5) Le due importanti monografie che apparvero recentemente sull' anatomia della retina: W. Müller, *Ueber die Stammesentwickelung des Sehorgans der Wirbelthiere.* Leipzig, 1875; ed Hannover, *La rétine de l'homme et des vertébrés.* Kopenhagen, 1876, precisamente sul solo epitelio retinico non contengono nuove ricerche.

delle rane e, sullo strato pigmentato d'altri vertebrati, soltanto incidentalmente qualche dettaglio aggiunge), quanto il lavoro di Schwalbe, e molto meno ancora la comunicazione preventiva di Kuhnt, non possono pretendere di aver dato una esposizione completa sull'anatomia microscopica di questo epitelio. Avendoci molte ragioni impedito di condurre a termine il presente lavoro (principalmente la chiusura del nostro laboratorio per i lavori di rifabricazione del medesimo) anche le nostre ricerche corrispondono solo in parte a questo desiderato, non avendo esse raggiunto quella completezza che eravamo propostaci, sia perchè il numero degli animali da noi esaminati fu minore di quello prefissato nel nostro programma, sia perchè fummo costretti d'abbandonare alcuni punti delle nostre osservazioni in uno stadio, nel quale un maggior lavoro ci avrebbe certamente ancora condotto a più precisi ed estesi risultati.

Nelle ricerche istologiche sul pigmento retinico devesi innanzi tutto impiegare grande cautela ed una cura speciale nella scelta del materiale, e non utilizzare che occhi freschi d'animali recentemente uccisi, dei quali si abbia un'esatta conoscenza delle condizioni in cui vissero negli ultimi momenti della loro vita, cioè se vennero esposti all'azione della luce, o si tennero all'oscurità. Altro materiale deve riguardarsi per inutile ed inservibile. Nelle nostre ricerche (per le preparazioni a fresco) ci siamo serviti o dell'umor acqueo o della soluzione fisiologica di cloruro sodico; per le altre preparazioni fu da noi adoperata la macerazione nell'acido osmico allungato da 1: 500 a 1: 1000, come anche i due metodi usati e raccomandati dal Morano, l'indurimento nell'acido osmico 1 % e la macerazione in una soluzione d'acido cromico $^1/_{32}$ %.

Già i primi istologi che s'occuparono dell'epitelio retinico, o, come allora si chiamava, della membrana pigmentata della coroidea, rimasero colpiti dalla caratteristica regolarità che a preferenza degli altri epiteli cilindrici presentava questo strato d'epitelio pigmentato. In esso, visto di superficie, le sue cellule compariscono quasi tutte della medesima grandezza sotto forma di esagoni regolari, in modo che il mosaico che rappresentano per regolarità e somiglianza ricorda l'elegante disegno delle celle degli alveari. Talvolta in alcuni preparati, immagini di una perfetta regolarità si vedono occupare tutto il campo del microscopio. Tuttavia non è rara eccezione osservare tanto nella disposizione delle cellule di questo strato a mosaico, quanto nella regolarità e nella grandezza di esse un evidente allontanamento dal tipo che generalmente rappresentano. In alcuni luoghi le cellule perdono la loro forma regolare, ed agli esagoni, che d'ordinario rappresentano, si sostituiscono dei poligoni più o meno ricchi di lati [1]. Tutto compreso, però, la struttura dello strato pigmentato in tutte le classi dei vertebrati presenta preponderatamente il carattere d'una regolarità non propria delle altre strutture epiteliali.

Di speciale interesse fisiologico sono le diverse forme delle cellule dello strato pigmentato nelle varie regioni del bulbo. Nella parte posteriore di esso (cioè in quella parte della retina che a preferenza serve alla diretta percezione delle impressioni

(1) A questo fatto non rarissimo, ma sempre eccezionale, Kuhnt nella sua comunicazione attribuisce una esagerata importanza, tanto che egli senza difficoltà conclude che in un occhio, il quale fisiologicamente vive, abbia luogo sempre un continuo rinnovarsi delle cellule dell'epitelio retinico.

visive, le cellule pigmentate sono molto sottili ed alte, ed il mosaico che rappresentano è composto di piccoli e regolari esagoni. All'equatore del bulbo esse sono molto più grandi, ma all'opposto più basse, e vedute di superficie non hanno la forma di esagoni equilateri, ma invece di esagoni allungati per una maggiore estensione di due delle loro faccie parallele; tale forma però riscontrandosi in tutti gli esagoni di questa regione non viene a turbare la regolare disposizione del mosaico. Presso l'ora serrata le cellule epiteliali ritornano piccole, ma poco sviluppate in altezza, i confini della loro superficie non rappresentano una esatta figura esagonale, ed il mosaico da esse costituito va a perdere più o meno completamente il suo aspetto regolare.

Gli stomi, descritti recentemente dal Morano nello strato pigmentato della retina, non v'esistono, ed egli ha probabilmente scambiato un difetto di preparazione per un fatto fisiologico, avendo forse osservato in preparati irregolarmente induriti degli spazî lasciati da cellule cadute al di fuori di esso. Nelle preparazioni a fresco ed in quelle esattamente indurite, noi non abbiamo potuto osservare una sola volta un simile fatto. D'altronde la loro esistenza sarebbe egualmente difficile a comprendersi, sia dal punto di vista morfologico che fisiologico, tanto perchè fino ad oggi non vennero osservati stomi nei veri strati epiteliali, quanto perchè in seguito allo stretto rapporto delle cellule epiteliali coi bastoncelli e coi coni, i stomi verosimilmente produrrebbero dei disturbi anche nella continuità degli altri elementi dello strato a mosaico.

In ogni singola cellula cilindrica dello strato pigmentato, che presentasi sotto forma di una colonna esagonale più o meno regolare, noi distinguiamo un segmento superiore (rivolto alla coroidea), ed un segmento inferiore (diretto verso la retina). Tale divisione che noi facciamo delle parti di queste cellule oltre ad uno scopo di descrizione viene giustificata dalla facilità con la quale dividonsi in alcune classi dei vertebrati le due suddette metà di esse, sia nella macerazione quanto nell' indurimento dell' epitelio retinico. Nel segmento superiore della cellula che noi vogliamo chiamare cupola protoplasmatica, è contenuto il nucleo, il quale tanto pel suo volume e lucentezza, quanto perchè costantemente contiene un solo nucleolo, assomiglia molto al nucleo delle cellule nervose; in questo segmento non si trovano mai granuli di pigmento, ma vi si riscontrano altre interessanti figure morfologiche cioè le gocciole oleose ed altri corpi dei quali appresso particolarmente ci occuperemo. All' opposto il segmento inferiore della cellula che vogliamo chiamare base pigmentata (quando non si tratta di un individuo albino o di un animale fornito di tappeto) è la sede esclusiva dei granuli di pigmento castagno scuri sì caratteristici dell'epitelio retinico, i quali lo riempiono in tal modo che può dirsi essere intieramente costituito da ammassi di essi. Dalla base pigmentata partono i sottili prolungamenti che penetrando fra i bastoncelli ed i coni estendonsi fino alla membrana limitante esterna.

Tutti questi fatti adesso accennati possono studiarsi colla maggiore chiarezza e precisione nelle rane, dove furono già estesamente e con esattezza descritti nella monografia di Morano, che noi riproduciamo nei suoi punti principali non senza completarla con nuovi fatti importanti ed anche correggendola in alcuni subordinati dettagli.

Il fatto anatomico più rilevante che noi abbiamo osservato, riguarda la struttura della cupola protoplasmatica, ed il singolare modo col quale esse si comportano

nel formare la superficie del mosaico esagonale dell'epitelio retinico. Noi abbiamo trovato costantemente in tutti i vertebrati una particolare formazione morfologica la di cui esistenza sfuggì ancora completamente a Morano, mentre nel lavoro di Schwalbe si trovano già le prime osservazioni ad essa relative.

Schwalbe dice che (nei mammiferi) anche quando le cellule dell'epitelio retinico si presentano fortemente ripiene di pigmento, vedesi costantemente esistere fra loro un'esile striscia incolora. « Questa corrisponde perfettamente ad una sostanza che a guisa di cemento è disposta tra l'epitelio. Indurito nel liquido di Müller lo strato pigmentato della retina, si riesce ad ottenere dei brani nei quali la sostanza indurita di questo cemento raffigura delle reti a maglie esagonali (fig. 46), alcune delle quali presentansi vuote in seguito alla caduta delle cellule in esse contenute. Probabilmente questi setti durante la vita sono di natura liquida o semiliquida. Nei preparati ottenuti col siero-jodato non ho mai potuto rimarcare la loro presenza ».

Noi abbiamo trovato questi setti o striscie incolore, descritte dallo Schwalbe, in tutti i vertebrati che abbiamo fatto soggetto delle nostre ricerche, e riconosciuto che esse entrano nella formazione di uno speciale sistema di formazioni cuticulari che ricopre la superficie libera, e gli orli periferici d'ogni singola cupola protoplasmatica delle cellule epiteliali. Le proprietà anatomiche di questo sistema presentansi molto chiaramente nelle rane, nelle quali per la prima volta ne abbiamo riconosciuta la vera disposizione. In seguito venne da noi riscontrata, quantunque con minor chiarezza, la quasi completamente identica struttura anche nei rettili, negli uccelli, nei mammiferi e nei pesci.

Esaminato lo strato pigmentato delle rane dopo una accurata macerazione nella nota soluzione d'acido cromico allungato, i più belli e distinti preparati, che presentano l'epitelio retinico in superficie, veduti sotto forti ingrandimenti, mostrano le eleganti immagini che abbiamo cercato di riprodurre nella fig. 1. Nell'interno di ogni cellula si possono riconoscere le brillanti gocciole oleose di color giallo d'oro, circondate da ammassi di granuli di pigmento castagno scuro, i quali granuli, alla periferia della cellula, spesso si dispongono in modo d'aculei. Manifestamente queste sono le immagini che Morano ha creduto d'interpretare nel modo seguente. « Non raramente in quest'epitelio, osservato di superficie, le singole cellule, a guisa di genuine cellule spinose, si compenetrano coi loro prolungamenti aculeiformi ». Tale reciproco compenetrarsi delle cellule non esiste, ed esse invece sono costantemente separate le une dalle altre per mezzo di setti lucenti, che presentansi quali spazî pericellulari di eguale spessezza. Come manifestamente si vede negli orli del preparato, ai spazî pericellulari corrisponde un esile sistema di piccole travi, le quali esattamente circondando la cellula, rappresentano una elegantissima cornice esagonale all'intorno di essa. La forma e l'esatta disposizione di queste cornici osservasi a preferenza nei preparati trattati con una soluzione di 1. 500 d'acido osmico, dai quali abbiamo ricavato quelli disegnati nella fig. 2-4. Dallo studio di queste immagini fummo condotti a conoscere il fatto singolare e degno di nota, che la superficie libera di ciascuna cellula, e la metà superiore della cupola protoplasmatica, presentansi completamente racchiuse in una calotta a forma di cappello, ovvero esprimendoci più volgarmente ma

più esattamente, esse sono contenute in un vero berretto. Queste speciali coperture delle cellule saldansi scambievolmente coi loro (sei) orli periferici, sicchè l'intera superficie libera dell'epitelio retinico, risulta coperta da una non interrotta membrana che consiste dalle singole calotte esagonali fuse insieme. Al disopra della superficie d'ogni singola cellula, la suddetta membrana è oltremodo delicata e sottile, di modo che veduta di profilo apparisce quale un esile contorno perfettamente esteso in linea retta ([1]). All'intorno dei margini periferici della superficie di ciascuna cellula, la membrana apparisce leggermente ispessita, e nelle cellule vedute di profilo in questo stesso luogo, cioè agli angoli superiori della cupola protoplasmatica vedesi la maggior parte delle volte un piccolo rigonfiamento triangolare, che a nostro parere può solo venire interpretato quale un effetto ottico dovuto ad un esistente ispessimento; di quando in quando lateralmente a questo rigonfiamento veggonsi partire piccoli prolungamenti che si dirigono orizzontalmente verso l'esterno. Più frequentemente ancora veggonsi dei prolungamenti somigliantissimi ai suddescritti, sorgere dagli orli inferiori liberi delle calotte che ricoprono le cellule. Ivi, nelle cellule isolate e vedute di profilo, trovasi egualmente un rigonfiamento triangolare, dal quale partono verso l'esterno rigidi prolungamenti, spesso molto lunghi che alle volte terminano dopo essersi biforcati una o due volte. La direzione orizzontale di tali prolungamenti esattamente corrisponde all'esile, ma ben netto e marcato contorno, il quale da un rigonfiamento triangolare all'altro si estende all'intorno del corpo della cellula. Esso fu già osservato da Morano, e rappresentato in una delle sue figure; però egli non lo ha saputo interpretare. Ora l'interpretazione di questo contorno è perfettamente manifesta, corrispondendo esso agli ispessiti orli coi quali terminano in basso le calotte cuticulari, ed è perciò morfologicamente identico ai rigonfiamenti triangolari che esso riunisce ed ai prolungamenti liberi che da essi emanano. Tutte queste figure che corrispondono ai setti descritti da Schwalbe non rappresentano altro che i luoghi di riunione dove saldansi insieme gli orli periferici delle calotte cuticulari che ricoprono ogni singola cellula: isolati, questi luoghi di riunione delle cellule epiteliali compariscono, e possono solo venire interpretati come li ha descritti Schwalbe, sotto forma di piccole travi componenti delle cornici esagonali.

Ora a primo aspetto apparisce che tali caratteristiche figure sì morfologicamente complicate non possono costituire, come ha creduto Schwalbe, una sostanza uniente interposta fra l'epitelio, ma che rappresentano un sistema di genuina formazione cuticulare, al quale Boll (nelle sue lezioni sull'*Anatomia della retina* tenute nel passato inverno) diede il nome di *lamina reticolare della retina* per l'incontrastabile omologia che la sua struttura presenta colla lamina reticolare della coclea. L'alto significato di questa omologia sarà di leggeri compreso, sorgendo da ciò, come

([1]) L'assenza o la presenza di questa linea quasi costantemente retta, che rappresenta il caratteristico contorno dei margini superiori delle cellule, offre un punto sicuro per distinguere se esse presentano il loro stato normale, o se per difetto di preparazione hanno perduto la loro membrana. Dalle figure disegnate nel lavoro di Morano, sembra che egli non abbia mai osservato cellule normali; anche tra i numerosi disegni dell' Hannover esistono due sole cellule (tav. II, fig. 8, *e*), le quali possiedono ancora la loro naturale membrana.

conseguenza necessaria, l'omologia dell'epitelio retinico con le cellule terminali dell'organo del Corti rinchiuse nelle cornici della lamina reticolare della coclea.

Il segmento superiore incoloro, o la cupola protoplasmatica della cellula dell'epitelio retinico, come noi l'abbiamo chiamata, è sempre ricoperta da una calotta cuticulare, e consta d'una delicata sostanza fondamentale finamente granulosa. In questo segmento trovasi costantemente il nucleo, e nella maggior parte dei casi vicino ad esso trovansi due sorta di specifiche deposizioni, le gocciole oleose, scoperte per il primo da Hannover (1844), ed altri corpi non ancora menzionati da altri osservatori, chiamati da Boll granuli aleuronoidi.

Il nucleo essendo composto da una sostanza omogenea, e, come ha dimostrato Morano, possedendo un solo relativamente grande nucleolo, assomiglia molto al nucleo d'una cellula nervosa.

Nell'interno delle singole cellule varia di molto il numero e la grandezza delle gocciole oleose. Generalmente le cellule ne contengono da due a tre; ne possono contenere però anche un numero maggiore, ed infatti nell'interno d'una sola cellula noi ne abbiamo potuto numerare persino dieci; l'assenza delle gocciole oleose è una eccezione. Come il numero, ne varia anche la grandezza: le più frequenti sono le mezzane le quali uguagliano per la metà la grandezza dei nuclei; le più grandi gocciole che appena sorpassano la grandezza del nucleo sono molte rare come quelle che offrono un piccolissimo volume. La sostanza colorante che le tinge brillantemente in giallo d'oro, per i studî di Capranica (¹) riconosciuta identica alla luteina, mostrasi egualmente carica in tutte le gocciole oleose solo in quelle rane, le quali prima della loro morte furono poste per un determinato tempo all'oscurità. Invece per mezzo delle ricerche del Boll (²) si è potuto conoscere che nelle rane nelle quali poco prima dell'esame microscopico era avvenuta la completa perdita e la fresca rigenerazione fisiologica dell'eritropsina, accanto alle gocciole d'un colore giallo carico si trovano anche delle gocciole d'un giallo sbiadito. Per illustrare questa caratteristica differenza riscontrata pure nelle nostre ripetute ricerche, servono ambedue i disegni che noi abbiamo delineato nelle fig. 5 e 6. Di queste figure, la prima rappresenta le gocciole oleose d'una cellula pigmentata in una rana stata all'oscurità, mentre l'altra rappresenta il contenuto delle stesse cellule in una retina di rana, nella quale era avvenuta di fresco la rigenerazione del rosso retinico. A sostegno di questa supposizione di Boll parla, del resto, anche assai l'apparenza morfologica: almeno ogni micrografo che sia pratico della struttura delle tessiture animali e vegetali, a prima vista di quest'epitelio spesso completamente ripieno di gocciole oleose non le interpreterà mai in altro modo che per materiale preparato e destinato per il risarcimento delle perdite fisiologiche.

(¹) *Studî chimico-fisiologici sulle materie coloranti della retina.* Prima comunicazione (Lavoro eseguito nel Laboratorio d'Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma. XI). Atti della R. Accademia dei Lincei, vol. I serie 3ª anno 1876-77 p. 639.

(²) *Sull'anatomia e fisiologia della retina* (Lavoro eseguito nel Laboratorio d'Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma. VIII). Atti della R. Accademia dei Lincei, vol. I serie 3ª anno 1876-77 p. 371.

Questa stessa apparenza morfologica, sola e per adesso non ancora appoggiata da più certe ragioni e prove, ci conduce ad attribuire lo stesso carattere d'un materiale destinato al risarcimento delle perdite fisiologiche, come alle gocciole oleose anche ai granuli aleuronoidi. Benchè essi trovinsi colla medesima regolarità che le gocciole oleose nelle cellule dell'epitelio retinico delle rane, e con esse dividano i caratteri della diversità di numero e di grandezza, tutti i micrografi che s'occuparono dell'istologia del pigmento retinico, sembra che non v'abbiano posto speciale attenzione. Solo il Boll (1) gli ha veduti, ma gli ha identificati nelle sue prime e brevi ricerche alle gocciole oleose poichè secondo lui essi rappresentano « gocciole oleose perfettamente incolori a causa della completa perdita della loro sostanza colorante ». Più tardi, una esatta ricerca sopra questi granuli gli ha fatto conoscere che in niun caso qui trattasi di una varietà scolorata, nè di fasi incolori di gocciole oleose, ma bensì che essi rappresentano delle figure *sui generis* che distinguonsi per molti caratteri dalle gocciole oleose. Uno dei segni più netti ed attendibili è precisamente fondato sulla colorazione: i granuli aleuronoidi sono sempre incolori; mentre, contro la citata supposizione di Boll, nell'epitelio delle rane non si riscontrano mai gocciole oleose perfettamente incolori. Un altro segno è basato sulla debole lucentezza dei granuli aleuronoidi, i quali, possedendo proprietà minori di refrazione, compariscono più compatti e solidi e meno splendenti delle gocciole oleose. Finalmente distinguonsi per la forma la quale, benchè quasi sempre rotondeggiante nei granuli più grandi non è mai così regolarmente sferica come quella delle gocciole oleose; fra gli esemplari più piccoli si riscontrano figure perfino angolari e diversamente irregolari. In somma il loro aspetto mostrasi perfettamente identico a quei granuli che i botanici chiamano granuli d'aleurone, i quali trovansi nei semi ricchi di grasso. Questa somiglianza nell'aspetto microscopico viene anche rinforzata dall'analogia d'una reazione chimica, essendosi i nostri granuli sciolti completamente in una soluzione allungata di potassa caustica, reazione data dai botanici per caratteristica dei granuli d'aleurone, e noi avremmo identificato i granuli delle cellule dell'epitelio retinico con i granuli d'aleurone senz'altro, senonchè, procedendo ad altre indagini chimiche, un'altra reazione ci avesse recato del dubbio. Nell'etere assoluto che lascia completamente intatti i granuli d'aleurone i nostri granuli non si disciolgono, ma vengono grandemente alterati. La supposizione che essi nell'etere perdano una sostanza grassa viene confermata da una seconda reazione: nell'acido osmico i granuli aleuronoidi prendono una tinta assai oscura ed almeno quasi altrettanto nera, come quella dei membri esterni dei bastoncelli, i quali come è noto assorbono l'acido osmico con straordinaria avidità. Poggiati su queste reazioni, che speriamo vengano ripetute da competenti chimici, noi crediamo di poter riconoscere nei granuli aleuronoidi dell'epitelio retinico la non dubbia presenza di sostanze albuminose, e allato di essa di una sostanza grassa, la quale non fu fino ad ora trovata nei granuli di aleurone delle cellule vegetali.

Nelle cellule dell'epitelio pigmentato delle rane il numero dei granuli aleuronoidi corrisponde presso a poco a quello delle gocciole oleose, colle quali hanno anche in comune le dimensioni incostanti. I granuli più grandi del nucleo si riscontrano

(1) Loco citato pag. 389.

raramente; al disotto di questa dimensione essi presentansi con varia grandezza fino a trovarsene dei piccolissimi, i quali sono solamente riconoscibili sotto forti ingrandimenti. Questi granuli nell'interno delle cellule epiteliali occupano a preferenza il segmento superiore di esse e specialmente quella parte della cupola protoplasmatica, che viene ricoperta dalla calotta cuticolare della lamina reticolare della retina, dove il più delle volte presentansi disposti regolarmente (fig. 3). Molte cellule se ne mostrano completamente piene. Su tale apparenza in sì alto grado caratteristica noi fondiamo la nostra supposizione che anche nei granuli aleuronoidi, come nelle gocciole oleose si tratti di materiale immagazzinato e destinato per la ripristinazione delle sostanze consumate dalla luce nella retina. Altre osservazioni, onde sostenere con prove tale supposizione a noi finora mancano, non avendo potuto constatare cambiamenti di forma o di quantità prodotti nei granuli aleuronoidi dall'azione della luce. Parimenti comparisce per ora inopportuno il discutere sulle più lontane eventualità come per es. se i nostri granuli rappresentino il materiale destinato alla rigenerazione dei coni, o se nella loro sostanza sia fissata la nutrizione e la riparazione fisiologica dello stroma lamellare dei membri esterni dei bastoncelli, con i quali in seguito alla suaccennata reazione i nostri granuli non sembrano mancare di analogie chimiche.

E ciò per quanto riguarda il segmento superiore, chiamato da noi cupola protoplasmatica e pei corpi caratteristici in essa contenuti. Il segmento inferiore della cellula, da noi chiamato base pigmentata, contiene di tali corpi esclusivamente i noti granuli di pigmento, dei quali sono da rilevarsi i due fatti seguenti egualmente valevoli per l'intiero tipo dei vertebrati. Essi non sono mai perfettamente neri, ma di un bruno oscuro, il quale invero in alcuni casi di molto s'avvicina al nero, mentre in altri però non di poco s'allontana da esso di tal che appare addirittura bruno chiaro. Secondo questi granuli nerastri mai o quasi mai sono sferici, come i granuli contenuti nelle cellule pigmentate ramificate del tessuto connettivo, ma bensì irregolari, angolosi, spesso prismatici ed anche in diverse forme cristallini [1]. Nella base pigmentata si deve distinguere un corpo immediatamente a contatto colla cupola protoplasmatica, ed i prolungamenti che da esso emanano dirigendosi verso la membrana limitante esterna. Il corpo pigmentato non presenta alcuna singolarità di struttura; sembra essere quasi esclusivamente composto di granuli di pigmento, fra i quali di quando in quando si scorgono isolate gocciole oleose, o distaccati granuli aleuronoidi. Degno di nota è il fatto che tanto nelle rane, quanto in tutti i vertebrati che preponderantemente possiedono granuli di pigmento a forma di prismi allungati, questi, sia nel corpo della base pigmentata, sia nei prolungamenti di esso, giacciono sempre in direzione perfettamente rettilinea e parallela all'asse della cellula epiteliale.

Sulla proprietà e sulla forma dei prolungamenti che partono dal corpo pigmentato della cellula, esistono nella letteratura due differenti vedute. Nel mentre che un

[1] Tali forme che noi abbiamo accennato trovansi esattamente disegnate (sotto un ingrandimento Hartnack XV immersione) nel trattato del Frisch, *Gestalten des Chorioidalpigments* (Wiener Akad. Sitzber. mathem-naturwiss. Classe. Zweite Abtheilung Bd. 58. 1869). Solo la mancanza di un obiettivo egualmente forte ci ha impediti di eseguire disegni analoghi, i quali in ogni modo non avrebbero potuto concorrere con quelli del Frisch.

preponderante numero d'istologi crede che questi prolungamenti scorrano perfettamente isolati l'uno dall'altro descrivendoli come una selva di ciglie isolate, il loro scopritore Hannover [1] anche nella sua recente monografia, rimane fermo nella sua prima opinione, che questi prolungamenti non rappresentino delle fibre isolate, ma bensì formazioni membranose. Fra queste due differenti vedute l'opinione di Morano prende una posizione conciliativa; egli crede che esistano due differenti modi di comportarsi di questi prolungamenti, poichè in alcuni casi essi appariscono come un pennacchio di fibre scorrenti perfettamente isolate, mentre in altri, essi espandonsi corrispondendo all'opinione di Hannover a forma di membrana. Noi siamo su tale proposito riusciti a persuaderci dietro accurate ricerche che, sia l'Hannover, quanto in parte il Morano, sono stati condotti in errore da preparati in cui non era riuscita una completa macerazione; in seguito a tal fatto alcuni resti irriconoscibili dei membri esterni dei bastoncelli rimangono attaccati fra i prolungamenti della cellula, confondendoli in tal modo che invece d'isolati prolungamenti pare che vi sia una continua membrana. Quando all'opposto la macerazione è bene riuscita, non occorre mai di vedere la suaccennata apparenza, ma in ogni preparato scorgesi chiaramente terminare l'estremità della base pigmentata, in un pennacchio di fibre perfettamente isolate. Queste fibre che da alcuni autori furono chiamate ciglie della cellula, sono tutte della stessa lunghezza ed esilità, ed originano quasi tutte sulla stessa linea dal corpo della base pigmentata da dove scorrono parallele e qualche volta leggermente divergenti in direzione della membrana limitante esterna. Il modo della loro origine e del loro decorso dà a queste fibre una grande somiglianza con i peli d'un pennello. Il numero dei prolungamenti che sorgono dalle cellule trovasi generalmente in ragione diretta della grandezza di esse; le più grandi cellule posseggono da 30 a 40 prolungamenti e forse anche più, mentre le piccole ne presentano da 10 a 20: meno di 10 prolungamenti non furono da noi osservati in alcuna cellula.

Come è noto, questi prolungamenti sono situati negli spazî che esistono fra i membri esterni dello strato dei bastoncelli, e nei sottili solchi scavati nella superficie di questi; ivi essi rappresentano quelle cordicelle pigmentate, le quali hanno avuto tanta parte nell'anatomia microscopica dei bastoncelli e che da parte degli autori hanno dato luogo a sì svariate asserzioni ed interpretazioni. Probabilmente la maggior parte di queste molteplici differenze non meritano in ultima analisi alcun valore morfologico, ma dipendono probabilmente tutte dalla variabilità fisiologica dei cordoni di pigmento scoperta dal Boll. In rapporto a questo fatto noi abbiamo a designare le seguenti osservazioni.

Nelle retine delle rane che prima della loro morte erano state assoggettate ad un' intensa luce solare, nei preparati all'acido osmico, lo strato dei bastoncelli e dei coni presentasi completamente ripieno di granuli di pigmento fino al margine superiore della membrana limitante esterna. Questo fatto si osserva tanto nei preparati in cui le cellule del pigmento retinico sono rimaste unite allo strato dei bastoncelli e dei coni (fig. 8), quanto anche là dove le cellule sonosi da esso staccate (fig. 10). La pigmentazione però non è eguale nelle varie altezze dello strato dei bastoncelli e dei

(1) *Recherches microscopiques sur le système nerveux* 1844, p. 27. — *La rétine de l'homme et des vertébrés* 1876, p. 174.

coni, poichè la parte superiore dei membri esterni dei bastoncelli rivolta alla coroidea è più fortemente pigmentata che non la parte inferiore al di sotto del terzo superiore di essi; da questo confine verso il basso la pigmentazione sensibilmente si fa più chiara ed il numero dei granuli di pigmento diviene sempre minore. Questa loro diminuzione si accentua ancora più verso il limite dei membri esterni dei bastoncelli; e nel segmento più interno dello strato, ove non si trovano che i membri interni dei bastoncelli e dei coni, i granuli di pigmento sono relativamente più scarsi. Però cuoprono anche qui ancora i membri interni dei bastoncelli ed anche quelli dei coni in serie longitudinali chiare ed evidenti sino al limite esterno della membrana limitante esterna: al disotto di questo confine noi non abbiamo mai riscontrato anche un solo granulo di pigmento. Corrispondendo alle immagini di queste sezioni, i prolungamenti delle cellule epiteliali, isolate dallo strato dei bastoncelli, in quelle retine state assoggettate alle stesse condizioni non appariscono mai in alcun punto scevri di granuli di pigmento, ma bensì mostrano perfino alla loro estremità libera contenere nella loro sostanza racchiusi in regolari e corte distanze dei granuli di pigmento di forma allungata (fig. 4).

Eguali ai suaccennati trovati furono le immagini in quelle retine le quali *intra vitam* furono lungamente assoggettate a subire l'azione d'una intensa luce azzurra; anzi a noi è sembrato in queste retine avverarsi un'assai maggiore pigmentazione dello strato dei bastoncelli che in quelle esposte anche ad una intensissima luce solare bianca. Tuttavia stante la difficoltà della cosa presentemente ci è impossibile di poter giudicare su d'una maggiore o minore pigmentazione suscitata dall'azione di queste due luci sulla retina.

Direttamente opposti a questi risultati prodotti dalla luce bianca e dalla luce azzurra furono quelli che presentavano le retine lasciate per lungo tempo all'oscurità. Lo strato dei bastoncelli veduto di profilo sia dove mostravasi ricoperto dalle cellule epiteliali, sia dove esse mancavano mostrava pigmentato solo il suo segmento superiore (fig. 7, 9); in questi preparati l'estensione della pigmentazione era marcata da una linea, che segnava il margine inferiore del terzo superiore dei bastoncelli. Nei preparati ottenuti colla macerazione si vedevano i prolungamenti delle cellule epiteliali isolate essere solamente pigmentati nel terzo superiore del loro decorso, mentre nei due terzi inferiori era un'eccezione vedere qualche granulo isolato di pigmento (fig. 2, 3).

Nelle retine, le quali furono sottoposte all'azione d'una intensa luce rossa, la distribuzione dei granuli di pigmento si comportava perfettamente nella stessa maniera come nelle retine state all'oscurità; le più minute ed esatte ricerche non hanno mai portato a conoscere una differenza quantitativa nella pigmentazione, la quale avrebbe corrisposto alla diversità delle due differenti azioni fisiologiche, che da noi furono esperimentate. Anche nelle rane conservate nella luce rossa, la pigmentazione dei prolungamenti epiteliali si estende precisamente fino al limite osservato nelle rane state all'oscurità, cioè sino alla linea, che marca il termine del terzo superiore dei membri esterni dei bastoncelli.

Il tempo nel quale avvengono i cambiamenti fisiologici di sopra descritti corrisponde esattamente a quello che Boll (¹) ha determinato per la scomparsa e la

(¹) Boll, luogo citato pag. 374.

ripristinazione fisiologica del rosso retinico. Onde osservare la pigmentazione della retina fino alla membrana limitante esterna, abbisogna l'azione d'una intensa luce per circa 10-15 minuti, cioè lo stesso tempo nel quale avviene la scomparsa del rosso retinico in una retina esposta alla luce. All'opposto, per rendere liberi dai granuli di pigmento i due terzi inferiori dei bastoncelli è necessario il soggiorno delle retine nell'oscurità per $1\,^1/_2$ o 2 ore, cioè lo stesso tempo richiesto dalla ripristinazione fisiologica del rosso retinico. Adunque i due mutamenti fisiologici cagionati dalla luce nella retina, cioè la distruzione del rosso retinico e la pigmentazione dei due terzi inferiori dei bastoncelli, il ritiro del pigmento e la rigenerazione del rosso retinico coincidono precisamente nel medesimo periodo di tempo.

Molto interessante per la fisiologia del rosso retinico sembra a noi essere il fatto, stabilito da noi in una speciale serie di esperimenti, che la reazione fisiologica delle cellule pigmentate alla luce non viene in alcun modo turbata dal taglio del nervo ottico: ancora 30 giorni dopo questa operazione abbiamo potuto constatare la variabilità fisiologica del pigmento comportarsi come nello stato normale. Questo fatto corrisponde esattamente al risultato di un'altra serie di ricerche fatte nel nostro laboratorio dal Colasanti (1); il quale parimenti lungo tempo dopo il taglio del nervo ottico constatò immutata la ripristinazione fisiologica del rosso retinico (2).

La questione in qual modo avvengano i mutamenti fisiologici nel pigmento retinico è altrettanto interessante che difficile a risolvere. Si deve ammettere un continuo formarsi e distruggersi nei prolungamenti delle cellule dei granuli di pigmento sotto l'influenza della luce e dell'oscurità? O piuttosto non si deve pensare ad un cambiamento di luogo o ad una migrazione dei granuli di pigmento la cui quantità non subirebbe che inapprezzabili mutamenti ? Per l'impressione che si riceve a primo aspetto dobbiamo confessare che quest'ultima eventualità ha la più grande probabilità; ma se noi ci fermiamo ad analizzarla, incontriamo subito nuove difficoltà nell' interpretazione del modo col quale essa si effettua. Come si fa questa migrazione? Avranno le cellule dell'epitelio retinico come le Amibe la potenza di trarre ed allontanare dal loro corpo i loro prolungamenti? Od invece migrano i singoli granuli di pigmento scendendo giù e su nell'interno d'ogni prolungamento senza che la sostanza di questo ne venga perciò mutata? Questo dilemma sulla natura dei movimenti del pigmento non è facile a risolversi. Poichè se con la prima di queste due ipotesi, si spiega benissimo la grande facilità con la quale in un animale tenuto all'oscurità si distacca la retina dallo strato pigmentato in seguito all'assenza dei filamenti pigmentati che nelle retine state alla luce s'estendono fino alla limitante esterna, con la seconda ipotesi collima meglio l'osservazione che nell'oscurità si vedano i prolungamenti delle cellule nelle loro lunghe estremità terminali perfettamente scevri di pigmento. Poichè, per quanto anche noi vi avessimo posto attenzione, inoltre della diversa intensità della pigmentazione, non abbiamo potuto

(1) Atti dell' Accademia medica di Roma. Anno III. 1877. fasc. 2 p. 47.

(2) Non dobbiamo lasciare inosservato che in queste nostre ricerche per conoscere le fasi della pigmentazione dello strato dei bastoncelli abbiamo solo utilizzato la parte più centrale del fondo dell' occhio, sulla quale è incontestabile che devono cadere i raggi luminosi. Nelle rane poste all'oscurità tale cautela è perfettamente inutile, mentre in quelle esposte alla luce essa è essenziale, poichè i caratteri più salienti prodotti dall'azione della luce spesso non si riscontrano che in questa regione.

dimostrare altre differenze nei prolungamenti delle rane tenute alla luce o di quelle tenute all'oscurità: anzi i prolungamenti delle ultime ci apparvero sempre altrettanto numerosi ed altrettanto lunghi come quei prolungamenti fino all'estremità libera pigmentati, i quali si trovano nelle rane tenute alla luce. Se questo risultato negativo delle nostre comparative ricerche fosse assolutamente incontrastabile, la sopra accennata questione sarebbe risoluta nel senso della migrazione dei soli granuli di pigmento e della invariabilità dei prolungamenti, i quali allora non potrebbero essere considerati come semoventi pseudopodi, ma come formazioni fisiologicamente e morfologicamente costanti.

Qui sarebbe esaurito tutto ciò che può esser detto sulla tipica struttura degli epiteli pigmentati retinici delle rane e sulle differenti parti che costituiscono questi organismi elementari sì altamente complicati. Resta ancora a menzionare le varietà di forma ed i differenti caratteri che presenta quest'epitelio nelle diverse regioni della retina. Queste varietà però non sono mai molto considerevoli e, per la maggior parte, di sola natura quantitativa. Come fu di già accennato, nell'equatore del bulbo le cellule pigmentate mostrano la maggiore estensione di superficie, tanto che arrivano a ricoprire, come fu giustamente calcolato da Morano, da 12 a 15 bastoncelli; la loro altezza però non corrisponde allo sviluppo della superficie, essendo basse e corte: possiedono una cupola protoplasmatica assai bassa ed una schiacciata calotta cuticulare. L'opposto di queste forme presentano le piccole cellule epiteliali nel centro della retina, le quali alle volte sono sì strette che ricoprono un solo bastoncello (Morano), mentre nella loro altezza sono grandemente sviluppate. L'altezza della cupola protoplasmatica, alla quale corrisponde l'altezza della calotta cuticulare presenta sovente la doppia dimensione di quella posseduta dalle cellule dell'equatore del bulbo. Come lasciasi attendere in seguito al maggiore consumo di materiale fisiologico che effettuasi nel centro della retina trovasi nelle cellule di questa regione una quantità di gocciole oleose e di granuli aleuronoidi immagazzinati in proporzione straordinariamente maggiore di quella contenuta nelle grosse cellule dell'equatore del bulbo; specialmente i granuli aleuronoidi vi si trovano spesso in tale quantità da occupare completamente l'intiero segmento della cupola protoplasmatica ricoperto dalla calotta cuticulare. Anche in rapporto ai granuli di pigmento si osserva una caratteristica differenza fra le parti centrali e periferiche della retina. Nelle parti centrali le cellule epiteliali contengono una quantità minore di granuli di pigmento, i quali presentano un color castagno, mentre nelle cellule epiteliali dell'equatore, in cui mostrasi più ricco il numero dei granuli, questi hanno un colorito quasi perfettamente nero. È questa una osservazione piuttosto curiosa: poichè l'analogia della retina dell'uomo colla sua *Fovea centralis* intensamente pigmentata avrebbe fatto supporre precisamente il contrario.

Al di fuori della rana esculenta non si trovava a nostra disposizione nessun altro rappresentante della famiglia degli anfibi incaudati. Egualmente della famiglia degli anfibi caudati ci doveva bastare una specie sola, cioè il *Triton cristatus.*

Già antecedenti osservazioni hanno portato a conoscere che il volume dei bastoncelli e dei coni negli anfibî caudati è di gran lunga maggiore ancora di quello che presentano gli anfibî incaudati. Lo stesso fatto, e quasi ancora in grado maggiore

noi abbiamo potuto constatare anche per le cellule dell'epitelio retinico. La superficie perfettamente esagonale delle cellule del *Triton* sorpassa in estensione il doppio ed alcune volte anche il triplo delle più grandi cellule epiteliali delle rane (fig. 11, 14, 15); queste cellule all'opposto sono poco sviluppate nella loro altezza tanto che la cellula che noi abbiamo rappresentato nella nostra fig. 16 era fra le più alte di tutte le cellule dell'epitelio pigmentato del *Triton* che noi abbiamo isolato. Esse sono intromesse, come nella retina delle rane, nell'apparecchio cuticulare della *Lamina reticularis retinae* e possiedono egualmente la loro propria calotta cuticulare: solamente nel *Triton cristatus* queste calotte sono più basse e perciò più difficili a riconoscere, Degno di nota è la grande facilità con la quale le cellule epiteliali si dividono nelle loro due parti, cupola protoplasmatica e base pigmentata, sia nelle ricerche dello stato fresco che nella macerazione nell'acido cromico, o nell'indurimento dell'acido osmico. Così si ottengono dei preparati simili a quei tre da noi rappresentati nelle fig. 11, 14, 15, dei quali i primi due rappresentano un mosaico formato dalle sole cupole protoplasmatiche (fig. 11, dopo la macerazione nell'acido cromico diluito; fig 14, dopo l'indurimento nell'acido osmico), mentre il terzo rappresenta un altro mosaico (fig. 15), isolato da una retina trattata con l'acido osmico ed esclusivamente composto dalle basi pigmentate da cui si sono staccate le cupole protoplasmatiche.

Le cellule dell'epitelio retinico del *Triton cristatus* contengono nella loro cupola protoplasmatica gli stessi corpi da noi osservati nelle rane; il nucleo che esse contengono è molto grande, sta quasi sempre allato di una delle pareti cellulari e possiede spesso due nucleoli; le gocciole oleose sono numerosissime trovandosene fino a 20 e più entro una sola cellula; all' opposto esse sono quasi tutte di piccolo volume, raggiungendo molto raramente le più grandi, la metà del diametro che possiede il nucleo. Solamente pochissime gocciole oleose mostrano il bel color giallo d'oro tanto caratteristico per le gocciole della rana, mentre il numero prevalente offre un color giallo limone, alcune volte sì sbiadito che solo a causa della loro forma rotonda e della loro forte lucentezza possono essere distinte dai granuli aleuronoidi. Questi ultimi in ogni cellula sono presso a poco dello stesso numero delle gocciole oleose colle quali hanno comuni le stesse dimensioni (fig. 12), tanto che i più piccoli di essi che hanno un diametro quasi incalcolabile, possono solo distinguersi dalle minime gocciole oleose mediante la reazione coll'acido osmico, il quale colora le gocciole oleose in color castagno scuro, mentre i granuli aleuronoidi ne vengono coloriti in grigio scuro od in nero. In rapporto alla topografica disposizione di questi corpi, riscontrasi nel *Triton* lo stesso fatto, sul quale noi abbiamo già posto attenzione nelle rane, cioè che i granuli aleuronoidi occupano a preferenza il segmento superiore della cupola protoplasmatica, mentre le gocciole oleose si trovano più ravvicinate alla linea di confine che separa la cupola protoplasmatica dalla base pigmentata. Questo fatto è specialmente ovvio a riconoscersi nella fig. 14, che rappresenta un preparato ottenuto col trattamento all'acido osmico, nel quale vicino al nucleo veggonsi conservati i granuli aleuronoidi situati nel segmento superiore della cupola protoplasmatica, mentre delle gocciole oleose situate più in basso non apparisce più alcuna traccia.

Nei preparati all'acido osmico, le basi pigmentate di queste cellule isolate e vedute di superficie compariscono quasi sempre perforate da fori trasparenti (fig. 15),

ogni singolo dei quali corrisponde allo spazio già occupato da un membro esterno dei bastoncelli; dalla quantità di tali fori si comprende subito il numero dei bastoncelli che copriva colla sua superficie esagonale ciascuna cellula da noi rappresentata. I prolungamenti della base pigmentata reagiscono alla luce ed all'oscurità nella stessa maniera che nelle rane.

Della classe dei rettili noi abbiamo potuto esaminare solo tali specie ove nella retina provvista di coni soli manca lo strato dei bastoncelli, e per conseguenza anche il rosso retinico, *Testudo graeca*, *Lacerta agilis*, *muralis*, *viridis*. Gli epitelî pigmentati di questi animali presentano fra loro una grande identità di struttura. Il sistema della *lamina reticularis retinae* è ben sviluppato. Le singole calotte però non sono pronunciate come nelle rane, presentandosi schiacciate, ricoprendo la sola superficie superiore della cellula epiteliale, nè estendendosi sopra le parti laterali della cupola protoplasmatica. Nella cupola protoplasmatica delle specie da noi esaminate è contenuto il nucleo, il quale come nelle rane è unico e possiede un nucleolo solo; granuli aleuronoidi e gocciole gialle non trovansi nel protoplasma di queste cellule, invece veggonsi non come costante, ma pure frequente evenienza delle gocciole di grasso incolore, la di cui presenza rara nelle lucertole, riscontrasi come un fatto più ovvio nelle testuggini (fig. 18). Come nel *Triton cristatus* anche in queste specie di rettili le cellule epiteliali si dividono facilmente nelle loro due parti componenti, cupola protoplasmatica e base pigmentata; tale divisibilità osservasi a preferenza nella *Testudo graeca*, in cui riesce raramente di isolare una cellula intiera, specialmente nei preparati all'acido osmico. In tal caso le cellule appariscono quali regolari cilindri ricoperti da una relativamente spessa membrana cuticulare. Nella loro cupola protoplasmatica a sufficienza bene sviluppata, colorata uniformemente in grigio (dalla reazione dell'acido osmico) un nucleo il più delle volte non è più visibile (fig. 17). La base pigmentata ed i suoi prolungamenti presentano sempre un aspetto elegante e molto regolare. I granuli di pigmento hanno la forma di esili aghi e sono col loro asse longitudinale posti parallelamente all'asse della cellula. Le basi pigmentate, isolate e vedute di superficie appariscono crivellate da piccoli forami, che non corrispondono come nel *Triton* a spazî occupati dai bastoncelli, ma invece nei rettili che mancano di bastoncelli corrispondono a spazî precedentemente occupati dai coni. Il numero dei coni ricoperti da queste cellule è stragrande tanto che nel preparato da noi rappresentato nella fig. 19, circa 40 coni corrispondono alla superficie d'una sola cellula epiteliale.

Noi non abbiamo potuto con sicurezza risolvere la questione se nella retina anche dei rettili avvengono mutazioni fisiologiche di luogo dei granuli di pigmento, cioè se in seguito dell' azione della luce essi vengano portati fino alla limitante esterna, e se sotto l' influenza dell' oscurità di nuovo si allontanino da essa. La testuggine per la sua fotofobia s'oppone costantemente ad ogni esperimento. Nella lucertola poi fummo costretti d' interrompere le nostre ricerche prima d' un incontestabile risultato. In esse noi abbiamo sempre trovato fortemente pigmentato lo strato dei coni, tanto nelle retine state lungamente esposte alla luce, quanto in quelle tenute nell' oscurità; ma se la pigmentazione in questi due opposti stadî fisiologici fosse egualmente intensa, e s' estendesse realmente fino allo stesso punto nello strato dei coni, le nostre poche ricerche non hanno potuto con certezza

determinare. Possiamo però sicuramente concludere almeno questo, che se esiste un movimento fisiologico del pigmento retinico nello strato dei coni delle lucertole, esso è molto meno sensibile che nello strato dei bastoncelli degli anfibî.

Come in tante altre strutture istologiche, anche nella struttura dell'epitelio retinico presentano gli uccelli una grande somiglianza coi rettili; anche in essi la lamina reticolare della retina non mostrasi composta da calotte scendenti molto in basso, ma esse rappresentano precisamente come nei rettili un rivestimento cuticulare interamente piano sulla superficie d'ogni singola cellula. La stessa somiglianza che trovasi nella struttura della lamina cuticulare, si riscontra poi anche nei granuli di pigmento i quali presentano costantemente quella stessa forma di esili aghi, che pare altrettanto caratteristica come per la classe dei rettili, anche per quella degli uccelli.

L'unica particolarità degna di nota che distingue l'epitelio pigmentato degli uccelli dal descritto epitelio dei rettili (nei quali mancano i bastoncelli), sembra stare in un interessante rapporto morfologico colla presenza dei bastoncelli nella retina degli uccelli. Pare che laddove le cellule epiteliali ricoprono solamente lo strato dei coni, in esse manchino le specifiche deposizioni (gocciole oleose e granuli aleuronoidi) delle quali noi abbiamo sì estesamente di già parlato interpretandole qual materiale destinato al risarcimento delle perdite fisiologiche dello strato dei bastoncelli e dei coni; mentre queste specifiche deposizioni non mancherebbero mai nell' interno delle cellule ove esse oltre ai coni ricoprono anche lo strato dei bastoncelli in cui riscontrasi il rosso retinico. In riguardo a questo rapporto, lo studio della retina delle civette era per noi sopra ogni altra cosa importantissimo. Le civette come è noto occupano nella classe degli uccelli un posto speciale, poichè i coni, che in genere nella struttura delle retine degli uccelli fanno la parte principale, sono in esse quasi completamente rimasti indietro al colossale sviluppo dei bastoncelli, i quali possiedono, come a noi è sembrato, un rosso retinico d'una rimarchevole durata. Di più, oltre che i coni sono meno numerosi e molto piccoli in proporzione dei bastoncelli, hanno ancora la caratteristica proprietà che sulla linea di confine che separa i loro membri esterni dai membri interni non si trova come negli altri uccelli una gocciola di luteina (gocciola oleosa) di color rosso rubino o di giallo d'oro, ma invece questa gocciola mostrasi sempre d'un color giallo pallido, o perfino perfettamente scolorata. Esaminando però l'epitelio pigmentato, veggonsi situate nella cupola protoplasmatica delle cellule cilindriche le gocciole oleose d'un bel giallo d'oro, che non si è potuto trovare nello strato dei coni (fig. 13). Il numero di tali gocciole che si trova in una di queste cellule pigmentate (le quali presso la civetta non sono molto grandi) è assai considerevole, occupando la media fra le gocciole situate nelle grandissime cellule del Triton e quelle contenute nelle cellule delle rane. La loro grandezza, ed anche più il loro colore le fa assomigliare più alle gocciole oleose delle rane che a quelle del Triton; la maggior parte di esse sono grandi e quasi tutte sono colorite in giallo d'oro intenso, solo poche sono quelle che presentansi di color giallo limone. Singolare è la propensione che esse mostrano di riunirsi in gruppi di cui non abbiamo trovato alcun esempio sia nelle rane che nel Triton. Allato delle gocciole oleose riscontransi costantemente i granuli aleuronoidi i quali sono quasi più numerosi ed in parte altrettanto grandi che le gocciole oleose. Precisamente come nel Triton e nelle rane

anche nelle civette i granuli aleuronoidi occupano il segmento superiore, mentre le gocciole si trovano nel segmento inferiore della cupola protoplasmatica. Ambedue questi corpi, tanto le gocciole oleose quanto i granuli aleuronoidi, riscontransi più numerosi nelle piccole ed alte cellule del centro della retina che nelle larghe e basse cellule dell'equatore di essa.

La retina dei piccioni ha a noi dato occasione di fare una osservazione simile a quella fatta nella retina delle civette, quantunque in un modo non tanto spiccato. Nella retina di essi trovansi, allato di estese regioni che posseggono lo strato dei bastoncelli e per conseguenza anche il rosso retinico, delle altre zone non meno estese dove i bastoncelli completamente mancano, ed i prolungamenti delle cellule pigmentate sono esclusivamente situati fra i coni. Esaminando preparati, dopo l'indurimento coll'acido osmico, dove le cellule di queste due differenti regioni della retina sono rimaste in connessione collo strato dei bastoncelli, o dei coni, in quei preparati dove le cellule epiteliali sono in rapporto solamente coi coni non vedesi nella cupola protoplasmatica alcuna traccia di specifiche deposizioni (fig. 24); mentre queste all'opposto non mancano giammai nella cupola protoplasmatica delle cellule epiteliali, laddove i prolungamenti di esse circondano membri esterni di bastoncelli (fig. 20). In questi preparati trattati coll'acido osmico, in cui le deposizioni contenute nella cupola protoplasmatica presentavansi sotto l'aspetto di pallette o di granuli colorati in nero dal reattivo, noi non potevamo trarre una conclusione sulla natura di esse, non avendo potuto rimettere questi preparati, o ripetere un altra volta questa osservazione, nello strato fresco; sicchè non potendo positivamente decidere sulle loro proprietà dobbiamo lasciare irrisoluta la questione se esse rappresentino gocciole oleose, o granuli aleuronoidi, ovvero un altro materiale differente a questi due corpi. Sotto questo punto le nostre ricerche lasciano a deplorare una lacuna che speriamo venga in breve ricolmata.

Più precisi risultati noi abbiamo ottenuto nella ricerca della migrazione dei granuli di pigmento nella retina degli uccelli. Questa migrazione pare che abbia presso gli uccelli una parte assai importante essendo i due differenti stati anatomici che ne sorgono, facilmente riconoscibili già alle sole osservazioni macroscopiche. Nella preparazione della retina e dell'epitelio pigmentato, colpisce il fatto che in quelle retine state alla luce lo strato pigmentato resta per grandi brani aderente agli altri strati della retina, mentre la netta divisione di queste due membrane avviene completamente e con grande facilità in quelle retine state precedentemente all'oscurità [1]. L'esame microscopico di questi due differenti stati della retina negli uccelli (civetta piccione) ci ha presentato quasi gli stessi risultati da noi descritti nelle rane. Nelle retine state all'oscurità, lo strato dei bastoncelli e dei coni appare pigmentato nella sola sua parte superiore fino ad una linea la quale limita il terzo esterno di questo strato, mentre i due terzi interni fino alla limitante esterna rimangono sempre

(1) Si paragonino a questo fatto le parole di Enrico Müller, *Sulla retina dei piccioni* « Diversissimo è il grado di coesione colla quale lo strato dei bastoncelli aderisce alla membrana pigmentata, alcune volte però dividonsi questi due strati tanto facilmente, da far dubitare se realmente in tutte le parti dell'occhio sia egualmente intimo il rapporto fra lo strato dei bastoncelli ed il pigmento ». E. Müller, *Gesammelte und hinterlassene Schriften zur Anatomie und Physiologie des Auges* I p. 79.

completamente liberi di granuli di pigmento. All'opposto, nelle retine state assoggettate ad una luce intensa, la pigmentazione dello strato dei bastoncelli e dei coni si estende molto al di là del terzo superiore; generalmente, essa con uniforme intensità prosegue fino al limite interno dei membri esterni dei bastoncelli e continua poi con intensità alquanto scemata fra i membri interni dei bastoncelli e dei coni, per arrivare fino alla membrana limitante esterna. Al disotto di essa anche negli uccelli non abbiamo mai osservato alcun granulo di pigmento.

Quando noi istituimmo queste ricerche sulla migrazione del pigmento nella retina degli uccelli, non portammo ancora la nostra attenzione sulla diversità fisiologica di quelle speciali regioni, che esistono nella retina del piccione, contenenti solo coni e non bastoncelli. È per questa ragione che non sappiamo dire nulla di positivo, se anche in queste zone avvengano i mutamenti di luogo dei granuli di pigmento o se ivi manchino. Tuttavia tale conoscenza avrebbe avuto uno speciale interesse in rapporto al dubbioso risultato ottenuto sulla migrazione del pigmento nello strato dei coni mancante di bastoncelli delle retine delle lucertole: ora non avendo raggiunto un risultato positivo, nè nei rettili nè negli uccelli, dobbiamo lasciare nel dubbio se la migrazione dei granuli di pigmento sia una proprietà fisiologica di tutte le cellule dell'epitelio retinico, ovvero se essa sia solamente propria di quelle cellule i di cui prolungamenti abbracciano membri esterni dei bastoncelli. Che in alcune circostanze lo strato dei coni della retina del piccione, nelle zone scevre di bastoncelli, possa presentarsi libero da granuli di pigmento, lo dimostra il preparato da noi disegnato nella fig. 21, nell'esecuzione del quale disgraziatamente non badammo a rimarcare se la retina a cui esso apparteneva era stata assoggettata all'azione della luce o dell'oscurità.

La suddetta fig. 21 venne da noi eseguita per esclusivo scopo speciale morfologico, senza considerazioni fisiologiche; essa era destinata ad illustrare una specialità morfologica dello strato pigmentato, la quale, secondochè noi sappiamo, sembra fino ad ora sfuggita a tutti gli osservatori [1] ed a cui noi vogliamo dare il nome di « spostamento scaglioniforme delle cellule pigmentate ». Questo « spostamento » di cui trovansi già deboli traccie negli anfibî, presentasi più pronunciato nei rettili, e raggiunge il suo maggiore sviluppo nella classe degli uccelli, e perciò viene da noi in questo luogo descritto. Esso è una particolarità locale della parte anteriore all'equatore della retina. Ivi l'asse di ciascuna cellula epiteliale cilindrica, da noi fin qui considerato sempre come verticale, si trasforma in un asse trasverso, e le cellule da prismi esagonali retti divengono prismi esagonali obliqui. Ogni singolo segmento della cellula, cupola protoplasmatica e base pigmentata e suoi prolungamenti con i bastoncelli ed i coni fra essi situati, non resta l'uno coll'altro combinato su d'una linea verticale,

(1) Secondo Enrico Müller (loc. cit. I p. 78) ha v. Wittich (*Zeitschrift für wissensch. Zoologie* Bd. IV p. 458) descritto uno spostamento vorticoso delle cellule epiteliali. Enrico Müller crede che tale aspetto delle cellule dell'epitelio retinico « devesi alla differente direzione che esse prendono « nelle manualità della preparazione ». Non essendoci stato possibile consultare il lavoro originale di Wittich non possiamo sapere se egli realmente abbia osservato quella singolarità di struttura dell'epitelio retinico da noi chiamata spostamento scaglioniforme, o se egli, come crede E. Müller, siasi imbattuto in un errore di preparazione.

ma tutte queste parti presentansi a guisa di scaglioni inclinati e spostati gli uni sopra gli altri. Questo singolare cambiamento sta manifestamente in stretto rapporto colle condizioni diottriche, poichè trovasi solamente in quella parte del bulbo dove i raggi luminosi, che partono dal nodo posteriore dell'occhio, non possono ferire la retina che in direzione assai obliqua.

Per la classe dei mammiferi, ci limitiamo a descrivere l'epitelio pigmentato di quei due soli animali che noi abbiamo potuto con esattezza studiare. Ambedue questi animali, il coniglio ed il bove, presentano nella struttura dell'epitelio retinico tanto caratteristiche differenze che possono essere considerati quali rappresentanti di due tipi affatto differenti, secondo i quali sembra essersi sviluppato l'epitelio pigmentato nella classe dei mammiferi. Simile al tipo del bove noi abbiamo trovato, almeno con ricerche superficiali, l'epitelio retinico della pecora, del cane, del gatto (i quali tutti come il bove sono provvisti di tappeto). Al tipo dei conigli non abbiamo fino ad ora con sicurezza trovato un secondo rappresentante (dei quali forse qualcheduno ancora sarà riscontrato nei rosicchianti eliofobi mancanti di tappeto).

Come in tutti i vertebrati anche nei conigli le singole cellule epiteliali sono contenute nelle cornici esagonali della lamina reticolare della retina. La struttura di queste formazioni cuticulari nel coniglio (come negli altri mammiferi ed anche nel bove, che in questo rapporto non offre nessuna differenza) si ravvicina moltissimo al tipo degli anfibî da noi sì estesamente descritto nelle rane; così ritrovansi nei mammiferi le calotte cuticulari che s'estendono anche in basso ai lati della cupola protoplasmatica, come osservasi nella fig. 25 *b*, e non quelle piane coperture che sembrano esclusivamente proprie delle due classi degli uccelli e dei rettili. Però le calotte cuticulari dei mammiferi, abbenchè assomiglino nella forma a quelle delle rane, non estendonsi tanto in basso, e perciò compariscono più corte. Riguardo questa altezza minore delle calotte dei mammiferi sarà utile di tenere conto del fatto che, proporzionatamente, l'altezza d'ogni singola cellula epiteliale dei mammiferi è molto più corta di quella delle rane.

Molto singolare e differente dalle immagini che ci hanno presentato gli epitelî retinici degli altri vertebrati finora descritti [1], è l'aspetto dell'epitelio pigmentato dei conigli visto in superficie (fig. 22, 23 da un coniglio albino, fig. 24 da un coniglio pigmentato). In esso non riscontrasi la regolare disposizione di cellule, tutte della stessa grandezza e della stessa forma esagonale, ma invece il mosaico comparisce formato da cellule di differente forma, grandezza e vario numero di lati, disposte a primo aspetto senza alcuna regola. Esaminando più attentamente questo mosaico di cellule, si giunge presto a conoscere una legge di regolarità che domina la loro apparentemente sconnessa disposizione, ed a stabilire in primo luogo che esse presentansi sotto due differenti forme fra cui pare che non esistono punti di passaggio: le une sono grandi e contengono due nuclei ognuno dei quali possiede un nucleolo, le altre, la di cui

[1] Le prime osservazioni sulla specialità dell' epitelio pigmentato dei conigli trovansi presso E. Müller (loco cit. p.686) « Nei conigli le cellule della coroidea contengono una od alcune gocciole oleose, nei conigli albini queste cellule, che presentano un' irregolare grandezza, e spesso contengono due nuclei, rappresentano delle figure molto delicate ».

dimensione corrisponde quasi esattamente alla metà delle prime, possiedono costantemente un solo nucleo. In secondo luogo s'avverte che queste due specie di cellule sono disposte seguendo una legge speciale, in modo che sembra principalmente evitata la riunione delle cellule della stessa dimensione: così le grandi sono sempre circondate dalle piccole, mentre le piccole hanno per loro vicine sempre le grandi cellule. Per tale maniera trovasi costantemente nel mosaico dell'epitelio pigmentato dei conigli, un continuo ma regolare cambiamento di ambedue le forme di queste cellule. Questa interessante struttura riscontrasi tanto nei conigli albini che nei pigmentati, sia negli individui giovani che negli adulti; essa sembra anchè essere egualmente estesa in tutte le parti della retina, poichè noi la troviamo tanto nell'equatore dell'occhio che nelle parti più centrali; dobbiamo però in questa ultima asserzione tener conto della possibilità, che nel centro proprio della retina, sul luogo della visione più precisa, esista forse un'altra e più omogenea disposizione degli epitelî pigmentati.

Non tenendo a calcolo nè la diversa dimensione nè l'unico o doppio nucleo, tanto le piccole che le grandi cellule dell'epitelio retinico dei conigli sono formate egualmente (fig. 25). Esse posseggono come nelle altre classi dei vertebrati una cupola protoplasmatica in cui è situato il nucleo, ed una base pigmentata (naturalmente libera di pigmento nei conigli albini).

In vicinanza dell'unico o del doppio nucleo si riscontrano quale costante trovato nell'interno della cupola protoplasmatica, le gocciole oleose. In ogni singola cellula riscontransi parecchie di esse, delle quali le più grandi superano alle volte la grandezza del nucleo. Se esse contengano luteina, non lo abbiamo potuto con sicurezza constatare. Esse compariscono perfettamente scolorate o solo tinte in giallo molto pallido; coll'aggiunta d'acido solforico concentrato passa questa pallida colorazione in un colore verde bluastro altrettanto pallido. Questo cambiamento di colore però è così incerto che noi non possiamo su d'esso concludere la presenza della luteina. In ogni caso se questa sostanza riscontrasi nelle gocciole oleose dei conigli essa v'è contenuta in sole minime proporzioni.

Lo studio della base pigmentata e dei suoi prolungamenti ci ha condotto innanzi tutto ad occuparci d'una questione importante sia dal lato pratico (in riguardo alla patologia del distacco retinico), che teorico, cioè la questione come avvenga che nei mammiferi e nell'uomo esiste un grado minore di coesione dello strato dei bastoncelli e dei coni colla membrana epiteliale pigmentata di quello che riscontrasi nelle altre classi dei vertebrati fin qui esaminate. Questa differenza sorprende già nelle preparazioni macroscopiche. Negli anfibî rettili ed uccelli è un fatto costante che nelle preparazioni di occhi freschi (dei quali noi esclusivamente parliamo) antecedentemente assoggettati all'azione dei raggi luminosi si trova lo stato pigmentato, o completamente, o per grandi tratti aderente alla retina, mentre se gli occhi subirono l'influenza dell'oscurità resta lo strato pigmentato aderente per grandi tratti alla coroidea; salvo che in questo ultimo caso possono rimanere anche aderenti alla retina dei brani alle volte altrettanto grandi, ma generalmente più piccoli di quelli che hanno seguito la coroidea. All'opposto, è un fatto già da molto tempo conosciuto, che nei mammiferi o nell'uomo l'epitelio pigmentato possiede in tutte le circostanze una coesione minima colla retina, e nella

preparazione di essa resta sempre completamente aderente alla coroidea [1]. La quasi assoluta costanza di questo trovato spiega, come anche nei tempi recenti fino all'esatta conoscenza dello sviluppo embriologico, l'epitelio pigmentato il quale la maggiore parte degli anatomici non conosceva che dall'occhio dell'uomo o dei mammiferi fu ad unanimità assegnato alla coroidea e non alla retina colla quale non riusciva loro nella preparazione di trovarlo in continuità.

Ciò che noi possiamo dire in riguardo a questa differenza è, che morfologicamente fra l'epitelio pigmentato e lo strato dei bastoncelli e dei coni dei mammiferi esistono precisamente gli stessi rapporti da noi già esaminati nelle altre classi dei vertebrati. Corrispondendo però alla grande esilità dei bastoncelli e dei coni dei mammiferi, le cellule pigmentate ricoprono una più grande quantità di questi elementi, tanto che sotto la superficie d'una piccola cellula epiteliale dell'epitelio pigmentato dei conigli (fig. 24) appariscono da 8 a 10 coni, mentre le più grandi ne ricoprono il doppio da 16 a 20. Il numero dei bastoncelli che sono annicchiati sotto la base pigmentata secondo il nostro apprezzamento dovrebbe variare da 40 a 50 per le piccole cellule, mentre le grandi ne mostrano ricoprire fino a 100. Tutti questi elementi colla cellula pigmentata che li ricuopre entrano esattamente nella stessa riunione anatomica che noi abbiamo trovato costante nelle altre classi dei vertebrati. I bastoncelli ed i coni toccano colla loro estremità libera la superficie inferiore della base pigmentata, la quale parimenti estende i suoi prolungamenti nei spazî esistenti fra i bastoncelli ed i coni, egualmente come fa negli anfibi, rettili ed uccelli. Questi prolungamenti anche nei mammiferi si estendono precisamente fino allo stesso limite, al quale arrivano nelle altre classi dei vertebrati, cioè fino alla membrana limitante esterna. Questi prolungamenti, corrispondendo alla poca lunghezza dei bastoncelli e dei coni, nei mammiferi sono tanto corti che nei preparati in cui le cellule pigmentate e lo strato dei bastoncelli e dei coni sono leggermente inclinati restano essi per la maggior parte ricoperti, e solo appariscono chiaramente quando le cellule presentansi puramente di profilo.

Come la struttura morfologica anche i fatti fisiologici relativi ai prolungamenti delle cellule pigmentate dei mammiferi sembrano seguire le stesse leggi da noi osservate nelle altre classi dei vertebrati. Nei conigli (non albini) noi abbiamo più volte paragonato delle retine assoggettate alla luce od all'oscurità; in ambedue i casi avviene con grande facilità nella preparazione una netta divisione fra la retina e l'epitelio pigmentato, il quale resta quale una membrana continua aderente alla coroidea. Le ricerche microscopiche però portano a conoscere una marcata differenza in rapporto alle diverse condizioni fisiologiche a cui si era assoggettata la retina. Sotto l'azione della luce lo strato dei bastoncelli contiene granuli di pigmento e mostrasi in molti luoghi ridotto in brani e lacerato. In relazione a queste lesioni di continuità vedonsi numerosissimi gruppi di membri esterni dei bastoncelli rimasti aderenti alla superficie interna della membrana pigmentata. La soluzione di continuità adunque in questo

[1] In antitesi a questa regola generale cita E. Müller « il noto fenomeno », che nella macula lutea l'epitelio pigmentato aderisce fortemente alla retina; oltre nell'uomo l'A. trovò anche ciò avverarsi in una scimmia (*Cebus capucinus*) (loc. cit. I p. 140).

caso non era nettamente avvenuta fra la membrana pigmentata e lo strato dei bastoncelli, ma bensì, accuratamente considerata, era accaduta nella spessezza dello stesso strato di quest'ultimi [1]. L'antitesi di ciò presentano le retine esposte all'oscurità in cui si osservano nè granuli di pigmento nello strato dei bastoncelli, nè sono a riscontrarsi resti di bastoncelli aderenti alla superficie interna della membrana pigmentata. Qui la divisione è nettamente avvenuta nella linea di confine fra la membrana pigmentata e lo strato dei bastoncelli. La stessa differenza nel modo di questa soluzione di continuità è anche rimarcabile nei conigli albini. Si paragonino le fig. 22, 23 delle quali la prima rappresenta una retina tenuta all'oscurità, la seconda una retina assoggettata alla luce. In quest'ultimo caso si vede la superficie inferiore delle cellule epiteliali coperta da numerosi punti neri che corrispondono a frammenti di bastoncelli colorati dall'acido osmico, i quali in seguito al distacco della retina dalla coroidea sono rimasti uniti alla membrana epiteliale. Nei preparati tratti dalle retine state all'oscurità (fig. 22) si cercherebbero inutilmente dei resti di bastoncelli nella membrana pigmentata, poichè in questo stato fisiologico la linea di divisione non avverasi a spese dell'integrità dello strato dei bastoncelli, ma corrisponde esattamente alla linea di confine che separa la retina dalla membrana pigmentata.

Se queste singole osservazioni vengano insieme considerate ed accettate per sufficienti, resta confermato il fatto che tanto nel coniglio quanto negli altri vertebrati il rapporto fra la membrana pigmentata e lo strato dei bastoncelli è soggetto a differenti cambiamenti fisiologici, e che esso viene reso più intimo dall'azione della luce, mentre l'opposto avverasi sotto l'influenza dell'oscurità; è innegabile tuttavia che la coesione delle cellule pigmentate collo strato dei bastoncelli nelle retine esposte alla luce anche intensissima rimane nel coniglio sempre piuttosto debole e che in questo rapporto fra i mammiferi ed il rimanente degli altri vertebrati provvisti con bastoncelli presentasi una notevolissima ed incancellabile differenza. Una ragione plausibile onde spiegare questa differenza non fu a noi possibile di rintracciare, poichè dobbiamo convenire che i noti fatti anatomici e le cause che ne derivano, come la brevità dei bastoncelli e dei prolungamenti delle cellule, l'esilità e per conseguenza la maggiore distruggibilità di essi, non possono che soltanto in parte giustificare questa differenza. Manifestamente si dovrà la vera ragione di questa differenza a fatti anatomici finora ignoti; così p. es. ci è sembrato molto probabile che nei mammiferi esistano speciali condizioni anatomiche per mezzo delle quali la membrana pigmentata dei mammiferi sia riunita collo strato interno della coroidea in più stretti rapporti che nelle altre classi dei vertebrati.

Quantunque non abbiamo avuto l'occasione d'esaminare, negli altri grossi mammiferi sopra citati, il modo di comportarsi della membrana pigmentata sotto diversi e

(1) Si paragonino le osservazioni di E. Müller, *Sulla retina dei mammiferi* « Negli occhi freschi quando si divide la coroidea dalla retina resta (com'è conosciuto) qualche volta aderente al pigmento una gran parte dello strato dei bastoncelli che presentasi dopo sotto forma d'una pallida membrana. Ciò succede facilmente per la parte esterna dello strato, mentre i coni quasi soli seguono la retina. In un occhio freschissimo di cavallo ho trovato i bastoncelli tanto aderenti alla membrana pigmentata che essi rappresentavano uno strato che si lasciava ripiegare e sfibrare con essa ». (loc. cit. I p. 86).

determinati stati fisiologici, riteniamo però grandemente verosimile che anche in essi, come nei conigli, esistono gli stessi rapporti fra i reperti anatomici e gli stati fisiologici, poichè appunto la struttura della base pigmentata e dei prolungamenti che da essa emanano, nei suddetti mammiferi è perfettamente eguale a quella dei conigli, mentre le più importanti diversità di struttura, di cui sopra facemmo parola, hanno luogo in un' altra direzione, fondandosi sulla forma e disposizione delle cellule e sul contenuto della cupola protoplasmatica.

Come per un facile orientamento sulla struttura dell'epitelio retinico dei conigli, offre un individuo albino la preferenza su d'uno pigmentato, così riesce più facile lo studiare l'epitelio pigmentato del bove cominciando da quelle zone non pigmentate dove la coroidea è ricoperta dal tappeto. Già nelle prime ricerche si riconosce che qui sia per la disposizione del mosaico, che per la forma delle cellule presentasi un tipo molto differente da quello dei conigli; tutte le cellule posseggono un solo nucleo, sono all'incirca della stessa forma e grandezza, ed in generale rappresentano esagoni più o meno regolari allato dei quali riscontransi non raramente ancora altri poligoni.

Sulla forma di queste cellule lasciasi facilmente rimarcare che esse sono considerevolmente più alte delle basse cellule dei conigli. Questa differenza d'altezza viene in piccola parte dalla base pigmentata, mentre preponderatamente dipende dallo sviluppo della cupola protoplasmatica, che contiene oltre del nucleo costantemente unico anche materiale immagazzinato sotto forma di corpi che s'allontanano di molto dall'aspetto delle grosse gocciole oleose dei conigli. In ogni cellula trovansi quattro fino ad otto di essi che presentansi quali granuli rotondi all'apparenza solidi, sempre più piccoli del nucleo e d'un color castagno olivastro scuro o castagno rossastro. Questi granuli lasciansi meglio rimarcare nelle cellule di quelle zone ricoperte di tappeto (fig. 26). Anche nelle cellule leggermente pigmentate che corrispondono alla stretta zona di confine fra il tappeto e la coroidea pigmentata esse sono facilmente a riconoscersi distinguendosi dai granuli di pigmento quasi egualmente oscuri per la forma e per la grandezza (fig. 27). Molto difficile però è il riconoscerli nel vero epitelio pigmentato dove restano completamente ricoperti dagli ammassi di granuli di pigmento; tuttavia essi sono una parte costantemente propria anche di queste cellule ed appariscono distinti ad essere riconosciuti fra i granuli di pigmento quando p. es. per la pressione del copri-oggetto i mucchi di granuli di pigmento vengono convertiti in uno strato più esile. Sulla chimica composizione di queste interessanti figure, se esse contengano grasso e luteina come le gocciole oleose noi non possiamo fino ad ora nulla precisare [1].

Dopo tutto ciò resterebbe ancora a parlare della struttura dell'epitelio pigmentato nella classe dei pesci, nella quale come in parte si trova già osservato nelle anteriori monografie di Hannover e di Enrico Mueller, si riscontrano numerose particolarità di struttura anatomicamente e fisiologicamente assai interessanti. Disgraziatamente

[1] Già E. Müller occasionalmente fa menzione di questi corpi: « Le cellule (dell'epitelio pigmentato dell'occhio anormale d'un bove) contenevano piccole gocciole e piccoli ammassi di color castagno o giallo rossastro, che sembrano in parte costituiti da grasso o più probabilmente da pigmento. Tali corpicciuoli mi hanno altre volte sorpreso negli occhi dei bovi » (l. c. pag. 136).

le nostre ricerche relative a questa classe, incominciate su di una base piuttosto larga, dovettero rimanere incomplete in tante singole, e specialmente nelle più interessanti questioni, che non abbiamo potuto risolverci a pubblicarle. Noi stessi deploriamo sinceramente che nelle ultime pagine di questo lavoro si è ripetuto pur troppo sovente lo stesso inconveniente, cioè che noi fummo costretti di pubblicare, quantunque a malincuore, i monchi risultati di incomplete ricerche: osservazioni ed esperienze, che per mezzo di un lavoro continuato si sarebbero potute certamente ancora approfondire, ma che noi come fu di già accennato fummo costretti, nostro malgrado, interrompere ed abbandonare. Siamo convinti di averci permesso già tante di codeste licenze che non ci potrebbe esser più lecito di mettere ad ulteriori prove la pazienza del lettore. Ci riserbiamo adunque di ritornare sopra l'epitelio pigmentato dei pesci, facendone argomento di altra speciale monografia.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tutte le figure sono disegnate con un ingrandimento Hartnack IX immersione Ocul. n. 2.

Fig. 1. *Rana esculenta* — Dopo antecedente macerazione in acido cromico diluito. Superficie dell'epitelio pigmentato veduta dal lato della coroidea. Nei margini della figura le cellule epiteliali sono cadute dalle cornici della membrana reticolare della retina e questa è rimasta isolata.

Fig. 2. *Rana esculenta* (Oscurità) — Dopo macerazione in acido osmico diluito. Sei cellule isolate *a*, *b*, *c*, dal centro; *d*, forma di passaggio; *e*, *f*, dalla periferia della retina.

Fig. 3. *Rana esculenta* (Oscurità) — Dopo macerazione nell'acido osmico allungato. Una serie riunita di cinque cellule epiteliali del centro della retina; rimarcabile è la regolare disposizione dei granuli aleuronoidi nel segmento superiore della cupola protoplasmatica.

Fig. 4. *Rana esculenta* (Luce) — Preparato macerato nell'acido osmico diluito. In *a* un pajo di cellule riunite del centro, *b* una cellula della periferia della retina; i prolungamenti di esse sono pigmentati fino al loro termine.

Fig. 5. *Rana esculenta* (Oscurità) — Ricerca a fresco del contenuto di due cellule dell'epitelio retinico. In *a* insieme col nucleo trovansi quattro gocciole oleose di color giallo, ed otto granuli aleuronoidi fra cui uno dei più grandi; in *b* insieme col nucleo veggonsi due grosse e due piccole gocciole oleose di color giallo, e sette granuli aleuronoidi.

Fig. 6. *Rana esculenta* (Luce) — Ricerca a fresco del contenuto di due cellule dell'epitelio retinico. In *a* trovansi insieme col nucleo una grande gocciola oleosa pallidamente colorata, tre gocciole oleose d'un giallo carico, e sette granuli aleuronoidi; presso *b* trovansi accanto al nucleo una gocciola pallida, quattro gocciole oleose gialle e sei granuli aleuronoidi.

Fig. 7. *Rana esculenta* (Oscurità) — Da un preparato indurito nell'acido osmico. Una parte dello strato dei bastoncelli e dei coni in naturale riunione con quattro cellule pigmentate. I granuli di pigmento s'estendono fino al terzo superiore dello strato dei bastoncelli.

Fig. 8. *Rana esculenta* (Luce) — Dopo l'indurimento nell'acido osmico. Una parte dello strato dei bastoncelli e dei coni nei fisiologici rapporti con quattro cellule pigmentate che lo ricoprono. L'infiltrazione dei granuli di pigmento estendesi fino alla membrana limitante esterna.

Fig. 9. *Rana esculenta* (Oscurità) — Da un preparato indurito nell'acido osmico. Brano dello strato dei bastoncelli e dei coni dal quale si sono staccate le cellule epiteliali; l'infiltrazione dei granuli di pigmento è limitata al terzo superiore dei membri esterni dei bastoncelli.

Fig. 10. *Rana esculenta* (Luce) — Dopo l'indurimento nell'acido osmico. Brano dello strato dei bastoncelli e dei coni del quale si sono staccate le cellule epiteliali, l'infiltrazione del pigmento s'estende fino alla membrana limitante esterna.

Fig. 11. *Triton cristatus* — Dopo macerazione nell'acido cromico diluito. Mosaico composto da diciotto cupole protoplasmatiche staccate dalle basi pigmentate.

Fig. 12. *Triton cristatus* — Ricerca a fresco del contenuto di due cellule epiteliali. In *a* si contano oltre il nucleo ventiquattro gocciole oleose, fra le quali due d'un giallo carico, e ventotto granuli aleuronoidi; in *b* allato del nucleo trovansi ventisei gocciole fra le quali una color giallo d'oro, e trenta granuli aleuronoidi.

Fig. 13. *Strix noctua* — Ricerche a fresco del contenuto di due cellule dell'epitelio pigmentato. In *a* trovansi allato del nucleo quattro conglomerazioni di gocciole oleose e tredici gocciole isolate, tutte di un bel color giallo d'oro, oltre di che numerosissimi granuli aleuronoidi. In *b* trovansi due conglomerazioni di gocciole color d'oro, poi due gocciole isolate colorate in giallo carico, ed altre due pallidamente colorate, inoltre numerosi granuli aleuronoidi.

Fig. 14. *Triton cristatus* — Preparato trattato colla macerazione all'acido osmico diluito. Mosaico di undici cupole protoplasmatiche isolate. In esse allato del nucleo sono visibili i soli granuli aleuronoidi i quali occupano la parte superiore della cupola protoplasmatica, mentre non riscontrasi

alcuna delle gocciole oleose le quali verosimilmente sono rimaste aderenti alla base pigmentata dietro l'avvenuto distacco delle due parti della cellula.

FIG. 15. *Triton cristatus* — Dopo la macerazione nell'acido osmico diluito. Basi di pigmento isolate di dieci epitelî retinali. I forami che in esse si trovano rappresentano i luoghi già occupati dai membri esterni dei bastoncelli.

FIG. 16. *Triton cristatus* — Una sola cellula epiteliale pigmentata isolata colla macerazione all' acido osmico allungato.

FIG. 17. *Testudo graeca* — Indurimento coll'acido osmico. Una serie di quattro cellule dell'epitelio retinico insieme riunite. Nell' interno delle loro cupole protoplasmatiche non si vedono nè il nucleo, nè specifiche deposizioni.

FIG. 18. *Testudo graeca.* — Dopo macerazione nell'acido cromico allungato. Sette cupole protoplasmatiche riunite insieme. Allato al nucleo trovansi in ogni cellula alcune gocciole oleose incolori.

FIG. 19. *Testudo graeca.* — Macerazione nell'acido cromico diluito. Nove basi di pigmento isolate; i forami in esse esistenti corrispondono ai luoghi di già occupati dai coni.

FIG. 20. *Columba Livia* — Indurimento nell'acido osmico. Tre cellule epiteliali riunite insieme ad otto membri esterni dei bastoncelli i quali trovansi collocati fra i prolungamenti delle basi pigmentate.

FIG. 21. *Columba Livia* — Indurimento nell' acido osmico. Quattro cellule pigmentate della periferia della retina isolate insieme col pezzo dello strato dei coni da loro ricoperto. La preparazione mostra il da noi descritto spostamento scaglioniforme.

FIG. 22. *Lepus cuniculus* (Oscurità) — Indurimento nell'acido osmico. Brano dell'epitelio retinico d'un coniglio albino veduto dalla sua superficie inferiore retinale.

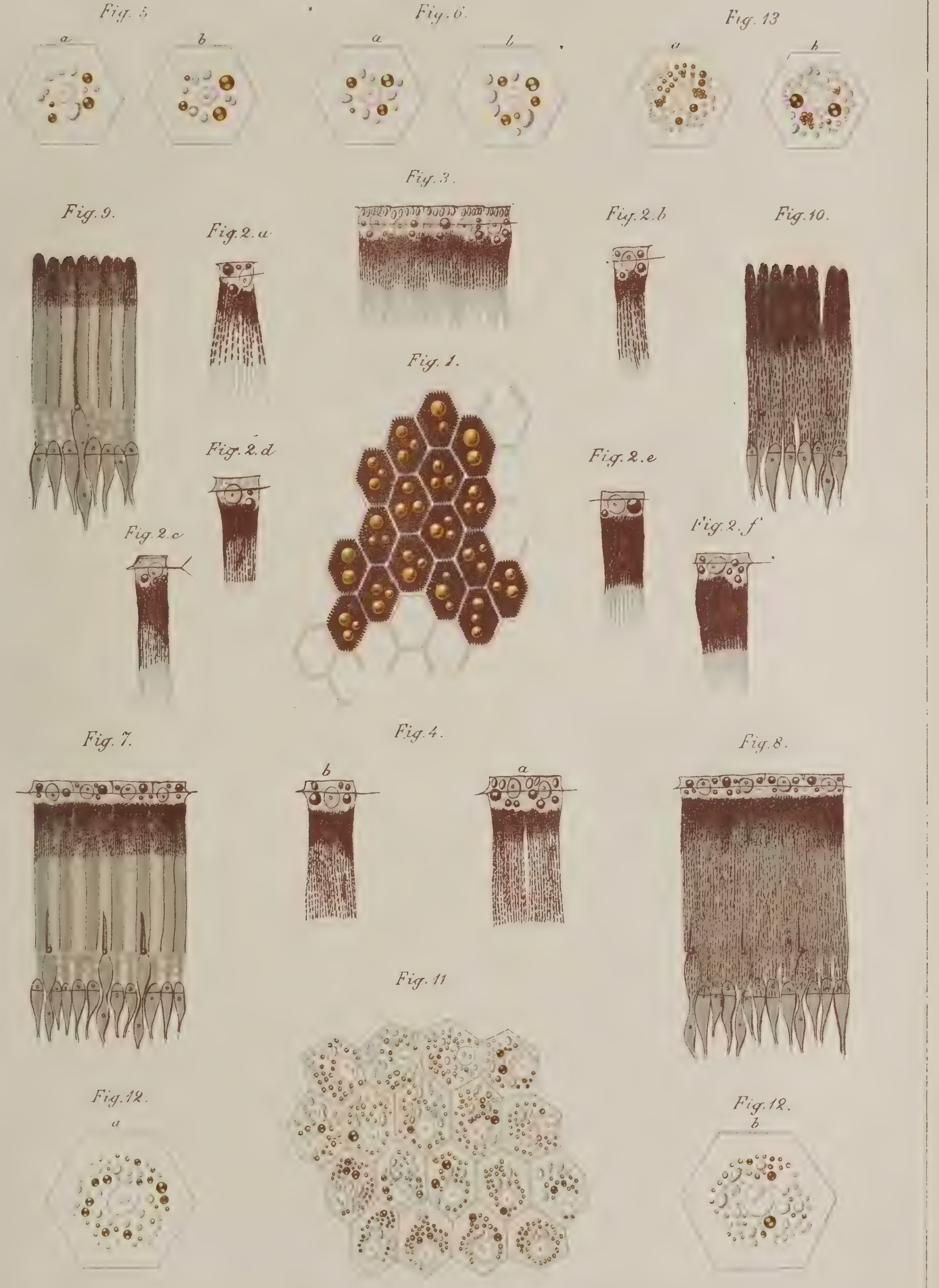
FIG. 23. *Lepus cuniculus* (Luce) — Indurimento nell'acido osmico. Brano dell'epitelio retinico veduto dalla sua superficie inferiore. I punti intensamente neri che trovansi allato del nucleo e delle gocciole oleose tinte in castagno scuro corrispondono a frammenti di bastoncelli rimasti aderenti alla superficie inferiore d' ogni singola cellula.

FIG. 24. *Lepus cuniculus* — Indurimento nell'acido osmico. Brano dell'epitelio retinico isolato.

FIG. 25. *Lepus cuniculus* — Macerazione nell' acido osmico. Cellule isolate due a due, *a*, *b*, dall'epitelio retinico d'un coniglio albino, *c*, da un coniglio pigmentato.

FIG. 26. *Bos taurus* — Brano dell'epitelio retinico veduto dalla sua superficie coroidale, isolato nello strato fresco nell'umor acqueo. Il preparato è stato tolto dalla zona non pigmentata ricoperta dal tappeto.

FIG. 27. *Bos taurus* — Altro brano dell'epitelio retinico veduto dalla sua superficie coroidale osservato nello strato fresco nell'umor aqueo; esso corrisponde alla zona di passaggio fra la parte scevra di pigmento e la parte pigmentata dell'epitelio retinico.



F. Boll. dip. Roma. Cromo Lit. Bruno e Salomone Ugo Colonna lit.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

Fig. 14

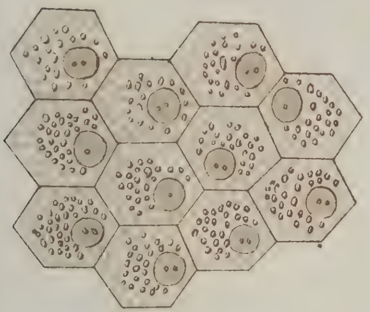


Fig. 17.

Fig. 15.

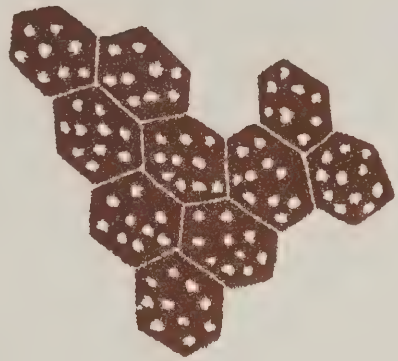


Fig. 16.

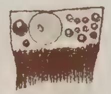


Fig. 20

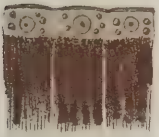


Fig. 21.

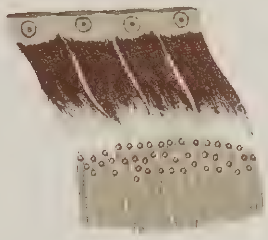


Fig. 18.

Fig. 19.

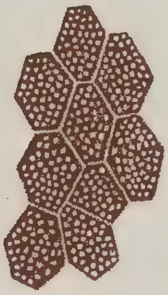


Fig. 23.

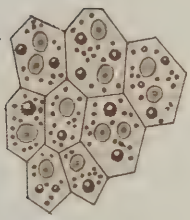


Fig. 24.

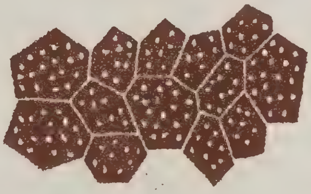


Fig. 22.

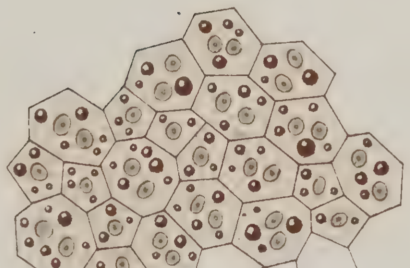
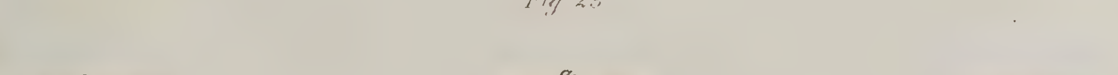


Fig. 27.

Fig. 26

Fig. 25



Boll. dip. Roma. Cromo-Lit. Bruno e Salomone Ugo Colonna lit.°

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

Micologia Romana.

Memoria del dott. CARLO BAGNIS

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 2 giugno 1878.

CENTURIA SECONDA

101. Agaricus (Amanita) vaginatus.

Fries *Syst. myc.* 1, p. 14. — *Epicris.* p. II. — Bull. t. 98, 512.— Vittad. *Fung. mang.* p. 126, t, 16. — Venturi p. 6, t. 2, fig. 15, 16. — Berk. *Outl.* t. III, fig. 4. — *Engl. Fl.* V, p. 2. — Huss. II, t. 34. — Lenz. fig. 2. — Kromb. t. 1, fig. 1-5; t. 10, fig. 6-9; t. 30, f. 13,14. — *Flor. Dan.* t. 1014, 2142, f. 2. — *Gard. Chron.* (1861), p. 97. — Gohn et Rabh. I, t. 7, f. 1. — Barla tav. V. — Agaricus plumbeus. Schaeff. t. 85, 86.— DC. *Fl. Fr.* 568.— Cordier p. 218.— Roques p. 358.— Hartz p. 14.

Hab. Monti di Subiaco e boschi di Tivoli.

102. Agaricus (Amanita) excelsus.

Fries *Syst. myc.* I, p. 17. — *Epicris.* p. 8. — Berk. *Outl.* pl. 3, f. 3. — *Engl. Fl.* V, p. 5. — Kromb. fasc. 4, p. 26, tav. 29, fig. 14-17. — Paul. t. 159. — Gohn et Rabh. I, fig. 1, t, 8. — Amanita ampla. Pers.

Hab. Dintorni di Subiaco e Tivoli.

103. Agaricus (Amanita) pantherinus.

Fries *Syst. myc.* 1. 16. — *Epicris.* p. 5. — *Engl. Fl.* V, p. 4. — *Fl. Dan.* t. 1911, f. 2. — Vittad. *Fung. mang.* t. 39. — Venturi *Stud. myc.* p. 3, t. 1, fig. 7, 8.— Kromb. t. 29, f. 10-13. — Paul. t. 160, f. 2. — Schaeff. t. 90. — Barla tav. 7, fig. 1, 3. — Roques t. 21, fig. 2, 3. — Gohn et Rabh. 1, tav. 1. — Agaricus maculatus. Sch. — Agaricus verrucosus. Pers.

Hab. Nei dintorni di Mentana.

104. Agaricus (Lepiota) clypeolarius.

Bull. tav. 405, 506, fig. 2. — *Tratt. Aust.* t, 26. — Paul. t. 136. — *Engl. Flor.* V, p. 8. — *Fr. Icon.* t. 14, f. 2. — Berk. *Outl.* p. 94. — Ventur. *Stud. myc.* t. 44, fig. 3, 4.

Hab. Montagne di Monte Porzio (dintorni di Frascati).

105. Agaricus (Armillaria) mucidus.

Fries *Epicris.* p. 34. — *Fl. Dan.* t. 773, 1130, 1372. — *Gard. Chron.* 1861, p. 576. — *Engl. Fl.* V, p. 11. — Price f. 91. — Sannd et Sm. t. 5. — *Tratt. Austr.* t. 27.

Hab. Su legno putrido a Monte Compatri.

altiori basi donatum. Mich. *Gen.* tab. 97, fig. 1. — Lycoperdon hirtum. Bull. Champ. tab. 340. — Lycoperdon lacunosum. Bull. tab. 32. — Pers. *Syn.* p. 145. — Lycoperdon gemmatum. *Flor. Dan.* tab. 1120. — Pollin. *Flora Veron.* III, p. 712. — Cordier p. 230 — Vittad. *Monogra. Lycoperda* p. 50.

Hab. Prati nelle colline di Valle d'Inferno.

123. Hendersonia sarmentorum.

Westendorp *Notices sur les Cryptog. belg.* n. 60.— *Icon.* l. c. tav. II, d. e. f. g. h.— Hendersonia nodorum. Lacroix. *Nouv. faits* p. 24. — Hendersonia sarmentorum. Cook. *Handb. of brith. Fungi* p. 435.— Cook. in *Seem. Journ.* f. 15.— Exs. Westend. *Crypt. Fland.* n. 633. — Desmaz. *Plant. Crypt. Franc.* III ed., n. 763. — Rabenh. *Fung. europ.* n. 449.— Cook. *Fung. britann.* ed. I, n. 523; ed. II. n. 23.

Hab. Sui sarmenti delle viti nei dintorni di Tivoli e nei vigneti di Marino.

124. Cantharellus cinereus.

Fries *Syst. myc.* I, p. 320. — *Epicris.* p. 366. — Helvella Hydrolips. Bull. t. 465, f. 2. — Kromb. t. 45, f. 12. — Bolt. t. 34. — Berk. et Broo. *Ann. N. H.* 1865, n. 1016-1139. — *Engl. Fl.* V, p. 126. — Letell. tav. 684.

Hab. Boscaglie di Acqua Traversa (dintorni di Roma).

125. Cantharellus cibarius.

Fries *Syst. myc.* 1, p. 318. — Fries *Epicris.* p. 365. — Merulius cantharellus. Pers. *Syn.* p. 488. — Agaricus cantharellus. Bull. t. 62, 505, f. 1.— Schaeff. t. 82. — Kromb. t. 45, f. 1-11. — Hartz. t. 18. — Vittad. *Fung. mang.* t. 25, f. 1. — Grev. t. 258. — Hogg. et Johnst. t. 16. — Lenz. f. 27. — Sow. t. 46. — Batsch. fig. 120. — Paul. t. 36. — Cooke *Br. Fun.* t. 13, f. 1. — Smith. *E. M.* f. 8. — *Gard. Chron.* (1860), p. 312. — Barla *Champ. de Nice* t. 28, f. 7-15. — *Engl Fl.* V, p. 125.

Hab. Boscaglie di Villa Borghese (dintorni di Roma).

126. Septocylindrium dissiliens.

Derby-Saccardo. *Fung. ven. nov. vel critici* ser. V. (nuov. Giorn. bot. ital.) t. VIII, p. 186. — Saccardo *Comm, ad fungos ital. ant. delin.* (Michel. n. 1, p. 89). — Torula dissiliens. Derby. *Note sur une mal. des feuil. de la vigne.* (Mem. d. l. Soc. d. Phys. et Hist. Nat. de Genève, t. VII, p. 128, P. 1). — De Candolle *Note sur une assertion de M. Vallot au sujet d'une mal. de la vigne* (Bibl. Univ. sept. 1835). — Passerini *Prim. elenc. di Funghi Parmensi* n. 73, p. 13. — *Erbar. critt. ital.* ser. I, n. 1763. — Rabenh. *Fung. eur.* n. 1874. — Saccard. *Myc. veneta* n. 583.

Hab. In pagina inferiore foliorum vivorum *Vitis viniferae*, aestate et autumno (circa Marino).

127. Septoria vitis.

Leveille in *Ann. Scienz. Nat.* 3ª ser., V, p. 279. — Castagne *Catal. Pl. Mars.* suppl. p. 74. — Westend. *Nouv. Crypt. Belg.* n. 64. — West. exs. *Crypt. Fland.* n. 728.

Hab. Ad folia adhuc viva et languida *Vitis viniferae* prope (Frascati).

128. Sporidesmium tripartitum (Bgns. nov. spec.).

Hypophyllum, maculas atras effusas velutinas efficiens; hyphis sterilibus repentibus, ramosis, parcis, fuscidulis, hinc, inde sporigeris; conidiis brevissime stipitatis, e

basi obtusiuscula fusoideis, sursum circinnato-tripartitis 130-140 mm. long., 11-17 mm. larg.; 20-26 septatis, plurinucleatis, olivaceo-lutescentibus; sursum in apiculis olivaceo-ochraceis.

Hab. In foliis quercus pseudosuber (Orto Botanico Romano a Monte Gianicolo).

129. Helminthosporium vitis.

Pirotta *Sull' Helm. vitis paras. delle fogl. della vite* nei *Rend. Real. Ist. Lomb. sc. lett.* ser. 2, vol. X, fasc. I. — Pir. *I fung. parass. dei vitigni* pag. 75. — Septonema vitis. Leveille *Fragm. myc.* in *Ann. Scien. Natur.* 3ª ser., t. IX (1848), p. 261. — Cladosporium viticolum. Cesati in Klotzs. *Herb. viv. myc.* ed. 1ª, n. 1877. — Sphaerella vitis. Fuckel f. conidiofora *Symb. myc.* p. 104. — Cladosporium ampelinum. Passerini in *Erb. critt. ital.* ser. II, n. 595. — Graphium clavisporum. Berk. et Coo. in Berk. *Not. of Nort. Am. fung.*; in Grev. vol. III (1874-75), p. 100. — Cladosporium vitis. Saccard. *Mycot. ven.* n. 284.— Cercospora vitis. Saccar. *Mycoth. venet.* n. 363 — Sacc. *Fung. Venet. nov. vel critici* serius V, in n. Gior. bot. ital. vol. VIII, p. 188, n. 189. — Rabenh. *Fung. Exsic.* n. 2150.

Hab. In foliis *Vitis viniferae* autumno prope Marino — Velletri e Frascati.

130. Peronospora infestans.

Cook. *Micro-fungi* t. 14, f. 264. — *Pop. Sc. Rev.* III, t. 8, f. 3. — Botrytis infestans. Berk. et Br. *Ann. Nat. Hyst.* n. 521. — *Journ. Hort. Soc.* I, t. 4. — De Bary. *Ann. Sc. Nat.* (1863) XX, t. 5, 6.— Desmaz. *Exs.* n. 1492. — Rabenh. *Exs.* n. 1879. — Fckl. *Exs.* n. 37. — Cook. *Exs.* n. 192. — Berk. *Exs.* n. 345.

Hab. Sulle foglie di *Anagallis arvensis* nell'Orto Botanico Romano a Monte Gianicolo.

131. Peronospora trifoliorum.

Cook. *Micr. Fun.* p. 216. — De Bary. *Ann. Sc. Nat.* (1863) XX, p. 117. — Rabh. *Exs.* n. 775. — *F. E.* n. 375. — Fckl. *Exs.* n. 9. — Cook. *Exs.* n. 194.

Hab. In foliis *Medicaginis sativae* prope Romam (Villa Borghese).

132. Peronospora Schleideniana.

Cook. *Micr. Fung.* t. 13, f. 263. — *Pop. Sc. Rev.* III, t. 8, f. 2. — De Bary *Ann. Sc. Nat.* (1863) XX, t, 13, f. 1-3. — Botrytis distructor. Berk. *Ann. Nat. Hy.* n. 239, t. 13, f. 23. — Fckl. *Exs.* n. 41.

Hab. In foliis *Allii Neapolitani* (Orto Botanico Romano a Monte Gianicolo).

133. Peronospora grisea.

Ung. Bot. Zeit. 1847. — Cook. *Micr. Fun.* t. 10, f. 213. — Fckl *Exs.* n. 10.— De Bary *Ann. Sc. Nat.* (1863) XX, t. 13, f. 12. — Botrytis grisea. Berk. et Broo. *Ann. Nal. Hyst.* 528.

Hab. Nelle foglie *Veronicae* nelle praterie e bassi fondi fuori Porta Cavalleggiera (dintorni di Roma).

134. Onygena equina.

Pers. *Syn.* p. 203.— Fckl. *Simb. myc.* t. 6, f. 19.— Moug. *Exs.* n. 775. — Grev. t. 343. — Tul. *Ann. Sc. Nat.* 1844, t. 17, f. 12-17. — Corda VI, t. 10, f. 96. — Fries *Syst. myc.* III, p. 207. — *Engl. Fl.* V, p. 322. — Chev. t. 8, f. 8.— Lycoperdon equinum. Sow. t. 292. — Lycoperdon gossypium. Bolt.

altiori basi donatum. Mich. *Gen.* tab. 97, fig. 1. — Lycoperdon hirtum. Bull. Champ. tab. 340. — Lycoperdon lacunosum. Bull. tab. 32. — Pers. *Syn.* p. 145. — Lycoperdon gemmatum. *Flor. Dan.* tab. 1120. — Pollin. *Flora Veron.* III, p. 712. — Cordier p. 230 — Vittad. *Monogra. Lycoperda* p. 50.

Hab. Prati nelle colline di Valle d'Inferno.

123. Hendersonia sarmentorum.

Westendorp *Notices sur les Cryptog. belg.* n. 60.— *Icon.* l. c. tav. II, d. e. f. g. h.— Hendersonia nodorum. Lacroix. *Nouv. faits* p. 24. — Hendersonia sarmentorum. Cook. *Handb. of brith. Fungi* p. 435.— Cook. in *Seem. Journ.* f. 15.— Exs. Westend. *Crypt. Fland.* n. 633. — Desmaz. *Plant. Crypt. Franc.* III ed., n. 763. — Rabenh. *Fung. europ.* n. 449.— Cook. *Fung. britann.* ed. I, n. 523; ed. II. n. 23.

Hab. Sui sarmenti delle viti nei dintorni di Tivoli e nei vigneti di Marino.

124. Cantharellus cinereus.

Fries *Syst. myc.* I, p. 320. — *Epicris.* p. 366. — Helvella Hydrolips. Bull. t. 465, f. 2. — Kromb. t. 45, f. 12. — Bolt. t. 34. — Berk. et Broo. *Ann. N. H.* 1865, n. 1016-1139. — *Engl. Fl.* V, p. 126. — Letell. tav. 684.

Hab. Boscaglie di Acqua Traversa (dintorni di Roma).

125. Cantharellus cibarius.

Fries *Syst. myc.* 1, p. 318. — Fries *Epicris.* p. 365. — Merulius cantharellus. Pers. *Syn.* p. 488. — Agaricus cantharellus. Bull. t. 62, 505, f. 1.— Schaeff. t. 82. — Kromb. t. 45, f. 1-11. — Hartz. t. 18. — Vittad. *Fung. mang.* t. 25, f. 1. — Grev. t. 258. — Hogg. et Johnst. t. 16. — Lenz. f. 27. — Sow. t. 46.— Batsch. fig. 120. — Paul. t. 36. — Cooke *Br. Fun.* t. 13, f. 1. — Smith. *E. M.* f. 8. — *Gard. Chron.* (1860), p. 312. — Barla *Champ. de Nice* t. 28, f. 7-15. — *Engl Fl.* V, p. 125.

Hab. Boscaglie di Villa Borghese (dintorni di Roma).

126. Septocylindrium dissiliens.

Derby-Saccardo. *Fung. ven. nov. vel critici* ser. V. (nuov. Giorn. bot. ital.) t. VIII, p. 186. — Saccardo *Comm, ad fungos ital. ant. delin.* (Michel. n. 1, p. 89). — Torula dissiliens. Derby. *Note sur une mal. des feuil. de la vigne.* (Mem. d. l. Soc. d. Phys. et Hist. Nat. de Genève, t. VII, p. 128, P. 1). — De Candolle *Note sur une assertion de M. Vallot au sujet d'une mal. de la vigne* (Bibl. Univ. sept. 1835). — Passerini *Prim. elenc. di Funghi Parmensi* n. 73, p. 13. — *Erbar. critt. ital.* ser. I, n. 1763. — Rabenh. *Fung. eur.* n. 1874. — Saccard. *Myc. veneta* n. 583.

Hab. In pagina inferiore foliorum vivorum *Vitis viniferae*, aestate et autumno (circa Marino).

127. Septoria vitis.

Leveille in *Ann. Scienz. Nat.* 3ª ser., V, p. 279. — Castagne *Catal. Pl. Mars.* suppl. p. 74. — Westend. *Nouv. Crypt. Belg.* n. 64. — West. exs. *Crypt. Fland.* n. 728.

Hab. Ad folia adhuc viva et languida *Vitis viniferae* prope (Frascati).

128. Sporidesmium tripartitum (Bgns. nov. spec.).

Hypophyllum, maculas atras effusas velutinas efficiens; hyphis sterilibus repentibus, ramosis, parcis, fuscidulis, hinc, inde sporigeris; conidiis brevissime stipitatis, e

basi obtusiuscula fusoideis, sursum circinnato-tripartitis 130-140 mm. long., 11-17 mm. larg.; 20-26 septatis, plurinucleatis, olivaceo-lutescentibus; sursum in apiculis olivaceo-ochraceis.

Hab. In foliis quercus pseudosuber (Orto Botanico Romano a Monte Gianicolo).

129. Helminthosporium vitis.

Pirotta *Sull' Helm. vitis paras. delle fogl. della vite* nei *Rend. Real. Ist. Lomb. sc. lett.* ser. 2, vol. X, fasc. I. — Pir. *I fung. parass. dei vitigni* pag. 75. — Septonema vitis. Leveille *Fragm. myc.* in *Ann. Scien. Natur.* 3ª ser., t. IX (1848), p. 261. — Cladosporium viticolum. Cesati in Klotzs. *Herb. viv. myc.* ed. 1ª, n. 1877. — Sphaerella vitis. Fuckel f. conidiofora *Symb. myc.* p. 104. — Cladosporium ampelinum. Passerini in *Erb. critt. ital.* ser. II, n. 595. — Graphium clavisporum. Berk. et Coo. in Berk. *Not. of Nort. Am. fung.*; in Grev. vol. III (1874-75), p. 100. — Cladosporium vitis. Saccard. *Mycot. ven.* n. 284.— Cercospora vitis. Saccar. *Mycoth. venet.* n. 363 — Sacc. *Fung. Venet. nov. vel critici* serius V, in n. Gior. bot. ital. vol. VIII, p. 188, n. 189. — Rabenh. *Fung. Exsic.* n. 2150.

Hab. In foliis *Vitis viniferae* autumno prope Marino — Velletri e Frascati.

130. Peronospora infestans.

Cook. *Micro-fungi* t. 14, f. 264. — *Pop. Sc. Rev.* III, t. 8, f. 3. — Botrytis infestans. Berk. et Br. *Ann. Nat. Hyst.* n. 521. — *Journ. Hort. Soc.* I, t. 4. — De Bary. *Ann. Sc. Nat.* (1863) XX, t. 5, 6.— Desmaz. *Exs.* n. 1492. — Rabenh. *Exs.* n. 1879. — Fckl. *Exs.* n. 37. — Cook. *Exs.* n. 192. — Berk. *Exs.* n. 345.

Hab. Sulle foglie di *Anagallis arvensis* nell'Orto Botanico Romano a Monte Gianicolo.

131. Peronospora trifoliorum.

Cook. *Micr. Fun.* p. 216. — De Bary. *Ann. Sc. Nat.* (1863) XX, p. 117. — Rabh. *Exs.* n. 775. — *F. E.* n. 375. — Fckl. *Exs.* n. 9. — Cook. *Exs.* n. 194.

Hab. In foliis *Medicaginis sativae* prope Romam (Villa Borghese).

132. Peronospora Schleideniana.

Cook. *Micr. Fung.* t. 13, f. 263. — *Pop. Sc. Rev.* III, t. 8, f. 2. — De Bary *Ann. Sc. Nat.* (1863) XX, t, 13, f. 1-3. — Botrytis distructor. Berk. *Ann. Nat. Hy.* n. 239, t. 13, f. 23. — Fckl. *Exs.* n. 41.

Hab. In foliis *Allii Neapolitani* (Orto Botanico Romano a Monte Gianicolo).

133. Peronospora grisea.

Ung. Bot. Zeit. 1847. — Cook. *Micr. Fun.* t. 10, f. 213. — Fckl *Exs.* n. 10.— De Bary *Ann. Sc. Nat.* (1863) XX, t. 13, f. 12. — Botrytis grisea. Berk. et Broo. *Ann. Nal. Hyst.* 528.

Hab. Nelle foglie *Veronicae* nelle praterie e bassi fondi fuori Porta Cavalleggiera (dintorni di Roma).

134. Onygena equina.

Pers. *Syn.* p. 203.— Fckl. *Simb. myc.* t. 6, f. 19.— Moug. *Exs.* n. 775. — Grev. t. 343. — Tul. *Ann. Sc. Nat.* 1844, t. 17, f. 12-17. — Corda VI, t. 10, f. 96. — Fries *Syst. myc.* III, p. 207. — *Engl. Fl.* V, p. 322. — Chev. t. 8, f. 8.— Lycoperdon equinum. Sow. t. 292. — Lycoperdon gossypium. Bolt.

t. 178. — Ray. *Syn.* (ed. 3) t. 1, f. 3. — Mich. t. 97, f. 8. — Pers. *Obs.* II, t. 6, f. 3, *a. b. c.* — *Fl. Dan.* t. 1309, f. 1. — Nees. f. 121.

Hab. Al disopra di zoccoli cavallini nelle tenute di Castel Porziano — nelle praterie fuori s. Paolo (dintorni di Roma).

135. Sphaerotheca pannosa.

Leveil. *Ann. Scien. Nat.* 1851, XV, p. 138, t. 6, f. 8. — Cooke *Micr. Fun.* t. XI, f. 217, 218. — Cook. *Exs.* n. 90. — *Engl. Fl.* V, p. 325. — Fckl. *Exs.* n. 725. — Erysiphe pannosa. Tul. *Carp.* 1, p. 208, t. 3. — Berk. *Exs.* n. 96. — Eurotium rosarum. Grev. t. 164, f. 2. — Baxt. *Exs.* n. 92. — Fries *Syst. myc.* III, p. 232.

Hab. In foliis *Rosae centifoliae* in Horto Botanico Romano.

136. Phyllactinia guttata.

Leveil. *Ann. Sc. Nat.* 1851, XV, p. 144, t. 7, f. 11. — Cooke *Micros. Fun.* t. XI, f. 219, 220. — Cook. *Exs.* n. 92. — Fckl. *Exs.* n. 702-710. — Erysiphe guttata. *Engl. Fl.* V, p. 327. — Baxt. *Exs.* n. 96. — Tul. *Carp.* I, p. 194, t. 1. — Berkl. *Exs.* n. 205.

Hab. Sulle foglie di nocciuolo a Frascati.

137. Uncinula adunca.

Leveil. *Ann. Scien. Nat* 1851, XV, p. 150, t. 7, f. 15. — Cook. *Micros. Fun.* t. XI, f. 221-224. — Fckl. *Exs.* n. 699, 700. — Erys. salicis. Tul. *Carp.* I, p. 198, t. 2, f. 1. — Erys. adunca. *Engl. Fl.* V, p. 327. — Grev. t. 296. — Baxt. *Exs.* n. 95.

Hab. Sulle foglie dei salici nei dintorni di Tivoli.

138. Uncinula bicornis.

Leveil. *Ann. Sc. Nat.* 1851, XV, p. 153, t. 7, f. 17. — Cooke *Microsc. Fung.* t. XI, f. 225-228. — Cook. *Exsic.* n. 93. — Fckl. *Exs.* n. 701. — Erysiphe auris. Tul. *Carp.* I, p. 197, t. 2, f. 2, 3. — Erysiphe bicornis. *Engl. Fl.* V, p. 327. — Ayres *Exs.* n. 78.

Hab. Su foglie nell'Orto Bot. Romano.

139. Erysiphe graminis.

Leveil. *Ann. Sc. Nat.* 1851, XV, p. 165, t. 10, f. 33. — Cooke *Micros. Fung.* t. XI, f. 235, 236. — Ayres *Exs.* n. 23. — Tulas. *Carp.* I, p. 212. — Fckl. *Exs.* n. 659.

Hab. In foliis *Tritici sativi* nei dintorni di Roma (vigne di Monte Mario).

140. Microsphaeria comata.

Calocladia comata. Leveil. *Ann. Sc. Nat.* 1851, XV, p. 157, t. 9, f. 23. — Cooke *Seem. Journ.* t. XIV, f. 5. — Cooke *Exs.* n. 94. — Cooke *Micros. Fung.* II, p. 105. — E. penicillata. — E. evonymi. Fries *Syst. myc.* III, p. 244.

Hab. In *Evonymo europaeo* in Horto Botanico Romano (Monte Gianicolo).

141. Morchella esculenta.

Fries *Syst. myc.* 2, p. 6. — Phallus esculentus. Linn. — Schaeff. t. 199, 298, 299 et 300. — Bull. *Champ.* p. 273, t. 218. — Bolt. t. 91. — Pers. *Syn.* p. 618. — Kromb. fasc. 3, p. 7, t. 16, f. 3. — Hartz. p. 91, t. 50. — Roques p. 88, t. 1, f. 4, 5. — Letell. p. 102, t. 104. — Cordier p. 221, pl. 9. — Pollin *Flor. Veron.* III, p. 585. — DC. *Flor. Fr.* 571. — Lenz. p. 128, t. 13, f. 36, 37. — Vittad. *Fung. mang.* t. 13. — Venturi *Stud. myc.* p. 38, t. 11, fig. 107-109. — Barla *Champ. de Nice* p. 90, t. 42, f. 17.

Hab. Villa Borghese presso Roma — nei boschi nei dintorni di Tivoli — di Subiaco — e di Castel Gandolfo.

142. Morchella conica.

Morchella esculenta var. conica. Fries *Syst. myc.* 2, p. 7. — Morchella continua. *Tratt. fung. Austr.* t. 6, fig. 11. — Morchella esculenta var. vulgaris. Alb. et Schwz. — *Flor. Dan.* t. 53. — Bot. 1, 258. — Kromb. fasc. 3, p. 9, t. 16, f. 7-10, tab. 17, fig. 17-19. — Cordier p. 222. — Barla t. 42, f. 8-10, p. 91.

Hab. Nelle boscaglie dei dintorni di Subiaco — nei boschi di Rocca di Papa.

143. Helotium vitigenum.

De Notaris *Rettif. al prof. dei Discomiceti* in *Comm. della Soc. Crittogam. ital.* vol. I, p. 377. — Helotium hyalopes. Fuckel. *Symb. myc.* — Zweit *Nachtr.* p. 63. — Helot. vitig. Pirotta. *I fung. paras. dei vitigni* p. 27. — Saccard. *Fung. ven. nov. vel critici* in *Att. Soc. Ven. Trent. Scien. nat.* vol. II, p. 137. — Sacc. *Micot. veneta* n. 959.

Hab. Sulle viti dei vigneti di Monte Mario — di Velletri.

144. Lecanidion Bagnisianum.

Sacc. spec. nov. Michelia. *Comm. myc. italicae* pag. 58, n. 205.

Cupulis gregariis superficialibus, thallo omnino carentibus, coriaceis, patellaribus $^1/_4$ mill. diam. atenimis, margine paululum elevato obtusiusculo; ascis cilindraceo clavatis, breve crassiuscule stipitatis, 70-12, apici rotundatis, paraphysibus sursum coalescentibus fuscisque obvallatis, octosporis; sporidiis distichis, oblongo fusoideis, 14 mm. long., 4 $^1/_2$ larg. utrinque obtusiusculis, rectis, initio 4-nucleatis, dein 3-septatis non constrictis hyalinis.

Hab. In ligno denudato *Betulae pendulae* — Romae.

Obs. Opegrapha Lecanactis mass. ut jam monuerat cl. Rehm in Sacc. *Mycoth. ven.* n. 263 secundum quoque specimina a cl. Baglietto lecta et a cl. Anzio ad Saccardum missa perfecta convenit cum Lecanidio atrato (Hedw.) Rabh.

145. Hypoderma rubi.

Pirotta *Fung. paras. dei vitig.* p. 17. — Hysterium rubi. Perso. observ. I, p. 84. — Pers. *Synops. meth. fung.* q. 100. — Fries *System. myc.* II, p. 587. — Tulasne in *Ann. Sc. Natur.* 3ª ser. t. XX, p. 155. — Hypoderma virgultorum. De Cand. *Fl. Fran.* V, p. 165, pr. p. — Fuckel. *Symb. myc.* p. 258. — Schizoderma rubi. Link. *Handb. der Gewäckse* t. III, p. 346. — Hyst. virgultorum. Cooke. *Handb. of. brit. fung.* p. 761. — Letell. *Figur. des Champ.* tav. 650. — Corda *Icon. Fung.* V, t. 9, fig. 56. — Greville *Scotish. Cryp. Flora* I, tav. 24. — De Notaris in *Att.* dell' 8ª riun. degli scienz. ital. in Gen. f. 24. — Klotzch *Herb. viv. mic.* ed. I, n. 559. — Libert. *Cryp. exs. arduennae* n. 177. — Moug. *Stirp. crypt. vog.* n. 564. — Desmaz. *Plan. exs. cryp. de France* II ed., n. 172-178. — Schmidt et Kunz *Deutschl. Schwämme* n. 80. — Rabh. *Herb. viv. myc.* ed. II, n. 443. — Fuckel *Fung. rhen. exsic.* n. 757.

Hab. Ad ramos emortuos *Rubi fruticosi* in Horto Botanico Romano — Monte Gianicolo.

146. Tuber cibarium.

Barla p. 110, tav. 44, fig. 19, 20. — Fries *Syst. myc.* 2, p. 290. — Tuber brumale pulpa obscura odora.— Michel. *Gener. plant.* p. 221, t. 102. — Lycoperdon tuber. Linn. — Lycoperdon gulosorom Scop. Pers. *Syn.* p. 126 et *Champ. com.* p. 262. — Bull. *Champ.* p. 74. — Balb. et Nocca *Fl. Ticin.* II, p. 351. — Pollin *Flor. Veron.* III, p. 747. — Chevall. *Fl. des envir. de Paris* I, p. 364. — Tuber cibarium. Sibth. *Fl. Oxon.* p. 398. — Cordier p. 232. — Roques *Hist. des Champ.* p. 378, t. 24, f. 1-10 — Kromb. fasc. 8, p. 12, t. 59, fig. 1-11. — Tuber brumale. Vittad. *Monog. Tubera* p. 37, t. 1, f. VI. — Tulasne fungi hypogaei p. 125, t. VIII, f. 2 et tab. XVII, f. 3.

Hab. Nei dintorni di Nepi — sulle colline di Ronciglione.

147. Tuber magnatum.

Barla *Champ. de Nice* fig. 21-24 in tav. 44. — Tuber griseum. Fries *Syst. myc.* 2, p. 292. — Pico *Meleth.* p. 97. — Truffe grise. De Borch. *Lettres sur les truffes du Piémont.* p. 5, 6, 7, p. 1, 2. — Pers. *Syn.* p. 127. — *Champ. com.* p. 267. — Truffe blonde ou à l'ail. Paul. *Champ.* 2, p. 434, t. 198, fig. 12.— De Cand. *Fl. Franc.* 2, p. 279. — Balbis et Nocca *Flor. Ticin.* II, p. 351. — Pollin *Flor. Veron.* III, p. 748. — Vittad. *Monog. Tuberae* p. 42, t. 1, f. 4 et tab. 2, f. 9. — Tulasne p. 150, tav. 6, fig. 3 et tav. 17, fig. 6. — Corda *Icon. Fung.* VI, t. 29, f. 136. — Kromb. fasc. 8, p. 16, t. 59, fig. 12-18.

Hab. Nei pressi di Baccano — nei dintorni di Vicovaro.

148 Nectria viticola

Berkel. et Curtis in Berk. *Notic. of North. Amer. fungi* in Grev. vol. IV, p. 45.—

Hab. In cortice *Vitis viniferae* prope Tivoli.

149. Nectria sanguinea.

De Notaris *Sferiacei italici centur.* I, p. 12, n. 8, tav. 8, fig. 1-6. — Fries *Summa Veget. Scandin.* 388.— Cesat. et De Not. *Schem. sferiac.* 22. — Sphaeria sanguinea Sibth. — Fries *Syst. myc.* II, 453. — Nees *Syst.* fig. 360 bene.— Grevil. *Scott. Cryptog. pl.* tab. 175, fig. 1?

Hab. In ligno putrescente *Mori albae* in villis prope Romam.

150. Nectria sinopica.

De Notaris *Sferiacei italici centur.* I, p. 11, n. 6, tav. 6, fig. 1-6. — Fries *Summa Veget. Scandin.* 388. — *Erbar. Crittogam. ital.* n. 493. — Cesat. et De Notaris *Schem. sferiac.* 20. — Sphaeria sinopica. Fries *El.* II, 82. — Desmaz. *Cryptog. de France* n. 759. — De Ntrs. *Osservaz.* l. c.

Hab. In ligno *Hederae helicis* in Horto Bot. Romano.

151. Xylaria polymorpha.

Grevil. t. 237. — Corda *Icon.* V, f. 52. — Desmaz. *Exs.* n. 376. — Berk. *Outl. of Brit. fun.* p. 384. — Tulasne *Carp.* II, p. 7, t. XIX, fig. 15-21. — Sphaeria polymorpha. Fries *Syst. myc.* II, p. 326. — *Obs.* II, t. 2, fig. 2, 4, 5. — Nees fig. 307. — Reb. t. 1, fig. 1. — Weig. *Obs.* t. 3, fig. 6. — Mich. t. 54, f. 4. — Schm. *Exs.* n. 28. — Fries *Exs.* n. 221.— *Engl. Flor.* V, p. 234. — Curr. *Linn. Transac.* XXV, t. 45, f. 12. — Sphaeria digitata. *Fl. Dan.* t. 900. — Sower. t. 69. — Fuckel *Exs.* n. 1064, 2267. — Bull. t. 440, f. 1.

Hab. Sul melo cotogno in un giardino a Monte Gianicolo.

152. Xylaria hypoxylon.

Grevil. *Fl. Ed.* p. 355. — Berkl. *Outl.* p. 384, t. 24, f. 1. — Tulasne *Carpol.* II, p. 11, t. 1, fig. 1-14. — Sphaeria hypoxylon. Fries *System. myc.* II, p. 327.— Blackst. t. 1. — Pet. Gaz. t. 62, f. 2. — Mich. t. 55, f. 1. — Holms p. 71. — With. fig. Bull. t. 180. — Batsch f. 160. — Hoffm. *V. C.* t. 3, fig. 1. — Sow. t. 55.— Fries *Exs.* n. 181.— *Engl. Fl.* p. 235.— Bolt. t. 129.— Moug. *Exs.* n. 272.— Baxt. *Exs.* n. 74. — Dicks t. 12, f. 7. — Curr. *Linn. Trans.* XXII, t. 45, fig. 17.— Fckl. *Exs.* n. 1065. — Sci. *Goss.* 1871, p. 77, fig. 45, 47.

Hab. Sui rami di faggio nell'Orto Bot. Romano a Monte Gianicolo.

153. Hypoxylon (Epixylon) Bagnisii. (Spec. nov.).

Saccardo *Fung. veneti* ser. VI, p. 24. (Michelia). Acervulis subglobosis, superficialibus, basi coarctatis, superne complanato-convexis, minutis, 2 $^{1}/_{2}$-2 $^{3}/_{4}$ mill. diam., atrorufis, intus nigrescentibus, stromate parco, ideoque a peritheciis in quoque acervulo paucis (7-10) majusculis, diam. $^{1}/_{2}$-$^{3}/_{4}$ mill., verticaliter ovoideis, vertice conoideis papillatisque; ascis cylindricis fasciculatis, 90 - 4 $^{1}/_{2}$ p. s. 70 lga. stipitatis, paraphysatis 8 sporis, sporidiis monostichis, oblongo-coffeiformibus, 9-10 e 4, 2-guttatis, fuligineis.

Hab. In ramis fagineis a s. Onofrio prope Romam, socia Quaternaria Pertoonii Tul.

Obs. Ab. H. Botry Wke peritheciis papillatis, ab H. cohaerente (Pers.). Fr., acervulis minoribus, atrorufis, basi coarctatis, sporidiis minoribus etc. differt.

154. Hypoxylon multiforme.

Fries *Sum. Veget. Scand.* p. 384. — Fckl. *Exs.* n. 1052. — Grevil. t. 114.— Berkel. *Outlines* p. 386, t. 24, f. 4. — Hypoxylon granulosum. Bull. t. 487, f. 2. — Sphaeria granulosa. Sow. t. 355. — Pers. *Arm. Bot.* t. 2, f. 1. — Sphaeria multiformis. Fries *Syst. myc.* II, p. 334. — Fr. *Obs.* I, t. 1, f. 2-3.— Hedw. *Obs.* t. 8, f. A — Pers. *Ic. pict.* t. 3, f. 1-3. — *Engl. Fl.* V, p. 237. — Curr. *Linn. Trans.* XXV, t. 45, f. 28.

Hab. In legno putrido essicato a Monte Mario.

155. Hypoxylon Michelianum.

De Notaris *Sferiac. ital. I centur.* pag. 16, n. 13. — Cesat. et De Notaris in *Erbar. Crittog. ital.* n. 783. — *Schem. sferiac.* 25. — Lichen agaricus crustaceus etc. — Michel. *Nov. plan. gen.* 104, tab. 55, fig. 1.

Hab. Ad truncos *Lauri nobilis* ad villam Borghese.

156. Xylaria Carpophila.

Fries *Syst. Vegetab. Scandin.* p. 382. — Berk. *Outl.* p. 384. — Tul. *Carpol.* II, p. 14, t. 1, f. 15, 20. — Sphaeria carpophila. Fries *Syst. myc.* II, p. 328.— Pers. *Obs.* t. 1, f. 5. — Fries *Exs.* n. 302. — Schm. *Exs.* n. 176. — *Engl. Fl.* V, p. 235. — *Flor. Dan.* t. 1858, f. 1. — Curr. *Linn. Trans.* XXII, t. 45, f. 23. — Fckl. *Exs.* n. 1066. — Cooke *Exs.* n. 364.

Hab. Su legno essicato a Monte Mario.

157. Melogramma spiniferum.

De Notaris *Sferiacei ital. I centur.* pag. 53, n. 51. — De Notaris *Schem. sferi* l. c. — Sphaeria spinifera. Wallr. *Flor. crypt.* II, 746. — Bereng. *Pl. sin.*—

Sphaeria podoides. Pers. *Syn.* 22. — Curr. *Comp. sphaer.* n. 85, tab. XLVI, fig. 85. — Sphaeria aspera. Cum. *Spec. fungor.* 247, n. 105. — Sphaeria coronata. Cum. l. c. n. 104. — Melogramma asperum. Ces. et De Notaris in *Erb. critt. ital.* n. 394.

Hab. In ramis fagineis in Horto Bot. Romano.

158. Diatrype quercina.

Tul. *Carp.* II, p. 98, t. XII, fig. 1-15. — Rabh. *Exs.* n. 319 e 635. — Diatrypella quercina. Cooke *Exs.* n. 242. — *sferiac. ital.* p. 28. — Sphaeria quercina. Pers. *Syn.* p. 24, t. 1, fig. 67. — Desm. *Exs.* n. 1725. — Stromatosphaeria quercina. Grevil. *Fl. Ed.* p. 358. — Microstoma enteroleucum. Fckl. *Exs.* n. 1037. — Diatrypella Rouselii. De Not. *Sph. ital.* t. 32.

Hab. Sulle quercie nei boschi di Monte Mario ed Acqua Traversa.

159. Diatrype angulata.

Valsa angulata. Fries *S. Veget. Scan.* p. 411. — Berkel et Broom. *Ann. Nat. Hist.* n. 848. — Sphaeria angulata. Fries *Syst. myc.* II, p. 390. — Fries *Exs.* n. 72. — *Engl. Fl.* V, p. 248. — Diatrypella angulata. De Not. *Schem.* p. 28. — Rabh. *Fung. eur.* n. 1022. — Fckl. *Exs.* n. 2058.

Hab. Su rami secchi nei boschi di Monte Mario.

160. Diatrype disciformis.

Fries *Sum. Veget. Scand.* p. 385. — Tul. *Carp.* II, p. 102. — Sphaeria disciformis. Hoffm. *V. C. I.* t. 4, *f.* 1. — Moug. *Exs.* n. 180. — Fries *Syst. myc.* II, p. 353. — Cook. *Exs.* n. 389. — Fries *Exs.* n. 71. — *Engl. Fl.* V, p. 241. — Curr. *Linn. Trans.* XXII, t. 46, fig. 64. — Stromatosphaeria disciformis. Grev. t. 314. — Sphaeria depressa. Sow. tav. 216.

Hab. Su rami secchi nei boschi di Monte Cavo.

161. Diatrype stigma.

Fries *Summ. Veget. Scand.* n. 385. — *Erbar. crittog. ital.* n. 591. — Cesat. et De Notaris *Schem. sferiac.* 20. — Sphaeria stigma Hoffm. *Veget. cryptog.* 1-7, tav. II, fig. 2. — Fries *Syst. myc.* II, 350. — Schrom. *Succ.* n. 46. — Nees *System.* fig. 319. — Hypoxylon operculatum. Bull. *Champ.* 177, tab. 468, f. 2. — Stromatosphaeria stigma. Grevil. *Scott. crypt. fl.* tab. 223, fig. 2. — Lichen agaricus bullatus etc. — Michel. *Nov. pl. gen.* tab. 55, f. 2.

Hab. Su legno secco nelle boscaglie a Villa Borghese.

162. Valsa prunastri.

Fries *Summ. Veget. Scand.* p. 411. — Fck. *Exs.* n. 596. — Sphaeria prunastri Pers. *Syn.* p. 37. — Moug. *Exs.* n. 378. — Fries *Syst. myc.* II, p. 380. — Fries *Exs.* n. 226. — *Engl. Fl.* V, p. 246. — Curr. *Linn. Transac.* XXII, p. 275. — Berk. *Exs.* n. 29. — Cook. *Exs.* n. 237. — Cook. *Brit. fung.* n. 2460, p. 821.

Hab. Sul *Prunus* nelle vigne a Monte Mario.

163. Valsa nivea.

Fries *Summ. Vegetab. Scand.* p. 411. — Tul. *Carp.* II, p. 128, t. 22, f. 12-21. — De Notaris *Sfer. ital.* I, p. 36. — Fckl. *Exs.* n. 602. — Sphaeria nivea Hoffm. *V. C. I.* p. 26, t. 6, f. 3. — Moug. *Exs.* n. 278. — *Engl. Fl.* V, p. 248. — Fries

Syst. myc. II, p. 386. — Fries *Exs.* n. 16. — Funck. *Exs.* n. 281. — Sphaeria marginata. Sow. t. 372, fig. 7.

Hab. Sui rami di pioppo in una villa a Subiaco.

164. Valsa Kunzei.

Sphaeria Kunzei. Fr. *Kze. M. H.* II, p. 45. — Berkel. et Broom. *Ann. Nat. Hist.* n. 601. — Curr. *Linn. Transac.* XXII, t. 48, f. 133. — Fckl. *Exs.* n. 1728.

Hab. Sul larice in Orto Botanico Romano.

165. Valsa microstoma.

Fries *Summ. Veget. Scand.* p. 411. — Curr. *Linn. Transac.* XXII, t. 47, f. 130. — Sphaeria microstoma. Fries *Exs.* n. 185. — Berk. *Mag. Zool. et Bot.* n. 20. — Fries *System. mycol.* II, p. 388. — Nees. f. 331. — Fckl. *Exs.* n. 1972.

Hab. Su legno essicato nei boschi dei dintorni di Tivoli — a Macchia Mattei.

166. Valsa controversa.

Fries *Summ. Veget. Scand.* p. 411. — Sphaeria controversa. Desm. *Ann. Scien. Nat.* ser. II, vol. XVII, p. 102. — Desm. *Exs.* n. 1255. — Berkel. et Broom. *Ann. Nat. Hyst.* n. 602.

Hab. Su rami essicati di nespola del Giappone a Villa Pamfili (dintorni di Roma).

167. Valsa ambiens.

Fries *Summ. Veget. Scand.* p. 412. — Tul. *Carp.* II, p. 176. — Fckl. *Exs.* n. 616. — Cook. *Exs.* n. 256. — Curr. *Linn. Trans.* XXII, t. 48, f. 138. — Sphaeria ambiens. Fries *Syst. myc.* II, p. 403. — Fries *Exs.* n. 8. — Moug. *Exs.* n. 872. — *Flor. Dan.* t. 2039, f. 1. — *Engl. Fl.* V, p. 250. — Berk. *Exs.* n. 80. — Valsa tetraspora. Curr *Linn. Transac.* XXII, t. 48, f. 147. — Fckl. *Exs.* n. 2141.

Hab. Su steli di rosacee in Ort. Botanico Romano.

168. Valsa suffusa.

Fckl. *Exs.* n. 1997. — Cooke *Exs.* n. 247. — Tul. *Carp.* II. p. 145. — Sphaeria suffusa. Fries *Syst. myc.* II, III, p. 271. — *Linn. Transac.* XXII, t. 48, fig. 144. — Sphaeria Rabhenorstii. Berk. et Broom. *Ann. Nat. Hyst.* n. 631. — Valsa commutata. Fck. *Exs.* n. 620.

Hab. Su rami essicati nei dintorni di Monte Compatri.

169. Valsa turgida.

Fries *Sum. Veget. Scand.* p. 412. — Curr. *Linn. Transac.* XXII, t. 48, f. 139. — Sphaeria turgida. Fries *System. myc.* II, p. 400. — Fries *Exs.* n. 262. — *Engl. Fl.* V, p. 250. — Wuestneia sphinctrina. Fckl. *exs.* n. 591. — Anthostoma turgidum. Wke *Pyr. Germ.* I, p. 121.

Hab. Sui rami di *Laburnus vulgaris* in una villa a Frascati.

170. Valsa profusa.

Fries *Summ. Veget. Scand.* p. 411. — Sphaeria profusa. Fries *Syst. myc.* II, p. 392. — Fries *Exs.* n. 11. — Moug. *Exs.* n. 871. — *Engl. Fl.* V, p. 249. — Curr. *Linn. Transac.* XXII, t. 47, f. 128. — Aglaospora profusa. Tul. *Carp.* II, p. 159. — Fckl. *Exs.* n. 583.

Hab. Sui rami di *Corylus avellana* nell'Orto Bot. Romano.

171. Valsa ludibunda.

Saccardo *Mycotheca Veneta* n. 938, 939 e 940 (Cytispora ejus). — Valsa

referciens. Sacc. *Myc. Ven.* 128, p. p. et *Myc. Ven.* n. 196-200-734 (formae variae). — Valsa cerviculata. *Erbar. crittog. ital.* ser. II, 641. — Valsa lata. Sacc. *Myc. Venet.* 128, p. p.

Hab. In ramis corticalis, in ligno denudato arborum a Villa Pamfili (prope Romam).

172. Cucurbitaria berberidis.

Grevil t. 84. — Tul. *Carp.* II, p. 219. — Sphaeria berberidis. Fries *Syst. myc.* II, p. 415. — Fries *Exs.* n. 35. — Moug. *Exs.* n. 874. — Fries *Obs.* 1, t. 4, f. 3. — *Engl. Fl.* V, p. 254. — Curr. *Linn. Trans.* XXII, t. 49, f. 177.

Hab. Sui rami di *Berberis vulgaris* nell'Orto Bot. Rom.

173. Cucurbitaria macrospora.

Tul. *Carpol.* II, p. 221, t. 26, fig. 6-14.— Fckl. *Exs.* n. 2047. — Melogramma oligosporum. Berkel. et Broo. *Ann. Nat. Hyst.* n. 895, t. XI, f. 38. — Sphaeria macrospora. Desm. *Ann. Sc. Nat.* 1848, p. 350. — Desm. *Exs.* n. 1756. — Curr. *Micr. Journ.* (1859). — Melanconis macrospora. Tul. *Ann. Sc. Nat.* 1, IX, f. 19, IV, t. 5, p. 110.

Hab. Sui rami di *Pyrus communis* nelle vigne dei dintorni di Marino.

174. Cucurbitaria populina.

Fries *Syst. Veget. Scand.* p. 390. — Sphaeria populina. Pers. *Obs.* II, t. 5, f. 10-11. — Fries *Syst. myc.* II, 413. — Fckl. *Exs.* n. 966. — Berk. *Mag. Zool. et Bot.* n. 96, vol. II, t. 7, *a. c.*— Otthia populina Fckl. *Symb. myc.* p. 170.

Hab. Sui rami del pioppo nella villa Pamfili (dintorni di Roma).

175. Cucurbitaria Dianthi.

De Notaris *Sferiac. ital. centur.* I pag. 61, n. 59. — Cesat. et De Notaris in *Erb. crittog. ital.* n. 647. — *Schem. sferiac.* 40. — Sphaeria Dianthi. Cesati in Rabehn. *Herbar. mycol.* I, n. 1734 et in *Bot. Zeit.* 1853, XI, 536.

Hab. In *Diantho proliferante* nei dintorni di Monte Rotondo e di Mentana.

176. Cucurbitaria Pricesiana (Bgns. nov. spec.).

Pyreniis magnis, numerosis, ex epidermide erumpentibus, non contiguis, ovoideis, in extremis depressis, praesertim in vertice, in dimidio parve constrictis, atris, ad verticem poro impressis; stromate subtili. Nucleo lutescente. Paraphysibus filiformibus laeve clavatis, hyalinis, non articulatis. Ascis 8-sporis, oblungis, hyalinis, cylindraceis. Sphoridiis oblongatissimis ocraceo-fulvis, 6-8 septatis.

Hab. Sul gambo del *Solanum patulum* nell'Orto Botanico Romano.

177. Massaria fimeti.

Sphaeria fimeti. Pers. *Syn.* p. 64. — Fries. *Syst. myc.* II, p. 373. — Fries *Exs.* n. 269. — *Engl. Fl.* V, p. 216. — Hypocopra fimeti. Fckl. *Sym. myc.* p. 240. — Fckl. *Exs.* n. 1001. — Sphaeria equina. Fckl. *Exs.* n. 1802.

Hab. Sullo sterco cavallino nelle praterie a s. Paolo fuori delle mura.

178. Lophiostoma caulium.

De Notaris *Sferiac. ital. centur.* I, p. 68, n. 70. — Cesati et De Notaris *Schem. sferiac.* 45. — Sphaeria caulium. Fries *System. myc.* II, 509.— Sclerom. *succ.* n. 465. — De Notaris *Microm.* l. c.

Hab. In stelis emortuis cyperacearum prope Palo et Ostia.

179. Amphisphaeria monstruosa (Bgns. spec. nov.).

Pyreniis minutis superficialibus, gregariis, non contiguis, nigrescentibus, conoideis, vertice in collum crassum oblungatum apice obtusnm; ostiolo minuto, superficie externa pyreniorum tuberculata. Nucleo ocraceo. Ascis ovoideis oblungatis 8-sporis. Paraphysibus crassis, articulatis, hyalinis, sporidiis didymis, fusco ocraceis; junioribus translucidis lutescentibus non bipartitis.

Hab. Sui rami di *Philyrea media* nella Villa Pamfili (nei dintorni di Roma).

180. Amphisphaeria papillata.

De Notaris *Sferiac. ital. centur.* I, pag. 68, n. 71. — Sphaeria papillata. Schumach. *Saell.* II, 161. — Fries *Syst. mycol.* II, 461.

Hab. In ligno putrido in sylvis Montis Marii.

181. Sphaeria culmifraga.

Fries *Syst. myc.* II, p. 510. — Fries *Exs.* n. 373. — *Engl. Fl.* V, p. 275. — Berk. et Broom. *Ann. Nat. Hist.* n. 614. — Fckl. *Exs.* n. 2245. — Sphaeria longa. Sow. t. 393, f. 4. — Pleospora culmifraga. Fckl. *Sym. myc.* p. 137, t. 3, f. 21.

Hab Sui steli di graminacee a Monte Mario.

182. Sphaeria xylostei.

Frees *Syst. myc.* II, p. 487. — Fries *Exs.* n. 189. — *Engl. Fl.* V, p. 270. — Curr. *Linn. Trans.* XXII, t. 58, f. 84. — Sphaeria semimmersa. Grev. *Flor. Ed.* p. 361. — Didymosphaeria xylostei. Fckl. *Sym. myc.* p. 141. — Fckl. *Exs.* n. 914. — Amphisphaeria xylostei. De Notaris *Sfer. ital. cent.* I, n. 74.

Hab. In ligno disseccato ad villam Pamfili (prope Romam).

183. Sphaeria inquilina.

Fries *El.* II, p. 100. — Fries. *Exs.* n. 402. — *Engl. Fl.* V, p. 276. — Curr. *Linn. Trans.* XXII, t. 58, f. 92.

Hab. Su steli di umbellifere in Valle d'Inferno (presso Roma).

184. Sphaeria millepunctata.

Grev. t. 201. — Sphaeria corticis. Sow. t. 372, f. 5. — Fries *Syst. myc.* II. p. 481. — Curr. *Linn. Trans.* XXII, t. 59, f. 108. — Fckl. *Exs.* n. 908. — Berk. *Exs.* n. 84. — Sphaeria populina. Pers. *Ic. Pict.* t. 21, f. 5, 6. — Cryptosphaeria millepunctata. Fckl. *Sym. myc.* p. 212.

Hab. Sui rami di un frassino nell'Orto Bot. Romano.

185. Sphaeria salicella.

Fries *Syst. myc.* II, p. 377. — Fries *Exs.* n. 188. — *Engl. Fl.* V, p. 278. — Fckl. *Exs.* n. 800. — Diaporthe salicis. Wke. — Fckl. *Exs.* n. 1987. — Cryptospora salicella. Fckl. *Sym. myc.* p. 193. — Sphaeria salicina. Curr. *Linn. Trans.* XXII, t. 48, f. 149.

Hab. Sui rami di un salice a Villa Pamfili presso Roma.

186. Sphaeria obducens.

Frie *Exs.* n. 119. — Berk. *Exs.* n. 177. — *Mag. Zool. et Bot.* n. 100. — Fries *Syst.myc.* II, p. 456. — Tul. *Carp.* II, p. 245, t. 28, f. 4-13. — Fckl. *Exs.* n. 2024.— Cucurbitaria miskibutris. De Notaris *Act. Tur.* (1853), p. 126. — Sphaeria platenta. Curr. *Linn. Trans.* XXII, t. 57, f. 35. — Trichospora obducens. Fckl. *Sym. myc.* p. 161.

Hab. Su legno secco nei boschi di Acqua Traversa e di Tivoli.

187. Sphaeria coprophila.

Fries *Syst. myc.* II, p. 342. — Berk. et Broom. *Ann. Nat. Hist.* n. 596. — Hypoxilon coprofilum. Fries *Summ. Veget. Scand.* p. 384. — Fckl. *Exs.* n. 1057. — Sphaeria incana. Steph. *Ann. Nat. Hist.* ser. I, vol. IV, p. 252.— Sordaria coprophila. De Notaris *Sfer. ital.* n. 20. — Fckl. *Sym. myc.* p. 244.— Rabh. *Exs.* n. 257. — Ces. Hedw. t. XIV, B, f, 2-5.

Hab. Su sterco bovino nelle campagne di Mentana.

188. Sphaeria pertusa.

Fries *Syst. myc.* II, p. 464. — Fries *Exs.* n. 389. — *Engl. Fl.* V, p. 266. — Fckl. *Exs.* n. 931. — Berk. et Br. *Ann. Nat. Hist.* n. 878, t. 10, f. 25. — Curr. *Linn. Trans.* XXII, t. 58, f. 53. — Trematosphaeria pertusa. Fckl. *Sym. myc.* p. 162.

Hab. Su tronchi di quercia disseccati a Monte Mario.

189. Sphaeria arundinacea.

Sph. Godini. Desm. *Exs.* n. 439. — *Ann. Sc. Nat.* 1846, p. 49. — Curr. *Linn. Trans.* XXII, t. 49, f. 202. — Sphaer. arundinacea. Sow. t. 336. — Berk. et Br. *Ann. Nat. Hist.* n. 603. — Curr. *Linn. Trans.* XXII, t. 49, f. 200.— Berk. *Exs.* n. 82. — *Engl Fl.* V, p. 256. — Fries *Syst. myc.* II, p, 439. — Fckl. *Exs.* n. 907. — Pleospora arundinacea. Fckl. *Sym. myc.* p. 137, t. III, f. 28.

Hab. Sull' *Arundo donax* a s. Onofrio presso Roma.

190. Sphaeria aquila.

Cook. *Exs.* n. 270. — Fries *Syst. myc.* II, p. 442. — Berk. *Ann. Nat. Hist.* n. 180. — Curr. *Linn. Trans.* XXII, t. 57, f. 4. — Moug. *Exs.* n. 965. — Schm. *Exs.* n. 58. — Tode f. 70. — Sphaeria byssiseda. *Engl. Fl.* V, p. 260. — Rosellinia aquila. Tul. *Carp.* II, p. 250, t. 33, f. 1-6.— Fckl. *Exs.* n. 963.— De Notaris *Sfer. ital.* t. V, f. 18.

Hab. Su rami secchi in Villa Pamfili presso Roma.

191. Sphaeria pilosa.

Pers. *Ic. et Descr.* t. 10, fig. 9-10. — Fries *Syst. myc.* II, p. 450. — *Engl. Fl.* V, p. 262. — Curr. *Linn. Trans.* XXII, t. 57, f. 21. — Berk. et Br. *Ann. Nat. Hist.* n. 1096. — Fckl. *Exs.* n. 946.

Hab. Su ramoscelli appassiti a Villa Borghese.

192. Sphaeria spermoides.

Hoffm. *V. C.* t. 3. — Moug. *Exs.* n. 486. — Fries *Syst. myc.* II, p. 457. — Curr. *Linn. Trans.* XXII, t. 57, fig. 36. — *Engl. Fl.* V, p. 265.— Fries *Exs.* n. 237.— Grev. t. 6. — Light. t. 31. — Sphaeria bombardica. Bolt. t. 122. — Sow. t. 372, f. 4. — Leptospora spermoides. Fckl. *Sym. myc.* p. 143. — Fckl. *Exs.* n. 939.— Leptospora pseudo-spermoides. Awd. — Fckl. *Exs.* n. 2175.

Hab. Su ceppi disseccati di quercia a Monte Mario ed a Valle d'Inferno.

193. Sphaeria moriformis.

Tode f. 90. — Moug. *Exs.* n. 382. — Fries *Syst. myc.* II, p. 458. — Fries *Exs.* n. 125. — *Engl. Fl.* V, p. 265.— Curr. *Linn. Trans.* XXII, t. 57, f. 30.— Sphaeria claviformis. Sow. t. 337. — Sphaeria rugosa. Grev. t. 39. — Sphaeria

rubiformis. Sow. t. 373, f. 2. — Bertia moriformis. Fckl. *Sym. mycol.* p. 164. — Fckl. *Exs.* n. 999.

Hab. Su rami secchi nei boschi di Subiaco.

194. Sphaeria nummularis (Bgns. spec. nov.).

Pyreniis exiguis ex epidermide erumpentibus, sparsis, non contiguis, fuscis, rotundatis, depressisque, nummularibus, parti inferiori pirenii applanato-concava, superiori laeviter convessa; ostiolo amplo. Nucleo albido crasso. Ascis ovoideo-clavatis, oblungatisque. Sporidiis didymis hyalinis translucidis. Paraphysibus longis filiformibus hyalinis non articulatis.

Hab. Sugli steli di *Staphillea pinnata* in un giardino dei dintorni di Roma.

195. Hypospila quercina.

Fries *Summ. Veget. Scand.* p. 421.— Cooke *Exs.* n. 177.— Fckl. *Exs.* n. 417.— Cook. *L. F.* n. 90. — Curr. *Linn. Tran.* XXII, t, 49, f. 204. — Sp. bifrons. Fries *Syst. myc.* II, p. 438. — *Engl. Fl.* V, p. 258. — S. circum-voluta. Sow. t. 373, f. 4. — Xyloma DC. *Mem. Mus.* II, t. 3, f. 11. — Moug. *Exs.* n. 480. — Cook. *Brit. Fun. spec.* n. 2799.

Hab. Su foglie di *Quercus suber* nei boschi di Monte Mario.

196. Isothea pustula.

Berk. *Outl.* p. 392. — Phoma pustula. Fries *Syst. myc.* II, p. 547. — Fries *Exs.* n. 205. — Berk. *Exs.* n. 40. — *Engl. Fl.* V, p. 284. — Sp. pustula. Pers. *Ann.* 11, t. 2, f. 6, 7. — Pers. *Syn.* p. 91. — Fckl. *Sym. myc.* t. VI, f. 33.— Cook. *Britis. Fung.* n. 2802.

Hab. Su foglie secche di quercia nei boschi di Monte Mario.

197. Stigmatea poligonorum.

Fries *Summ. Veget. Scand.* p. 421. — Dothidea poligoni. Fries *Syst. myc.* II, p. 564.

Hab. Su foglie di *Polygonum fagopyrum* ad Acqua Traversa — e nei dintorni di Marino.

198. Stigmatea chaetomium.

Fries *Summ. Veget. Scand.* p. 422. — Fckl. *Exs.* n. 424. — Dothidea chaetomium. Fries *Syst. myc.* II, p. 563. — Berk. *Ann. Nat. Hyst.* n. 200. — Cook. *Brit. Fun. sp.* n. 2798.

Hab. Sul *Rubus fruticosus* negli orti a s. Onofrio (dintorni di Roma).

199. Stigmatea geranii.

Tul. *Carp.* II, p. 290. — Fckl. *Exs.* n. 420. — Dothidea geranii. Fries *Syst. myc.* p. 558. — *Engl. Fl.* V, p. 287. — Xyloma geranii. Grev. *Fl. Ed.* p. 368. — Cook. *Brit. Fung. sp.* n. 2792.

Hab. Sul *Geranium molle* a Villa Madama (nei prati fuori porta Cavalleggiera).

200. Capnodium Footii.

Berk. et Desm. *Journ. Hort. Soc.* IV, p. 254, f. 10. — Fumago fagi. Pers. *M. E.* I, p. 10. — Microxiphium Footii. Hard. *M. S. S.*

Hab. Sulla *Mercurialis annua* negli orti a s. Pietro in Montorio (presso Roma).

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

TAVOLA III. (1ª)

1. *a.* Ramo di *Faggio* invaso dall' Hypoxylon (Epixylon) Bagnisii (grandezza naturale).
   b. Gruppo di acervuli di Hyp. Bagnisii. Ingrand. $^{80}/_{1}$
   c. Lo stesso tagliato verticalmente compresa la base che è scoperta.
   d. Aschi, parafisi e spore d' Hyp. Bagnisii. Ingrand. $^{350}/_{1}$.
   e. Spore d' Hyp. Bagnisii. Ingrand. $^{600}/_{1}$ circa.

2. *a.* Ramo di *Betula pendula* invaso dal Lecanidion Bagnisianum (grandezza naturale).
   b. Acervulo veduto di piatto. Ingrand. $^{80}/_{1}$ circa.
   c. Lo stesso veduto di profilo idem.
   d. Aschi, spore e parafisi del Lecanidion Bagnisianum. Ingrand. $^{350}/_{1}$.
   e. Spore di Lecan. Bagnisianum. Ingrand. $^{600}/_{1}$ circa (A diverse fasi di sviluppo).

3. *a.* Ramo di *quercus pseudosuber* colle foglie invase dallo Sporidesmium tripartitum.
   b. Sporides tripartitum all' ingrand. di $^{350}/_{1}$ circa.

TAVOLA IV. (2ª)

1. *a.* *Solanum patulum* invaso dalla Cucurbitaria Pricesiana (grandezza naturale).
   b. Pirenii di Cucurb. Pricesiana. Ingrand. $^{100}/_{1}$ circa.
   c. Pirenio tagliato verticalmente. Ingrand. $^{100}/_{1}$ circa.
   d. Aschi, spore e parafisi di Cucurb. Pricesiana. Ingrand. $^{350}/_{1}$ circa.
   e. Spore di Cucurb. Pricesiana. Ingrand. $^{600}/_{1}$ circa.

2. *a.* Ramo di *Philyrea media* invaso dall' Amphisphaeria monstruosa (ingrand. naturale).
   b. Pirenii di Amph. monstruosa. Ingrand. $^{80}/_{1}$ circa.
   c. Gli stessi tagliati verticalmente in due punti diversi. Ingrand. $^{80}/_{1}$ circa.
   d. Aschi, spore, e parafisi di Amphis. monstruosa. Ingrand. $^{350}/_{1}$ circa.
   e. Spora di Amph. monstruosa. Ingrand. $^{600}/_{1}$ circa.

3. *a.* Ramo di *Staphillea pinnata* invaso dalla Sphaeria nummularis (grandezza naturale).
   b. Pirenio di Sphaeria nummularis visto di profilo. Ingrand. $^{100}/_{1}$ circa.
   c. Lo stesso tagliato verticalmente.
   d. Pirenio visto di fronte. Ingrand. $^{100}/_{1}$ circa.
   e. Aschi, spore, e parafisi della Sphaeria nummularis. Ingrand. $^{350}/_{1}$.

Bagnis disegno. *Cromolit. Bruno e Salomone, Roma*

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Bagnis disegno. Cromolit. Bruno e Salomone, Roma

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Sulla struttura intima della pelle de' rettili.

Memoria del Socio FRANCESCO TODARO

letta nelle sedute del 17 giugno 1877 e 5 maggio 1878.

(Ricerche fatte nel Laboratorio di Anatomia normale della R. Università di Roma. III)

§ 1.

La pelle dei rettili consta, come quella degli altri vertebrati, di due strati diversi, l'uno sovrapposto all'altro, cioè dell'epidermide e del sottostante derma. Però nei rettili questi due strati si sollevano insieme in eminenze considerevoli appellate squame, le quali presentano forma e grandezza diversa, e danno alla superficie esterna della pelle di questi animali un aspetto vario e caratteristico.

Nell'interesse della zoologia sistematica vennero studiati in principio i caratteri esterni delle squame, che, a norma della loro forma e grandezza, furono distinte in squame propriamente dette o scaglie, piastre o scudi, tubercoli e granuli; e furono anche abbozzati i primi tratti della struttura e dello sviluppo delle medesime.

Lo studio anatomico delle squame dei rettili venne inaugurato da G. Cuvier (1), ch'ebbe il merito grande di far progredire tutta la zoologia sulla base dell'anatomia, e parlando della pelle dei sauriani e degli ofidiani, disse: « les écailles ne sont que de petites plaques ou compartimentes de la peau entre lesquelles s' enfonce et se moule l'épiderme ».

Una nozione più esatta sulla grossa struttura delle squame dei rettili si ebbe nel 1822, nella qual'epoca Blainville (2) ed Heusinger (3) sostennero, che le squame sono sollevazioni cutanee o papille, composte secondo l'uno di una specie di sporgenze (*saillie ou pincement*) di una parte del derma e dei suoi strati sovrapposti, e secondo l'altro di piccoli tubercoli (*Buckelchen*) del derma, sul quale l'epidermide si inspessisce in una specie di squama.

Le prime osservazioni sullo sviluppo della pelle dei rettili sono state fatte nel 1839 da Rathke (4), il quale però si è limitato solamente a provare, che le squame sono in origine ispessimenti parziali della pelle in forma di piccoli tubercoli o di sporgenze piatte e rotonde. J. Hyrtl (5) che scrisse nello stesso anno, come Dumeril e

(1) G. Cuvier, *Leçons d'anatomie comparée*. Tom. II pag. 620. Paris, 1805.

(2) Blainville, *De l'organisation des animaux, ou principes d'anatomie comparée*. T. I pag. 126. Paris, 1822.

(3) Heusinger, *System der Histologie*. Eisenach, 1822.

(4) Rathke, *Entwickelungsgeschichte der Natter*. Königsberg, 1839.

(5) Hyrtl, *Ueber die Gefässe in der Haut der Amphibien und Vögel*. Medic. Jahrbücher des Oesterr. Staates. Wien, 1839.

Bibron [1], E. Blanchard [2], F. De Filippi [3] e tutti gli altri che hanno scritto dopo confermarono il fatto, che le squame si debbano riguardare come vere produzioni papillari della pelle.

Dumeril e Bibron distinsero inoltre nella pelle dei rettili tre strati principali: lo strato profondo o il derma, lo strato medio o mucoso, nel quale risiede la materia colorante, e lo strato o lamina esterna, o l'epidermide, che negli ofidiani si distacca in totalità e si rinnova quando è stata troppo disseccata.

E. Blanchard per gli studî fatti negli scincoidi considerava la pelle dei rettili come una guaina composta di tre lamine sovrapposte; una esterna fibrosa, una sottostante granulosa, ed una interna liscia e traversata da sottili canali.

De Filippi il quale distinse nella pelle dello *Stellio caucasicus* le produzioni epidermiche, il corpo mucoso o malpighiano, il derma, lo strato adiposo, a cui aggiunse una fascia profonda, ha studiato per la prima volta la struttura intima di ciascuno di questi strati, e quindi ha avuto il merito di aprire la via allo studio istologico della pelle dei rettili.

Le produzioni epidermiche che costituiscono particolarmente le squame, secondo F. De Filippi, nella muda sono rappresentate da due strati subconvessi, il superiore dei quali è rivestito all'esterno da una sottilissima pellicola epidermica; tutti e due gli strati subconvessi corrispondono, secondo lui, allo strato lucido di Oehl dell'epidermide umana. Lo strato subconvesso esterno, rivestito della pellicola epidermica, è il più vecchio, destinato a cadere nella prossima muda; esso non si continua, ma termina tronco nelle infossature o solchi che separano le squame. La pellicola epidermica, che riveste lo strato esterno, è prodotta dalle cellule epidermiche dei solchi, donde si distendono sulle squame in strato finissimo.

O. Schrön [4] ha chiamato strato corneo la pellicola epidermica descritta dal De Filippi; essendochè egli ammette che l'epidermide dello Stellio consiste: della rete del Malpighi, dello strato lucido, che sta in connessione genetica con la rete del Malpighi, e dello strato corneo, che invece nasce nei solchi ch'egli crede analoghi alle glandule cutanee della pelle dell'uomo, dalle quali, secondo lo stesso, proverrebbe lo strato corneo dell'epidermide umana.

Ma le asserzioni contenute nella Memoria dello Schrön vennero subito confutate da C. Tommasi-Crudeli [5], il quale non solo ha rilevato la mancanza dei pretesi poricanali delle cellule spinose dell'epidermide umana ammessi dallo Schrön, ma ha sostenuto altresì, che nell'epidermide dei mammiferi lo strato corneo proviene dagli strati sottostanti e non dalle cellule delle glandule cutanee; e, parlando dei solchi

(1) Dumeril et Bibron, *Erpétologie générale*. Tom. VI p. 107. 1844.

(2) E. Blanchard, *Recherches anatomiques et physiologiques sur le système tégumentaire des reptiles*. Ann. des sc. nat. 4ª serie Zool. Tome XV. 1861.

(3) F. De Filippi, *Sulla struttura della cute dello Stellio caucasicus*. Mem. della R. Accademia delle scienze di Torino. Serie 2ª tom. XXIII. 1866.

(4) O. Schrön, *Contribuzione all' anatomia, fisiologia e patologia della cute umana*. Torino e Firenze, 1865.

(5) C. Tommasi-Crudeli, *Alcuni appunti alla Memoria del prof. Ottone Schrön etc*. Loescher, 1865.

od interstizî della pelle dei rettili, ha negato la loro analogia con le glandule della pelle, e li ha paragonati invece alle introflessioni cutanee del letto dell'unghia.

Dopo di quest'epoca è avvenuto un nuovo movimento importante nello studio istologico della pelle dei rettili, cominciato nel 1868 da F. Leydig [1], proseguito dopo dallo stesso che ne ha fatto il soggetto di varie pubblicazioni, da O. Cartier [2], da C. Kerbert [3], da R. Wiedersheim [4] e da M. Braun [5].

Lo studio embriologico iniziato da Rathke è stato ripreso diffusamente da C. Kerbert, che ne ha ricercato le particolarità essenziali istologiche, e dopo da M. Braun per la formazione del lobo di attacco dei gecconidi.

Ma leggendo quanto da questi autori è stato scritto, si resta convinti, che l'intima struttura della pelle dei rettili è argomento difficilissimo, il quale richiede ancora studî più minuziosi e diligenti per arrivare all'esatta conoscenza dei fatti, e quindi a sciogliere le gravi e profonde controversie che si sono sollevate principalmente intorno alla struttura intima dell'epidermide.

§ 2.

Le mie ricerche sono state fatte sopra i rettili che ho avuto viventi dalla campagna romana. La pelle del *Chamaeleon vulgaris*, che ho potuto avere conservata nel liquido di Müller, mi ha servito poco. Per fare le ricerche nella pelle dell'*Ascalabotes mauritanicus*, ho tenuto gli animali in una soluzione di acido cromico ($^1/_2$ $^0/_0$), la quale, scalcificando le placche ossee della pelle, mi ha permesso di fare tagli sottilissimi che ho coloriti dopo, alcuni con il picro-carminio, altri colla soluzione alcoolica di nitrato di argento ($^1/_2$ $^0/_0$), ed altri infine ho esaminato senza colorazione alcuna. Per scalcificare le placche ossee della pelle del *Seps calcides*, ho dovuto tenerla per qualche tempo, prima nella soluzione di acido cromico e dopo nella soluzione satura di acido picrico. Per le ricerche nella *Lacerta muralis*, nel *Coluber viridiflavus* e nelle altre specie

(1) F. Leydig, *Ueber Organe eines sechsten Sinnes.* Nov. Act. Acad. Caes. Leop. Car. Germ. Nat. Cur. Tom. XXX. Dresdae, 1868. — *Die in Deutschland lebenden Arten der Saurier.* Tubingen, 1872. — *Zur Kenntniss der Sinnesorgane der Schlangen.* Schultze's Archiv für mikrosk. Anatomie. Bd. VIII pag. 317. Bonn, 1872. — *Ueber die äusserem Bedeckungen der Reptilien und Amphibien.* Erster Artikel: *die Haut einheimischer Ophidier.* Arch. f. mikrosk. Anatomie. Bd. IX. 1873. — *Ueber die allgemeinen Bedeckungen der Amphibien.* Archiv. f. mikrosk. Anatomie. Bd. XII. 1876.

(2) O. Cartier, *Ueber den feineren Bau der Epidermis bei den Geckotiden.* Vorläufige Mittheilung. Verh. d. Würzburger phys.-med. Gesellschaft. N. F. Bd. III pag. 235. 1872. — *Studien ueber den feineren Bau der Haut bei den Reptilien.* Abth. I. Verh. d. Vürzburger phys.-med. Gesellschaft. N. F. Bd. III pag. 290. — *Studien über den feineren Bau der Haut bei den Reptilien* Abtheilung II. Verh. d. Würzburger phys.-med. Gesells. N. F. Bd. V pag. 192. 1874.

(3) C. Kerbert, *Ueber die Haut der Reptilien und anderer Wirbelthiere.* Schultze's Archiv für mikrosk. Anatomie. Bd. XIII pag. 205. Bonn, 1877.

(4) R. Wiedersheim, *Zur Anatomie und Physiologie des Phyllodactylus europaeus.* Gegenbaur's, Morphologisches Jahrbuch. Bd. I pag. 502. Leipzig, 1876.

(5) M. Braun, *Ueber die histologischen Vorgänge bei der Häutung von Astacus fluviatilis.* Arbeiten aus dem zool.-zoot. Institut in Würzburg. Bd. II pag. 159-161. Würzburg, 1875. — *Lacerta Lilfordi und Lacerta muralis.* Arbeiten aus dem zool.-zoot. Institut in Würzburg. Bd. IV pag. 1. Hamburg, 1877. — *Zur Bedeutung der Cuticularborsten auf den Haftlappen der Geckotiden.* Arbeiten aus dem zool.-zoot. Institut in Würzburg Bd. IV pag. 231. Würzburg, 1878.

che non hanno le placche ossee della pelle, ho tolto la pelle dell'animale vivente, e l'ho posta immediatamente nella soluzione fresca di acido osmico ($^1/_2$ $^0/_0$), nella quale l'ho tenuta per 4 5-24 ore. Ho fatto dei tagli sottilissimi che ho esaminato sia colorendoli prima col picro-carminio, sia senza una tale colorazione, chiudendo i preparati ora nella glicerina, ed ora nel balsamo del Canadà dopo averli privati dell'acqua coll'alcool e rischiarati con l'olio di garofano. I tagli della pelle coloriti coll'acido osmico e col picro-carminio, e chiusi nel balsamo o nella damarlacca sono preferibili, perchè di una nettezza e di una bellezza straordinaria. Ho adoperato inoltre la potassa caustica (35 $^0/_0$), l'acido solforico diluito, e la colorazione con la soluzione acquosa di nitrato di argento ($^1/_2$ $^0/_0$) per lo studio dello strato corneo, come a suo luogo specificherò.

PARTE PRIMA

Struttura della pelle dei Rettili nell'epoca remota da quella della muda.

1. Epidermide.

§ 3.

Per studiare con ordine la struttura intima dell'epidermide dei rettili, è mestieri distinguere lo stato ordinario nel quale si trova nell'epoca lontana da quella della muda, dallo stato diverso che in quest'epoca presenta. Quindi io espongo prima il risultato delle mie ricerche intorno alla struttura dell'epidermide di questi vertebrati nello stato ordinario; e parlerò dei fenonemi di accrescimento, del distacco e caduta della loro antica epidermide, non che della formazione della nuova, nella seconda parte di questa Memoria.

L'epidermide dei rettili, nello stato ordinario, che nei tagli delle squame presenta l'aspetto dell'unghia dell'uomo, consta di due strati, come l'epidermide degli altri vertebrati; cioè, dello strato mucoso o rete del Malpighi, e dello strato corneo.

§ 4.

La rete del Malpighi consiste di cellule prive di membrana, con un protoplasma trasparente, sparso di finissime granulazioni, ed un nucleo vescicoloso contenente un nucleolo relativamente molto grosso e granuloso. Questo strato è composto di più serie di cellule. La parte interna o profonda consta di una semplice serie di cellule cilindriche verticali, le quali si impiantano con il lato inferiore, più o meno dentato, nella superficie esterna del derma. La parte esterna è composta di grandi cellule poliedriche, ora alte ed ora larghe ed appiattite. Nel primo caso presentano nel profilo la superficie poligonale e nel secondo l'aspetto fusiforme. Malgrado che C. Kerbert (¹) neghi nell'epidermide dei rettili le cellule dentate, i preparati che io

(¹) L. c. pag. 223.

ho ottenuto dimostrano chiaramente, che le cellule della parte superiore della rete del Malpighi, come le cellule dello strato lucido, che si sviluppa più tardi nell'epoca della muda, sono dentate.

Nelle squame addominali dell'*Ascalabotes mauritanicus* (tav. I, fig. 3, *e'*) e del *Coluber viridiflavus* (tav. I, fig. 11, *e'*), la parte esterna della rete del Malpighi ho trovato essere composta di una sola serie di cellule, che nel profilo presentano l'aspetto fusiforme; mentre che nelle squame della testa dell'*Ascalabotes mauritanicus*, del *Chamaeleon vulgaris*, del *Seps calcides* e della *Lacerta muralis* (tav. I, fig. 9, *e'*) la parte esterna della rete del Malpighi consta di due serie di cellule nel profilo fusiformi. Nell'epidermide della testa degli ofidiani (*Coluber viridiflavus, Tropidonotus natrix* e *Vipera aspis*), e qualche volta anche in quella delle loro squame addominali, nello stato ordinario (tav. IV, fig. 39, *e'*), mancano le cellule che nel profilo hanno l'aspetto fusiforme, le quali però nascono più tardi nel primo periodo della muda, come dimostrerò in seguito, per formare un nuovo strato. In questo stato invece, alle cellule cilindriche della parte profonda, seguono due o più serie di grandi cellule dentate, che presentano nel profilo la superficie poligonale, le quali constituiscono la parte superiore o lo strato esterno della rete del Malpighi. Alcune di queste cellule (tav. IV, fig. 39, *cp*) in corrispondenza alle macchie cutanee, sono cariche di pigmento nero (cellule epiteliali cromatofore) e si presentano ora disseminate, ed ora riunite in gruppi. In alcuni luoghi mi è riuscito di vedere, che queste cellule epiteliali cromatofore stanno in relazione con i prolungamenti, che mandano nella rete del Malpighi le sottostanti cellule congiuntive del derma cariche di pigmento nero, e credo che da queste provenga per emigrazione il pigmento delle cellule epiteliali in discorso, le quali se l'appropriano nel loro stato giovane.

Nelle squame lamelliformi del *pulvillo scansorio* o lobo di attacco delle dita dell'*Ascalabotes mauritanicus* (tav. I, fig. 5, *e*), la parte profonda, o strato interno della rete del Malpighi, è molto spessa, e consta di più serie di piccole cellule rotonde, al di sopra delle quali segue lo strato superficiale, composto di una sola serie di cellule piccole e fusiformi nel profilo.

Nelle squame o piastre addominali del *Seps calcides* (tav. I, fig. 10, *e*), tutta la rete del Malpighi, nel caso da me osservato, era composta di una sola serie di piccole cellule basso-cilindriche o cubiche impiantate sul derma. Seguiva al disopra uno strato di più serie di cellule fusiformi (tav. I, fig. 10, *a'*); ma queste avevano trasformato il loro protoplasma in sostanza cornea, e perduto il loro nucleo, o appiattito talmente che non si vedeva nel profilo, ad eccezione di alcune, che ne mostravano ancora un resto circondato da una leggiera e scarsa granulazione oscura. Per conseguenza queste cellule non appartenevano più alla rete del Malpighi, ma formavano in questo caso la parte inferiore dello strato corneo.

Questo ed altri fatti analoghi, che ho avuto occasione di osservare, mi fanno argomentare, che le cellule dentate della parte superiore della rete del Malpighi, esistenti nello stato ordinario, si trasformano tutte in cellule cornee prima e nel momento che si iniziano i fenomeni di accrescimento dell'epidermide, come ho veduto nell'epidermide delle squame della testa dell'*Ascalabotes mauritanicus* (tav. 1 fig. 4, *a'*) nell'inizio della muda, e nell'epidermide della testa del *Coluber viridiflavus var. carbonarius* (tav. IV, fig. 39).

§ 5.

Lo strato corneo è molto spesso sulle squame, e viceversa sottilissimo nei solchi od infossature, ove non termina tronco, come erroneamente aveva creduto De Filippi [1], ma, assottigliandosi gradatamente si continua senza interruzione da una squama all'altra (tav. I, fig. 1 e 2; tav. III, fig. 28).

Nello strato corneo, a causa dello stato diverso, nel quale si trovano gli elementi che lo costituiscono, si possono distinguere, una parte interna rilassata, che nella superficie del taglio presenta l'aspetto fibroso (vedi a' nel maggior numero delle figure); una parte esterna compatta, dura, giallognola e rifrangente la luce (a), la quale con i deboli ingrandimenti sembra omogenea, ma con i forti ingrandimenti invece si scorge lineata nel senso longitudinale od obliquo, secondo il luogo ed il modo nel quale è caduto il taglio; ed una pellicola epidermica sottilissima (a''), la quale riveste la superficie esterna della parte compatta.

Nel fare il taglio dell'epidermide avviene, che la parte interna rilassata, sotto l'azione meccanica del rasoio, si scompone in fasci e fascicoli (a'), i quali si distaccano più o meno gli uni dagli altri, secondochè il taglio è praticato nella pelle indurita per varî giorni nell'acido cromico o nel liquido di Müller, o secondochè è stata tenuta nell'alcool o per poche ore nell'acido osmico. Il maggiore distacco avviene sempre nel punto di passaggio fra la parte interna rilassata, e la parte esterna dura e compatta.

La parte interna rilassata dello strato corneo, con l'azione prolungata della potassa caustica (35 %) si può scomporre in lamelle cornee, tanto negli ofidiani, quanto nella *Lacerta muralis*, e più facilmente nell'*Ascalabotes mauritanicus*, nel quale si scompone in lamelle anche con la macerazione nell'acido cromico ($^1/_2$ %). In alcune di queste lamelle cornee disgregate si scorge ancora un resto di nucleo, che dimostra chiaramente la loro natura cellulare.

Nel *Seps calcides* questa dimostrazione si ha, come ho detto innanzi, senza la disgregazione delle cellule (tav. I, fig. 10 a'), come anche nelle altre specie allorchè si esamina l'epidermide in un momento, nel quale la cornificazione è avvenuta da poco tempo (tav. I, fig. 4. a'), perchè, non essendosi appiattite ancora molto le cellule, il resto del nucleo si mostra nel profilo.

La parte compatta dello strato corneo non si lascia così facilmente disgregare, quando la cornificazione è compiuta, con nessun reattivo. Tuttavia sotto l'azione dell'alcool prolungata per più giorni, sono riuscito a vedere in un taglio sottilissimo dell'epidermide delle piastre addominali della *Lacerta muralis* staccata nella muda (tav. IV, fig. 34 a), i contorni delle lamelle, che compongono la parte compatta dello strato corneo. Però, nella nuova epidermide delle stesse piastre della detta specie, mi è riuscito facilmente, per l'azione dell'alcool di vedere non solo i contorni, ma, quando ancora la cornificazione non era molto avanzata, di potere disgregare le cellule, alcune delle quali conservavano ancora un resto di nucleo, e tutte si mostravano divise in due lamelle cornee (tav. IV, fig. 35).

Anche nelle squame del *Coluber viridiflavus* e del *Tropidonotus natrix*, sotto

(1) L. c. 369.

l'azione prolungata per 5-6 ore della potassa caustica, ho potuto vedere i contorni delle lamelle della parte compatta già interamente cornificata, i quali nei tagli sottilissimi si mostravano dentati.

Nell'epidermide, che corrisponde alle macchie cutanee, tanto nella coda della *Lacerta viridis,* quanto nella testa del *Coluber viridiflavus* (tav. IV, fig. 39, *a*) ho veduto chiaramente nella superficie del taglio dello strato corneo compatto le cellule granulose o cariche di pigmento, che si mostravano fusiformi. I contorni di queste cellule si rendono più netti con l'azione della potassa caustica, con il qual mezzo, ho messo anche in chiaro il loro nucleo vescicoloso, che trovasi nel mezzo delle cellule sepolto nel pigmento. La presenza di queste cellule nello strato corneo compatto, non avviene per lo più, come dice C. Kerbert (¹), ma solamente in corrispondenza delle macchie cutanee; dapoichè le cellule che si mostrano nel profilo sono quelle, che, essendo cariche di pigmento, non soffrono la trasformazione in lamelle cornee come tutte le altre.

Le due parti dello strato corneo fin qui descritte (strato corneo rilassato e strato corneo compatto) presentano questi caratteri, sia nello stato ordinario, sia all'epoca della muda nella nuova epidermide cornificata, o nell'antica epidermide alla quale, come dimostrerò in seguito, si aggiunge lo strato corneo granuloso e lo strato lucido formati in quell'epoca. Credo poi fermamente che tale sia il tipo del tessuto corneo della parte libera delle squame in tutte le specie, contrariamente all'opinione di Cartier (²) che ne ha ammesso due tipi diversi.

§ 6.

La pellicola epidermica, che riveste tutta la superficie esterna dello strato corneo compatto, malgrado la sua grande sottigliezza, consta di due strati. Lo strato interno è composto di una sola serie di cellule appiattite, poligonali e per lo più uninucleate; lo strato esterno viceversa è fatto di una sola serie di lamelle cornee, che, portando sulla superficie libera i peli e le cosidette *sculture* del Leydig, lo chiamerò *strato esterno della pellicola* o *strato delle sculture.*

Guardando di sopra l'epidermide, immediatamente sotto dello strato delle sculture, si vede lo *strato delle cellule poligonali,* o *lo strato interno della pellicola,* il quale non manca in nessuna specie, e si osserva tanto nella nuova epidermide cornificata, quanto nella spoglia caduta nella muda. Ma per vedere distintamente le cellule, che compongono questo strato, bisogna spesso adoperare l'acido solforico o la potassa, che, rendendo più trasparente la pellicola epidermica soprastante, sono i reattivi più preziosi per metterle in evidenza. Sotto l'azione prolungata di questi due reattivi si arriva anche a disgregarle.

Un luogo, nel quale queste cellule guardate in superficie sono nettamente visibili senza l'aiuto di nessun reattivo, e che si possono anche facilmente disgregare, è l'apice dei tubercoli e dei granuli della pianta del piede della *Lacerta muralis albiventris* Bp. Qui ho notato un fatto degno di attenzione. Lo strato delle sculture,

(¹) C. Kerbert, Mem. c. pag. 217.

(²) Cartier, *Studien über den feineren Bau der Haut bei den Reptilien.* II. Abth. Verh. d. Würzburger phys.-med. Gesellschaf. N. F. Bd. V pag. 209. 1874.

che riveste i tubercoli ed i granuli, si arresta d'un tratto all'intorno dell'apice (tav. II, fig. 15), in modo che vi rimane uno spazio circolare più o meno considerevole, ove questo strato manca, e quindi le cellule che fanno parte dello strato sottostante, restano scoperte. E qui non solo si possono osservare, ma, nei preparati macerati nell'acido cromico ($^1/_2$ $^0/_0$) o nel liquido di Müller, si possono disgregare facendo una moderata pressione sul vetrino copre-oggetti (tav. II, fig. 16). Queste cellule hanno la superficie pentagonale od esagonale, posseggono un nucleo vescicoloso e sono prive di membrana. Il loro protoplasma molto granuloso e pigmentato si mostra frazionato in piccoli campi, i quali si disgregano facendo una pressione un po' più forte sul vetrino copre-oggetti. In questo luogo, non solo si veggono le cellule di questo strato restare granulose e con un nucleo vescicoloso, ma tutte le cellule dello strato corneo compatto sottostante restano tali, a motivo che il processo di cornificazione non si compie come nel rimanente (tav. II, fig. 17, *a*).

Secondo la mia opinione, questo fatto si deve attribuire allo stato in cui si trovavano queste cellule nello strato esterno della rete del Malpighi, ove precedentemente al processo di cornificazione si erano sovraccaricate di pigmento, il quale ne ha impedito la cornificazione. Infatti in questo luogo nel derma sottostante abbondano le cellule congiuntive con pigmento nero, che mandano numerosissime ramificazioni in tutta la rete del Malpighi, ove formano una rete fitta attorno alle cellule della parte o strato esterno; e quindi le cellule, da cui, come dimostrerò in seguito, si formano nell'epoca della muda la pellicola epidermica e lo strato corneo compatto, essendosi sovraccaricate tutte di pigmento, non si cornificano e restano granulose.

Quando si sono sovraccaricate di pigmento soltanto alcune delle cellule dello strato esterno della rete del Malpighi, come avviene in corrispondenza delle macchie cutanee nere, allora tutte le altre si cornificano, e queste cariche di pigmento restano granulose. In questo caso alcune delle cellule granulose si trovano sparse, come ho detto innanzi, in mezzo alle lamelle dello strato corneo compatto, ma la maggior parte vanno a formare lo strato interno della pellicola epidermica. Ho veduto infatti nel *Coluber viridiflavus*, nel *Coluber flavescens*, nel *Tropidonotus natrix* e nella *Vipera aspis* conservati nell'alcool, che in corrispondenza delle macchie nere delle squame dorsali, le cellule sottostanti allo strato delle sculture, sono tutte granulose ed oscure e conservano un grosso nucleo vescicoloso, ed in certi punti perdono anche la forma poligonale. Viceversa in queste specie, in corrispondenza delle macchie gialle delle squame dorsali e in tutte le piastre addominali, le cellule poligonali sottostanti allo strato delle sculture hanno il nucleo e una leggiera e fina punteggiatura. In alcuni di questi luoghi sono così sottili, che appena si rendono visibili e non hanno nucleo.

Un altro luogo, nel quale lo strato interno della pellicola si trova allo scoperto, è nelle squame labiali della mascella inferiore della *Lacerta muralis albiventris* Bp. al disopra degli organi di senso. Nella parte della pellicola che ricuopre questi organi, lo strato delle sculture si arresta circolarmente all'intorno, ed il coperchio di ricuoprimento di questi organi è fatto esclusivamente dallo strato interno della pellicola. Questo strato è composto in questo luogo da una semplice serie di lamelle omogenee poligonali, trasparenti come il vetro, che mostrano sulla superficie esterna scarse e piccolissime elevazioni come punti trasparenti. Queste lamelle restano sempre incolori o

bianche, anche quando si è adoperato il nitrato di argento, che colora in rosso-bruno lo strato delle sculture che li circonda.

Nella massima parte delle squame della stessa *Lacerta albiventris*, specialmente nelle piastre della mascella inferiore e dell'addome, lo strato interno della pellicola è composto di cellule poligonali, alcune uninucleate, ed altre senza nucleo. Queste cellule non sono granulose ma cornificate in lamelle, che sono riunite tra loro da una discreta sostanza intercellulare, e presentano sulla superficie linee longitudinali, che restano interrotte fra una cellula e l'altra dalla sostanza intercellulare, e non corrispondono alle sculture dello strato esterno.

L'accumulo di molte cellule granulose dello strato interno della pellicola, lungo il grande asse di alcune squame, solleva lo strato delle sculture in certe specie, e determina la forma a carena di queste squame; avvegnachè io non credo che questa forma sia dipendente da un rilievo mediano fatto dal derma sottostante come hanno sostenuto F. Leydig [1] ed O. Cartier [2]. Ho visto infatti, nelle squame dorsali carenate del *Tropidonotus natrix*, in quelle leggermente carenate della testa dell'*Ascalabotes mauritanicus*, e nei verticilli carenati della coda della *Lacerta muralis albiventris*, le cellule in discorso molto granulose, accumulate lungo la parte carenata, mentre sul declivio si trovava una sola serie di cellule poligonali con scarsa e sottile granulazione. Nelle carene dei verticilli della coda della *Lacerta albiventris* lo strato delle sculture soprastante presenta una fessura longitudinale lungo la cresta della carena. Nelle squame dorsali del *Tropidonotus natrix* e in quelle della testa dell'*Ascalabotes mauritanicus* ed in altre specie lo strato delle sculture non presenta nessuna interruzione e forma invece un tutto continuo.

Non si debbono confondere con le cellule in discorso, le cellule protoplasmatiche, che nelle infossature o solchi della pelle degli ofidiani si trovano immediatamente sotto la pellicola epidermica, composta in questo luogo del solo strato esterno. Queste cellule sono molto voluminose con la superficie esterna convessa, e mostrano nel profilo un nucleo contenente un nucleolo ed un protoplasma granuloso, che si colora con il carminio ed è privo di granuli di pigmento. Queste cellule hanno per conseguenza caratteri diversi e tutt'altra significazione, come dimostrerò nella seconda parte di questa Memoria.

Il Kerbert [3] ha descritto la serie delle cellule, che si trovano sotto lo strato delle sculture, col nome di *strato granuloso*, ed ha avanzato l'opinione, che sia quello stesso descritto da Blanchard sotto il nome di *lamina granulosa* e da Leydig detto *strato granulo-grassoso*, la qual cosa a me non sembra. In fatti Blanchard [4] ammetteva, che la lamina granulosa era sottogiacente ad una lamina fibrosa. Ora secondo me, anzichè alla sola pellicola questa lamina fibrosa di Blanchard corrisponde a tutto lo strato corneo, e per conseguenza la lamina granulosa di Blanchard non si trova immediatamente sotto la pellicola (*strato epitrichiale* di Kerbert), ma è ricoperta da tutto lo strato corneo. Che secondo Leydig lo strato delle cellule a contenuto granulo-grassoso sia ricoperto dallo strato corneo si desume da quanto dice a pag. 69 del suo primo lavoro [5]

(1) Leydig, Archiv für mikrosk. Anatomie. Bd. IX pag. 759. 1873.
(2) O. Cartier, Verhandlungen der phys.-med. Gesellschaft in Würzburg. N. F. pag. 200.
(3) C. Kerbert, Mem. c. pag. 217-218.
(4) Em. Blanchard, mem. c.
(5) F. Leydig, *Ueber Organe eines sechsten Sinnes*. Dresden, 1868.

ove suddivide lo strato mucoso dell'epidermide in due strati: uno inferiore chiaro, ed un altro superiore granulo-grassoso. Che se poi questi, in altri luoghi, dice trovarsi lo strato delle cellule a contenuto granulo-grassoso sotto la cuticola, bisogna riflettere ch'esso ha chiamato spesso cuticola tutto lo strato corneo. Basta infine consultare la fig. 22, tav. III della Memoria ora citata per esser certi, che lo strato granulo-grassoso notato da Leydig si trova tra la rete del Malpighi e lo strato corneo, mentre lo strato granuloso del Kerbert sarebbe posto fra lo strato corneo e la pellicola. Dirò più tardi qual'è lo strato granuloso, che si trova solamente nell'epoca della muda, e secondo me corrispondente a quello descritto dal Blanchard e dal Leydig. Intanto questa serie di cellule variabili per grandezza, forma, tenacità e stato granuloso, che si trovano sotto lo strato delle sculture, possono piuttosto avere insieme a questo un significato filogenetico, dapoichè tutta la pellicola composta, nella parte libera delle squame, di questi due strati, potrebbe riguardarsi come l'omologo dello strato corneo degli anfibî, nei quali, secondo le ricerche di F. E. Schulze (1), è ridotto, nella massima parte della superficie del corpo, ad una o due serie di cellule cornificate. Così la pelle dei rettili sarebbe il passaggio tra la pelle degli anfibî e quella degli uccelli e dei mammiferi.

§ 7.

Lo strato delle sculture è composto di lamelle cornee omogenee e senza nucleo, le quali sono chiare, ma non perfettamente trasparenti; si rendono però tali sotto l'azione della potassa caustica. Per conseguenza questo reattivo serve più a fare riconoscere, come innanzi ho detto, le cellule sottostanti allo strato delle sculture, anzichè per lo studio di esso. Per lo studio dello strato delle sculture invece mi ha reso un maggiore servizio la colorazione con il nitrato d'argento, mercè della quale io ho potuto riconoscere la sua vera struttura. Con la potassa caustica si riesce però a provare un fatto di qualche interesse, cioè, sotto l'azione prolungata di questo reattivo si può isolare completamente tutta la pellicola epidermica, dal sottostante strato corneo. Nel *Seps calcides* sono riuscito a questo effetto dopo 3-5 ore dell'azione della potassa caustica; nel *Tropidonotus natrix* si richiede un tempo maggiore. Se l'azione della potassa caustica si prolunga per alcuni giorni (2), o se si adopera a caldo, si scioglie la sostanza delle lamelle della pellicola come il resto del tessuto corneo. Il distacco della pellicola si può anche ottenere lasciando macerare la pelle per lungo tempo nella soluzione di acido cromico, o nel liquido di Müller.

Nei gecconidi (tav. II, fig. 12) le lamelle dello strato esterno della pellicola epidermica conservano la forma poligonale originaria delle cellule. A prima giunta sembra che ciascuna lamella possegga un nucleo vescicoloso, come sostengono

(1) F. E. Schulze, *Ueber cuticulare Bildungen und Verhornung von Epithelzellen bei den Wirbelthieren*. Archiv für mikrosk. Anatomie. Bd. V pag. 296. Bonn, 1869.

(2) Ponendo un pezzo di spoglia del *Tropidonotus natrix* rigettata nella muda, che avevo tenuto a macerare per 5 ore nella potassa (35 %), sopra un porta-oggetti nello stesso liquido cuoperta con il vetrino, ed aggiungendo replicate volte, mano mano che il liquido si evaporava, lo stesso reattivo per tre giorni consecutivi, ho veduto sciogliersi prima lo strato corneo, e quindi la pellicola epidermica completamente.

C. Kerbert [1], e Wiedersheim [2], specialmente se si è adoperato la potassa caustica. Ma se invece si sono colorite con il nitrato d'argento, è raro di vedere il nucleo, e abbassando ed innalzando il foco del microscopio, si resta nel dubbio se nei punti nei quali traspare il nucleo, questo non appartenga ad una cellula dello strato sottostante.

La superficie libera di queste lamelle cornee in tutto il corpo dei gecconidi è sparsa di prolungamenti filiformi, i quali si rendono maggiormente visibili guardandoli, non di sopra, ma nei tagli della pelle o in una ripiegatura della pellicola. Generalmente sono peli corti e rigidi nell'*Ascalabotes mauritanicus,* finissimi, molleggianti e lunghi nell'*Hemidactylus triedrus.*

Sulle lamelle cornee dello strato esterno della pellicola della parte libera delle squame lamelliformi del pulvillo scansorio o lobo d'attacco di questi rettili, sorgono invece grosse setole, cioè prolungamenti lunghi, grossi e rigidi (tav. III, fig. 5, tav. I, fig. 25, fig. 26, *p*), riuniti insieme per formare una specie di spazzola, la di cui superficie libera, di forma ovale e concava, fa l'ufficio di una ventosa speciale, che è il vero organo d'attacco meccanico, come ha giustamente sostenuto Cartier [3]. Guardando questa superficie concava, fatta dalle punte od estremità libere delle setole, si vede (tav. I, fig. 6) come esse sono aggruppate in spazî poligonali, che ripetono la forma delle cellule o delle lamelle, dalle quali sorgono. Così si può determinare, che le lamelle cornee dello strato esterno della pellicola, che riveste il lobo d'attacco, conservano la stessa forma poligonale, ma sono più piccole di quelle dello stesso strato della pellicola epidermica, che riveste il resto della superficie della pelle de'*Gecki.*

Sulla pellicola, che chiude l'apertura degli organi di senso, i quali in numero variabile si trovano in tutte la squame e tubercoli della pelle di questi animali, si elevano da una, due, tre, e raramente quattro lunghe ciglia, che io ritengo essere gli antichi peli sensitivi cornificati di questi organi.

Sulla faccia profonda delle piastre addominali e delle squame lamelliformi del lobo d' attacco dell'*Ascalabotes mauritanicus,* che limita il solco o l'infossatura dal lato esterno, le lamelle dello strato esterno della pellicola epidermica in principio, verso l'estremità libera delle squame, presentano i peli, che vanno mano mano perdendosi verso il fondo dei solchi, ove le lamelle sembrano liscie, cioè prive di qualunque prolungamento.

Non ho potuto studiare con profitto la pellicola epidermica del Camaleonte, perchè l'esemplare avuto a mia disposizione era conservato da lungo tempo nel liquido di Müller. Però da quel che ho potuto ricavare mi sembra, che anche in questa specie la pellicola epidermica è composta di due strati, cioè l'interno di cellule poligonali e l'esterno di lamelle poligonali come quelle dei gecconidi.

Una differenza notevole nella forma e nei prolungamenti presentano invece le lamelle dello strato delle sculture degli scincoidi, delle lacertine e degli ofidiani.

(1) C. Kerbert, Mem. cit.
(2) R. Wiedersheim, Mem. cit.
(3) Cartier, Verh. d. Würzburger phys.-med. Gesellschaft N. F. Bd. III pag. 236. 1872.

Nella faccia profonda delle piastre addominali del *Seps calcides*, che limita il lato esterno dei solchi, le lamelle della pellicola epidermica, in prossimità dell'estremità libera di ciascuna piastra, sono molto allungate e strette. Queste lamelle, prive di nucleo ed omogenee, hanno la superficie libera liscia; ma dai loro margini ingrossati (tav. II, fig. 13) si eleva una serie di prolungamenti grossi, corti e a forma di spine. Mano mano che, dalla estremità libera della piastra, si va verso il fondo del solco, le lamelle divengono sempre più larghe, talmentechè, in quest' ultima parte, presentano la forma irregolarmente poligonale. La superficie libera di queste ultime lamelle è liscia, ma le lamelle non sono più omogenee; invece si vede in ciascuna di loro una sostanza granulosa abbondante verso gli angoli. I margini di queste cellule sono così rilevati che sembrano coste, e verso gli angoli sorgono una, due, tre, quattro o cinque grossissime spine per ognuna di queste lamelle (tav. II, fig. 13). Come nella grandezza e nella forma delle lamelle, così anche nella grandezza e nel numero di queste spine esiste un passaggio graduale fra quelle, che in questa faccia stanno in vicinanza del fondo del solco, e quelle, che stanno in vicinanza dell' estremità libera delle piastre; cioè via via che dal fondo si viene verso la detta estremità, le spine diminuiscono in volume, ma aumentano in numero talmente che occupano tutto il margine di ciascuna lamella.

Sulla parte nascosta della faccia esterna delle stesse piastre addominali del *Seps calcides,* che limita il solco dal lato interno, ossia sulla radice delle piastre, le lamelle della pellicola sono larghe ed allungate nel senso trasverso della piastra. Il margine posteriore di ogni lamella (tav. II, fig. 14), opposto al fondo del solco, è ondulato e fa rilievo alla superficie. Questo margine ricuopre ad embrice il margine anteriore della lamella successiva, che è sottile.

Sulla superficie libera di queste lamelle, nella pellicola colorita con il nitrato di argento ed isolata completamente coll'aiuto della potassa, con la luce obliqua e i forti ingrandimenti, si scuopre una leggera striatura trasversale alla lunghezza delle lamelle e quindi parallela a quella delle piastre addominali, che in questa specie sono allungate nel senso della lunghezza del corpo come le squame dorsali. Questa striatura è prodotta da linee sottilissime, che dal margine sottile arrivano al margine ispessito e rilevato della lamella. Lungo di queste linee si notano piccolissime elevazioni, come granulazioni, disposte in fila. Bisogna fermare l'attenzione sopra queste piccole elevazioni, le quali, nella parte libera delle squame, si sviluppano in diverso modo a secondo la diversa specie dei rettili, ed a secondo la diversa forma delle squame e delle lamelle.

Nei gecconidi, nei quali le lamelle conservano la forma originaria poligonale da per tutto, le elevazioni della loro superficie libera sono, come abbiamo veduto, sviluppate tutte ugualmente in forma di peli, che danno alla superficie esterna dell' epidermide un aspetto uniforme e vellutato, ad eccezione del lobo d' attacco ove invece sono setole.

Nella superficie libera delle squame dello stesso *Seps calcides,* ove le lamelle dello strato esterno della pellicola si restringono successivamente dalla radice verso la punta e divengono nastriformi, accade che, mentre il maggior numero delle elevazioni resta allo stato rudimentale o si cancella affatto, la serie accanto

al margine ispessito delle lamelle prende un maggiore sviluppo, e quindi si formano in tal modo delle linee crestate o seghettate, che seguono l'andamento ondulato dello stesso margine col quale si confondono. Queste linee crestate e ondulate sono state chiamate da F. Leydig (1) col nome di *sculture trasverse*. Le sculture trasverse si osservano anche nella radice e in tutta la superficie libera di tutte le squame della *Lacerta muralis*. Negli ofidiani le sculture trasverse si trovano nella parte libera di tutte le squame in prossimità soltanto dei solchi, ad eccezione delle piastre o scudetti della testa, ove, più o meno ristrette, le sculture trasverse si trovano su tutta la superficie libera. Nel *Tropidonotus natrix* si veggono le sculture trasverse anche nella pellicola della testa che forma il coperchio agli organi di senso (tav. II, fig. 18).

Nelle squame dorsali degli ofidiani il Leydig (2) ha trovato un' altra forma di sculture, ch'egli ha chiamato *sculture longitudinali*. Però il Leydig ha descritto queste sculture longitudinali come rilievi omogenei con dentature laterali diversamente arcuate a secondo la specie. Invece dalle mie osservazioni, nelle squame dorsali del *Tropidonotus natrix* (tav. II, fig. 19, 1°) e del *Coluber viridiflavus*, risulta chiaramente, che le sculture longitudinali sono formate da denti disposti in linea ed inclinati gli uni sugli altri dall' innanzi all' indietro, ossia dalla radice della squama verso il canto libero; e le dentature laterali arcuate (*Nebenzügen* del Leydig) non sono che le sculture trasversali, le quali restano interrotte dalle sculture longitudinali e poco appariscenti, per il grande sviluppo di queste ultime. Nel *Tropidonotus natrix* ogni scultura longitudinale è fatta da una sola serie di denti grossi; nel *Coluber viridiflavus* invece da più serie di denti piccoli allungati e convergenti verso l'estremità libera delle squame. Il luogo più favorevole all'osservazione è in prossimità della radice della squama, ove le sculture longitudinali cominciano a formarsi, e i denti, cui sono composti, non sono molto ravvicinati fra loro, ed ove ancora le lamelle dello strato esterno della pellicola non si sono fuse in uno strato omogeneo portante le sculture, come avviene verso l'estremità opposta delle dette squame. Questa fusione delle lamelle dello strato delle sculture, nella parte libera delle squame, dimostra sempre più erronea l'opinione di C. Kerbert (3), il quale ha ritenuto le sculture trasverse essere margini cellulari, finamente dentati e ondulati, rivolti in sopra.

Nella parte periferica della capsula oculare del *Coluber viridiflavus* giovane, colorita con il nitrato di argento, ho veduto le lamelle cornee dello strato esterno, allungate e ristrette con margini ondulati, formare una zona circolare. Tali lamelle presentavano tutta la superficie libera sparsa di piccolissime eminenze granuliformi, che si elevavano allo stesso livello tanto nella parte marginale quanto su tutto il resto della superficie libera. L'insieme di queste eminenze rappresentano le sculture trasverse, le quali però sono diverse dalle altre sopra menzionate per ciò ch' esse, invece di essere fatte dalla sola serie delle eminenze marginali, constano delle eminenze sviluppatesi ugualmente in tutta la superficie libera delle lamelle.

(1) F. Leydig, Archiv. mikrosk. Anatomie. Bd. IX pag. 754. 1873.
(2) Leydig, l. c.
(3) Kerbert, Mem. cit. pag. 215.

Mano mano che dalla parte periferica si viene verso il centro della capsula oculare, queste lamelle o sculture si restringono e si assottigliano in modo tale che nella parte centrale spariscono o si veggono appena. In questo luogo si veggono invece nettamente divenire superficiali le cellule dello strato interno della pellicola, larghe, poligonali e senza nucleo.

Nella parte libera delle piastre addominali degli ofidiani, i prolungamenti della superficie delle lamelle dello strato esterno della pellicola si sviluppano tutte ugualmente in lunghe setole, le quali, ad eccezione della loro punta, restano aderenti tra loro; ma coll'azione prolungata della potassa caustica si possono isolare e vedere in tutta la loro estensione. Il Leydig (1) ha osservato tali setole senza bisogno di questo reattivo nelle piastre addominali del *Tropidonotus tessellatus* conservato da lungo tempo nello spirito di vino, ed io ho potuto vedere altrettanto nel *Coluber viridiflavus* conservato lungamente nello stesso liquido (tav. II, fig. 20^a, a'').

La superficie delle piastre addominali di questi rettili ha l'aspetto zigrinato, che è prodotto dalle estremità libere o punte delle setole innanzi dette (tav. II, fig. 20, 1°). C. Kerbert (2) ha veduto e figurato quest'aspetto nelle piastre addominali del *Tropidonotus natrix* e della *Vipera aspis*, ma lo ha interpretato erroneamente come una striatura appartenente alla superficie esterna delle cellule poligonali e nucleate, che, secondo lui, formano nelle piastre addominali di questi rettili lo strato esterno o epitrichiale. Evidentemente C. Kerbert non ha veduto lo strato esterno della pellicola, per difetto di metodo nella ricerca, ed allora ha riferito questo aspetto alle cellule poligonali e nucleate della serie sottostante. Egli ha adoperato sempre nelle sue ricerche la potassa, e questo reattivo rende spesso invisibile lo strato esterno della pellicola; invece, colorite col nitrato d'argento ed esaminate a luce obliqua, al di sopra delle cellule poligonali e nucleate, si veggono i veri elementi di questo strato come io li rappresento nella fig. 20. A questo proposito dirò che allorquando, sotto la parte che si osserva, vi rimane una grossa bolla d'aria, siccome questa rompe i raggi diretti, la luminazione si fa obliquamente, ed allora le lamelle della pellicola e i prolungamenti della loro superficie libera si presentano nel modo più evidente.

Nei solchi che separano le squame degli ofidiani, tutta la pellicola consta di un solo strato di lamelle cornee, le quali presentano la superficie esterna liscia e convessa; mentre la loro superficie interna concava si modella sulla convessità delle cellule protoplasmatiche sottostanti. Per questa causa la superficie libera di questo strato si presenta sparsa di grosse elevazioni convesse o gibbose, che il Leydig (3) ha chiamato impropriamente *sculture gibbose*.

Nella punta dei tubercoli e dei granuli della *Lacerta muralis rubiventris* Bp. e della *L. nigriventris* Bp. lo strato delle sculture non è interrotto come nella *L. albiventris* Bp. Invece in queste due lucertole lo strato esterno della pellicola è completo. In questo strato completo le sculture arrivano con andamento spirale sulla

(1) F. Leydig, Archiv für mikrosk. Anatomie. Bd. IX, pag. 761. 1873.

(2) Kerbert, Mem. cit. pag. 216.

(3) Leydig, *Ueber Organe eines sechsten Sinnes* p. 92. Dresden, 1878. — Archiv für mikrosk. Anatomie. Bd. IX p. 760.

punta dei tubercoli e dei granuli, come i giri spirali di una coclea. Perciò io le chiamo *sculture a coclea* o *cocleari* (¹).

Ora, escludendo le cosidette *sculture gibbose* perchè non sono tali, le sculture della superficie esterna della pelle dei rettili, lo studio delle quali può avere un grande interesse per la diagnosi della specie, sono di quattro forme: *sculture traverse, sculture longitudinali, sculture a coclea,* e *sculture zigrinate.*

§ 8.

L'esistenza di una pellicola, sulla superficie esterna della pelle dei rettili, viene ammessa da tutti gli osservatori, quantunque sia stata indicata con diversi nomi. La questione si è fatta solamente per sapere, se questa pellicola sia composta di elementi cellulari induriti o cornificati, trasformati in lamelle o fusi in uno strato più o meno omogeneo; o se invece essa sia una vera cuticola, cioè una membrana separata o segregata (*Abscheidung*) dalle cellule, e indurita in seguito.

Quest'ultima opinione è stata sostenuta da Leydig (²), ma non è stata accettata da quelli che hanno scritto dopo.

Il Cartier (³), quantunque non sia riuscito a disgregare in elementi cellulari lo strato limitante esterno dei gecconidi, ha negato la cuticola, ed ha ammesso invece che questo strato è il risultato da un processo di fusione delle cellule dell'epidermide. Egli ammette però (⁴), che in tutti i rettili le sculture o le varie sollevazioni o prolungamenti della superficie siano formazioni o secrezioni cuticolari; quale opinione è stata oggi abbracciata anche dal Braun (⁵) e dal Wiedersheim (⁶).

Il Kerbert (⁷) ha negato intanto la cuticola nel senso di F. Leydig, e le formazioni cuticolari nel senso di O. Cartier, ed ha ammesso, in conformità al principio stabilito da F. E. Schulze (⁸) che « wahre Cuticularbildungen kommen in der Epidermis der drei oberen Wirbelthierclassen nicht vor », essere il sottile rivestimento esterno dell'epidermide dei rettili uno strato di cellule, che egli ha chiamato *strato epitrichiale,* perchè crede essere analogo allo strato corneo o epitrichiale dell'embrione.

L'opinione, che la pellicola sia una secrezione cuticolare, o che siano solamente tali le sculture e i prolungamenti della superficie esterna della stessa, non sembra sorretta da osservazioni esatte.

Il fatto descritto da F. Leydig (⁹) nelle squame dell'*Anguis fragilis,* ove egli ammette, che lo strato finamente granuloso e nucleato rappresenta la matrice della cuticola sovrastante, la quale presenta nel lato interno la così detta zona pneumatica,

(¹) Sono dolente di non potere dare la figura delle sculture a coclea, che sono di una eleganza meravigliosa, avèndole trovate dopo l'incisione delle tavole.

(²) F. Leydig, Memorie citate.

(³) O. Cartier, Verh. d. phys.-med. Gesellschaft in Würzburg. N. F. Bd. III. Abth. I p. 281. 1872.

(⁴) O. Cartier, Verh. d. Vürzburger phys.-med. Gesellschaft N. F. Bd. V pag. 192.

(⁵) M. Braun, Arbeiten aus dem zool.-zoot. Institut in Vürzburg. Bd. IV pag. 20.

(⁶) R. Widersheim, Mem. cit.

(⁷) C. Kerbert, Mem. cit.

(⁸) F. E. Schulze, Mem. cit. Archiv. für mikrosk. Anatomie. Bd. V pag. 295. 1869.

(⁹) F. Leydig, *Ueber Organe eines sechsten Sinnes.* §. 61. pag. 69. Tav. V, fig. 35. Dresden, 1868.

secondo me deve essere interpretato in altro modo. Io sospetto infatti che l'epidermide delle squame dell'*Anguis fragilis*, osservata da F. Leydig, era nell'epoca della muda. Quindi lo strato granuloso nucleato, da lui ritenuto come matrice della cuticola, non era altro che la rete del Malpighi nel suo accrescimento; la zona, detta da lui pneumatica, era probabilmente quello strato della muda, che io chiamo strato glandulare, in via di disfacimento; la parte soprastante a questo strato, descritta da F. Leydig come duplicature della cuticola, evidentemente rappresentava tutto lo strato corneo rivestito dalla sua pellicola. Non mi sembra adunque si possa ammettere in questo caso, che la pellicola poteva essere separata o segregata dal così detto strato granuloso e nucleato.

Anche le osservazioni di O. Cartier (¹), il quale ammette la secrezione della cuticola e dei peli cuticolari dalla parte superiore delle cellule dello strato ch' egli chiama cilindrico interno o strato interno della muda, poggiano sopra un errore d'interpretazione; avvegnacchè io dimostrerò in seguito che gli elementi di questo strato, da me detto glandulare, degenerano invece in una secrezione probabilmente mucosa, che produce il distacco degli strati.

Il fatto che potrebbe venire in aiuto all'opinione di Cartier, è la formazione delle setole del lobo d'attacco dei gecconidi, che avviene nell' epoca della muda in mezzo alle cellule della rete del Malpighi. Queste setole appena cresciute si mostrano omogenee, mentre le cellule sulle quali sorgono sono ancora nucleate e granulose. Ma da un canto queste cellule, più tardi con la successiva cornificazione, divengono anch'esse lamelle omogenee portanti le setole; e dall'altro se si colgono le setole nell'inizio della loro formazione (tav. I, fig. 7, *np*, fig. 8), si veggono granulose, e si vede che esse si formano per divisioni del protoplasma delle cellule, come dimostrerò più tardi.

Si può far questione solamente se lo strato esterno della pellicola possa venire segregato dalle cellule dello strato interno della stessa nel loro stato giovane, cioè nel momento della formazione della nuova epidermide nell'ultimo periodo della muda. Questa ipotesi si può anche escludere, poichè i margini delle lamelle dello strato esterno, strette e allungatissime, non corrispondono ai margini delle cellule larghe e poligonali dello strato sottogiacente. Nè le sculture trasverse, sviluppate lungo il margine ondulato delle lamelle esterne, possono essere prese per sollevazioni allineate della superficie esterna delle cellule sottostanti, essendochè nelle piastre della mascella inferiore della *Lacerta muralis* ho veduto che le cellule poligonali dello strato interno della pellicola erano separate da una discreta quantità di sostanza intercellulare, e le sculture passavano sopra senza mostrare interruzione in corrispondenza di questa sostanza. Cosa che dovrebbe essere tutta all'opposto se le sculture fossero una dipendenza delle cellule sottostanti. D'altronde dalle mie osservazioni fatte in questo periodo, che esporrò in seguito, risulta che tale secrezione non ha luogo. Al contrario si vede allora la matrice dello strato delle sculture composta di cellule nucleate, che più tardi si cornificano e si trasformano in lamelle, allo stesso modo di quelle che vanno a formare lo strato corneo compatto sottostante. In tutti e due i casi avvi un processo

(¹) O. Cartier, Verh. d. Würzburger phys.-med. Gesellschaft N. F. Bd. V Abth. II. p. 192. 1874.

di cornificazione. Se la sostanza cornea sia una trasformazione diretta, o se invece una secrezione del protoplasma cellulare, che va a supplantare mano mano che questo si riassorbe e sparisce, è difficile di poterlo dire. Ma ciò non toglie di potere affermare, essere anche corneo lo strato delle sculture, il quale si scioglie con l'azione prolungata della potassa caustica.

Adunque anche secondo la mia opinione, nell'epidermide dei rettili non esistono vere formazioni cuticolari, ma lo strato esterno della pellicola epidermica, o lo strato delle sculture, è formato di cellule cornificate, ora trasformate in lamelle omogenee e senza nucleo, ed ora fuse in uno strato omogeneo, su cui s'elevano i peli o l'eminenze che formano le sculture.

Debbo però aggiungere che lo strato delle sculture della pellicola epidermica non può essere analogo allo strato epitrichiale dell'embrione come ha sostenuto il Kerbert; avvegnachè un'osservazione recentemente fatta da M. Braun (1) nei lobi d'attacco dei gecconidi dimostra, che lo strato portante le setole manca nell'epidermide dell'embrione, e non appare che nella prima muda.

Da quanto fin qui ho esposto, credo si possa concludere, che l'epidermide dei rettili, nello stato ordinario nel quale si trova nell'epoca remota da quella della muda, consta, come in tutti i vertebrati, di due strati; cioè dello strato mucoso o rete del Malpighi, e dello strato corneo. La rete del Malpighi nella parte profonda è composta di cellule cilindriche, e nella parte esterna di cellule dentate. Lo strato corneo risulta della parte rilassata, della parte dura e compatta e della pellicola epidermica, sulla cui superficie esterna sorgono i peli e l'eminenze che formano le sculture.

2. Organi di senso della pelle dei rettili.

§ 9.

Dobbiamo a F. Leydig la conoscenza degli organi di senso della pelle dei rettili, che nel 1868 (2) li ha scoperti nella pelle della testa della *Coronella laevis*, dell'*Anguis fragilis* e della *Lacerta crocea*. Nell'*Anguis fragilis* il Leydig li ha trovati inoltre, quantunque molto più piccoli, su tutta la superficie del corpo, quasi nella pelle di ogni squama.

Più tardi, nel 1872, gli organi in discorso sono stati trovati da Oscar Cartier (3) nella pelle che riveste tutta la superficie del corpo dei gecconidi, e recentemente M. Braun (4) li ha trovati nella pelle delle squame della mascella inferiore della *Lacerta Lilfordi*.

(1) M. Braun, *Zur Bedeutung der Cuticularborsten auf den Haftlappen*. Arbeiten aus dem zool.-zoot. Institut in Würzburg. Bd. IV pag. 231.

(2) F. Leydig, *Ueber Organe eines sechsten Sinnes*. pag. 81. Dresden, 1878.

(3) O. Cartier, Verh. d. Würzburger phys.-med. Gesellschaft. Bd. III pag. 235-281. 1872.

(4) M. Braun, *Lacerta Lilfordi und Lacerta muralis*. Arbeiten aus dem zool.-zoot. Institut in Würzburg. Bd IV pag. 17. Hamburg, 1877.

Io ho trovato ora questi organi anche nelle squame della mascella inferiore della *Lacerta muralis albiventris* Bp. ed in quelle della mascella inferiore e superiore del *Seps calcides*.

Nella *Lacerta muralis* gli organi di senso della pelle sono scarsissimi, ma molto grandi. Si trovano solamente nella serie delle squame labiali della mascella inferiore, ove se ne contano da 3-6 per ognuna di queste squame.

Nel *Seps calcides* sono invece numerosissimi, ma molto più piccoli. In un taglio trasversale delle squame, tanto nella mascella inferiore (tav. V, fig. 52, *os*), come in quella superiore, se ne possono contare varî, e si vede come essi sono sempre più numerosi nelle squame labiali, precisamente come avviene nella distribuzione di questi organi negli ofidiani (*Coluber viridiflavus, Tropidonotus natrix, Vipera aspis*).

Secondo F. Leydig ([1]) gli organi di senso della pelle della *Coronella austriaca* e dell'*Anguis fragilis* hanno la forma a calice. Nella *Coronella* si trova, secondo lui, nella parte profonda dell' epidermide immediatamente sopra il derma in mezzo alle cellule cilindriche allungate, un bottone ovale, composto di piccole cellule, il quale, quantunque nettamente limitato, non possiede membrana speciale. Sopra e all' intorno del bottone si veggono linee circolari che, malgrado la loro trasparenza, rappresentano cellule epidermiche disposte circolarmente. L'apice dell'organo sembra avere una apertura sormontata da uno stretto canale, fatto dalla cosidetta cuticola; ed il corpo, che si trova nel fondo del calice e tocca immediatamente la cute, molto probabilmente è in rapporto con le fibre nervose. Nell' *Anguis fragilis,* secondo lo stesso Leydig, i contorni degli organi caliciformi della pelle sono fatti da linee circolari, che derivano assolutamente dalle stesse cellule epidermiche. La parte essenziale dell' organo è ugualmente un corpo interno piriforme estremamente pallido nel fondo del calice, il quale mostra qualche volta nella radice una macchia oscura, ed anche una specie di stelo corto, che molto probabilmente sta in legame con la terminazione del nervo. Questo corpo interno nello stato fresco sembra nettamente omogeneo; con l'acido acetico mostra una quantità di piccoli nuclei, e lo stelo si rammollisce e diviene granuloso.

Secondo il Braun gli organi di senso della pelle della *Lacerta Lilfordi* hanno la forma a bottone, e dalla parte inferiore sono in connessione con le fibre nervose. La sostanza di questi bottoni, ch'egli ritiene per quelli stessi detti da Leydig organi caliciformi, è tutta granulosa.

Alla formazione degli organi di senso dei gecconidi, secondo O. Cartier ([2]), prendono parte tutti e due gli strati della pelle, il derma e l'epidermide. Nell'epidermide, secondo questo osservatore, si trova un canale chiuso all'esterno da un coperchio cupoliforme, il quale è fatto dalle lamelle esterne dello strato corneo, e porta sulla superficie esterna lunghi prolungamenti da lui chiamati *peli cuticolari degli organi di senso.* La parete di questo canale è formata, nello strato mucoso, dalle stesse cellule

([1]) F. Leydig, *Ueber Organe eines sechsten Sinnes.* Dresden, 1868.

([2]) O. Cartier, *Ueber den feineren Bau der Epidermis bei den Geckotiden.* Vorläufige Mittheilung. Verh. d. Würzburger phys.-med. Gesellschaft. N. F. Bd. III pag. 235, 1872 — *Studien über den feineren Bau der Haut bei den Reptilien.* Abth. I. Verh. d. Würzburger ec. N. F. Bd. III pag. 290.

piatte di questo strato dirette verticalmente. Dentro di questo canale si avanza una papilla cutanea variabile di forma e di volume, la quale secondo lo stesso rappresenterebbe l'apparecchio terminale nervoso.

§ 10.

La descrizione che O. Cartier ha dato della struttura degli organi di senso della pelle dei gecconidi, quella data da M. Braun degli organi di senso della pelle della *Lacerta Lilfordi,* e quella data da F. Leydig degli stessi organi della *Coronella laevis* e dell'*Anguis fragilis,* come si vede da quanto ho esposto, fanno differire notevolmente questi organi nei loro elementi essenziali. Ciò mi ha spinto a ricercarne minutamente la struttura negli ofidiani e nei gecconidi, nei quali si presentano apparentemente tanto diversi fra loro.

Nei gecconidi gli organi di senso della pelle, meno del lobo d'attacco, si trovano, come ha detto il Cartier, in tutta la superficie del corpo. E come lo stesso Cartier ha fatto notare, nella pelle che riveste le regioni della mascella inferiore, si trovano sparse su tutta la superficie libera delle squame, e nelle squame del corpo si trovano solamente al loro margine (canto) libero o in prossimità dello stesso. Nei tubercoli del dorso, occupano la parte inferiore dei versanti, e mai la punta degli stessi.

Nelle squame delle mascelle sono presso a poco verticali al piano della squama; mentre che nelle squame addominali e nelle altre del corpo, trovandosi sul margine libero, sono un po' inclinati all'infuori; nei tubercoli viceversa sono paralleli all'asse del tubercolo.

Questi organi sono loggiati nello strato esterno della pelle, cioè, in tutta la spessezza dell'epidermide, come negli ofidiani e nelle altre famiglie di rettili.

Hanno la forma veramente a bicchiere; con il fondo toccano immediatamente la superficie esterna del derma, e coll' altra estremità arrivano fino alla superficie esterna dell' epidermide, ove restano chiusi da un coperchio fatto dallo strato corneo compatto molto assottigliato, e dalla sovrastante pellicola epidermica (tav. V, fig. 54-61).

Nell'*Ascalabotes mauritanicus,* gli organi di senso delle squame mascellari poggiano sopra una papilla cutanea, la quale s'insinua nel loro fondo (tav. V, fig. 56); e nelle squame addominali e nel resto del corpo, il derma presenta viceversa una fossetta concava, destinata a ricevere il fondo convesso dell'organo di senso (tav. II, fig. 22; tav. V, fig. 53-61).

In ciascun organo di senso si possono distinguere due parti: il corpo dell'organo, ed il canale che è molto largo e segue al corpo, oltre del coperchio che chiude l'apertura superiore del canale.

Il canale è la parte che si presenta molto variabile nella sua altezza a seconda dello stato, nel quale si trova lo strato mucoso dell'epidermide.

Nell'epoca remota da quella della muda, quando cioè l'epidermide si trova nello stato ordinario, ed è bassa, il canale dell'organo di senso è anch'esso corto (tav. V, fig. 61). Quando l'epidermide si trova in via d'accrescimento, come nel primo periodo della muda, il canale si presenta lungo; essendochè allora è anch'esso in via di accrescimento, e quindi gli elementi della sua parete si sono allungati. È in quest' ultimo stato che lo ha studiato e figurato O. Cartier. Le cellule della parete del canale

poggiano in basso sopra un anello formato da cellule cornee circolari, che separano il canale dal corpo sottostante (tav. V, fig. 54, *st.*).

Anche gli elementi del corpo seguono il vario grado di sviluppo dell'epidermide, cosicchè tutto l'organo non raggiunge il suo completo sviluppo, che nel periodo dell'accrescimento dell'epidermide.

Questi organi sono esclusivamente composti, come in tutti gli altri rettili, di elementi epiteliali, che sono di due specie diverse. Gli elementi epiteliali del canale sono gli stessi elementi ordinarî dell'epidermide; gli elementi epiteliali del corpo viceversa sono di natura sensitiva. Gli uni e gli altri presentano forma diversa a secondo il grado dello sviluppo.

Nell'epoca remota a quella della muda, ho veduto nell'*Ascalabotes mauritanicus* (tav. V, fig. 61) le cellule, che formano il canale, appiattite e poligonali; mentre che le cellule del corpo erano rotonde od ovali, grandi, protoplasmatiche, senza membrana, e con un nucleo piccolo ed omogeneo. Fra queste cellule però se ne trovava qualcuna con molti nuclei contenenti un nucleolo, la quale ho giudicato essere in via di divisione. Io credo che tali cellule, in questo periodo, sono ancora tutte cellule indifferenti, e per conseguenza la sensibilità debba essere ottusa.

Nella stessa specie, quando l'organo raggiunge il suo completo sviluppo, le cellule del canale si presentano lunghe ed appiattite (tav. V, fig. 53 e 54), e le cellule del corpo più piccole e più numerose. Fra queste cellule del corpo, quelle che occupano la parte superiore (*cs*), sono piriformi, e portano un lunghissimo prolungamento a base conica, il quale percorre tutta l'altezza della cavità del canale: le altre restano cellule indifferenti. Queste cellule piriformi, negli organi di senso delle squame mascellari dell'*Ascalabotes mauritanicus,* poggiano sull'apice della papilla, ove probabilmente si mettono in comunicazione con la terminazione della fibra nervosa, che vi penetra per la parte inferiore; quindi rappresentano le cellule sensitive.

Il coperchio, che a mo' di cupola chiude all'esterno l'apertura del canale, è circoscritto da un solco circolare e profondo, dovuto ad una ripiegatura interna dello strato corneo compatto, insieme alla pellicola epidermica sovrastante (tav. II, fig. 22; tav. V, fig. 53, *a' a*). Il margine esterno che limita questo solco, si vede nel profilo più alto del margine interno appartenente al coperchio; per conseguenza guardando in superficie, il margine esterno di questo solco si presenta come un cercine che circoscrive una fossetta con il fondo rilevato fatto dalla superficie esterna del coperchio.

Sulla superficie esterna della pellicola epidermica del coperchio (tav. V, fig. 55) si osserva una scultura anulare, la quale è fatta da una serie di piccole sollevazioni. All'esterno della scultura anulare, cioè fra questa e il solco circolare, resta uno spazio chiaro, nel quale si veggono altre sollevazioni più piccole e puntiformi, disposte concentricamente alla scultura. Nello spazio centrale chiaro, circoscritto dalla detta scultura, sorgono uno, due, tre e raramente quattro prolungamenti sottili, che il Cartier ha chiamato peli cuticolari degli organi di senso. Secondo la mia opinione sono invece gli stessi peli o prolungamenti sensitivi delle cellule piriformi, che percorrono nel loro stato giovane e protoplasmatico l'altezza del canale sottostante, e che in seguito si cornificano insieme alle cellule dalle quali sorgono, e per il successivo sviluppo dell'organo si spingono alla superficie, ove rimangono a far parte della pellicola epidermica.

Per ricercare gli organi di senso dell'*Ascalabotes mauritanicus* ho adoperato varî metodi; ma ciò che meglio mi ha corrisposto per vedere chiaramente le cellule piriformi, nonchè i loro prolungamenti nel canale, è stata la colorazione colla soluzione alcoolica di nitrato d'argento ($^1/_2$ $^0/_0$) dei tagli fatti della pelle indurita nell'acido cromico, e lavati prima lungamente coll'acqua distillata.

§ 11.

Dalle mie osservazioni risulta che gli organi di senso della pelle della testa degli ofidiani, quando hanno raggiunto il loro massimo sviluppo, presentano la forma di un fiasco con il fondo rivolto verso il derma, e con il collo verso la superficie esterna dell'epidermide, della quale misurano l'altezza. Tutto il corpo dell'organo è circondato dalle cellule dello strato del Malpighi. Il fondo ora tocca immediatamente la superficie del derma, ed ora non raggiunge questa superficie, ma vi è connesso per mezzo di una specie di grosso peduncolo, composto di cellule cilindriche, che dal fondo dell'organo vanno ad impiantarsi sulla superficie esterna del derma (tav. V, fig. 57).

Il collo stretto ed allungato traversa lo strato corneo dell'epidermide fin sotto la pellicola. Veduto di profilo (tav. V, fig. 57) la sua parete si mostra composta di linee, che, guardate in superficie, si veggono essere lamelle epidermiche fusiformi senza nucleo, circolarmente disposte all'intorno del lume del collo. Queste lamelle provengono dalla cornificazione delle cellule fusiformi nucleate, che compongono la parete del canale nell'epoca del loro sviluppo.

Questa parte stretta, colla quale vengono a finire in fuori gli organi di senso degli ofidiani, che io chiamo collo, è corrispondente al canale degli organi di senso dei gecconidi. Infatti anche nei gecconidi il canale è separato dalla rete del Malpighi ed è chiuso nello stato ordinario, fra gli elementi dello strato corneo (tav. V, fig. 61). Anche quando l'organo ha raggiunto il suo massimo sviluppo e il canale si è molto allungato, come ho notato innanzi, la parete del canale internamente ed esternamente resta fra due strati cornei. Quindi possiamo affermare che il canale degli organi di senso dei gecconidi percorre anche lo strato corneo, come il collo degli organi di senso degli ofidiani, e la loro differenza sta solamente nella grandezza diversa relativamente al corpo di questi organi.

Il collo degli organi di senso della pelle degli ofidiani è chiuso all'esterno, come il canale degli stessi organi dei gecconidi. Infatti la pellicola epidermica vi passa sopra e chiude perfettamente quest'apertura senza lasciare foro o traccia alcuna di fessura, come erroneamente aveva ritenuto Leydig [1].

Questo fatto importante l'ho messo in chiaro guardando di sopra l'epidermide rigettata nella muda della mascella inferiore del *Tropidonotus natrix* (fig. 18), trattata colla soluzione di nitrato d'argento. Ho veduto chiaramente la pellicola epidermica, che chiude l'apertura dell'organo, benchè trasparente, presentare le sculture trasverse ondulate e dentate le quali si continuano, senza presentare nessuna variazione con quelle delle parti circostanti del resto della pellicola epidermica. Anche gli organi di

[1] F. Leydig, *Ueber der Organe eines sechstes Sinnes*, pag. 81-86. Dresden, 1868.

senso della *Lacerta muralis*, che sono molto grandi e hanno la forma di un calice con il piede attaccato sopra una corta e grossa papilla del derma, si trovano chiusi all'esterno dalla pellicola epidermica come innanzi ho detto.

Il corpo degli organi di senso della pelle degli ofidiani è un tutto solido composto di due specie diverse di cellule, cioè: delle cellule epiteliali ordinarie allungate, che costituiscono la parete; e delle cellule sensitive piriformi che riunite insieme compongono il corpo cellulare interno o conico.

Le cellule della parete, cellule di rivestimento o di sostegno (tav. V, fig. 58, *ce*) sono una modificazione delle stesse cellule della rete del Malpighi, le quali allungate, appiattite ed incurvate su loro stesse verso l'asse dell'organo, come le doghe di una botte, rivestono il corpo interno.

Queste cellule hanno tutte un protoplasma finamente granuloso, e per lo più un nucleo vescicoloso contenente un nucleo, che occupa la parte inferiore del loro corpo. Alcune delle cellule esterne, le più lunghe, hanno due nuclei uno nella parte superiore e l'altro nella parte inferiore.

La parete dell'organo, fatta da queste cellule, è doppia. La parte esterna è formata dalle cellule più lunghe, che, in due o tre strati, dalla superficie esterna del derma sul quale s'impiantano, arrivano fino al livello dello strato corneo. La parte interna è fatta da una o due serie delle stesse cellule più corte, le quali, esternamente arrivano fino al di sotto della parete del collo, internamente non arrivano fino al derma, ma si ricurvano colla loro estremità interna verso il fondo. Quando la papilla, che conduce la fibra nervosa nell'interno dell'organo, è molto assottigliata, questo fondo viene sorretto da un peduncolo, di cellule epiteliali, più corte, senza nucleo, traversato dalla papilla. Nel caso contrario, cioè, quando la papilla filiforme è più sviluppata, l'organo non presenta peduncolo e le cellule della parte interna della parete si impiantano successivamente sopra questa papilla.

Il corpo interno è composto delle cellule sensitive piriformi (tav. V, fig. 58, *cs*), le quali hanno un grosso nucleo, rotondo e granuloso, che occupa quasi tutto il corpo cellulare e contiene un piccolo nucleolo omogeneo e risplendente. Queste cellule stanno collegate col polo profondo alle ramificazioni della fibra nervosa, mentre mandano dal polo superficiale lunghi e fini prolungamenti o peli a base conica. Per conseguenza queste cellule sono simili alle cellule piriformi scoperte da F. E. Schulze (1) negli organi della linea laterale dei giovani pesci e delle larve degli anfibî, e vedute dopo da P. Langerhans (2) negli stessi organi della salamandra, e da E. Bugnion (3) e da M. Malbranc (4) in quelli dell'*Axolotl* e del *Proteo*; e analoghe alle cellule spinose trovate da F. Boll (5)

(1) F. E. Schulze, *Ueber die Nervenendigung in den sogenannten Schleimkanälen der Fische und über entsprechende Organe der durch kiemenathmenden Amphibien.* Arch. f. Anat. u. Phys. 1861. — *Ueber d. Sinnesorgane der Seitenlinie bei Fischen und Amphibien.* Archiv f. mikrosk. Anatomie. Bd. VI.

(2) P. Langerhans, *Ueber d. Haut d. Larve von Salamandra maculosa.* Arch. f. mikrosk. Anat. Bd. IX pag. 745. 1873.

(3) Ed. Bugnion, *Recherches sur les organes sensitifs que se trouvent dans l'épiderme du Protée e de l'Axolotl.* Lausanne, 1873.

(4) M. Malbranc, *Von der Seitenlinie und ihren Sinnesorganen bei Amphibien.* Zeitschrift für wiss. Zool. Bd. XXVI pag. 1875.

(5) F. Boll, *Die Lorenzinischen Ampullen der Selachier* Archiv. f. mikrosk. Anatomie. Bd. IV. 1868.

e da me ([1]) nei tubi di senso dei selacei, ed alle cellule coniche dei calici gustativi trovate da me ([2]) negli stessi animali.

Il corpo interno adunque, formato esclusivamente da un fascio da 20-30 o più cellule piriformi, prende la forma conica ed è rivestito dalle cellule di rivestimento della parete, o del cosidetto calice con il quale fa un tutto solido. Però i prolungamenti del protoplasma cellulare, o i peli sensitivi si avanzano nella cavità del collo, ove le loro estremità acuminate si terminano liberamente allo stesso livello (tav. V, fig. 57).

Gli organi di senso della pelle del *Coluber viridiflavus* che non hanno peduncolo sono molto più grandi di quelli, che sono congiunti alla superficie del derma mercè di un peduncolo. Tale differenza dipende dalla spessezza maggiore della parete dei primi, nel fondo dei quali si vede una papilla conica filiforme piuttosto considerevole, sollevatasi dal sottostante derma. Questa papilla porta con sè una fibra nervosa, che spogliandosi dagli involucri, penetra nel corpo interno, ove il suo cilindrasse si ramifica in fine fibrille nervose, che si collegano con il polo profondo delle cellule piriformi.

Negli organi di senso che hanno il peduncolo, la papilla filiforme è così esile, che si confonde con la membrana fibrosa della fibra nervosa midollare, la quale uscendo dal derma percorre l'asse del peduncolo, e, dopo essersi spogliata dalla guaina fibrosa e midollare, penetra nel corpo interno, ove si comporta come è stato detto innanzi (tav. V, fig. 57). In questo caso la papilla filiforme è distinta dalla membrana fibrosa della fibra nervosa, appena solamente in prossimità del derma.

La presenza di una fibra nervosa a doppio contorno o midollare lungo l'asse del peduncolo o nella parte a questo corrispondente, la sua penetrazione nel corpo interno, dopo essersi spogliata dalle sue membrane, la ramificazione in fibrille del suo cilindrasse, nonchè la congiunzione di queste o la continuazione col polo inferiore delle cellule sensitive, apparisce in modo evidentissimo esaminando uno di questi organi, nel momento della sua formazione nel periodo d'accrescimento dell'epidermide al tempo della muda, in un taglio della pelle del *Coluber viridiflavus* colorito con l'acido osmico ed il picro-carminio, e chiuso nel balsamo nel modo già detto (tav. V, fig. 59, *n*, *cs*).

Insisto su questo fatto, perchè al fatto da me notato negli organi gustativi dei selaci ([3]) in sostegno della teoria di Max Schultze ([4]) sopra la congiunzione diretta degli epitelî sensitivi con le ultime ramificazioni nervose, si aggiunge questo altro, il quale dimostra in modo evidentissimo attaccati direttamente gli elementi epiteliali sensitivi, alle ramificazioni del cilindrasse della fibra nervosa.

([1]) F. Todaro, *Contribuzione all'Anatomia ed alla Fisiologia dei Tubi di senso dei Plagiostomi*. pag. 14. Messina, 1870.

([2]) F. Todaro, *Gli organi del gusto e la mucosa bocco-branchiale dei Selaci*. Ricerche fatte nel Laboratorio della R. Università di Roma, pag. 34. 1873.

([3]) F. Todaro, Mem. cit. pag. 29.

([4]) M. Schultze, *Untersuchungen über den Bau der Nasenschleimhaut, namentlich die Struktur und Endigungsweise der Geruchsnerven bei dem Menschen und den Wirbelthieren*. Halle, 1862.

§ 12.

F. Leydig annovera anche fra gli organi di senso della pelle dei rettili le *macchie bianche* o *chiare* delle squame, sulle quali egli ha dato un cenno nel 1868 (1) e 1872 (2) e una descrizione particolareggiata nel 1873 (3).

Non ostante che, dopo replicate ricerche, egli non sia giunto a mettere in chiaro la loro struttura istologica, li considera tuttavia come una varietà degli organi di senso della pelle dei rettili.

Il Cartier (4) però, il quale ha trovato anche nell'epidermide dei gecconidi, e specialmente in quella delle squame caudali del *Phyllodactylus Lesueurii*, « punti rotondi e chiari come il vetro » confessa non essere riuscito a farsi una congettura; quantunque sotto le cellule piatte di questi punti nel mezzo della rete del Malpighi, abbia veduto elementi chiari e perfettamente rotondi con un nucleo più o meno chiaro, che raggiungevano più della metà dell'altezza dell'epidermide.

Io credo che, fino a tanto che noi non conosciamo meglio la struttura intima di questi *punti chiari* o *macchie bianche*, si debba imitare O. Cartier e non azzardare verun giudizio sulla natura fisiologica loro.

Intanto lo studio della distribuzione delle macchie bianche potrà servire, come quello delle sculture, a fornire dei caratteri zoologici per la diagnosi delle specie.

E già nel 1861, prima dei lavori di Leydig, la distribuzione di queste macchie bianche era stata studiata negli ofidiani da J. Reinhardt (5), al quale si deve dare l'onore della scoperta, quantunque le avesse indicate col nome di *fossette* (*Gruben*). Recentemente questa distribuzione è stata ricercata da M. Braun (6) in alcune lucertole.

§ 13.

Qual'è la funzione probabile degli organi di senso della pelle dei rettili?

In mancanza di esperienze per scuoprire il vero ufficio di questi organi, non abbiamo che l'induzione poggiata sui fatti anatomici.

Gli organi di senso della pelle dei rettili, gli organi della linea laterale dei pesci e degli anfibî ed altri organi analoghi della pelle, sono stati confusi da F. Leydig, sotto il nome di « Organi di un sesto senso », con le formazioni epiteliali sensitive della bocca o cavità bocco-branchiale degli stessi rettili, delle rane, dei pesci e dei mammiferi.

(1) F. Leydig, *Ueber Organe eines sechsten Sinnes*, pag. 83. Dresden, 1868.

(2) F. Leydig, *Zur Kenntniss der Sinnesorgane der Schlangen.* Archiv f. mikrosk. Anatomie. Bd. VIII pag. 343. Anmerkg. 2. 1872.

(3) F. Leydig, *Ueber die äusseren Bedeckungen der Reptilien und Amphibien.* Ester Artikel Bd. IX pag. 767-769. 1873.

(4) O. Cartier, *Verh. d. Würzburger phys.-med. Gesellschaft.* N. F. Bd. III pag. 285. 1872.

(5) J. Reinhardt, *Ueber einige Kleine Gruben an den Schuppen mancher Schlangen (aus einer dänischen Zeitschrift) übersetzt von Troschel.* Archiv f. Naturgeschichte, pag. 127. 1861.

(6) M. Braun, *Lacerta Lilfordi und Lacerta muralis.* Arbeiten aus dem zool.-zoot. Institut in Würzburg, 1877.

F. Leydig (1) ha reso alla scienza un notevole servigio con la scoperta dei bottoni nervosi nel fondo dei canali laterali della pelle dei pesci, ritenuti dagli antichi come canali mucosi, facendo così conoscere che invece questi canali rappresentano un apparecchio nervoso. Ma la creazione di un sesto senso, del quale non si saprebbe assegnare la funzione, non ha avuto eguale favore presso coloro che in seguito si sono occupati di quest' argomento.

L'opinione invece prevalsa è stata quella di F. E. Schulze (2), secondo il quale gli organi caliciformi della pelle e della mucosa boccale dei pesci sono probabilmente organi di gusto, come sono anche tali i bottoni epiteliali, ch'egli ha trovato dopo nella cavità bocco-branchiale delle larve della rana.

All'opposto, gli organi della linea laterale scoperti dallo stesso (3) nelle larve degli amfibî e nei giovanissimi pesci, dei quali dimostrò il rapporto o il passaggio nei bottoni nervosi del Leydig, per l'analogia dei peli terminali di cui sono provviste le loro cellule sensitive, con i peli delle cellule sensitive trovati da Max Schultze e Hasse nelle ampolle uditive, sono organi tattili modificati o conformati in maniera, che questi animali possono avvertire i movimenti dell'acqua nella quale vivono.

F. E. Schulze ha scoperto inoltre che questi organi sono corpi solidi, fatti da cellule sensitive e cellule di sostegno, e non calici glandulari come sostiene ora il Leydig.

Schwalbe (4) e Loven (5) e tutti coloro che hanno trovato o descritto i bottoni epiteliali della bocca dell' uomo e dei mammiferi, li hanno descritti come corpi solidi, ed egualmente come organi di gusto. Anche quelli trovati nella mucosa boccale o bocco-branchiale delle altre classi di animali sono stati descritti come organi solidi e di gusto.

L'opinione di F. E. Schulze, sopra la funzione probabile degli organi della linea laterale, è stata sostenuta da P. Langerhans (6), che ha dato una descrizione della struttura degli organi laterali delle larve della salamandra, corrispondente a quella data da F. E. Schulze degli stessi organi degli altri anfibî.

Per ciò che concerne gli organi sensitivi della pelle dell'*Axolotl* e del *Proteo,* Bugnion (7) dice, che per la loro distribuzione ricordano gli organi laterali degli anfibî, ma per la struttura si ravvicinano più agli organi del gusto; dapoichè, se si ravvicinano agli organi laterali per una distribuzione identica e per la presenza di un cono interno formato da cellule sensitive speciali (piriformi), se ne allontanano dall' altra

(1) Leydig, *Ueber d. Schleimcanaele der Knochenfische.* Müllers Archiv. 1850. — *Lehrbuch der Histologie* 1857.— *Ueber Organe eines sechsten Sinnes*, 1868.

(2) *Die becherförmigen Organe der Fische.* Zeitschrift für Wiss. Zool. Bd. XII pag. 218. 1863.

(3) F. E. Schulze, *Ueber die Nervenendigungen in den sog. Schleimcanaelen der Fische u. über entsprechend Organe der durch Kiemen athm. Amphibien* Müllers Archiv. pag. 759, 1861. — *Ueber d. Sinnesorgane der Seitenlinie bei Fischen* — Archiv. für mikrosk. Anatomie. Bd. VI pag. 62. 1870.

(4) Schwalbe, Archiv. für mikrosk. Anatomie. Bd. III. pag. 504. — Bd. IV pag. 154.

(5) Loven, Archiv. für mikrosk. Anatomie. Bd. IV pag. 96.

(6) P. Langerhans, Archiv. für mikrosk. Anatomie. Bd. IX pag. 745.

(7) Ed. Bugnion, Mem. cit. pag. 298 Bull.

parte per l'assenza completa del tubo membranoso e dei lunghi peli terminali, che fanno salienza sulla superficie dell' epidermide.

A queste difficoltà M. Malbranc ([1]) risponde, che, volendo e dovendo stabilire la distinzione degli organi laterali dai calici gustativi sopra segni meramente istologici, i particolari distintivi nella configurazione generale, nelle forme cellulari, nella sede sulla cute ecc. sono tanto numerose, quanto ne risulterebbero dal paragone loro con le glandule.

Certamente bisogna mettere in calcolo tutte le particolarità di struttura che questi organi presentano, ed il modo ed il luogo di distribuzione loro. F. E. Schulze infatti per stabilire che gli organi caliciformi dei pesci sono òrgani gustativi, si fondò non solo sulla struttura, ma principalmente sul fatto che questi organi si trovano più abbondanti nella mucosa del palato, ove, come si conosce, si distribuisce in questi animali principalmente il nervo glosso-faringeo.

Tuttavia M. Jobert ([2]) contrariamente all'opinione dello Schulze, annovera gli organi caliciformi della pelle dei pesci, della cui struttura ha dato una descrizione diversa, fra gli organi di tatto, giùsta la primitiva significazione data a questi corpi da F. Leydig ([3]). Ed anche A. Zincone ([4]) ha abbracciato una simile opinione, malgrado che corregga la erronea rappresentazione di M. Jobert sulla struttura di questi corpi, e dia una descrizione molto consimile a quella che ne aveva dato F. E. Schulze.

Al Leydig ([5]) non sembra si possa ammettere, che il senso del gusto possa estendersi fino alla pelle, ove si trovano sparsi in questi animali gli organi caliciformi.

Una tale obbiezione però non può avere peso dal punto di vista anatomico quando sappiamo, come fa riflettere A. Foettinger ([6]), che l' epitelio della mucosa boccale si forma dal foglietto embrionale esterno dell'embrione come l'epidermide, ed, eccettuato il nervo ottico, tutti i nervi dei sensi speciali, il nervo olfattivo, il nervo acustico ed il glosso-faringeo, debbono essere considerati come nervi cutanei dal punto di vista funzionale; essendochè i nervi craniani sono nervi rachidiani modificati in seguito al differenziamento che ha subìto, nel corso della sua evoluzione progressiva, l'estremità anteriore del corpo delle vertebrali. Quindi non può nemmeno fisiologicamente aversi difficoltà ad ammettere, che il senso del gusto, limitato nei vertebrati superiori alla lingua e ad alcune regioni della bocca, nei pesci possa essere esteso anche alla pelle per sentire le proprietà chimiche dell'acqua nella quale vivono questi animali.

La sola distribuzione di questi corpi non è adunque criterio sufficiente per stabilire la loro funzione probabile, e bisogna, come dice Malbranc, ricercare gli altri

([1]) M. Malbranc, Mem. cit. pag. 76.

([2]) Jobert, *Études d'Anatomie comparée sur les organes du toucher*. Ann. d. sc. nat. série 5ª Zoologie tom. XVI. 1872.

([3]) F. Leydig, *Ueber die Haut einiger Süsswasserfische*. Zeitsch. f. wiss. Zool. Bd. III pag. 3. 1851.

([4]) A. Zincone, *Osservazioni anatomiche su di alcune appendici tattili dei pesci*. Estratto dal Rendiconto della R. Accademia delle Sc. fis. mat. di Napoli fascicolo 9. 1876.

([5]) Leydig, *Die in Deutschland lebenden Arten der Saurier* pag. 100-103 Tubingen, 1872. — *Zur Kenntniss der Sinnesorgane der Schlangen* mikr. Anatomie. Bd. VIII.

([6]) A. Foettinger, *Recherches sur la structure de l'épiderme des cyclostomes*. Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique série II tom. LXI n. 3. 1876.

caratteri distintivi istologici. Ma a me è sembrato che varî di questi caratteri istologici, ammessi come distintivi fra gli organi del gusto e quelli sensitivi della pelle dal Bugnion e dal Malbranc, sieno fallaci. Tali sono la forma dell'organo, la sua sede sopra una papilla o no, la presenza di un cono interno e tutti gli altri caratteri che si possono incontrare tanto nell'organo creduto di tatto, quanto in quello creduto di gusto.

Un carattere istologico che a me è sembrato costante, è quello che viene fornito dalla forma delle cellule sensitive di questi organi. Nel mio lavoro sopra gli organi del gusto dei selaci (¹) ho fatto rilevare, che la forma a bastoncello del prolungamento periferico delle cellule sensitive sta in corrispondenza con uno dei sensi speciali (olfattivo, visivo, uditivo, gustativo) e la forma a cono con il senso più generale del tatto. Per conseguenza alle campane epiteliali della cavità bocco-branchiale di questi animali, nelle quali ho trovato solamente le cellule a bastoncello, ho dato la significazione di organi di gusto semplici, ed ho significato per organi composti (di gusto e di tatto) i calici di questi animali che contengono insieme alle cellule sensitive a bastoncello, le cellule a cono. Voglio qui far notare che la forma conica dell'elemento sensitivo può essere rappresentata o dal prolungamento periferico della cellula o da un lungo pelo sensitivo a base conica, annesso all'estremità di questo prolungamento, come è negli organi laterali descritti da F. E. Schulze e P. Langerhans.

Un altro carattere istologico, che a me sembra importante per stabilire la funzione probabile di questi organi, è il luogo in cui terminano le estremità libere degli elementi sensitivi. Così negli organi del gusto e in quello dell'olfatto, le estremità libere di questi elementi terminano all'aperto per venire in contatto immediato con i corpi sapidi, o con le particelle odorose. Nell'organo acustico, e negli organi della linea laterale dei pesci e degli anfibi e nei tubi di senso dei selaci, terminano nell'interno di tubi membranosi, ove si trovano in condizioni favorevoli per sentire gli urti o i movimenti impressi dai corpi esterni. Se negli organi laterali del *Proteo* e dell'*Axolotl* manca il tubo membranoso, sembrano però essere chiusi completamente da una cupula epidermica, che non permette nemmeno la penetrazione della soluzione di nitrato di argento nell'interno dell'organo (²).

Se ora riflettiamo sopra gli organi di senso della pelle degli ofidiani e dei sauriani, da quanto ho detto si argomenta che questi organi, per il prolungamento conico delle loro cellule sensitive, sono organi tattili; e tale è stata l'opinione di Cartier (³) per gli organi di senso della pelle dei gecconidi.

Se al carattere importante della forma conica degli elementi epiteliali sensitivi, aggiungiamo l'altro non meno importante che questi prolungamenti conici, che si elevano dal corpo interno, restano chiusi nella cavità di un canale, abbiamo una prova di più in sostegno di questa ipotesi e del rapporto di questi organi con quelli della linea laterale, malgrado che sia diversa la loro distribuzione.

(¹) Mem. cit. 52, 53.
(²) M. Malbranc, Mem. cit. pag. 64.
(³) Cartier, *Studien ueber den feineren Bau der Haut bei den Reptilien*. I. Abtheilung pag. 292.

3. Derma.

Sulla struttura intima del derma o cute della pelle dei rettili, abbastanza conosciuta specialmente per i lavori di Leydig, io non posso aggiungere che poche osservazioni.

Nei rettili bisogna distinguere, come nei mammiferi, il derma o la cute, e lo strato congiuntivo sottocutaneo.

La cute dei rettili è molto spessa, resistente ed estensibile; ma queste sue proprietà variano secondo la specie e secondo la regione del corpo. Gli ofidiani sono quelli tra i rettili che hanno la cute più spessa, più resistente e più estensibile, specialmente nella regione del corpo. È in grazia di tali proprietà che questi animali, come Dumeril e Bibron [1] hanno fatto notare, possono introdurre nel loro tubo intestinale una preda che per le sue dimensioni ecceda molto e fino a quattro o cinque volte quella che aveva il loro ventre nello stato di vacuità.

Le dianzi dette proprietà della cute dipendono dalla peculiare struttura del suo connettivo.

Nella pelle dell'addome degli ofidiani si distingue nella cute uno strato limitante superiore ed uno inferiore. Questo è molto più spesso del primo, ed è fatto da molti fasci di connettivo fibrillare che decorrono paralleli nel senso longitudinale. L'altro è molto sottile, e risulta ordinariamente da una sola serie di grossi fasci di connettivo che decorrono trasversalmente, e quindi nei tagli longitudinali si presentano tronchi.

La parte media, limitata da questi due strati, è fatta anche da fasci di tessuto congiuntivo fibrillare che si elevano dallo strato limitante inferiore, e camminando obbliquamente si portano incrociandosi in tutti i sensi nello strato limitante superiore. Questi fasci misti a fibre elastiche fanno nella parte media un tessuto rilassato, mentre che nei due strati limitanti il tessuto congiuntivo è fitto. Così il derma di questa parte è suscettibile di una grande estensibilità ed offre al tempo stesso una grande resistenza.

Fra le maglie del tessuto rilassato della parte media si trovano sparse le cellule pigmentate ramificate, che sono di due specie come da per tutto nella cute dei rettili; cioè cellule a pigmento nero, e cellule a pigmento giallo. I prolungamenti ramificati delle cellule a pigmento nero, in questo luogo molto scarse, non sorpassano, come neppure quelli delle cellule a pigmento giallo, i limiti della cute.

La cute della testa degli stessi ofidiani, come quella della testa (tav. III, fig. 31) e dell'addome della *Lacerta muralis* presenta due strati: uno inferiore (*g*) formato da fitti fasci di congiuntivo fibrillare, che decorrono alcuni nel senso longitudinale, altri nel senso trasverso ed altre nel senso verticale; l'altro superiore costituito da un tessuto connettivo molle e spongioso, il quale contiene le cellule a pigmento giallo ed a pigmento nero (*cr*) in tanta abbondanza che si può distinguere col nome di strato pigmentato.

Nella cute della testa e di tutta la parte dorsale di questi rettili, in corrispondenza alle macchie cutanee, le cellule a pigmento nero (tav. III, fig. 31 *cr*) sono

[1] Dumeril et Bibron, Mem. cit. tom. VI pag. 107.

grandissime e le loro ramificazioni ascendono nel soprastante strato mucoso del Malpighi, ove arrivano qualche volta fino alla parte esterna. Le ramificazioni delle cellule a pigmento nero che penetrano nella rete del Malpighi, ora si presentano esili, ed ora grosse e molto cariche di granuli neri di pigmento. Tali differenze sono sempre in rapporto con l'intensità diversa delle macchie nere cutanee. Nei tubercoli della pianta del piede della *Lacerta muralis*, i prolungamenti di queste cellule, come innanzi ho detto, fanno nella rete del Malpighi una folta rete attorno alle cellule epiteliali dello strato esterno.

Anche la cute dell'*Ascalabotes mauritanicus* si può dividere in strato superiore carico di pigmento, e in strato inferiore fascicolato. Ho veduto nella cute dei tubercoli del dorso (tav. II, fig. 23 *cr*) che le cellule a pigmento nero sono di due forme: alcune grosse e rotonde occupano il lato inferiore di questo strato; altre piccole poco ramificate che fanno sporgenza nella rete del Malpighi.

Nella cute dell'addome di quest'ultima specie, fra lo strato pigmentato esterno e lo strato fascicolato interno, si trova uno strato medio come nella cute dell'addome degli ofidiani, fatto da un intreccio di fibre di tessuto congiuntivo rilassato e molle, nelle cui maglie si trovano grosse cellule rotonde ed ovali, ora sparse e ora riunite in gruppi di due a quattro. Queste cellule hanno i caratteri delle cellule embrionali, cioè, son prive di membrana, hanno un protoplasma omogeneo di un bianco sbiadito come il vetro spulito, e contengono ordinariamente un nucleo vescicoloso uninucleato. Alcune però sono senza nucleo, altre invece ne hanno due o tre; alcune invece presentano uno o più vacuoli con o senza nucleo contemporaneamente. Queste cellule sono state descritte da O. Cartier (1). Quale sia la loro ulteriore destinazione, e in che rapporto genetico stiano con le cellule pigmentate, ancora non si può dire; però io richiamo l'attenzione sopra tale rapporto di chi avrà l'occasione di occuparsi in seguito di questo argomento.

Nello strato fascicolato della cute dell'*Ascalabotes mauritanicus* vi sono le placche ossee, che si trovano incostantemente in altre specie di gecconidi e negli scincoidi. Queste placche ossee descritte la prima volta da Heusinger (2) come prodotto di secrezione del « muco malpigliano », sono state ora riconosciute come connettivo ossificante.

Tanto nei gecconidi come negli scincoidi le placche, tavolette o squame ossee sono chiuse in una tasca congiuntivale. La grandezza e la struttura di queste placche ossee nell'*Ascalabotes mauritanicus* e nel *Seps calcides,* nei quali io l'ho studiato, variano molto.

Nell'*Ascalabotes mauritanicus* (tav. I, fig. 1 *po*) le placche ossee della cute del corpo sono molto piccole, alquanto distanti fra loro, e disposte in serie nello strato limitante inferiore della cute. Guardate di sopra si presentano quadrangolari, mentre che nel profilo hanno l'aspetto ovale. Nella cute della testa della stessa specie sono molto più grandi e più ravvicinate tra loro, ed occupano la massima parte dello strato inferiore. Nella struttura lasciano vedere un nucleo centrale fatto da una sostanza fondamentale granulosa, contenente piccoli corpuscoli ossei. In questo nucleo centrale

(1) O. Cartier, Verh. d. Würzburger phys.-med. Gesellschaft. N. F. Bd. III pag. 293. 1872.
(2) Heusinger, Mem. cit.

vengono a terminarsi i fasci di tessuto congiuntivo disposti a raggi, che traversano la tasca squamosa e formano la parte periferica della scaglia ossea, nella quale si possono considerare analoghe alle fibre di Sharpey delle ossa dei mammiferi.

Nel *Seps calcides* le scaglie ossee sono larghissime e la tasca nella quale sono chiuse sta come il periostio delle ossa. Sono formate in tutte le parti da una sostanza fondamentale granulosa sparsa di corpuscoli ossei ramificati, come sono state descritte e figurate da Leydig (1) nell'*Anguis fragilis*. In questa sostanza si trovano scavati i canali midollari o di Havers, i quali sono piuttosto grandi, e decorrono nel senso longitudinale. Questi canali midollari, che da E. Blancard (2) erano stati chiamati spazî aerei, contengono un grosso vaso sanguigno circondato da tessuto congiuntivo ricco di cellule ramificate con pigmento nero.

§ 14.

Il tessuto sottocutaneo è anche variabile secondo la specie e secondo la regione del corpo. Nella cute dell'addome degli ofidiani e delle lacertine manca generalmente od è assai scarso; perchè i muscoli, che vengono ad impiantarsi nello strato limitante interno della cute, fanno uno strato fitto.

Nella cute del dorso e della testa di questi stessi animali, si trova uno strato sottocutaneo ordinariamente non molto abbondante, fatto da un tessuto congiuntivo rilassato e molle, che il Leydig descrive come « lymphdrüsige Masse ».

Anche nel *Seps calcides* il tessuto sottocutaneo manca nella pelle dell'addome ed è scarso negli altri punti.

Nell' *Ascalabotes mauritanicus* viceversa il tessuto sottocutaneo forma da per tutto uno strato molto spesso, e presenta i veri caratteri del tessuto congiuntivo embrionale. In questo tessuto embrionale si veggono delle fessure che potrebbero essere spazî linfatici come li ha interpretati Leydig (3).

Oltre di questi spazî nella parte superiore dello strato sottocutaneo di questa specie (tav. I, fig. 1) si trovano un gran numero di vescicole grosse e piccole, che a prima giunta sembrano cellule di grasso che non si colorano con il picro-carminio, ma neanche coll'acido osmico nei preparati freschi. Invece si presentano omogenee e pallide o di un bianco sbiadito. Non hanno nucleo, e le più grosse vescicole contengono altre tre o quattro vescicole più piccole. Ho trovato queste stesse vescicole, aggruppate in pacchetti, anche sotto la cute dell'addome della *Lacerta muralis*. Se si esclude la presenza del nucleo, per la forma, l'aspetto e per la reazione col picro-carminio e coll'acido osmico, queste vescicole si ravvicinano molto alle cellule rotonde che innanzi abbiamo notato nel derma soprastante, delle quali sembrano rappresentare uno stadio più avanzato. Le vescicole in discorso sono state trovate da C. Kerbert (4) nel *Platydactylus guttatus*.

Nella parte superiore dello strato sottocutaneo decorrono inoltre i grossi tronchi

(1) F. Leydig, *Ueber Organe eines sechsten Sinnes*. Tav. V, fig. 34-36. Dresden, 1868.

(2) E. Blancard, Mem. cit.

(3) F. Leydig, *Ueber die äusseren Bedeckungen der Reptilien und Amphibien*. Archiv für mikrosk. Anatomie. Bd. IX pag. 780. 1873.

(4) C. Kerbert, Mem. cit. pag. 223.

vascolari e nervosi. Ove questo strato manca, come nella pelle dell'addome degli ofidiani, i grossi tronchi vascolari e nervosi decorrono nel tessuto congiuntivo intermuscolare che separa gli attacchi al derma delle fibre muscolari, o nei fasci congiuntivi dello strato limitante inferiore del derma stesso. Da questi grossi tronchi si partono via via i rami vascolari e nervosi, che ramificandosi vengono a formare le reti vascolari e nervose nel soprastante derma.

§ 15.

La cute prende parte alla formazione delle squame con tutta la sua massa o tutti i suoi strati, i quali ripiegandosi in fuori vengono a formare delle papille gigantesche che ricoperte dalla epidermide costituiscono le squame (tav. I, fig. 1 e 2). Dalla superficie esterna di queste grosse papille si elevano le papille secondarie, o le piccole papille degli organi di senso, che, come ho detto, nel *Coluber viridiflavus* sono filiformi e nella testa dell'*Ascalobates mauritanicus* sono coniche. Le papille filiformi del *Coluber viridiflavus* sono fatte di tessuto congiuntivo fibrillare, e le papille coniche dell'*Ascalabotes mauritanicus* di tessuto congiuntivo, molle, soffice e più abbondante. Nelle prime (tav. V, fig. 57-59) come innanzi ho dimostrato, si può seguire nettamente la fibra nervosa midollare che li traversa fino alla sua ulteriore destinazione; nelle seconde la fibra nervosa, dopo aver penetrato nella base della papilla, si perde di vista, e non si vede altro che una linea spirale risplendente, la quale probabilmente indica il cammino seguìto dalla fibra nervosa penetrata per la base (tav. V, fig. 56).

PARTE SECONDA

Muda

§ 16.

La conoscenza della muda dei rettili è antichissima. Aristotile (¹) sapeva già che, in primavera e in autunno, gli stellioni, le lucertole e specialmente i serpenti mutano la pelle, come gl'insetti e i crostacei. Egli descrisse con grande esattezza il modo nel quale il serpe si spoglia interamente dalla testa verso la coda, rivoltandosi in fuori la parte interna della spoglia.

Plinio (²), che quattro secoli dopo descrisse nuovamente il modo nel quale si spoglia il serpe, ha copiato la descrizione di Aristotile. Egli però crede, che il fenomeno avvenga solamente in primavera sotto l'azione del succo di finocchio gustato da quest'animale; chiama quindi la spoglia ruggine invernale (*hiberno situ*), quasichè si fosse sovrapposta alla pelle durante l'intorpidimento dell'animale in tale stagione.

Kazwini (³) cosmografo persiano, il Plinio dell'Oriente morto il 1285 dell' êra

(¹) Aristotilis opera omnia. Graece et latine Vol. tertium *De animalibus Historiae* Lib. VIII cap. VII pag. 162. Parisiis editore Didot, 1854.

(²) Plinio, H. N. Lib. VII, cap. 27. Lib. XX, cap. 23.

(³) Kazwini, Agiâib al Makhlûqât (*Maraviglie delle cose create*). Dal testo pubbl. dal prof. Ferd. Wüstenfeld pag. 432. Göttingen, 1849. Tutta la parte di questo libro che si riferisce ai rettili mi è stata tradotta gentilmente dal mio amico prof. Michele Amari.

volgare, ha notato anch' egli il fenomeno della muda dei serpenti, ma, ad imitazione di Plinio, è facile ad ammettere delle cose strane. Dice infatti che: « i serpenti vivono « mille anni e mutan pelle ogni anno. Al mutar della pelle comparisce un punto « sulla nuca dell'animale, onde dal numero dei detti punti si conosce quanti anni « ha vissuto il serpente ».

Sul cadere del secolo passato Linneo (1) ritenne come Plinio, che i serpenti mutano la pelle solamente in primavera.

Nel 1823 L. Metaxà (2) si è occupato di far conoscere come e quando si spogliano i serpenti; ma tanto sull'una come sull'altra quistione ha ripetuto quello che aveva scritto Aristotile; De Blainville (3), secondo il quale i rettili squamosi spesso si rinnovano interamente, aveva fatto l'anno precedente l'osservazione importante, che a certe epoche la pelle poteva avere « deux epidermes, l'un qui vient de se former, et l'autre qui est détaché sans être encore tombé ».

Dumeril e Bibron (4) hanno notato dopo, che nei sauriani e negli ofidiani tenuti in captività, il rinnovamento dell'epidermide, o la muda, avviene molte volte nel corso dell'anno, e che nei sauriani l'epidermide non cade in un pezzo solo, come negli ofidiani, ma a lembi. Hanno anche avuto occasione di osservare la muda dell'epidermide cornea in una piccola specie di Emyde, e nei batraciani, nei quali, dicono, che la totalità dell'epidermide sembra rinnovarsi soventissimo, ma soggiungono che si ha poco occasione di osservarla, perchè l'animale stesso, o quelli della stessa specie che si trovano immersi nell' acqua, ingoiano con una certa avidità questa materia mucosa (5).

Una nuova via d' investigazione sopra questo argomento è stata aperta nel 1872 da O. Cartier (6), il quale ha studiato per la prima volta i fenomeni d'accrescimento dell'epidermide dei rettili, nell'epoca della muda.

Ora in tutti i tempi si è cercato di rintracciare la causa determinante la caduta dell'epidermide nella muda. Plinio aveva immaginato doversi all'azione del finocchio, ed altri a quella più strana di un balsamo radicale nascosto nelle viscere della terra.

L. Metaxà (7) dice che lo spogliarsi dei rettili « è certo morbosa affezione, come « la muda degli uccelli, la dentizione dei mammiferi, la desquamazione della cuticu- « la umana in certe impetigini, la quale per disseccamento si stacca come quella « degli angui ».

(1) Linnéo, tom. I pag. 710 cit. da Dumeril e Bibron.

(2) L. Metaxà, *Monografia dei Serpenti di Roma e suoi contorni*. Art. II pag. 6. Roma, 1823.

(3) De Blainville, Mem. cit. pag. 127.

(4) Dumeril e Bibron, Mem. cit. tom. I pag. 71-72; tom. II pag. 625; tom. VI pag. 109-111.

(5) Che i batracî si ingojano con avidità la epidermide rigettata nella muda, credo bisogna avere una conferma. A Giorgio Sabini, nel commentare la favola di Ovidio *De stellione ex puero*, era caduto in mente un simile pensiero. In fatti egli dice: *invidus et maledicus puer fingitur a Cerere mutatus in stellionem, propter naturam animalis, quo nullum invidet homini fraudolentius, nam cum exuit membranam hibernam*, *devorat eam invidens nobis optimum rimedium contra morbum comitialem, ut Plinius tradit.* P. Ovidii metamorphosis, seu fabulae poeticae: earumque interpretatio Ethica Physica et Historica Georgi Sabini. Lib. V, Sab. in fab. VII pag. 172. Francofurti, 1589.

(6) O. Cartier, Verh. d. Würzburger phs.-med. Gesellschaft. Bd. V pag. 192.

(7) Mem. cit. pag. 7.

Dumeril e Bibron (1) attribuiscono la determinazione della muda ad alcune circostanze atmosferiche, come le variazioni nella secchezza e nella umidità, e dicono che in questo periodo l'animale è in uno stato di sofferenza, e non mangia più.

Al Leydig (2), il quale sostiene che la presenza di uno strato omogeneo involgente l'epidermide spiega forse perchè la muda dei rettili e degli anfibi decorre allo stesso modo degli artropodi nei quali la cuticola della pelle ha una parte incomparabilmente maggiore, vuole sembrargli che lo strato cellulare grassoso da lui descritto contribuisca in certo modo alla muda della pelle ; ed inoltre egli ha trovato, sotto la cosidetta cuticola degli ofidiani, corpi speciali ch' è inclinato ad ammettere in rapporto con il processo della muda.

Secondo F. E. Schulze (3), nella muda dei batracî e dei tritoni, il distacco delle due serie di cellule piatte superiori avviene probabilmente per la secrezione delle glandule unicellulari a bottiglia, che si trovano normalmente nell' epidermide degli anfibî.

Ed. Bugnion (4) è anche d'opinione, che nei perennibranchiati la secrezione degli otricoli mucosi esercita un' azione sulla muda.

Quindi Carl Claus (5), nei suoi fondamenti di zoologia, accetta l' opinione, che negli anfibî la secrezione delle cellule a bottiglia distacca probabilmente nella muda lo strato cellulare superiore.

Ma secondo O. Cartier (6), questo processo, se potrebbe aver luogo per avventura negli anfibî, non può avvenire nei rettili che non posseggono le cellule glandulari, come i pesci e gli anfibî. Nei rettili, secondo lo stesso, il distacco dell'epidermide avviene in seguito ai processi puri d'accrescimento dell'epidermide, pei quali, innanzi che lo strato cellulare superficiale si stacchi in tutti i suoi punti, si forma più sotto la nuova epidermide. La secrezione dei peli cuticolari, che si formano in mezzo a queste due parti, deve avere un' importanza per la separazione degli strati, e quindi per l'avviamento della muda.

M. Braun (7), che ha studiato i processi istologici nella muda dell' *Astacus fluviatilis* nel quale ammette trovarsi rapporti simili a quelli descritti da O. Cartier nella pelle dei rettili, sostiene l'opinione di questo, essendochè per lui i peli cuticolari contribuiscono alla separazione meccanica degli strati.

C. Kerbert (8) però, che ha negato la formazione della cuticola tanto nel senso del Leydig come in quello del Cartier, ammette essere ne' rettili la formazione del nuovo strato corneo, una ripetizione della formazione dell'epidermide nell' embrione.

(1) Mem. cit. tom. I pag. 71; tom. VI pag. 109.

(2) Leydig, Arch. für mikrosk. Anatomie. Bd. IX pag. 763 e 765-766.

(3) F. E. Schulze, *Epitel. und Drüsenzellen*. Archiv. für mikrosk Anatomie. Bd. III pag. 167, 168. 1864.

(4) Ed. Bugnion, Mem. cit. Bull. Soc. Vaud. Sc. Nat. XII, pag. 306, 307.

(5) C. Claus, *Grundzüge der Zoologie*, pag. 954. 1876.

(6) O. Cartier, Verh. d. Würzburger phys. med. Gesellschaft. Bd. V pag. 194, 195.

(7) M. Braun, *Ueber die histologischen Vorgänge bei der Häutung von Astacus fluviatilis*. Arbeiten aus dem zool.-zoot. Institut in Würzburg. Bd. II pag. 159-161. 1875.

(8) C. Kerbert, Mem. cit. pag. 233.

In questo modo, egli dice, i processi della muda vengono ricondotti ad un processo molto più semplice di quello che ha abbracciato il Cartier.

Ma M. Braun ([1]) replica contro una tale opinione, che nel *Gecko* la formazione dei peli d'attacco, con i quali sono morfologicamente di eguale valore i peli della muda, non ha luogo negli embrioni, ma più tardi: la prima volta nella prima muda. Quindi, secondo il Braun, la conclusione che ne tira il Kerbert non è giusta; imperocchè, se manca nei rettili e molto più nei loro embrioni una cuticola propria come membrana sollevabile, non si può dire per conseguenza, che nella muda avvenga lo stesso processo come nella prima origine dell'epidermide.

Per quanto è vera questa osservazione di M. Braun, altrettanto è erronea l'opinione, che i peli, le setole o le sculture contribuiscano alla separazione degli strati. Dimostrerò nel seguito di questa Memoria, che invece la separazione fra la parte ch'è destinata a cascare e quella dalla quale si forma la nuova epidermide, avviene, nella parte libera delle squame, in seguito della degenerazione e disfacimento dello strato da me detto glandulare, e nei solchi per il disseccamento dello strato lucido.

§ 17.

Ho studiato i mutamenti dell'epidermide nell'epoca della muda in quattro specie appartenenti a famiglie diverse, cioè nell'*Ascalabotes mauritanicus*, nella *Lacerta muralis*, nel *Seps calcides* e nel *Coluber viridiflavus*.

Onde rendere facile la descrizione dei fenomeni intimi, che si succedono nell'epidermide all'epoca della muda, divido tutto il processo in tre periodi:

Il primo periodo abbraccia i puri fenomeni di accrescimento dell'epidermide; il secondo periodo la separazione degli strati o il distacco dell'epidermide antica, e la formazione della nuova nella parte libera delle squame; il terzo periodo il distacco dell'epidermide antica dal fondo dei solchi e quindi la sua totale caduta in un pezzo solo o a grandi lembi, secondo le varie specie.

Primo periodo.

§ 18.

Il periodo di accrescimento dell'epidermide dei rettili si può dividere in due stadî.

1. *Stadio.* L'accrescimento dell'epidermide comincia colla proliferazione delle cellule cilindriche dello strato profondo della rete del Malpighi, e ciò costituisce il primo stadio, che è stato osservato da me nell'epidermide della mascella inferiore dell'*Ascalabotes mauritanicus*, e nel *Coluber viridiflavus*.

Nell'*Ascalabotes mauritanicus* (tav. I, fig. 4) le cellule cilindriche dello strato profondo della rete del Malpighi (*e*) si allungano, ed il loro nucleo ingrandito prende la forma ovale e presenta due, tre o quattro granuli omogenei ed oscuri, i quali sono disposti in linea lungo l'asse del nucleo, che va da un polo all'altro. Questi

([1]) Braun, *Zur Bedeutung der Cuticularborsten auf den Haftlappen der Geckotiden.* Arbeiten aus dem zool.-zoot. Institut in Würzburg. Bd. IV pag. 231. 1878.

granuli (granuli di Butschli, o nucleoli) precedono la divisione e quindi la proliferazione delle cellule, che vengono ad accrescere lo strato superiore della rete del Malpighi.

Le nuove cellule (*e'*) che compongono lo strato superiore della rete del Malpighi sono grandi, prive di membrana e posseggono un protoplasma leggermente granuloso, che si colora col picro-carminio, ed un grosso nucleo vescicoloso. Hanno la forma poliedrica ed i margini dentati con i quali s' ingranano reciprocamente.

Il nucleo di queste cellule per lo più possiede un nucleolo, ma alcuni di loro hanno un nucleo ovale più grande, il quale presenta due o tre granuli oscuri, locchè indica che le cellule dentate continuano a moltiplicarsi.

Le antiche cellule dentate (tav. I, fig. 4 *a'*) che fin qui formavano lo strato superiore della rete del Malpighi, si trovano ora spinte in alto, e si veggono cornificate quantunque alcune di loro presentino ancora un resto di nucleo, e non abbiano perduto la forma poliedrica. Queste cellule per conseguenza in seguito al progresso della cornificazione si appiattiscono in lamelle, e passano più tardi a far parte dello strato corneo rilassato.

Il primo stadio d'accrescimento dell'epidermide del *Coluber viridiflavus* (tav. V, fig. 40 *e*), era anche caratterizzato dall'allungamento delle cellule cilindriche dello strato profondo della rete del Malpighi, dall' ingrandimento e dalla forma ovale allungata del loro nucleo, nonchè dalla presenza di due, tre o quattro granuli oscuri, disposti in linea lungo l'asse maggiore de' nuclei.

La trasformazione in tessuto corneo delle antiche cellule poligonali dentate della rete del Malpighi, pare che nel *Coluber viridiflavus* preceda questo stadio, e pare anzi che prima avvengano generazioni di altre cellule dentate, che si cornificano tutte successivamente e vanno ad accrescere le lamelle della parte inferiore dello strato corneo rilassato, prima che abbiano cominciamento i fenomeni della muda (tav. IV, fig. 39, *e*, *e'*, *a'*).

§ 19.

2. *Stadio.* Il secondo stadio d'accrescimento dell' epidermide de' rettili è caratterizzato dalla formazione dello strato grassoso, e dalla sua trasformazione in strato corneo granuloso; dalla formazione dello strato glandulare e dello strato lucido; e dalla muda degli organi di senso.

Nell'*Ascalabotes mauritanicus* le cellule dentate superficiali del nuovo strato esterno della rete del Malpighi (tav. II, fig. 21 *d*; tav. III, fig. 24 *d*), in corrispondenza a tutta la parte libera delle squame, si fondono insieme e formano uno strato protoplasmatico, posto tra lo strato corneo e la rete del Malpighi. Questo strato protoplasmatico si arresta in prossimità della radice delle squame e dei loro margini liberi; quindi manca nelle parti delle squame che limitano i solchi. Da questo strato protoplasmatico nascono due specie diverse di cellule, cioè, le cellule dello strato, che io chiamo *strato glandulare,* e le cellule dello strato lucido.

Le cellule glandulari sono le prime a nascere (tav. II, fig. 21 *d*; tav. III, fig. 24 *d*) e somigliano agli otricoli mucosi dell'epidermide degli anfibî; cioè, sono rotondi od ovali, hanno una sottile parete, un contenuto vischioso o mucoso sparso di grosse granulazioni chiare come globuli albuminosi, ed uno o due e raramente tre nuclei vescicolosi nucleolati. Si formano qua e là nello strato protoplasmatico, e nel punto

ove si forma una di queste cellule si vede in principio un piccolo nucleo rotondo, che s' ingrandisce, prende la forma ovale e presenta uno o due piccoli nucleoli. Ora a me pare che questi nuclei ingrandendosi formino essi stessi gli otricoli glandulari in discorso.

Dopo che si son formati gli otricoli glandulari, nella sostanza protoplasmatica che resta fra un otricolo e l'altro, appariscono ancora de' piccoli nuclei rotondi contenenti un nucleo, ed in certi punti degli spazî chiari. Attorno a questi nuclei il protoplasma diviene più trasparente, e così, mentre da un canto si moltiplicano gli otricoli o le cellule glandulari che si ravvicinano per costituire lo strato glandulare nella parte inferiore, dall'altro si formano le cellule a protoplasma trasparente, che spinte in alto formano un altro strato nella parte superiore (tav. II, fig. 22 *d, c.*). Questo secondo strato è lo strato lucido degli autori. Adunque gli elementi dello strato lucido, come gli elementi dello strato glandulare provengono entrambi da uno strato protoplasmatico preesistente, ma con diverso processo; dapoichè, gli otricoli glandulari si formano per ingrandimento dei nuclei che si sono sviluppati i primi nel protaplasma (formazione libera); e le cellule dello strato lucido per la delimitazione dello stesso protoplasma, che circonda-i nuclei che nascono gli ultimi. Gli otricoli glandulari hanno come ho detto una parete ed un contenuto mucoso o albuminoso; le cellule dello strato lucido viceversa son prive di parete, e hanno un protoplasma, che diviene trasparente come il vetro.

Intanto al disopra dello strato protoplasmatico prima (tav. II, fig. 21 *b*, tav. III, fig. 24 *b*), come al disopra dello strato lucido dopo (tav. II, fig. 22 *b*, tav. V, fig. 53 *b*), esiste lo strato granuloso fatto da una serie di cellule prismatiche basse nel profilo ma non appiattite, le quali hanno un contenuto sparso di granulazioni oscure. Questo strato granuloso sul margine libero delle squame (tav. III, fig. 24 *b*, tav. V, fig. 53 *b*) s'infossa per circondare gli organi di senso, che in questo stadio mostrano anche loro incipiente i fenomeni della muda (tav. V, fig. 53, *cs*).

Io non ho potuto osservare come nell'*Ascalabotes mauritanicus* si formi questo strato granuloso, che precede nella formazione lo strato glandulare e lo strato lucido innanzi descritti; nè ho potuto vedere i fenomeni successivi della muda nelle piastre addominali di quest'animali, ma mi è stato facile di seguirli nelle squame del loro lobo di attacco. Nelle squame della testa del *Coluber viridiflavus* e dell'addome della *Lacerta muralis*, ho avuto occasione di studiare tanto la formazione dello strato granuloso, quanto gli ulteriori fenomeni della muda, come dirò fra poco.

Intanto nelle squame addominali (tav. II, fig. 22, tav. V, fig. 53), come anche nelle squame della testa e nei tubercoli dell'*Ascalabotes mauritanicus*, nell' ultimo grado del periodo d'accrescimento, l'epidermide consta:

a) dello strato corneo antico; *b*) dello strato corneo granuloso; *c*) dello strato lucido; *d*) dello strato glandulare; *e*) e dello strato mucoso o rete del Malpighi.

Lo strato corneo antico consta della pellicola epidermica, dello strato corneo compatto e dello strato corneo rilassato come nello stato ordinario. Lo strato corneo granuloso, lo strato lucido e lo strato glandulare si sono formati in questo periodo.

La rete del Malpighi è composta di due parti o strati, come nell' epidermide allo stato ordinario nell'epoca remota da quella della muda, con la differenza che lo strato profondo è ispessito e presenta i suoi elementi in via di proliferazione, e lo

strato superiore, molto più ispessito ancora per aumento numerico dei suoi elementi, è anch'esso di nuova formazione; essendochè questi elementi, formati nel periodo della muda, hanno preso il posto degli elementi dell'antico strato esterno della rete del Malpighi, i quali spinti in alto fin dall'inizio della muda, si sono cornificati, appiattiti e quindi gradatamente passati a far parte dell'antico strato corneo rilassato.

§ 20.

La struttura dell'epidermide del pulvillo scansorio o lobo di attacco dell'*Ascalabotes mauritanicus* in questo grado di sviluppo (tav. III, fig. 25) presenta una notevole differenza dal resto dell'epidermide dello stesso animale al medesimo grado. Manca in primo luogo lo strato granuloso; allo strato corneo antico, che non presenta la parte compatta, ma è rilassato e porta sulla superficie libera le setole (p'), segue immediatamente lo strato lucido (c), e sotto a questo lo strato glandulare (d) e quindi la rete del Malpighi.

Lo strato lucido qui è composto di più serie di cellule fusiformi, trasparenti come il vetro e per lo più nucleate. Lo strato glandulare consiste non di cellule otricolari, ma di cellule cilindriche, con un nucleo vescicoloso contenente un nucleolo, un protoplasma finamente granuloso, e prive di membrana inviluppante come le cellule della rete del Malpighi.

La rete del Malpighi è composta anche di due strati; lo strato profondo è fatto di una serie di piccole cellule prismatiche o basso-cilindriche con un grosso nucleo uninucleolato; lo strato esterno consta di più serie di cellule dentate. La parte superficiale di questo ultimo strato presenta una serie di grosse cellule con protoplasma granuloso contenenti un nucleo vescicoloso nucleolato, che portano dal lato esterno le lunghe setole (np) della nuova epidermide, già formate in un grado di sviluppo precedente.

Nel grado di sviluppo precedente a questo (tav. I, fig. 7) la parte esterna della rete del Malpighi consiste di grandi cellule poligonali, che si dividono e si differenziano nelle cellule dentate, nelle cellule portanti le setole, nelle cellule dello strato glandulare ed in quelle dello strato lucido innanzi descritte. In questo stadio si vede che le setole nascono dalla divisione del protoplasma (tav. I, fig. 8), e non sono formazioni cuticolari come ha preteso il Cartier. Le setole, come lo strato delle cellule glandulari si formano solamente nella parte libera delle squame lamelliformi del lobo di attacco.

§ 21.

Nella *Lacerta muralis* abbiamo in principio la formazione di più strati protoplasmatici, per la fusione delle serie di cellule superficiali della rete del Malpighi (tav. III, fig. 29 c c') quando ancora le cellule di questo strato sono dentate. In ciascuno degli strati protoplasmatici si trovano dei nuclei vescicolosi, i quali contengono un nucleolo ed alcuni anche due. Da questi strati protoplasmatici nascono due forme diverse di cellule, cioè; dallo strato protoplasmatico inferiore (tav. III, fig. 30 c') si forma uno strato semplice di cellule cilindriche; e dagli strati protoplasmatici esterni

si formano varie serie di cellule, che presentano nel profilo l'aspetto fusiforme (fig. 30 *c*).

Queste due forme di cellule son prive di membrana; hanno un protoplasma finamente granuloso, che si colora col carminio, ed un nucleo vescicoloso nucleolato. Però le cellule dello strato cilindrico mancano per lo più del nucleo; in quelle che hanno il nucleo, questo occupa il lato inferiore del corpo cellulare. Le cellule dello strato fusiforme presentano i margini leggermente dentati.

Ora, come ho osservato nelle squame dell'addome e della mascella inferiore, le cellule fusiformi subiscono gradatamente una degenerazione. Nelle squame della mascella inferiore questa degenerazione avviene mano mano, che le cellule fusiformi si formano dai fasci protoplasmatici (tav. III, fig. 29 *b*). Nelle squame addominali, ora avviene come nelle squame della mascella inferiore, ed ora la degenerazione delle cellule fusiformi non comincia, che dopo la totale formazione di questo strato.

La degenerazione di queste cellule fusiformi accade nel seguente modo. In primo luogo sparisce il nucleo nè io saprei dire in che modo; quindi il protoplasma delle cellule si trasforma in una quantità di grosse granulazioni omogenee e risplendenti, che presentano per lo più la forma di bastonetti verticali. Mano mano che avanza una tale degenerazione del protoplasma cellulare, i limiti delle cellule spariscono (tav. III, fig. 31 *b*, tav. IV, fig. 32 *b*), e così tutte le cellule arrivano a fondersi in uno strato granuloso come l'ha figurato il Cartier (¹). Questo strato granuloso, dalle squame si estende nei solchi, ove però le cellule, che gli danno origine, presentano nel profilo la forma ovale, e le grosse granulazioni sono rotonde e molto più scarse e restano lungamente senza fondersi (tav. III, fig. 31). Finalmente questo strato nella *Lacerta muralis* nel successivo sviluppo sparisce e non si trova più nei periodi successivi.

Di che natura sia una tale degenerazione, con certezza non si può dire. Ciò che si può affermare si è, ch'essa non è degenerazione grassosa; avvegnachè questo strato non si colora punto con l'acido osmico, ed invece i granuli si colorano leggermente in rosso pallido con il picro-carminio. Secondo la mia opinione, questo strato in origine è analogo allo strato lucido, che più tardi si degenera e dà luogo allo strato granuloso. Avremo così una corta ricapitolazione in uno, dei due anzidetti strati distinti nelle altre specie.

Le cellule cilindriche, che formano uno strato sottostante a quello descritto, e che O. Cartier ha descritto come cellule cilindriche dello strato interno della muda segreganti la cuticola in forma di squamette, si suddividono ancora, e la divisione del loro protoplasma è preceduto dalla divisione del nucleo (tav. III, fig. 31 *c'*; tav. IV, fig. 32 *d*). Pare che nel lato superiore si formino le cellule che si appiattiscono in lamelle senza nucleo, e fanno uno strato semplice sotto dello strato corneo rilassato al quale si riuniscono essendo già sparito lo strato granuloso (tav. IV, fig. *c'*): mentre che nel lato inferiore restano le cellule cilindriche glandulari che più tardi si disgregano in una sostanza vischiosa molto granulosa. Le lamelle, che fanno così lo strato limitante inferiore dello strato corneo, guardate dal lato inferiore, presentano la forma

(¹) O. Cartier, Verh. d. Würzburger phys.-med. Gesellschaft. N. F. Bd. V tav. III fig. 10. 1874.

poligonale e la superficie traversata da linee fatte da una successione di denti alternati da intagli, e sono unite tra loro da una sostanza intercellulare abbondante (tav. IV, fig. 35[b]).

Nelle squame della mascella inferiore del *Seps calcides* (tav. V, fig. 52), ho potuto osservare sotto dello strato corneo rilassato, lo strato granuloso, nel quale appena restava qualche traccia di contorno cellulare; e, sotto a questo, lo strato protoplasmatico contenente qua e là qualche nucleo vescicoloso. Questo strato, come abbiamo detto innanzi, rappresenta la matrice dello strato lucido e dello strato glandulare.

Nella rete del Malpighi enormemente ispessita, nella quale le cellule dello strato esterno mostravano striato il protoplasma, si vedevano inoltre i nuovi organi di senso in incipiente formazione.

§ 22.

Nel *Coluber viridiflavus* il primo a formarsi dei nuovi strati della muda è lo strato granuloso, come nelle specie fin qui studiate. Tale strato, in questa specie, si presenta sotto due forme diverse, che corrispondono a due gradi differenti del suo sviluppo.

In origine è composto di cellule rotonde, prive di membrana e di nucleo, e cariche di gocciolette di grasso che rifrangono fortemente la luce e si colorano in nero con l'acido osmico. Queste cellule o nuclei nascono dalle cellule cilindriche dello strato profondo della rete del Malpighi, prima della formazione delle cellule d'aspetto fusiforme nel profilo che vanno a formare dopo il nuovo strato esterno di questa rete.

Nell'inizio della muda infatti le prime cellule o nuclei, che nascono dalle cellule cilindriche dello strato profondo della rete del Malpighi, restano più o meno rotonde e si caricano di gocciolette grassose mano mano che si riuniscono per formar uno strato spesso, fra la rete del Malpighi e il soprastante strato corneo (tav. V, fig. 41 *b*). Questo strato dal lato inferiore si presenta qua e là insaccato nella rete del Malpighi.

Gli insaccamenti sono circondati dalle cellule, che nel profilo si presentano fusiformi, le quali si sono originate dopo dalle stesse cellule cilindriche sottostanti. Questi insaccamenti hanno l'aspetto degli otricoli o vescicole delle glandule sebacee dei mammiferi, e nei luoghi, ove si trovano gli organi di senso, gli insaccamenti circondano questi organi che si staccano e vengono trasportati dallo strato anzidetto, nel tempo stesso che nella rete del Malpighi si sviluppano i nuovi organi di senso (tav. V, fig. 57 *b*).

A me sembra che questo strato in tale grado di sviluppo, sia quello stesso che F. Leydig [1] ha descritto nell'*Anguis fragilis* e nella *Coronella laevis,* sotto il nome di *trübweissliche Lage* o *fettzellige Schicht der Epidermis* e che dice corrisponde a quello detto da Blanchard *lame sous-jacente granuleuse.*

In seguito del processo, alla degenerazione grassa, succede la trasformazione cornea di questo strato, che diminuisce di spessezza; le gocciolette grasse si riassorbono e le cellule si fondono in una sostanza granulosa e tenace. Formatosi in tal modo lo strato corneo granuloso, per lo sviluppo successivo degli strati sottostanti,

(1) F. Leydig, *Ueber Organe eines sechsten Sinnes*, pag. 68-81. Dresden, 1878.

lucido e glandulare, che lo separano dalla rete del Malpighi con la quale era prima in rapporto immediato, viene spinto in alto, trasportando con sè gli antichi organi di senso distaccati (tav. V, fig. 47, *os'*). Si trova allora posto fra lo strato lucido e lo strato corneo rilassato, ove resta permanente anche nell' epidermide staccata nella muda (tav. V, fig. 47, 48 *b*).

La formazione e lo sviluppo dello strato glandulare e dello strato lucido nel *Coluber viridiflavus* è sfuggita disgraziatamente alla mia osservazione per mancanza di animali in quel grado di sviluppo. Però la costituzione di questi due strati nell'ultimo grado del loro accrescimento (tav. V, fig. 53, *c c'*), nel quale ho potuto osservarli nelle squame della mascella inferiore, lascia credere, che il processo debba presentare una qualche varietà con quello, col quale si svilupppano questi due strati nel *Ascalabotes mauritanicus*, e molto più poi con quello che avviene nella *Lacerta muralis*.

Tuttavia nell'ultimo grado di accrescimento dell'epidermide del *Coluber viridiflavus* abbiamo i medesimi strati che notammo nell' epidermide dell' *Ascalabotes* allo stesso grado di sviluppo, cioè: pellicola epidermica, strato corneo compatto, strato corneo rilassato, strato granuloso, strato lucido, strato glandulare, strato esterno e strato interno della rete del Malpighi (tav. V, fig. 43-47-48).

La pellicola epidermica, lo strato corneo compatto, e lo strato corneo rilassato (tav. V, fig. 41-43-47-48, *a, a', a''*) rappresentano l'antico strato corneo come nelle altre specie, e quindi conservano i medesimi caratteri dello stato ordinario.

Lo strato granuloso (tav. V, fig. 43-47-48, *b*.) originatosi in questo periodo, è amorfo, ed è fatto da una sostanza tenacissima, giallognola come la sostanza cornea, e sparsa di fine granulazioni. Il lato superiore di questo strato, aderente allo strato corneo, è liscio e netto nel profilo; il lato inferiore viceversa, aderente intimamente allo strato lucido, è irregolare, scabro ed irto di sporgenze.

Lo strato lucido, (tav. V, 43-47-48, *c, c'*) formatosi anch'esso in questo periodo, è composto di varie serie di cellule fusiformi leggermente dentate ed ingranate reciprocamente, le quali hanno il protoplasma trasparente quasi vitreo, che non si colora affatto coll'acido osmico. Il picro-carminio colora appena o punto il protoplasma di queste cellule, mentre che colora in roseo il loro nucleo, che contiene uno o due piccoli nucleoli, che si colorano anche un po' più forte.

Le cellule della serie inferiore dello strato lucido sono prismatiche, basse ma non appiattite, con il nucleo spinto in alto contro il lato superiore convesso. O. Cartier (1) aveva descritto questa serie di cellule, come lo strato cellulare esterno della muda, o lo strato esterno delle cellule cilindriche. Ma C. Kerbert (2) ha giustamente sostenuto dopo non potere essere altro che le giovani cellule inferiori dello strato lucido. Ed infatti, nel seguito del processo, esse si appiattiscono più, e si veggono nel limite inferiore dell'epidermide staccata nella muda formare sempre parte dello strato lucido (tav. V, fig. 47, 48 *c'*).

Lo strato glandulare nel *Coluber viridiflavus* (tav. V, fig. 43, *d*) è fatto di una

(1) O. Cartier, Verh. d. Würzburger phys.-med. Gesellschaft. N. F. Bd. V pag. 197. 1874.
(2) C. Kerbert, Mem. cit. pag. 212.

serie di grandi cellule cilindriche, le quali hanno un protoplasma granuloso ed un nucleo vescicoloso, ordinariamente nucleolato, ad eccezione di poche altre che si presentano prive di nucleo. Come nell'*Ascalabotes mauritanicus* e nella *Lacerta muralis,* lo strato glandulare manca nei solchi, e si trova solamente nella parte libera delle squame ove cessa bruscamente in prossimità della radice e dei margini liberi; precisamente come nelle due specie innanzi menzionate.

O. Cartier ([1]) aveva indicato questo strato come lo strato delle cellule interne della muda, o lo strato delle cellule cilindriche interne destinate a segregare la cuticola in forma di peli negli ofidiani. C. Kerbert ([2]) ha supposto non essere altro che lo strato granuloso, fatto dalle stesse cellule, che F. Leydig aveva descritto come cellule a contenuto grassoso.

Che questo strato sia invece di natura glandulare, lo dimostra la consecutiva degenerazione delle sue cellule in un prodotto mucoso o vischioso, che distacca la parte sovrastante dell'epidermide, come fra breve dimostrerò.

La rete del Malpighi si distingue, come nello stato ordinario, in strato esterno, e strato interno o profondo. Però lo strato esterno in questo grado di accrescimento è così alto, che rappresenta poco meno della metà di tutta la spessezza dell'epidermide, e misura l'altezza di tutta l'epidermide nello stato ordinario. È fatto di grandi cellule schiacciate, che isolate presentano una superficie larga e poligonale, mentre nel taglio dell'epidermide presentano il profilo fusiforme.

Le cellule della parte inferiore di questo strato sono ancora giovani, ed hanno la superficie ora liscia ed ora leggermente dentata, un protoplasma trasparente ed un nucleo con uno o più nucleoli (tav. V, fig. 43, *e'*).

Le cellule della parte superiore (tav. V, fig. 43-47-48) più avanzate in età, hanno la parte corticale del loro protoplasma oscura e striata. Per conseguenza quando si guarda la superficie di una di queste cellule isolata, il protoplasma corticale si vede oscuro e come granuloso, e non lascia scorgere nè il protoplasma sottile della parte centrale nè il nucleo della cellula. Nel profilo però si vede il protoplasma centrale e trasparente in un piano orizzontale, contenente un nucleo uninucleolato, ed un protoplasma corticale striato perpendicolarmente al piano centrale.

Queste cellule con protoplasma striato si trovano, in questo grado di accrescimento, inoltre in tutte le altre specie da me ricercate, cioè: *Ascalabotes mauritanicus* (fig. 21, 22, 23, *e''*), *Lacerta muralis* (fig. 31, 32, *e''*), *Seps calcides* (fig. 32 *e''*). Sembra un passaggio delle cellule dentate, colle quali in principio si confondono, in cellule a protoplasma striato. Però più tardi si distinguono facilmente, essendochè le cellule dentate sono prive di membrana e le spine o i denti, mercè dei quali s' ingranano fra loro, fanno prominenza sulla superficie esterna; mentre al contrario le cellule a protoplasma segmentato hanno acquistato un leggiero straterello esterno omogeneo jalino, che si vede passare rettilineo sopra le striature, le quali dal di sotto dello straterello jalino si approfondano verso la parte centrale, ove le interlinee di separazione del protoplasma sono molto più pronunziate o larghe, che non alla parte

([1]) O. Cartier, l. ora cit.
([2]) C. Kerbert, Mem. cit. pag. 213.

esterna. Però lo straterello jalino della superficie di queste cellule indica, non la membrana cellulare, ma l'inizio della loro cornificazione, che procede dalla parte periferica verso la parte centrale. In fine la maniera come sparisce questo protoplasma striato nella cornificazione delle cellule, che studieremo in proseguo, non lascia dubbio, che le strie non possono rappresentare nè spine nè poricanali ma semplici strie del protoplasma, le quali, come dimostrerò più giù, esercitano una grande influenza nella divisione di ciascuna di queste cellule in due lamelle.

Queste cellule a protoplasma striato sono state descritte e figurate da O. Cartier ([1]) nel *Platydactylus verus*, e figurate solamente nella *Lacerta stirpium* ([2]). Egli però ha preso le strie per una disposizione gibbosa (*höckerige Beschaffenheit*) della parete cellulare, dovuta allo spessimento ineguale di questa parete. Ma per le ragioni innanzi dette si esclude una tale ipotesi, essendo invece in questo caso vere divisioni del protoplasma in strie.

Lo strato profondo della rete del Malpighi, in questo grado d'accrescimento, è fatto dalle cellule cilindriche in via di proliferazione, le quali nella estremità superiore presentano i margini cancellati, e contengono due serie di grandi nuclei, ovali ed allungati, che hanno piccoli nucleoli o granuli oscuri, lungo il grande asse del nucleo (tav. V, fig. 43, 47, 48).

§ 23.

Ho detto che in questo stadio del primo periodo si sviluppano nella rete del Malpighi i nuovi organi di senso, che vengono a supplantare gli antichi, che si staccano e vengono portati via con lo strato granuloso.

Ho veduto questo fenomeno non appena iniziato nelle squame addominali dell'*Ascalabotes mauritanicus* (tav. V, fig. 53, *cs*). Tutto il canale dell'organo di senso era circondato dallo strato granuloso, e le cellule allungate della sua parete erano disseccate. Il nucleo di queste cellule, grosso, ovale o piriforme, si mostrava omogeneo, giallognolo e risplendente come il nucleo delle cellule disseccate dello strato lucido dei solchi delle squame addominali e della faccia inferiore delle squame del pulvillo scansorio della stessa specie come in seguito dimostrerò. Il loro corpo era medesimamente divenuto vitreo. Nell'interno del canale traspariva un grosso pelo sensitivo.

Questo canale, insieme allo strato corneo trasverso o circolare che lo separa dal corpo, veniva spinto in fuori dal canale del nuovo organo di senso sviluppatosi sotto.

Il nuovo organo di senso mostrava già distinti il canale ed il corpo. La parete del nuovo canale era fatta di piccole cellule quadrangolari uninucleate e granulose; ed il corpo di piccole cellule indifferenti uninucleate e granulose, rotonde od ovali.

Come si è sviluppato questo nuovo organo? Ho detto nella prima parte di questa Memoria (pag. 1092) che il corpo degli organi di senso delle squame addominali dell'*Ascalabotes mauritanicus*, anche quando l'organo ha raggiunto il massimo sviluppo, presenta differenziate solamente le cellule della parte superiore che portano i peli

([1]) O. Cartier, Verh. d. Würzburger phys.-med. Gesellschaft. N. F. Bd. III pag. 283. 1872.
([2]) Verh. d. Würzburger phys.-med. Gesellschaft. N. F. Bd. V tav. III fig. 10. 1874.

sensitivi a base conica, mentre tutte le altre cellule restano indifferenti. Sono queste cellule indifferenti del corpo dell'antico organo di senso, che differenziandosi ora formano le cellule parietali del canale, e più tardi formeranno quelle sensitive del corpo.

Disgraziatamente io non ho potuto seguire nell'*Ascalabotes mauritanicus* i gradi di sviluppo successivi a questo, ma porto opinione, che le cellule disseccate dell'antico canale si staccano e cadono con l'epidermide rigettata nella muda, e le cellule sensitive dell'antico corpo, con i peli cui son provvisti, si cornificano e restano alla superficie della nuova epidermide, finchè questa a sua volta non casca.

Un grado immediatamente successivo a questo descritto nell'*Ascalabotes mauritanicus* l'ho trovato nelle squame della mascella inferiore del *Seps calcides* e del *Coluber viridiflavus*. In queste due specie ho trovato che gli antichi organi di senso erano già distaccati, e nella rete del Malpighi si trovavano sviluppati gli organi nuovi (tav. V, fig. 47 e 52 *os*).

Nel *Coluber viridiflavus* (tav. V, fig. 47 *os'*) gli antichi organi si vedevano ancora nello strato corneo dell'epidermide destinata a cadere. Le cellule della parete di questi organi erano disseccati e nell'interno si vedevano ancora trasparire i resti delle cellule del corpo interno, alcune delle quali si coloravano in rosso con il picro-carminio.

I nuovi organi presentavano un lungo e largo canale, che percorreva tutta l'altezza dello strato esterno della rete del Malpighi, e un corpo a forma di bottone molto più piccolo che occupava lo strato profondo di questa rete.

Tanto nell'una come nell'altra specie la parete del canale era fatta di cellule epidermiche nucleate e fusiformi, che decorrevano circolarmente attorno il lume del canale come ho potuto accertare guardando questi organi di sopra nel *Coluber viridiflavus* (tav. V, fig. 60).

Il corpo dei nuovi organi di senso nel *Seps calcides* era composto di piccoli nuclei, o cellule granulose senza nucleo di forma ovale. Nel *Coluber viridiflavus* gli elementi del corpo dei nuovi organi di senso si trovavano in due gradi diversi di sviluppo. In alcuni erano nuclei, o cellule rotonde piccole granulose, e senza nucleo, che nella parte inferiore stavano in relazione con fibrille nervose, probabilmente anche esse di nuova formazione. In altri invece (tav. V, fig. 59) erano cellule più grosse bipolari, che possedevano un protoplasma granuloso e un grosso nucleo vescicoloso uninucleato. Queste cellule bipolari formavano un grosso bottone sotto il canale nello strato profondo della rete del Malpighi. In questo bottone penetrava un grosso cilindrasse che si divideva in fibrille, alle quali si vedevano attaccate le cellule in discorso per il loro polo inferiore, come ho già detto nella prima parte di questa Memoria (pag. 1095).

Le cellule epiteliali che stavano attorno al menzionato bottone, alcune erano già allungate e lo rivestivano; altre situate in basso sopra il derma presentavano i medesimi caratteri di quelle del bottone; ma mentre quelle del bottone rappresentano le venture cellule piriformi sensitive del corpo interno, queste ultime con il successivo sviluppo verranno a formare le cellule di rivestimento della parete.

Intanto tutte queste cellule, tanto quelle di rivestimento della parete, quanto quelle sensitive del corpo interno che stanno collegate alle fibrille nervose, nascono dallo strato profondo della rete del Malpighi.

Secondo periodo.

§ 24.

Il secondo periodo della muda della pelle dei rettili è caratterizzato dal distacco dell'antica epidermide e dalla formazione della nuova. Questo periodo si può anche distinguere in due stadî.

1. *Stadio.* Nel primo stadio abbiamo la secrezione delle cellule glandulari, la quale consiste nella degenerazione e disfacimento delle stesse cellule in un prodotto di secrezione di natura probabilmente mucosa. Questa secrezione produce, per tutta l'estensione della parte libera delle squame, ove si estende solamente lo strato glandulare, la separazione o il distacco dell'epidermide destinata a cadere. Nelle parti delle squame che limitano i solchi, l'antica epidermide resta ancora aderente, e specialmente nel fondo dei solchi, fino al terzo ed ultimo periodo, nel quale avviene il suo distacco e quindi la totale caduta della epidermide antica.

La degenerazione delle cellule glandulari ho avuto occasione di osservarla nelle squame del pulvillo scansorio o lobo d'attacco dell'*Ascalabotes mauritanicus*, nelle squame addominali della *Lacerta muralis* ed in quelle della mascella inferiore del *Coluber viridiflavus*.

§ 25.

Nella parte libera delle squame lamelliformi del lobo d'attacco dell'*Ascalabotes mauritanicus*, le cellule cilindriche, che formano lo strato glandulare, il quale, come ho detto innanzi, si trova fra lo strato lucido e le nuove setole della superficie esterna della sottostante rete del Malpighi, si trasformano gradatamente in una secrezione vischiosa sparsa di granulazioni o detritus cellulari.

Ho potuto seguire tutti i gradi, che conducono a questa secrezione o degenerazione delle cellule in sostanza vischiosa o mucosa. Il fenomeno comincia coll'aumento in tutti i sensi delle dette cellule cilindriche, che si allungano e si allargano, e con la divisione del loro nucleo (tav. III, fig. 26 *d'*). I nuclei delle cellule si dividono più volte, finchè perdono ogni vitalità e si disfanno. Attorno a questi nuclei si forma uno spazio chiaro, ed attorno a questo spazio chiaro comincia la degenerazione del protoplasma delle cellule, che si presenta sotto forma di granulazione piuttosto nerastra. Tale degenerazione invade in seguito tutto il resto del protoplasma cellulare, e così le cellule si trasformano in sostanza vischiosa e granulosa, che stacca lo strato lucido dell'epidermide destinata a cadere, dallo strato delle setole della nuova epidermide sottostante (tav. III, fig. 27 *d''*). Questa secrezione si accumula d'ordinario più abbondantemente nella periferia della parte libera delle squame, anzichè nel centro; in tale modo accresce la concavità della superficie libera di questa parte, che, come innanzi ho detto, rappresenta una specie di ventosa inserviente all'attacco meccanico del pulvillo di questo animale.

Durante la degenerazione delle cellule glandulari nella parte libera delle squame, avviene successivamente nelle loro lunghe radici (cioè, in tutto quel tratto che dalla parte libera si estende fino al fondo del solco e ne limita il lato interno) in continuazione dello strato glandulare del pulvillo, la formazione di elementi glandulari,

che si disfanno o degenerano nella secrezione vischiosa e granulosa, mano mano che si formano. Contemporaneamente si forma sotto una serie di cellule, che portano sottili peluzzi, ed i corpi delle grosse cellule del pulvillo provviste di setole (tav. III, fig. 27, *np*) si veggono chiaramente fondersi, per formare lo strato esterno omogeneo della pellicola epidermica che riveste la fossetta del pulvillo e porta le setole.

§ 26.

Nel *Coluber viridiflavus* la secrezione dello strato glandulare avviene in modo analogo, e consiste nella loro degenerazione in sostanza vischiosa o mucosa.

La secrezione dello strato glandulare si fa gradatamente. Ora comincia con varî punti di degenerazione delle cellule nella parte centrale dello strato (tav. V, fig. 47, *d'*), ed ora nella parte periferica. Via via che si avanza il fenomeno, cadono in degenerazione le altre cellule glandulari, e così tutto lo strato glandulare si trova sostituito dalla sostanza segregata, che resta accumulata fra lo strato lucido dell'epidermide destinata a cadere, e lo strato superiore della rete del Malpighi, non ancora trasformato in tessuto corneo.

L'accumulo della sostanza segregata avviene in queste squame in senso inverso di quello che abbiamo osservato nelle squame del pulvillo dell'*Ascalabotes mauritanicus*, cioè: nelle squame del *Coluber viridiflavus* la sostanza segregata si accumula abbondantemente nella parte centrale, donde va gradatamente assottigliandosi verso la parte periferica. Per tale accumulo della sostanza segregata, abbondante nel centro, si avvalla da un canto leggermente la sottostante rete del Malpighi, e si solleva gradatamente dall'altro in forma convessa all' esterno l'epidermide destinata a cadere (tav. V, fig. 49). Così questa secrezione distacca queste due parti tra loro per tutta la porzione libera delle squame.

Nei preparati freschi, coloriti con l'acido osmico e col picro-carminio, la sostanza segregata si presenta vischiosa o mucosa e leggermente granulosa (tav. V, fig. 47, *d'*, fig. 49, *d''*). Nelle squame labiali dello stesso animale ho veduto che, caduta la sostanza segregata, restano le reliquie delle cellule glandulari (tav. V, fig. 48, *d'*). Questo fatto lascia supporre che tali cellule abbiano fatta la membrana prima della loro degenerazione, a differenza delle altre che non lasciano nessuna reliquia, e che perciò erano rimaste cellule nude.

§ 27.

Nella *Lacerta muralis* le cellule glandulari si degenerano in una sostanza che presenta l'aspetto più granuloso, che non nel *Coluber viridiflavus*. Però non è difficile, che la differenza della granulosità maggiore della sostanza segregata, da me osservata in questa specie tanto nelle squame addominali quanto su quelle della testa, sia dipendente dal momento nel quale ho fatta l'osservazione; essendochè, dimorando un certo tempo, la parte più liquida della secrezione si riassorbe, e allora si presenta meno abbondante e più granulosa.

§ 28.

2. *Stadio*. Dopo la degenerazione delle cellule dello strato glandulare, e quindi del consecutivo distacco dello strato lucido, che resta connesso all'antica epidermide cornea per mezzo dello strato granuloso, dissi che avviene la formazione della nuova

epidermide. Ora io ho potuto seguire i processi, che danno luogo a questa formazione, tanto nelle squame addominali della *Lacerta muralis*, quanto in quelle della mascella inferiore del *Coluber viridiflavus*. Siccome ho trovato, che nell'una e nell'altre specie questi processi non variano, così mi limiterò a descriverli nella *Lacerta muralis*.

Ho detto già che le cellule dello strato esterno della rete del Malpighi, formate nel primo periodo della muda, mostrano, nell'ultimo stadio di tale periodo, la parte corticale del loro protoplasma oscura, granulosa e striata perpendicolarmente al piano centrale delle cellule. Tale disposizione del protoplasma di queste cellule si mostra più avanzata nel primo stadio del secondo periodo e più ancora nell'ultimo, nel quale si vede che le strie verticali del protoplasma hanno raggiunto la parte centrale.

Il maggior numero delle cellule, in quest'ultimo stadio del secondo periodo, non presentano nucleo, e nel tempo stesso la trasformazione cornea nella parte corticale del loro protoplasma si trova avanzata. Al tempo stesso nella parte centrale si forma una fissura orizzontale, che si mostra nel profilo in mezzo a due serie di strie verticali (tav. IV, fig. 33, fig. 34, *e''*).

Avanzandosi il processo della cornificazione dalla parte corticale verso la parte centrale delle cellule, queste si appiattiscono e si allargano di più, e quindi nel profilo si presentano come strette cellule fusiformi allungatissime.

Sopra un taglio longitudinale delle squame addominali della stessa lucertola (tav. IV, fig. 35, *na*) in questo grado, lo strato anzidetto presenta già l'aspetto corneo. La sostanza delle cellule è omogenea, giallognola risplendente e consistente come qualunque altra sostanza cornea appena formata; meno però la linea del piano centrale delle cellule, ove ancora si presenta un resto delle strie verticali dell' antico protoplasma come una linea seghettata.

Lungo di questa linea centrale avviene, per una specie di clivaggio, la separazione di ciascuna cellula in due lamelle cornee. Infatti nella pelle tenuta per 24-48 ore nell'alcool ordinario, io sono riuscito a vedere disgregate, per l'azione meccanica del rasojo adoperato per fare il taglio, le cellule più superficiali di questo strato in tale grado di cornificazione. Alcune di queste cellule si presentavano divise o biforcate in due lamelle per lungo tratto, ed alcune lamelle erano anche interamente staccate dalle altre.

La divisione in due lamelle di ciascuna di queste cellule, non possiamo attribuirla ad influenza del nucleo; essendochè in alcune di loro il nucleo si vede ancora conservato (tav. IV, fig. 35, *na*). Invece una tale divisione è dipendente dalla disposizione striata del protoplasma, che è assoggettata alla trasformazione cornea.

Quando la cornificazione ha raggiunto il suo termine, come nell'epidermide antica, le lamelle sono così intimamente legate tra loro, che non è più possibile di poterle disgregare con nessuno dei reattivi conosciuti, e, come ho già detto, lo strato corneo, formato da queste lamelle, si presenta duro e compatto. Guardando in profilo con i forti ingrandimenti si scorgono solamente le linee orizzontali od obblique inclinate le une verso le altre, che indicano il posto occupato da ciascuna lamella. Nei tagli sottilissimi trattati con la potassa caustica (35 %) si riesce anche a vedere dentati i margini delle lamelle.

Ho fatto anche già notare come le cellule, che si trovano cariche di pigmento, non soffrono l'azione del processo di cornificazione. Quindi ove esistono tali cellule restano intercalate qua e là in mezzo alle lamelle dello strato corneo, come ho detto nella prima parte di questa Memoria (pag. 1079).

§ 29.

Non tutte le cellule, che costituiscono il detto strato superiore della rete del Malpighi, si trasformano nello strato corneo compatto della nuova epidermide. Prima di tale trasformazione, la serie delle cellule superficiali di questo strato dà origine alla pellicola epidermica.

La parte del protoplasma che sta sopra la fissura centrale delle cellule superficiali si divide nel senso trasverso delle squame in più fasci, che fondendosi con quelli che risultano dalla divisione delle cellule limitrofe formano uno strato di cellule fusiformi, le quali si veggono in tutta la loro estensione guardandoli di sopra (tav. IV, fig. 35[a]); mentre nel profilo appare lo strato fatto dalle loro estremità troncate (tav. IV, fig. 33, fig. 34, *na''*).

Molte delle cellule fusiformi posseggono un nucleo vescicoloso con uno, due o tre granuli omogenei, il quale probabilmente sarà derivato dalla divisione del nucleo delle cellule preesistenti. In seguito del processo, il nucleo delle cellule fusiformi sparisce, ed il loro protoplasma si mostra striato nel senso loro trasversale e quindi parallelamente alla lunghezza delle squame. Con i forti ingrandimenti tutte le strie di queste cellule si veggono formate da serie di puntini o piccole elevazioni protoplasmatiche, che, sviluppandosi in gradi diversi, danno luogo alla formazione dello strato delle sculture che si cornifica come lo strato corneo compatto.

Dalla parte inferiore delle stesse cellule superficiali, o dalla serie delle cellule immediatamente sottostanti, si forma la serie delle cellule piatte poligonali dello strato interno della pellicola che restano separate da una sostanza unitiva più o meno abbondante secondo la specie. Ordinariamente queste cellule si cornificano in lamelle poligonali; nei luoghi ove si sono sovraccaricate di pigmento restano granulose e presentano un grosso nucleo vescicoloso.

Nel tempo in cui avviene la formazione della pellicola epidermica e dello strato corneo compatto, lo strato profondo della rete del Malpighi (tav. IV, fig, 33, fig. 34, fig. 35, *e*) si trova in via di accrescimento. Questo strato non si presenta più formato di cellule, ma invece è fatto di un largo strato di protoplasma, formatosi dalla fusione delle cellule cilindriche, nel quale si trova una grande quantità di nuclei rotondi, e vescicolosi contenenti molti granuli oscuri ed omogenei.

Da questo largo strato protoplasmatico, dopo la formazione dello strato corneo compatto, si formano le cellule dentate dello strato superiore e le cellule cilindriche dello strato profondo della rete del Malpighi della nuova epidermide. Varie serie esterne delle cellule dentate dello strato superiore della rete del Malpighi si cornificano e si appiattiscono tosto in lamelle per formare lo strato corneo rilassato. Una o due serie interne però restano cellule dentate protoplasmatiche come rappresentanti dello strato superiore della rete del Malpighi nello stato ordinario (tav. IV, fig. 36, fig. 37, fig. 38, *n a''*, *n e*, *n e'*, *e'*, *e*). Queste cellule sono quelle che dopo si cornificano in lamelle cornee nell'inizio o poco innanzi dell'epoca della muda.

Le cellule cilindriche che compongono lo strato profondo restano attaccate al derma e sono il punto di partenza di tutti i fenomeni che abbiamo studiato, e che si rinnoveranno nelle successive mude.

Terzo periodo.

Dopo che nella parte libera delle squame si è staccata l'antica epidermide e si è formata completamente la nuova, avviene anche nei solchi tale formazione, prima però del distacco dell'antica epidermide che in questo luogo non precede ma segue la formazione della nuova. Così quando l'animale si spoglia della vecchia epidermide, la nuova è completamente formata in tutti i punti, cioè, tanto nella parte libera delle squame come nei solchi.

Il procedimento per il quale l'epidermide antica si stacca dal fondo dei solchi varia da quello per cui avviene il distacco della stessa nella parte libera delle squame.

Ho fatto notare come lo strato glandulare si forma solamente nella parte libera delle squame, quindi manca completamente nell'epidermide dei solchi, ad eccezione delle squame del lobo d'attacco del *Gecko*, ove come ho dimostrato innanzi, lo strato glandulare si forma successivamente anche nelle radici delle squame.

Esaminando sopra un taglio il solco che separa le squame del *Coluber viridiflavus* (tav. V, fig. 50), nello stadio in cui avviene nella parte libera delle squame il distacco dell'antica epidermide, troviamo già nel solco le due epidermidi, cioè l'antica e la nuova epidermide attaccate ancora insieme.

L'antica epidermide costa della pellicola epidermica, dello strato granuloso e dello strato lucido. La nuova è composta della nuova pellicola epidermica, sottostante immediatamente allo strato lucido appartenente all'antica, del nuovo strato granuloso dello strato superiore e dello strato profondo della rete del Malpighi.

La pellicola dell'antica epidermide, come anche quella della nuova, per la forma flessuosa della superficie esterna dello strato granuloso che riveste, presenta la sua superficie esterna sparsa di gibbosità. Essa è formata nella epidermide antica (tav. V, fig. 42-50 51, *a''*) di una semplice serie di lamelle cornee, senza nucleo, trasparenti ed omogènee, che non mostrano nessuna specie di rilievo nella loro superficie. Nella pellicola della nuova epidermide si vede chiaramente che queste lamelle in origine erano cellule. Infatti alcune conservano qui ancora il loro nucleo contenente un nucleolo (tav. V, fig. 51, *na''*). Quindi è erronea l'opinione di F. Leydig, il quale descrive la pellicola epidermica dei solchi come una vera cuticola, e le gibbosità della superficie esterna come sculture gibbose.

Lo strato granuloso dell'antica epidermide (tav. V, fig. 50, *a*) è fatto da grosse masse cornificate, che risultano dalla fusione e cornificazione delle cellule protoplasmatiche delle quali consta lo stesso strato nella nuova epidermide (tav. V, fig 50 e 51 *na''*) e che si conservano come tali anche lungamente nella vecchia (tav. V, fig. 42-51, *a*), avvenendo la loro cornificazione negli ultimi periodi della muda. La sostanza di queste masse cornificate si presenta dura, granulosa, giallognola e rifrangente la luce.

Nell'antica epidermide adunque, prima della cornificazione, lo strato granuloso è fatto, come nella nuova, da una serie di grosse cellule prive di membrana, nel

protoplasma delle quali vi è sparsa un'abbondante sostanza granulosa, e si contiene un nucleo vescicoloso nucleato. Queste cellule si colorano con il picro-carminio.

Lo strato lucido dell'antica epidermide, in origine, è composto di cellule fusiformi e trasparenti che presentano un nucleo vescicoloso. Questo strato varia nella sua spessezza, e nella regolarità della sua distribuzione. È più spesso, e meno regolare nella distribuzione, verso il fondo del solco, mentre diviene meno spesso e regolare, verso l'estremità libera e verso la radice delle squame (tav. V, fig. 50 e 51).

La parte esterna della rete del Malpighi della nuova epidermide (tav. V, fig. 42-50-51, *e'*) è composta di varie serie di cellule fusiformi, non dentate e con protoplasma sottile, scarso di granulazioni e contenente un nucleo vescicoloso con uno o due nucleoli; la parte interna viceversa consta di una semplice serie di piccole cellule cubiche con un grosso nucleo formato da un protoplasma granuloso.

Lo sviluppo dello strato lucido appartenente all'antica epidermide, come lo sviluppo della pellicola e dello strato granuloso della nuova, avviene anche nei solchi nell'epoca della muda. Ma come si sviluppano questi tre strati io non ho potuto vederlo. In un taglio di un solco che separa le larghe piastre della mascella inferiore, dalle squame limitrofe del *Coluber viridiflavus* (tav. V, fig. 42), fra lo strato lucido (*c*) e lo strato superiore della rete del Malpighi (*e'*), ho veduto uno strato, composto di una semplice serie di grandi cellule protoplasmatiche fusiformi, contenenti un nucleo vescicoloso nucleato, saldate per le loro estremità (*d*). Da queste grosse cellule fusiformi protoplasmatiche, pare traggano origine le cellule dello strato granuloso. Ma se le cellule, che compongono lo strato lucido, siano le stesse cellule del lato superficiale della rete del Malpighi, separate dal rimanente per lo strato formatosi dalle grandi cellule protoplasmatiche fusiformi, o se prima si sieno formati altri strati protoplasmatici, dai quali sieno originate le cellule dello strato lucido in discorso, io non saprei dirlo, non avendo avuto altri gradi di sviluppo.

Nei preparati che io ho avuto sotto gli occhi ho potuto però seguire le fasi ulteriori dello strato lucido. I nuclei delle cellule della parte inferiore di questo strato si moltiplicano in tal modo che formano un tessuto nucleolato (tav. V, fig. 50, *d*), il quale accresce enormemente la spessezza di questo strato. Le cellule della parte superiore invece non soffrono modificazioni, anzi il loro protoplasma si fa più trasparente, contengono un solo nucleo uninucleolato, ed alcune presentano i margini dentati (tav. V, fig. 50, *c*). Dopo che la moltiplicazione dei nuclei delle cellule della parte inferiore hanno raggiunto il massimo del loro aumento numerico, divengono granulosi, si disfanno e la sostanza disfatta viene mano mano riassorbita. Allora questo strato si dissecca e quindi si assottiglia e ritorna nelle proporzioni primitive. Questo fatto secondo me è il principale, che determina meccanicamente il distacco dell'antica epidermide nel fondo dei solchi. Si aggiunge a ciò, che tale distacco si trova avviato dal distacco completo avvenuto nella parte libera delle squame, e che strisciando l'animale sulla terra o fra i sassi e gli sterpi, la parte dell'epidermide antica, distaccata già nella porzione libera dalle squame, deve far da leva a staccare quella che ancora resta attaccata nel fondo del solco.

Nell'*Ascalabotes mauritanicus* (tav. II, fig. 21 e 22) e nella *Lacerta muralis* (tav. III, fig. 31), gli strati dell'epidermide del solco si presentano diversi da quelli

del *Coluber viridiflavus* qui sopra descritti. Nella prima delle due menzionate specie, alla pellicola epidermica liscia, succede lo strato corneo lasso, ed a questo uno strato di grandi cellule poligonali, le quali hanno un resto di nucleo raggrinzito, giallognolo e risplendente, ed un corpo trasparente come il vetro, sparso di rare granulazioni che rappresenta lo strato lucido disseccato. Quindi viene sotto a questo strato la rete del Malpighi, composta da una serie esterna di cellule fusiformi, ed una interna di cellule cubiche contenenti un grosso nucleo vescicoloso uninucleato. Nella *Lacerta muralis*, alla pellicola succede lo strato corneo lasso, che è piuttosto abbondante, e quindi lo strato granuloso, e, sotto a questo la rete del Malpighi.

Nella faccia interna delle squame lamelliformi dell'*Ascalabotes mauritanicus* (tav. III, fig. 25) lo strato lucido è rappresentato da cellule cilindriche che disseccandosi presentano il corpo vitreo e contengono uno o più grossi nuclei rotondi od ovali, omogenei, giallognoli e risplendenti come la sostanza cornea.

Adunque il distacco dell'antica epidermica nei rettili avviene in due modi: nella parte libera delle squame avviene per la secrezione o degenerazione in sostanza probabilmente mucosa delle cellule dello strato glandulare; nei solchi per il disseccamento dello strato lucido.

§ 30.

Oltre dei fenomeni descritti, in tre individui della *Lacerta muralis* a quest'ultimo grado della muda, mi è stato dato di osservare un fatto di qualche rilievo. Ho trovato i solchi, che separano le squame addominali, ripieni di ammassi di cellule sanguigne, le quali da questo punto si estendevano a forma di strato sopra la superficie esterna della squama rappresentata dall'antica epidermide (tav. IV, fig. 38, *s*). In alcuni tagli delle stesse squame lo strato delle cellule sanguigne riempiva inoltre tutto lo spazio rimasto fra l'antica epidermide staccata, e la nuova già compiuta e cornificata (tav. IV, fig. 36, fig. 37, *s*).

Gli ammassi e gli strati delle cellule sanguigne innanzi detti, ora erano composti esclusivamente di cellule senza sostanza intermedia (tav. IV, fig. 37, fig. 38, *s*); ed ora le cellule si trovavano in una sostanza finamente granulosa più o meno abbondante (tav. IV, fig. 36, *s*), la quale si mostrava in certi punti solcata da linee longitudinali. Questa sostanza non è altro che il plasma sanguigno coagulato, e reso più consistente per l'azione dell'acido osmico.

Le cellule sanguigne presentavano due forme diverse. Alcune erano rotonde o sferiche, e nel profilo si mostravano biconcave, altre invece avevano la forma ovoide od elissoide come le cellule sanguigne di questi vertebrati. Le cellule elissoidi erano più grandi delle cellule sferiche. Le prime misuravano nel diametro longitudinale mm. 0,008 e le seconde mm. 0,0057.

Tutte due le forme possedevano un nucleo nel centro rotondo o granuloso. Ma il corpo cellulare nelle cellule sanguigne elissoidi era come suol'essere ordinariamente, colorito in giallognolo, mentre nelle cellule rotonde era incolore e trasparente come sono state descritte nell'embrione dei mammiferi le cellule sanguine embrionali. Tra queste due varietà se ne presentavano altre intermedie sia rispetto alla forma, sia rispetto alla grandezza e colorito. Però ordinariamente gli ammassi, o gli strati erano

Fig. 2.

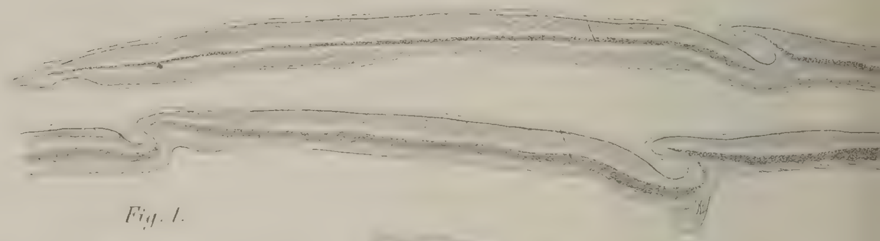
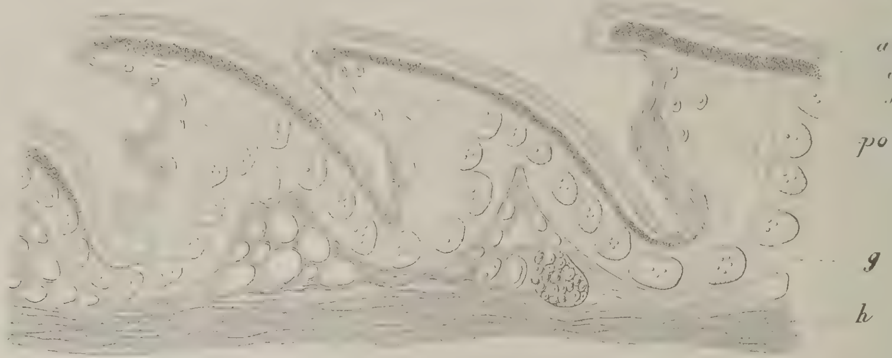


Fig. 1.



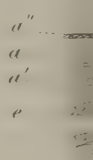
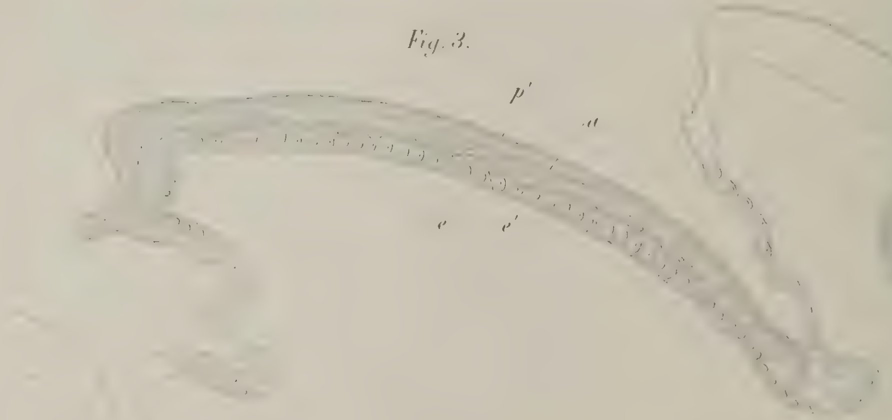


Fig. 3.



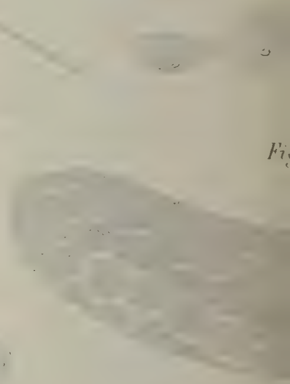


Fig. 4.

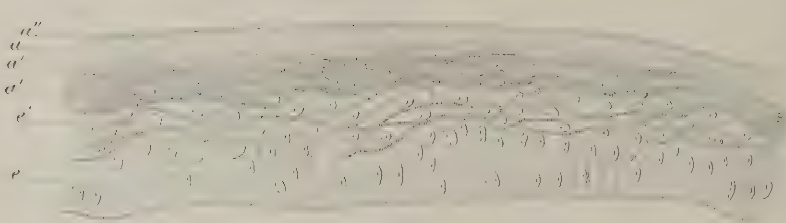
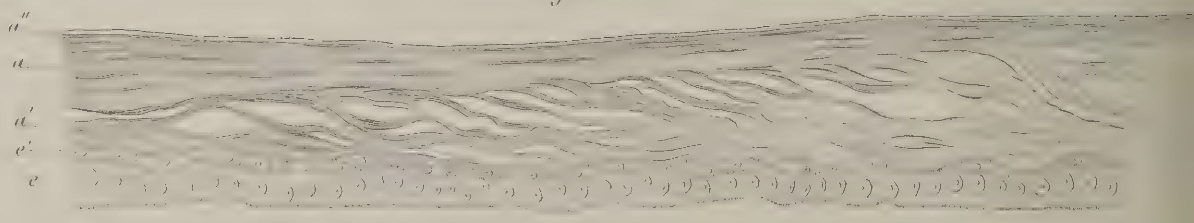


Fig. 11.



F Todaro dis.

Litª G Ciemar...

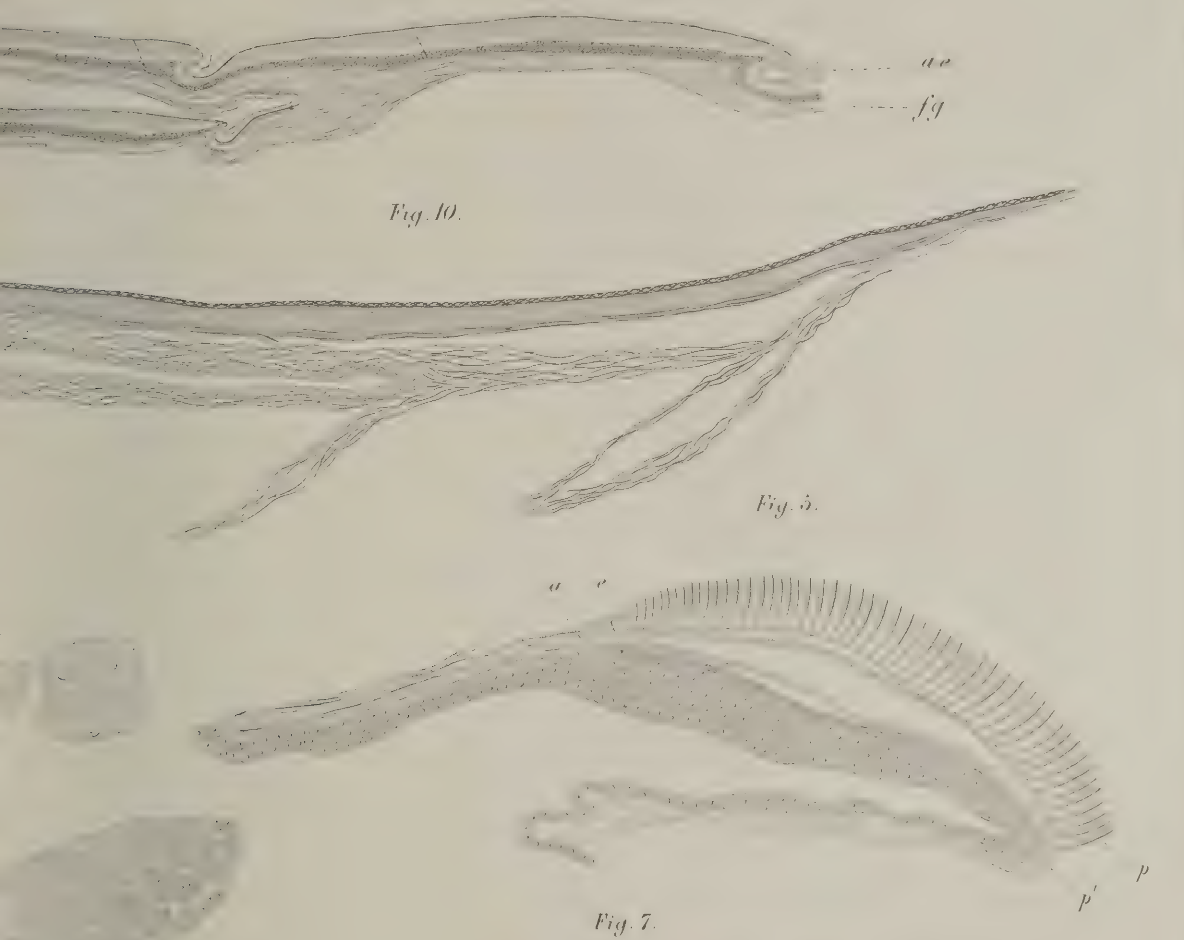


Fig. 10.

Fig. 5.

Fig. 7.

Fig. 9.

U. Colonna inc.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Fig. 12.

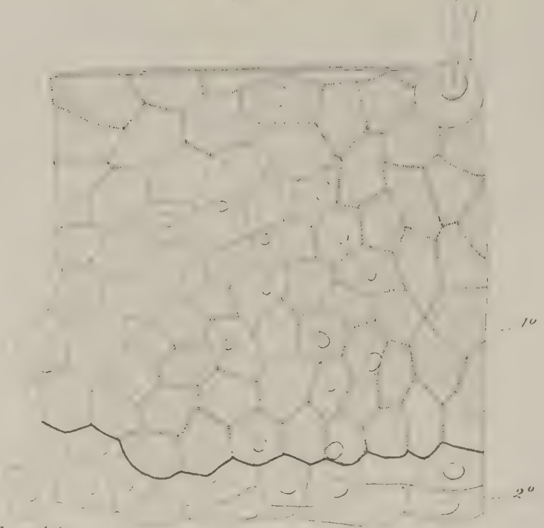


Fig. 14.

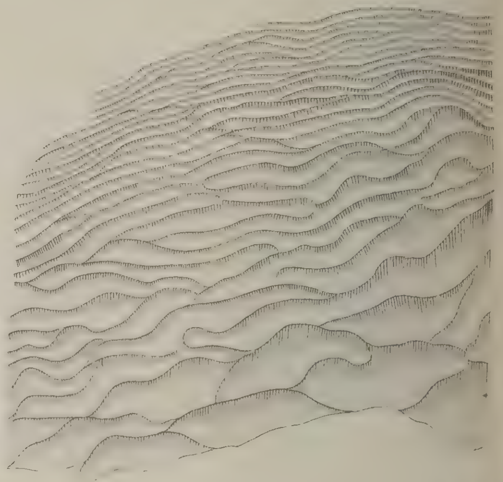


Fig. 13.

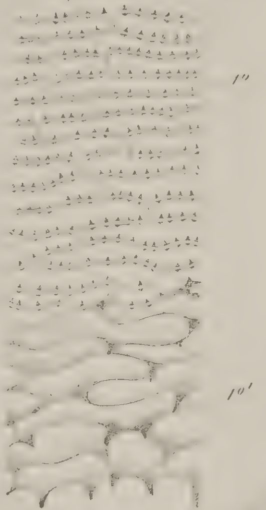


Fig. 19.

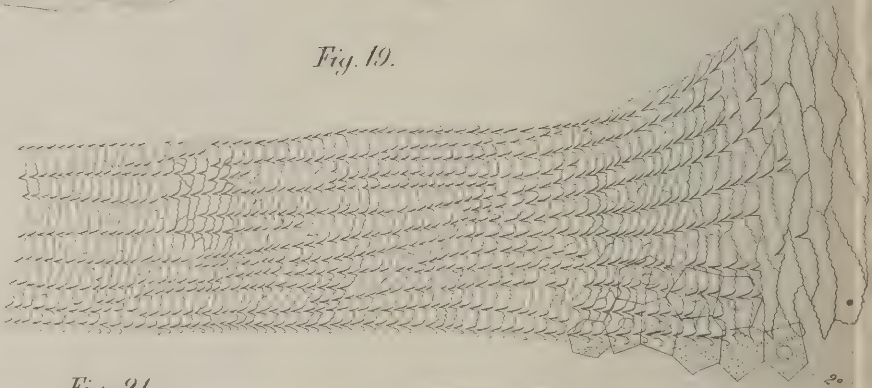


Fig. 21.

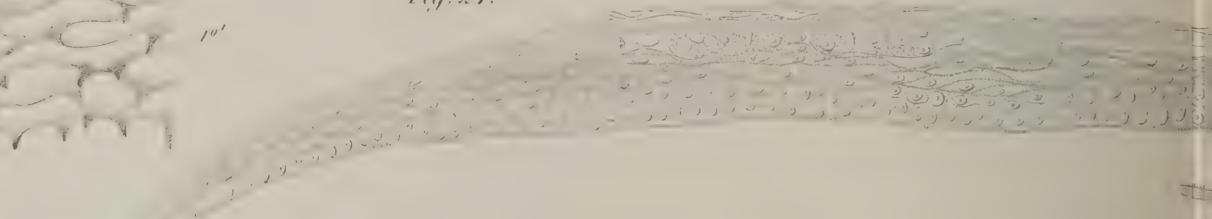


Fig. 22.

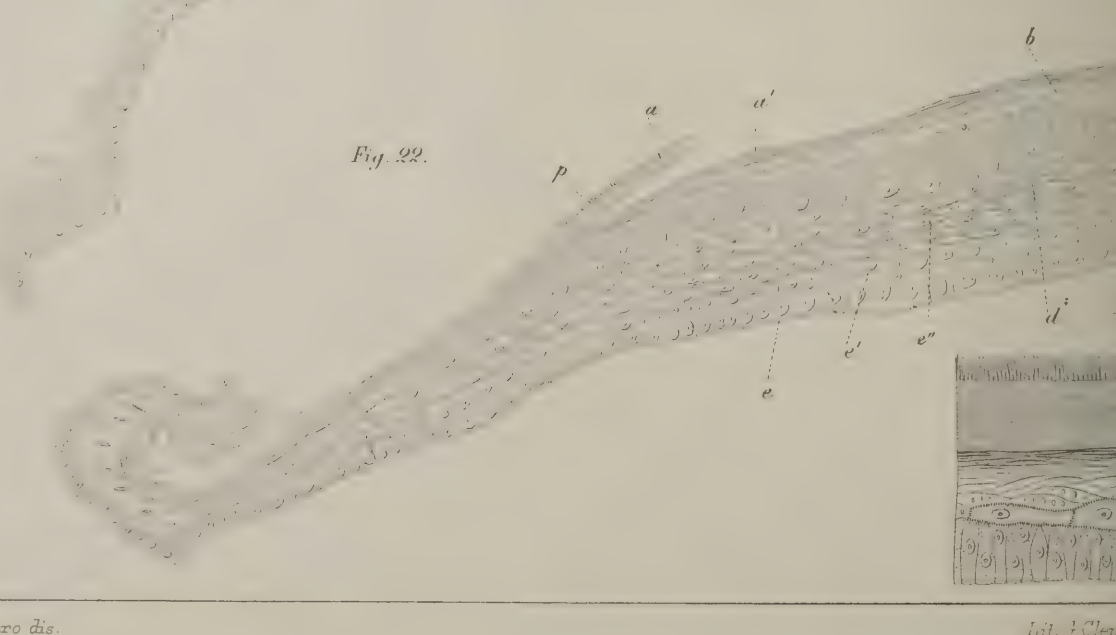


Fig. 20.

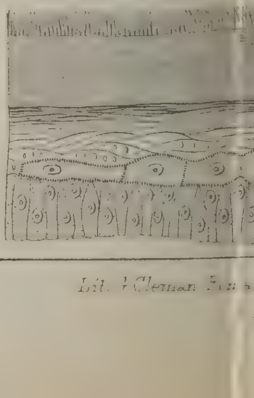


Fig. 15.

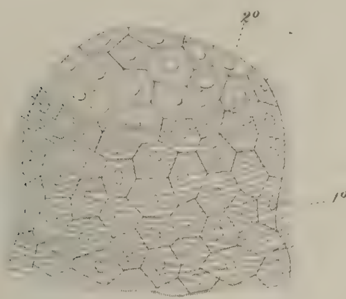


Fig. 16.

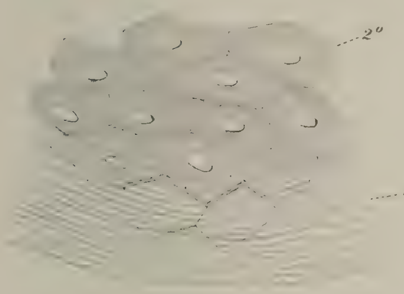
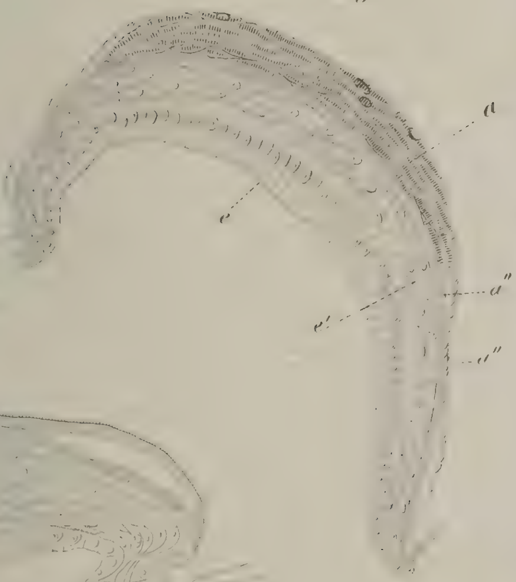
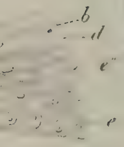


Fig. 17.





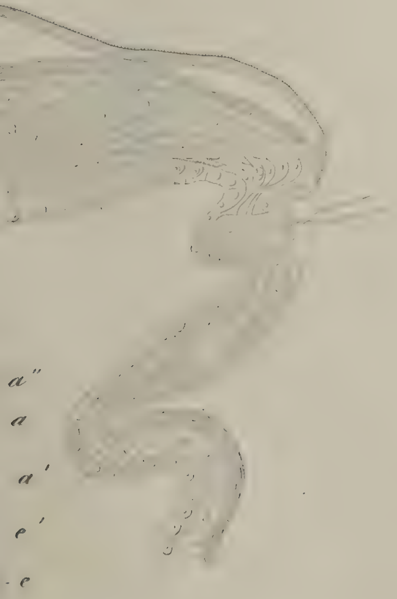


Fig. 18.

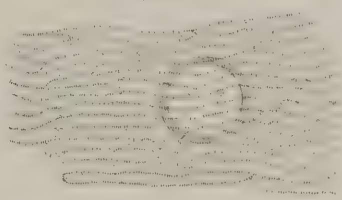


Fig. 20.

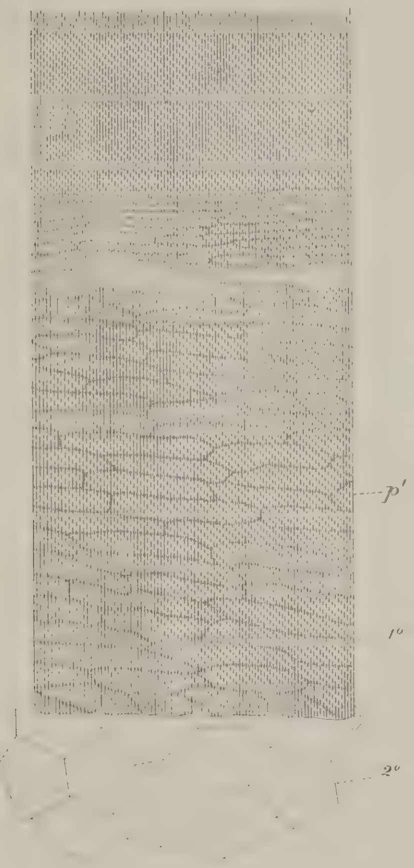
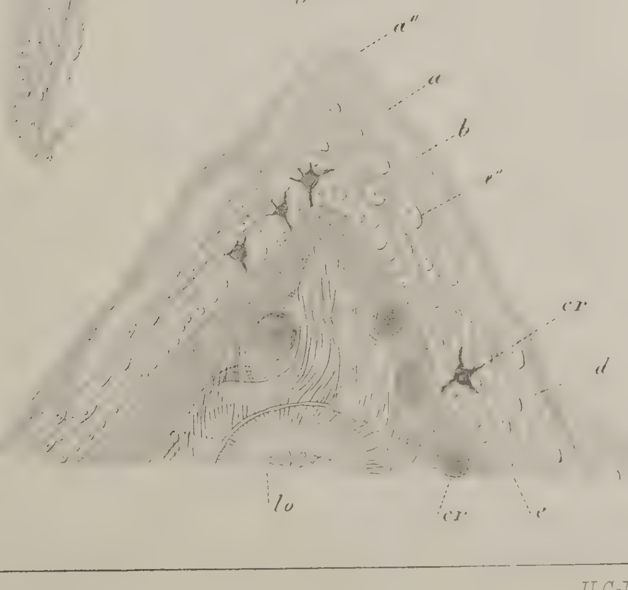


Fig. 23.



U. Colonna inc.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

fatti, alcuni esclusivamente dalle cellule elissoidi, ed altri dalle cellule rotonde, ovvero lo stesso strato in una parte era fatto dalle cellule rotonde e in altra parte dalle cellule elissoidi. Negli strati formati dalle cellule rotonde la sostanza intermedia era molto abbondante, negli strati e negli ammassi composti dalle cellule elissoidi viceversa era scarsa o mancava affatto.

Nel derma sottostante, e in mezzo al tessuto congiuntivo intermuscolare dei muscoli addominali, si trovavano in grande quantità le stesse cellule sanguigne di forma rotonda e di forma elissoide, quà disseminate, là riunite in grandi ammassi, altrove disposte a forma di zaffi e altrove in canali di vario calibro.

Quest'ultimo fatto dimostra, che gli ammassi delle cellule sanguigne trovate nei solchi, come gli strati dei medesimi al di sopra delle squame o fra le due epidermidi staccate, provengono dall'interno in seguito ad emorrogie avvenute nel fondo dei solchi. E dico che le emorragie avvengono nel fondo dei solchi, donde il sangue si spande negli altri luoghi, perchè in mezzo alle due epidemidi (l'antica e la nuova) il sangue non si trova se non nel caso in cui il distacco dell'antica epidermide non sia avvenuto anche nel fondo del solco (tav. IV, fig. 36).

La causa di queste emorragie deve essere attribuita in parte alle fregagioni, più o meno forti, celeri e ripetute, che fa il rettile nel momento di sbarazzarsi della spoglia contro le superficie dure (suolo, sassi, sterpi ec.), come già è stato notato da alcuni naturalisti [1], stimolato a ciò dalla grande eruzione o iperemia sanguigna nella cute; e siccome in quest'ultimo momento, l'epidermide vecchia è attaccata solamente nel fondo dei solchi, ove anche la nuova epidermide non è ancora completamente cornificata, così è lì che avviene la rottura o la lacerazione, come mostra la fig. 36 (tav. IV) ch'è stata copiata da uno dei miei preparati.

Come avviene questa enorme quantità di sangue? Trattasi forse di una semplice iperemia e quindi dello stravaso del sangue dei capillari nei tessuti? Ovvero abbiamo una nuova produzione di cellule sanguigne?

Per rispondere a tali domande abbisognano indagini più minuziose di quelle che per ora non ho potuto fare.

Intanto faccio notare, che, secondo me, gli ammassi di cellule trovate dal De Filippi nei solchi che separano le squame addominali dello *Stellio caucasicus*, dai quali, secondo lui, traeva origine la pellicola epidermica che sarebbe tutt'altra di quella da me descritta, non sono altro che ammassi di cellule sanguigne; quindi la stessa pellicola descritta dallo stesso, era uno strato di cellule sanguigne, come io ho trovato nella *Lacerta muralis*. Quanto poi a corpi trovati da F. Leydig sotto l'epidermide cornea (*cuticula* secondo Leydig) della *Vipera ammodytes* e della *Vipera berus*, da lui descritti come corpi amiloidi, non so quale rapporto possano avere colle cellule sanguigne da me trovate nei solchi e nelle squame della *Lacerta muralis*.

[1] L. Metaxà, Mem. cit. pag. 6.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tutte le figure sono state prese dai miei preparati con la camera chiara del Nachet aggiustata al microscopio di Hartnack (Oculare N. 1, 2, 3; Sistema 2, 5, 8).

Tavola I.

Fig. 1. Taglio longitudinale della pelle addominale dell'*Ascalabotes mauritanicus* nello stato ordinario, nel quale le squame sono tagliate longitudinalmente, colorito con il picro-carminio: *a*) strato corneo dell'epidermide; *e*) rete del Malpighi; *f*) strato esterno cromatoforo o pigmentato della cute; *g*) strato interno o fascicolato della stessa; *h*) strato congiuntivo sottocutaneo; *p*) placche o scaglie ossee. Ingrandimento piccolo.

Fig. 2. Taglio trasverso della pelle addominale della *Lacerta muralis albiventris Bp.* nel periodo d'accrescimento colorito con l'acido osmico; si veggono due serie di squame l'una imbricata sull'altra tagliate trasversalmente; *a*, *e*) epidermide; *f*) derma o cute. Ingrandimento piccolo.

Fig. 3. Taglio longitudinale di una squama epidermica addominale dell'*Ascalabotes mauritanicus* nello stato ordinario, colorito con il picro-carminio: *a*) strato corneo; *e*,.*e'*) strato interno ed esterno della rete del Malpighi; *p'*) peli della pellicola epidermica. Ingrandimento mediocre.

Fig. 4. Taglio trasversale dell'epidermide della mascella inferiore dell'*Ascàlabotes mauritanicus* nell'inizio dell'accrescimento colorito con picro-carminio: *a''*) pellicola epidermica; *a*) strato corneo compatto; *a'*) strato corneo rilassato; *a'*) strato di cellule in via del processo di cornificazione; *e'*) strato della rete del Malpighi; *e*) strato profondo della stessa rete. Ingrandimento forte.

Fig. 5. Taglio trasversale di una squama lamelliforme del pulvillo scansorio dell'*Ascalabotes mauritanicus* nello stato ordinario colorito con il picro-carminio: *a*) strato corneo rilassato rivestito della pellicola; *e*) rete del Malpighi; *p*) setole; *p'*) peli della pellicola epidermica. Ingrandimento mediocre.

Fig.. 6. Superficie concava del pulvillo scansorio dell'*Ascalaboles mauritanicus* veduta di sopra. Ingrandimento forte.

Fig. 7. Taglio trasversale di una squama lamelliforme del pulvillo scansorio dell'*Ascalabotes mauritanicus* nell'inizio dell'accrescimento colorito con il picro-carminio. È stata rimossa col tagliò la pellicola epidermica portante le setole: *a'*) strato corneo rilàssato; *c*) strato lucido in incipiente formazione; *e*) parte esterna della rete del Malpighi; *np*) nuove setole in via di formazione. Ingrandimento forte.

Fig. 8. Cellule disgregate della rete del Malpighi che dimostrano la formazione delle setole per divisione di una parte del protoplasma cellulare. Ingrandimento forte.

Fig. 9. Taglio trasversale dell'epidermide della testa della *Lacerta muralis* nello stato ordinario colorito con il picro-carminio: *a''*) pellicola epidermica; *a*) strato corneo compatto; *a'*) strato corneo rilassato; *e'*) strato esterno della rete del Malpighi; *e*) strato interno o profondo della stessa rete. Ingrandimento forte.

Fig. 10. Taglio longitudinale dell'estremità libera di una scaglia o squama addominale del *Seps calcides* nello stato ordinario colorito con il picro-carminio: *a''*, *a*, *a'*, *e*) come nella figura precedente.

Fig. 11. Taglio trasversale dell'epidermide di una squama addominale del *Coluber viridiflavus* nello stato ordinario colorito con il picro-carminio. Le lettere come nella fig. 9. Ingrandimento forte.

Tavola II.

Fig. 12. Pellicola epidermica delle squame dell'*Ascalabotes mauritanicus* colorita con il nitrato di argento e veduta di sopra: 1° strato esterno; 2° strato interno della medesima. Ingrandimento forte.

Fig. 13. Veduta superficiale della pellicola epidermica della faccia profonda di una squama addominale del *Seps calcides,* limitante il solco dal lato esterno, staccata con la macerazione nella soluzione d'acido cromico. Ingrandimento forte.

Fig. 14. Veduta superficiale della pellicola epidermica della radice di una squama addominale che limita il solco dal lato interno del *Seps calcides*, colorita con il nitrato d'argento e distaccata con l'ajuto della potassa. Ingrandimento forte.

Fig. 15. Tubercolo della faccia plantare del piede della *Lacerta muralis albiventris* Bp. nello stato ordinario colorito con l'acido osmico e veduto di fronte: 1° strato esterno o strato delle sculture; 2° strato interno della pellicola epidermica. Ingrandimento mediocre.

Fig. 16. Porzione di pellicola epidermica distaccata dal tubercolo anzidetto nella fig. 15: 1° strato esterno o strato delle sculture; 2° strato interno della pellicola epidermica. Ingrandimento forte.

Fig. 17. Taglio trasversale dello stesso tubercolo: *a''*) pellicola epidermica; *a*) strato granuloso pigmentato corrispondente allo strato corneo compatto; *a'*) strato corneo rilassato; *e''*) strato esterno della rete del Malpighi; *e*) strato interno della stessa (È stata omessa la fitta rete delle ramificazioni che mandano nello strato del Malpighi le cellule cromotofore a pigmento nero del Derma).

Fig. 18. Veduta superficiale della pellicola epidermica di una piastra della mascella inferiore del *Tropidonotus natrix*. Ingrandimento forte.

Fig. 19. Veduta superficiale della pellicola epidermica della parte libera in prossimità alla radice di una squama dorsale del *Tropidonotus natrix* colorita con il nitrato di argento: 1° strato delle sculture; 2° strato interno della pellicola epidermica. Ingrandimento forte.

Fig. 20. Veduta superficiale della pellicola epidermica della parte libera in prossimità alla radice di una piastra addominale del *Tropidonotus natrix* colorita con il nitrato d'argento: 1° strato delle sculture; 2° strato interno della pellicola epidermica. Ingrandimento forte.

Fig. 20ᵃ. Taglio trasversale dell'epidermide di una piastra addominale del *Coluber viridiflavus* nello stato ordinario tenuta lungamente nell'alcool: *a''*) ciglia o setole dello strato esterno della pellicola epidermica; *a*) strato corneo compatto; *a'*) strato corneo rilassato; *e'*) strato esterno della rete del Malpighi; *e*) strato interno della stessa.

Fig. 21. Taglio trasversale dell'epidermide di una squama laterale dell'addome dell'*Ascalabotes mauritanicus* nel periodo d'accrescimento. È stato rimosso nel fare il taglio lo strato corneo rilassato insieme allo strato corneo compatto ed alla pellicola: *b*) strato granuloso; *d*) strato protoplasmatico; *e'*) nuovo strato esterno della rete del Malpighi; *e*) strato interno della medesima. Ingrandimento forte.

Fig. 22. Taglio longitudinale di una squama epidermica addominale nel periodo di accrescimento dell'*Ascalabotes mauritanicus* colorito con il picrocarminio: *p*) peli della pellicola epidermica; *a*) strato corneo compatto; *a'*) strato corneo rilassato; *b*) strato granuloso; *c*) strato lucido; *d*) strato delle cellule glandulari; *e'*) nuovo strato esterno della rete del Malpighi; *e*) strato profondo della medesima. Ingrandimento forte.

Fig. 23. Taglio trasversale di un tubercolo dorsale dell'*Ascalabotes mauritanicus* nel periodo di accrescimento, colorito con il picro-carminio: *a''*) pellicola epidermica; *a*) strato corneo compatto e strato corneo rilassato; *b*) strato granuloso; *d*) strato protoplasmatico; *e*) rete del Malpighi; *cr*) cellule pigmentate e strato pigmentato della cute; *lo*) lamella o scaglia ossea.

Tavola III.

Fig. 24. Taglio longitudinale dell' epidermide di una squama dorsale dell'*Ascalabotes mauritanicus* nel periodo d'accrescimento colorito con il picro-carminio: *a*) strato corneo rilassato e compatto rivestito della pellicola epidermica; *b*) strato granuloso; *d*) strato protoplasmatico; *e'*, *e*) strato esterno e strato interno della rete del Malpighi. Ingrandimento forte.

Fig. 25. Taglio trasversale di una squama lamelliforme del pulvillo scansorio dell' *Ascalabotes mauritanicus* nel periodo d'accrescimento colorito con il picro-carminio: *a''*) pellicola epidermica; *a*) strato corneo rilassato; *c*) strato lucido; *d*) strato delle cellule glandulari; *e'*) nuovo strato esterno della rete del Malpighi; *e*) strato interno della stessa; *p*) setole della pellicola epidermica o setole antiche; *p'*) setole della rete del Malpighi o setole nuove. Ingrandimento mediocre.

Fig. 26. Tre soli strati dell'epidermide del Pulvillo scansorio della specie anzidetta nello stesso periodo: *a'*) strato corneo rilassato; *c*) strato lucido; *d*) strato delle cellule glandulari. Ingrandimento forte.

Fig. 27. Taglio trasversale di una squama lamelliforme della stessa specie nel secondo periodo della muda, colorito con il picro-carminio: *a*) strato corneo rilassato; *d''*) materia segregata; *e'*, *e*) strato esterno ed interno della rete del Malpighi; *p*) setole della pellicola epidermica; *np*) setole della rete del Malpighi; *p'*) peli della detta pellicola. In questo preparato il corpo delle grosse cellule della serie esterna della rete del Malpighi portanti le nuove setole cominciano a cornificarsi, fondendosi in uno strato omogeneo. Ingrandimento forte.

Fig. 28. Taglio longitudinale della epidermide delle piastre della mascella inferiore della *Lacerta muralis albiventris* nello stato ordinario, colorito con l'acido osmico: *a''*) pellicola epidermica; *a*) strato corneo compatto; *a'*) strato corneo rilassato; *e'*, *e*) strato esterno ed interno della rete del Malpighi. Ingrandimento forte.

Fig. 29. Taglio longitudinale dell'epidermide delle piastre della mascella inferiore della *Lacerta muralis* nel primo periodo della muda, colorito con l'acido osmico ed il picro-carminio: *a''*) pellicola epidermica; *a*) strato corneo compatto; *a'*) strato corneo rilassato; *b*) strato granuloso; *c'*, *c*) strati protoplasmatici; *e'*) nuovo strato esterno della rete del Malpighi; *e*) strato interno della stessa. Ingrandimento forte.

Fig. 30. Taglio longitudinale dell'epidermide delle piastre addominali della *Lacerta muralis* nel periodo d'accrescimento, colorito con l'acido osmico e il picro-carminio: *a''*, *a*, *a'*) pellicola epidermica, strato corneo compatto e strato corneo rilassato; *c*) strato lucido; *c'*) strato delle cellule glandulari; *e'*, *e*) nuovo strato esterno ed interno della rete del Malpighi.

Fig. 31. Taglio longitudinale dell'epidermide delle piastre della mascella inferiore della *Lacerta muralis* nello stesso periodo di accrescimento, colorito con l'acido osmico e il picro-carminio: *a''*, *a*, *a'*) pellicola epidermica, strato corneo compatto e strato corneo rilassato; *b*) strato granuloso; *c*) strato delle cellule glandulari; *e'*, *e*) nuovo strato esterno ed interno della rete del Malpighi; *f*) strato esterno pigmentato del derma; *g*) strato interno fascicolato del derma; *cr*) cellule congiuntive cromatofore cariche di pigmento nero.

Tavola IV.

Fig. 32. Taglio trasversale dell'epidermide delle piastre della mascella inferiore della *Lacerta muralis* nello stesso periodo d'accrescimento come nella figura precedente colorito con l'acido osmico ed il picro-carminio; *a''*, *a*, *a'*) pellicola epidermica, strato corneo compatto e strato corneo rilassato; *b*) strato granuloso; *d'*) strato delle cellule glandulari; *e''*, *e*) nuovo strato esterno ed interno della rete del Malpighi. Ingrandimento forte.

Fig. 33. Taglio longitudinale dell'epidermide delle squame addominali della *Lacerta muralis* nel secondo periodo della muda, indurito nell'alcool e colorito con il picro-carminio: *a''*, *a*) pellicola epidermica e strato corneo compatto e rilassato; *na''*) strato della nuova pellicola epidermica; *e''*, *e*) nuovo strato esterno ed interno della rete del Malpighi. Ingrandimento forte.

Fig. 34. Come nella figura precedente.

Fig. 35. Taglio longitudinale della nuova epidermide delle squame addominali della *Lacerta muralis* nel secondo periodo della muda indurita nell'alcool, e colorito con il picro-carminio, È stata rimossa, non solo l'antica epidermide già distaccata, ma anche la pellicola della nuova: *na*) nuovo strato corneo compatto nel momento della sua formazione; *e*) strato profondo della rete del Malpighi. Ingrandimento forte.

Fig. 35ª Strato delle cellule fusiformi dalle quali si forma la pellicola epidermica nel secondo periodo della muda veduto di sopra, indurito nell'alcool e colorito con il picro-carminio. Ingrandimento forte.

Fig. 35ᵇ Lamelle poligonali formanti lo strato limitante inferiore dello strato corneo dell'antica epidermide distaccata dalle piastre addominali della *Lacerta muralis*. Ingrandimento forte.

Fig. 36. Taglio trasversale dell'epidermide delle squame addominali della *Lacerta muralis* nel terzo periodo della muda, colorito con l'acido osmico: *a*, *c*) epidermide antica; *s*) strato di cellule sanguigne; *na*, *e'*, *e*) epidermide nuova. Piccolo ingrandimento.

Fig. 37. Come nella fig. precedente: *a''*) pellicola epidermica; *a*) strato corneo compatto; *a'*) strato corneo rilassato; *c'*) serie interna di lamelle poligonali limitante l'antica epidermide; *s*) strato fatto

di cellule sanguigne; *na''*) nuova pellicola epidermica; *na*) nuovo strato corneo compatto; *na'*) nuovo strato corneo rilassato; *e'*, *e*) strato esterno ed interno della rete del Malpighi. Ingrandimento forte.

FIG. 38. Taglio longitudinale dell'epidermide delle squame addominali della *Lacerta muralis* nel terzo periodo della muda indurita con l'acido osmico: *a''*, *a*, *a'*, *c'*) epidermide antica distaccata; *na''*, *na*, *na'*, *e'*, *e*) epidermide nuova; *s*) ammasso di cellule sanguigne nel solco, che si estende in strato sulla superficie esterna dell'epidermide antica. Ingrandimento forte.

FIG. 39. Taglio trasversale dell'epidermide della testa del *Coluber viridiflavus* nello strato ordinario colorito con il picro-carminio: *a''*) pellicola epidermica; *a*) strato corneo compatto; *a'*) strato corneo rilassato; *e'*) strato esterno della rete del Malpighi; *e*) strato profondo della stessa; *cp*) cellule epiteliali cromatofore cariche di pigmento nero. Ingrandimento forte.

Tavola V.

FIG. 40. Taglio trasversale dell'epidermide delle squame labiali della mascella inferiore del *Coluber viridiflavus* nell'inizio dell'accrescimento, colorito con l'acido osmico: *a''*, *a*, *a'*) strato corneo; *c*) rete del Malpighi. Ingrandimento forte.

FIG. 41. Taglio trasversale dell'epidermide delle piastre della mascella inferiore del *Coluber viridiflavus* nel primo periodo della muda, colorito con l'acido osmico: *a''*, *a*, *a'*) pellicola epidermica, strato corneo compatto e strato corneo rilassato; *b*) strato delle cellule cariche di gocciolette di grasso; *e*) rete del Malpighi. Ingrandimento forte.

FIG. 42. Taglio dell'epidermide del solco fra le piastre e le squame limitrofe interne della mascella inferiore del *Coluber viridiflavus* nel secondo periodo della muda, colorito con l'acido osmico ed il picro-carminio: *a''* 1° 2°) pellicola epidermica e strato delle cellule granulose; *e*) strato lucido; *d*) strato delle cellule protoplasmatiche; *e'*, *e*) strato esterno ed interno della rete del Malpighi. Ingrandimento forte.

FIG. 43. Taglio trasversale dell'epidermide delle piastre della mascella inferiore del *Coluber viridiflavus* nel periodo di accrescimento della muda, colorito con l'acido osmico ed il picro-carminio: *a''*) pellicola epidermica; *a*) strato corneo compatto; *a'*) strato corneo rilassato; *b*) strato corneo granuloso; *c*) strato lucido; *c'*) serie delle cellule inferiori dello strato lucido; *d*) strato delle cellule glandulari; *e''*) cellule a protoplasma striato dello strato esterno della rete del Malpighi; *e'*) e cellule a protoplasma trasparente dello stesso strato; *e*) strato profondo della rete del Malpighi. Ingrandimento forte.

FIG. 44, 45 e 46. Tre gradi delle modificazioni che soffrono le cellule dello strato glandulare in seguito alla loro degenerazione nell'epidermide del *Coluber viridiflavus*. Ingrandimento forte.

FIG. 47. Taglio trasversale dell'epidermide delle piastre della mascella inferiore del *Coluber viridiflavus* nel secondo periodo della muda, colorito con l'acido osmico ed il picro-carminio: *d*) materia segregata; *e'*) passaggio fra le cellule dello strato esterno ed interno della rete del Malpighi; *os'*) antichi organi di senso; *os*) nuovi organi di senso. Tutte le altre lettere come nella figura 43. Ingrandimento forte.

FIG. 48. Taglio trasversale dell'epidermide delle squame labiali della mascella inferiore del *Coluber viridiflavus* nel secondo periodo della muda, colorito con l'acido osmico ed il picro-carminio: *d'*) reliquie delle cellule dello strato glandulare. Tutte le altre lettere come nelle figure 43 e 47. Ingrandimento forte.

FIG. 49. Taglio trasversale dell'epidermide delle squame della mascella inferiore (piastra e squama limitrofa) del *Coluber viridiflavus* nel secondo periodo della muda, colorito con l'acido osmico e con il picro-carminio: *ac*) epidermide antica destinata a cadere; *e''*) strato esterno della rete del Malpighi; *e*) strato interno della stessa rete; *e'*) passaggio dell'uno nell'altro di questi due strati. Piccolo ingrandimento.

FIG. 50. Taglio dell'epidermide del fondo del solco fra due squame della mascella inferiore nel secondo periodo della muda, colorito con l'acido osmico ed il picro-carminio: *a''*) pellicola epidermica; *a*) masse di strato corneo granuloso; *c*) strato lucido; *d*) parte interna dello strato lucido con i nuclei moltiplicati; *na''*) pellicola epidermica della nuova epidermide; *e'*) rete del Malpighi

è strato soprastante delle cellule protoplasmatiche; e) strato profondo della rete del Malpighi. Ingrandimento forte.

FIG. 51. Taglio dell'epidermide del lato esterno del solco delle squame della mascella inferiore del *Coluber viridiflavus* nel secondo periodo della muda, colorito con l'acido osmico ed il picro-carminio: *a''*) pellicola epidermica; *a*) strato granuloso rappresentato ancora dalle cellule protoplasmatiche nucleate; *d*) strato lucido; *na*) cellule nucleate della pellicola epidermica della nuova epidermide; strato esterno della rete del Malpighi, e strato profondo della stessa.

FIG. 52. Taglio trasverso dell'epidermide della mascella inferiore del *Seps calcides* nel secondo periodo della muda. Tutte le lettere come nella fig. 47. Ingrandimento forte.

FIG. 53. Taglio longitudinale dell'epidermide dell'estremità libera delle squame addominali dell'*Ascalabotes mauritanicus* nel secondo periodo della muda, colorito con il picro-carminio: *os*) organo di senso. Tutte le altre lettere come nella figura 43. Ingrandimento forte.

FIG. 54. Organo di senso dell'*Ascalabotes mauritanicus* nel periodo d'accrescimento della muda, colorito con la soluzione alcoolica di nitrato d'argento: *cs*) cellule sensitive; *st*) strato circolare corneo; *cc*) coperchio.

FIG. 55. Superficie libera del coperchio dell'organo dell'*Ascalabotes mauritanicus*. Ingrandimento forte.

FIG. 56. Organo di senso della testa dell'*Ascalabotes mauritanicus* sorretto da una papilla cutanea, colorito con il picro-carminio: *cs*) cellule sensitive; *n*) nervo. Ingrandimento forte.

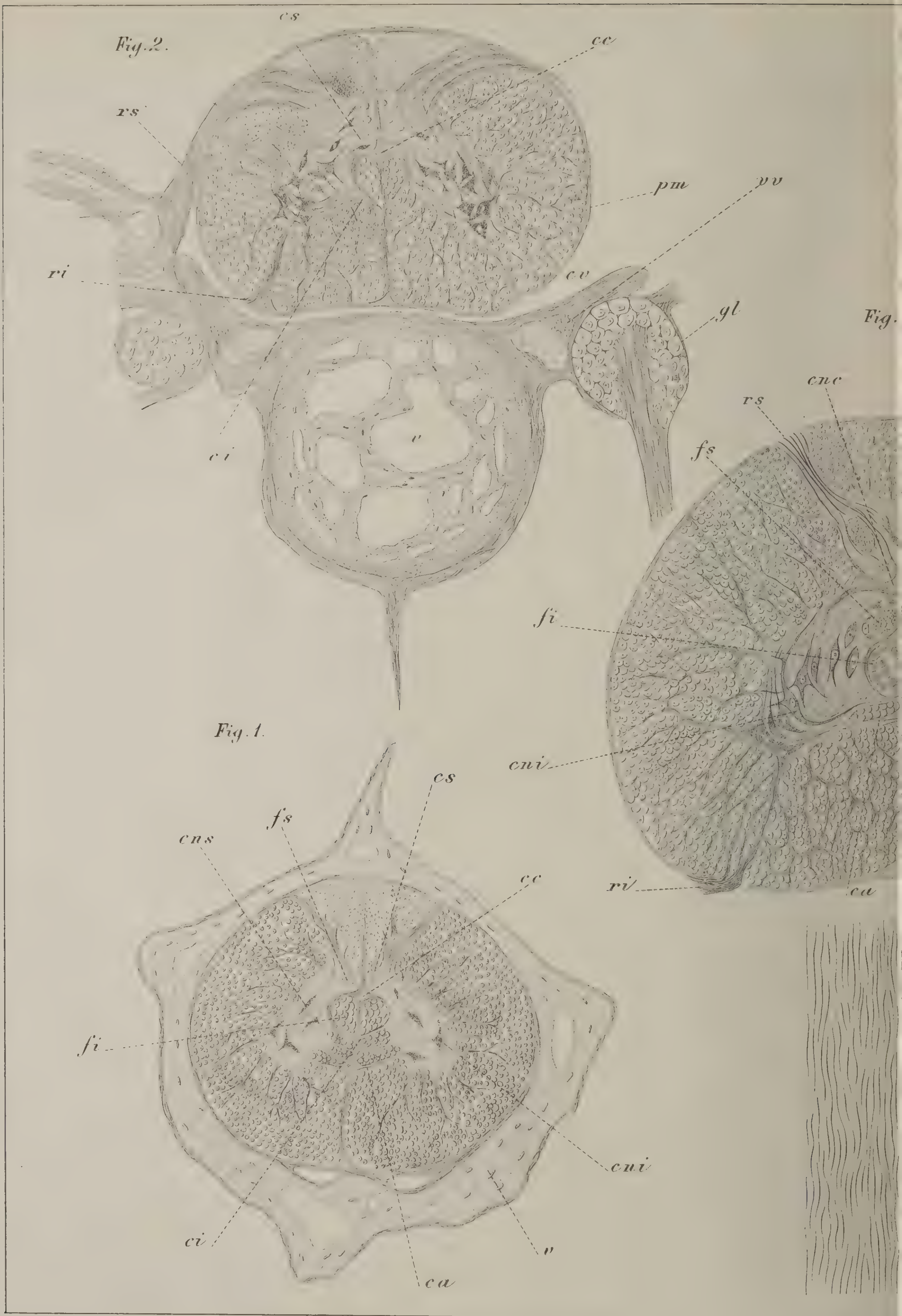
FIG. 57. Organo di senso peduncolato della mascella inferiore del *Coluber viridiflavus* colorito con l'acido osmico.

FIG. 58. Cellule disgregate degli organi di senso del *Coluber viridiflavus*: *cs*) cellule piriformi sensitive; *ce*) cellule di rivestimento o della parete. Ingrandimento forte.

FIG. 59. Organo di senso di nuova formazione nel secondo periodo della muda del *Coluber viridiflavus* colorito con l'acido osmico ed il picro-carminio: *cs*) cellule sensitive; *n*) fibra nervosa.

FIG. 60. Sezione ottica trasversa del canale dell'organo di senso anzidetto nella fig. 59.

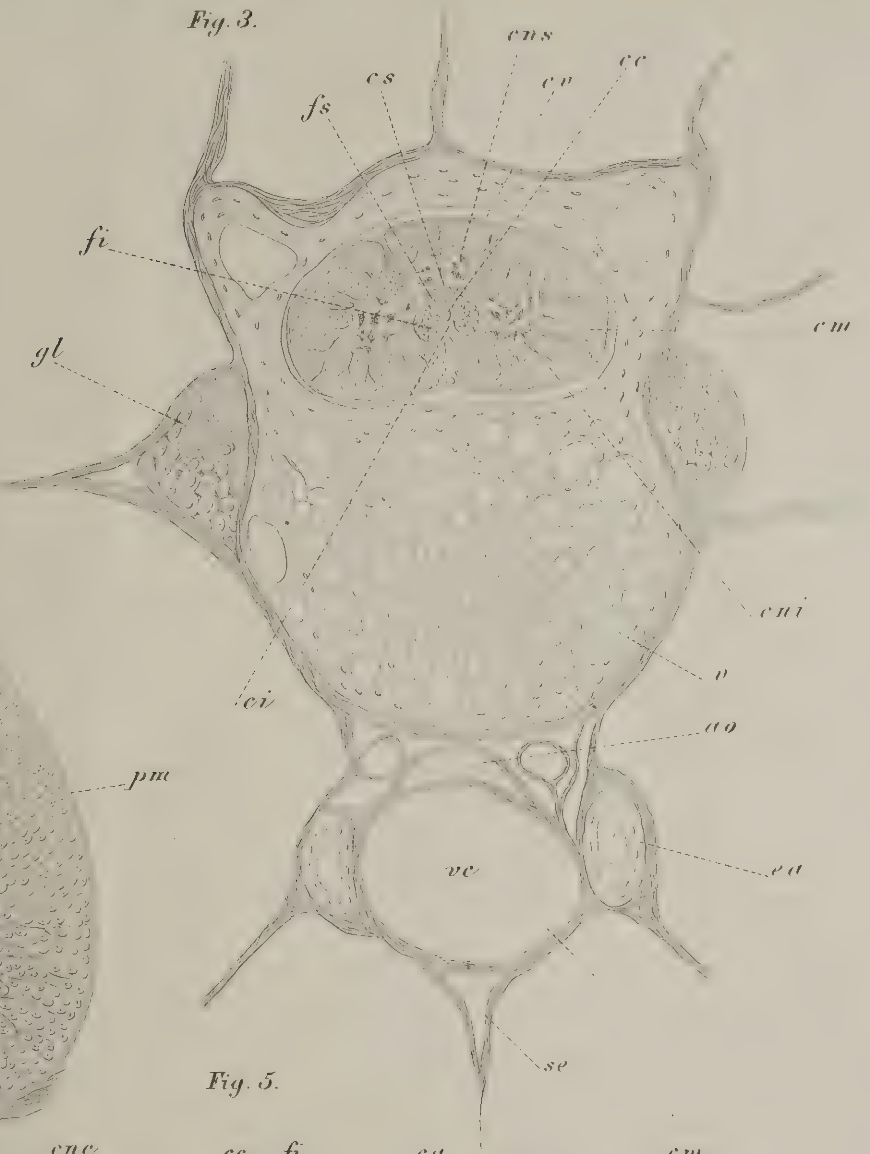
FIG. 61. Organo di senso dell'epidermide dell'addome delle squame addominali dell'*Ascalabotes mauritanicus* nello stato ordinario. Ingrandimento forte.



F. Todaro dis.

Lit. G. Clemen...

Fig. 3.



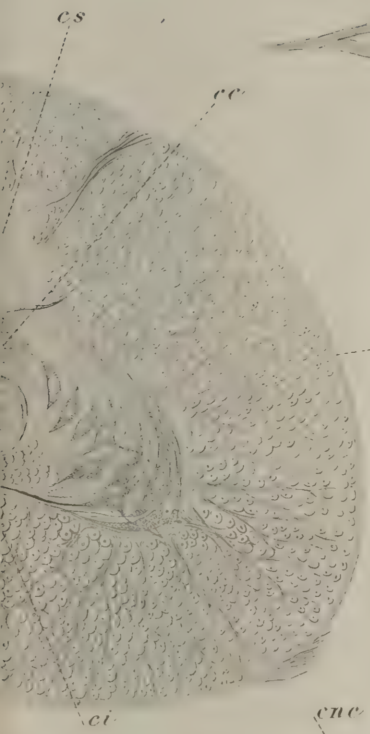
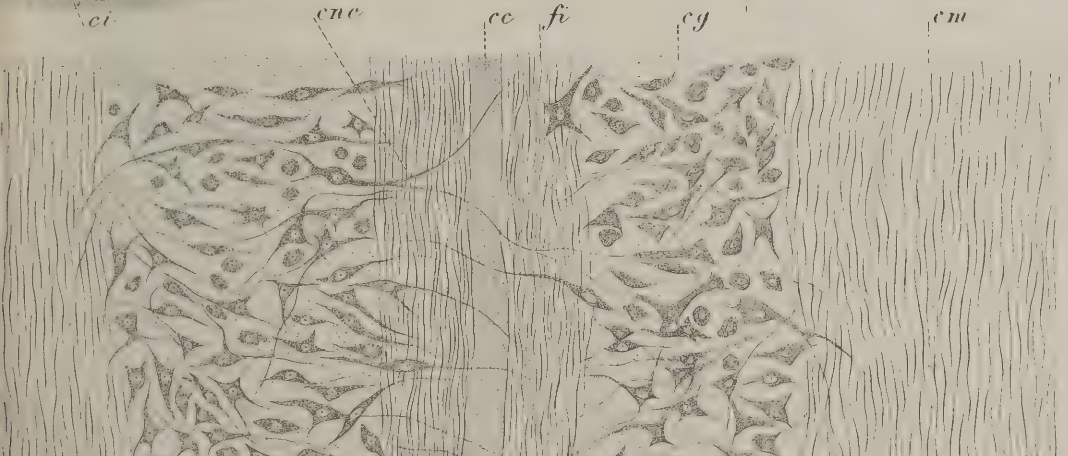


Fig. 5.



...Via Cestari N° 37.

U. Colonna inc.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

Fig. 6.

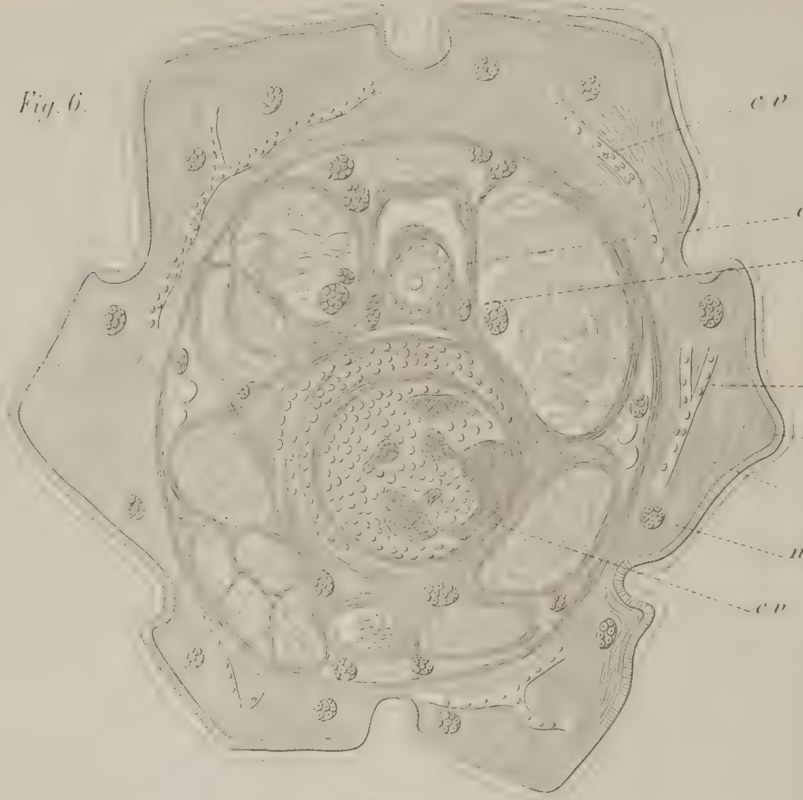
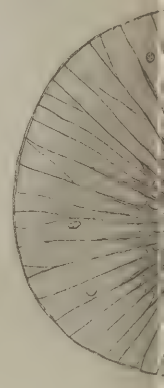


Fig. 7.

Fig. 9.



F. Todaro dis. Lit. G. Gleman Roma

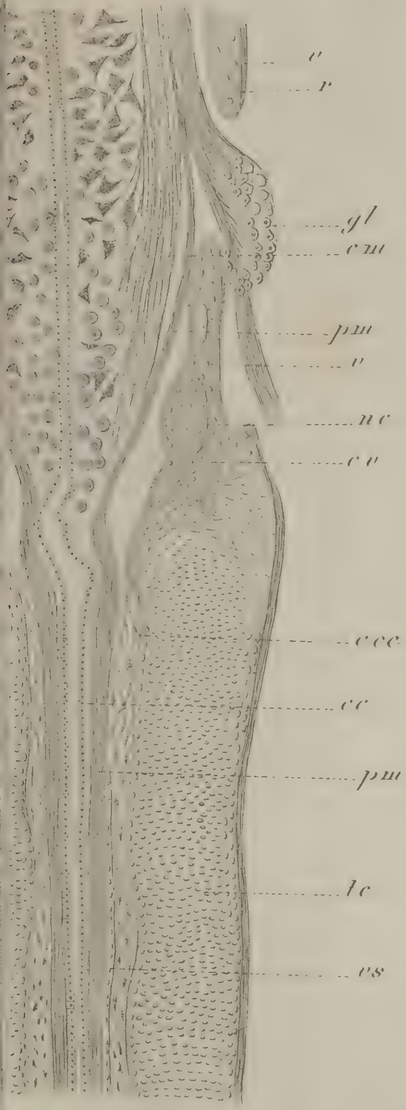
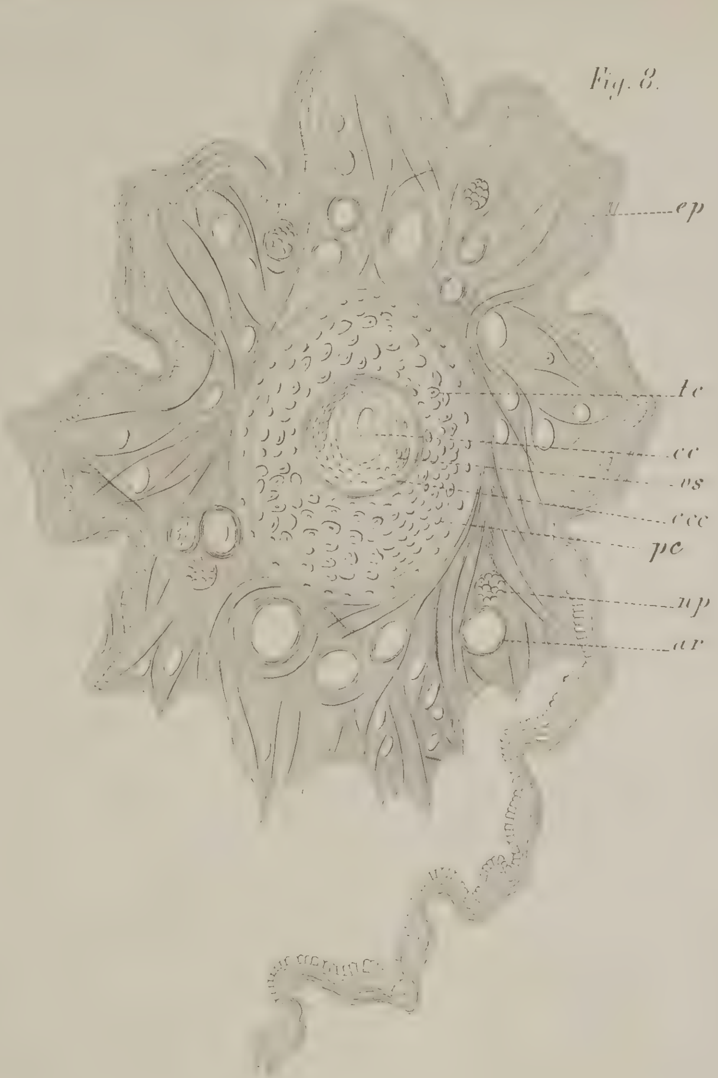


Fig. 8.



11.

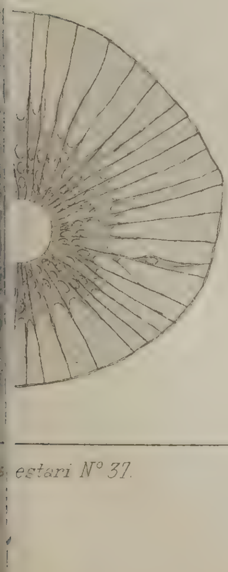
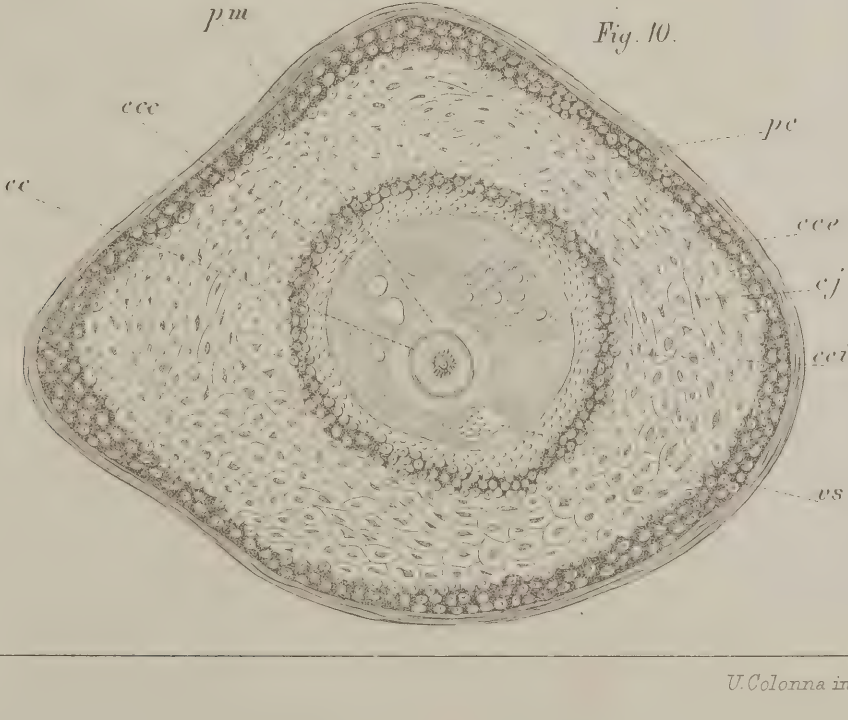


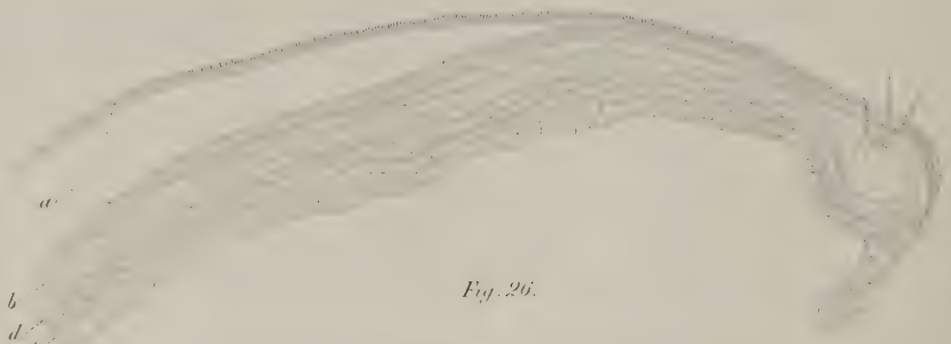
Fig. 10.



U. Colonna inc.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Fig. 24.



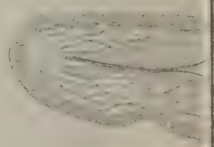


Fig. 26.

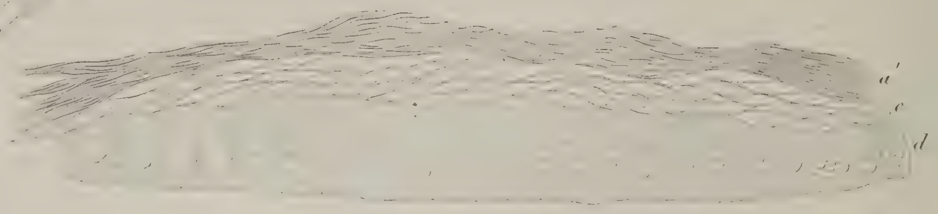


Fig. 27.

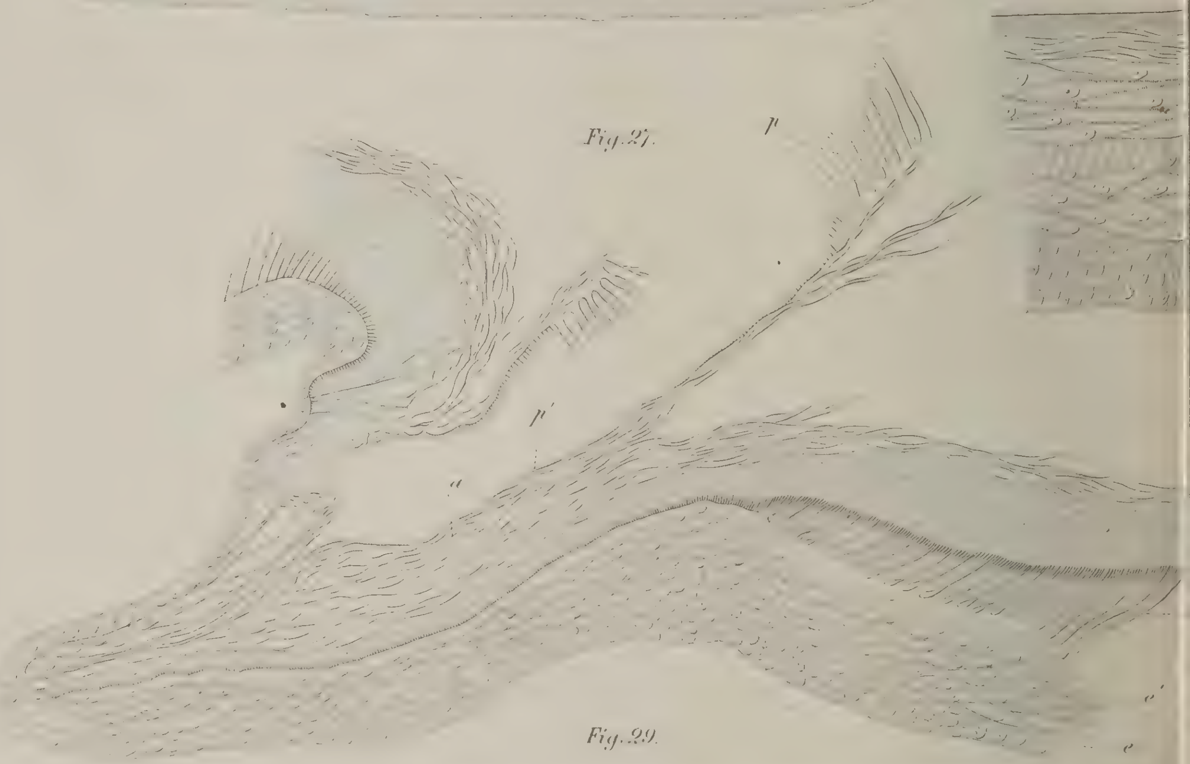
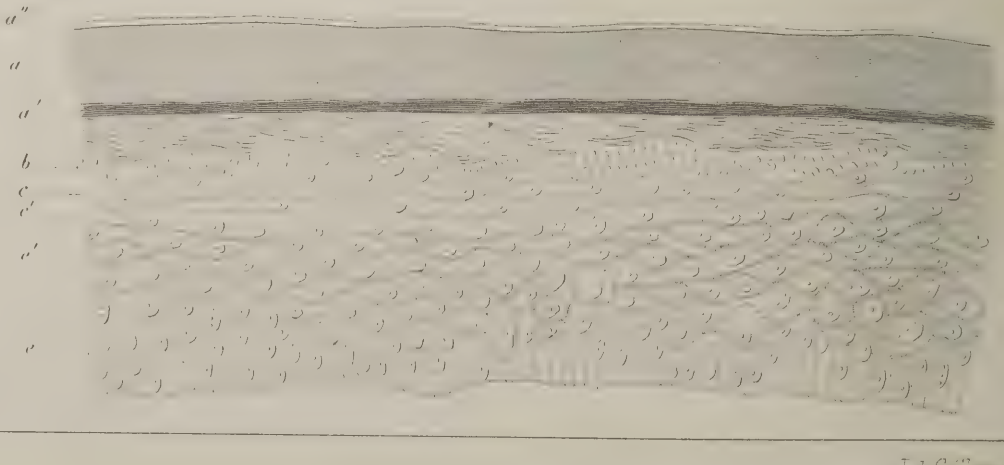


Fig. 29.



F. Todaro dis.

Lit. G. Zeman Rom

Fig. 29.

Fig. 30.

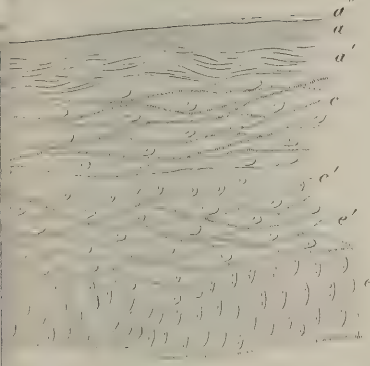


Fig. 28.

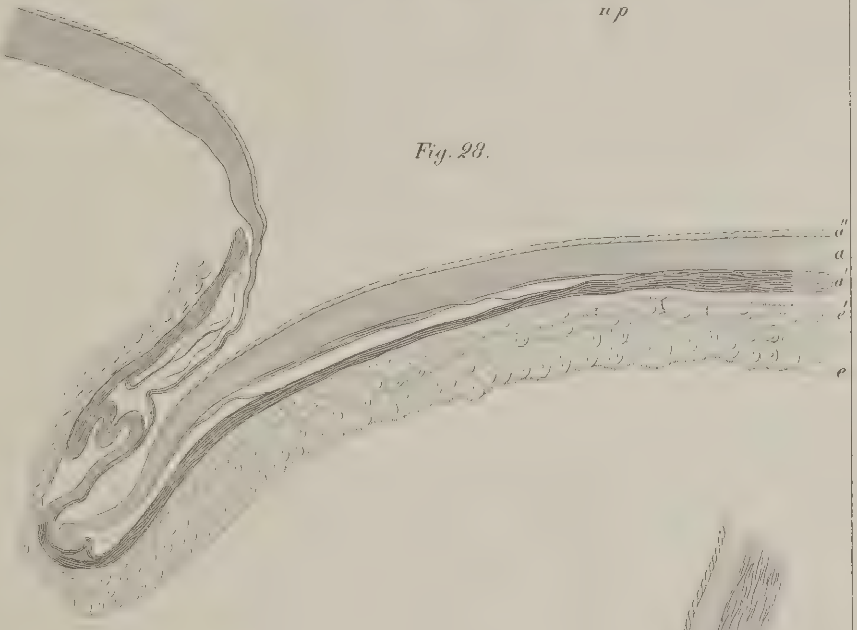
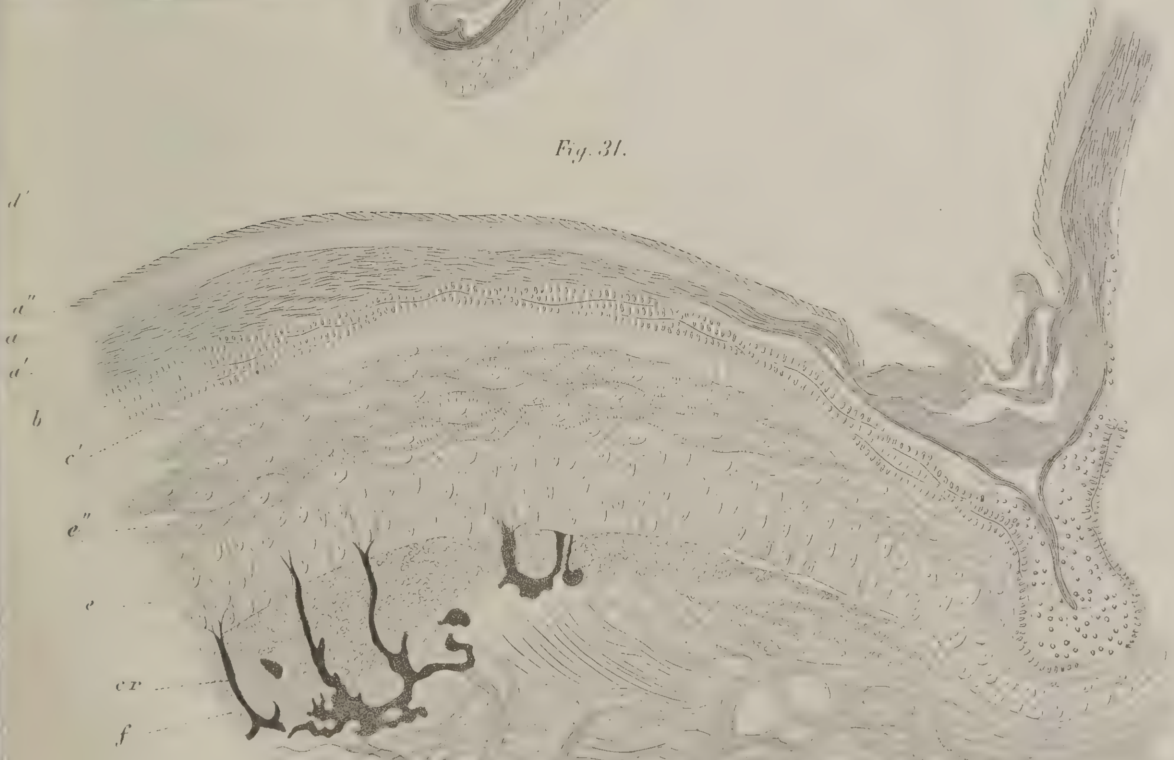
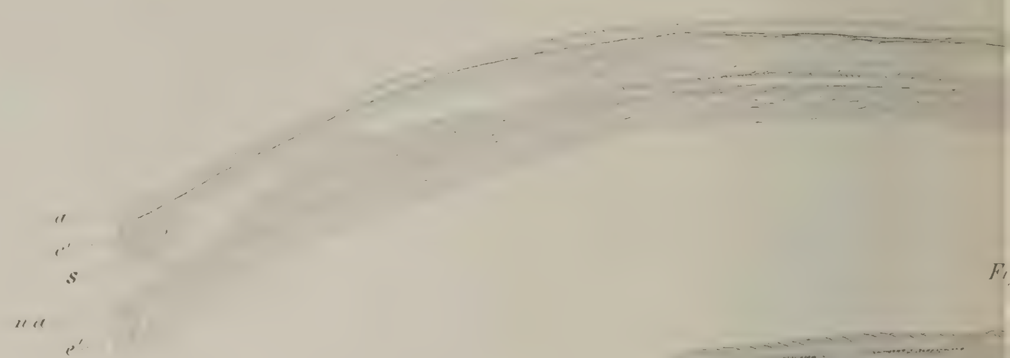


Fig. 31.



LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Fig. 36



Fi

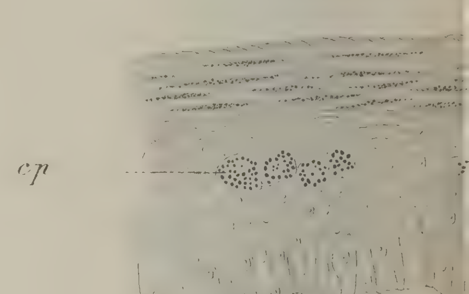
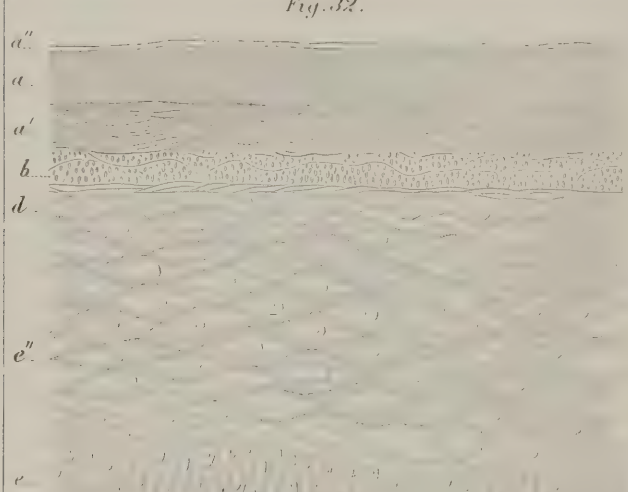


Fig. 32.



F

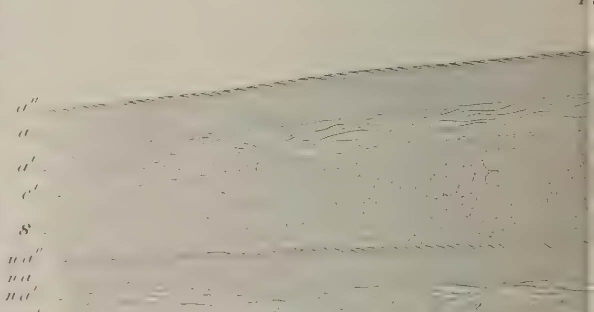


Fig. 35.

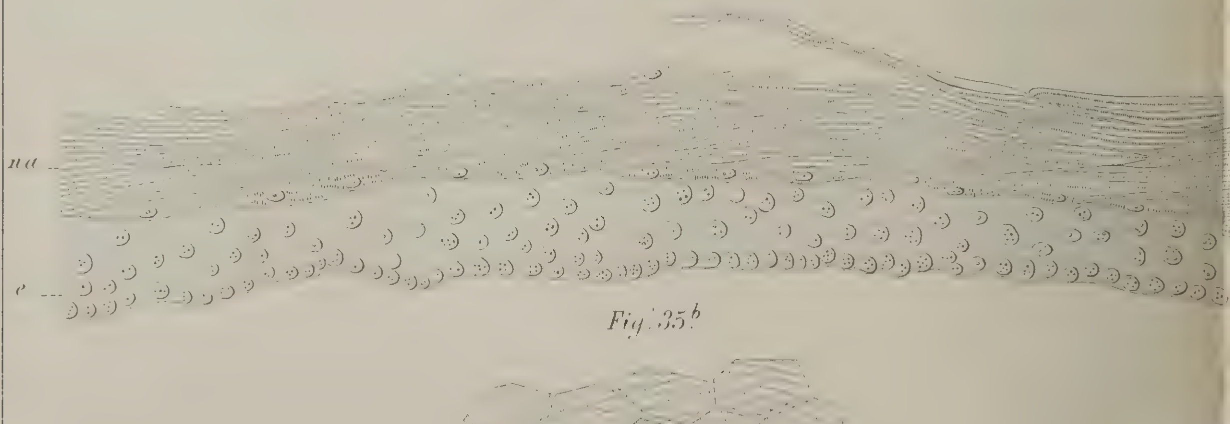
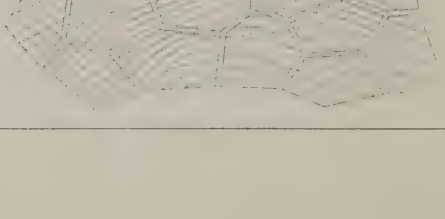


Fig. 35b



F. Todaro dis.

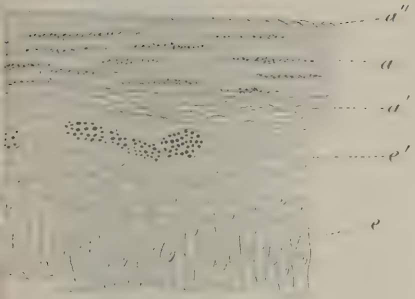


Fig. 33.

7.

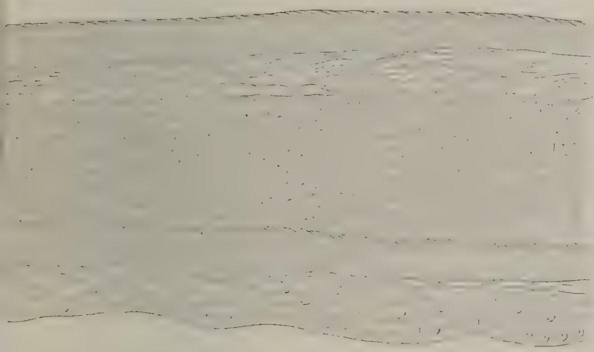


Fig. 34.

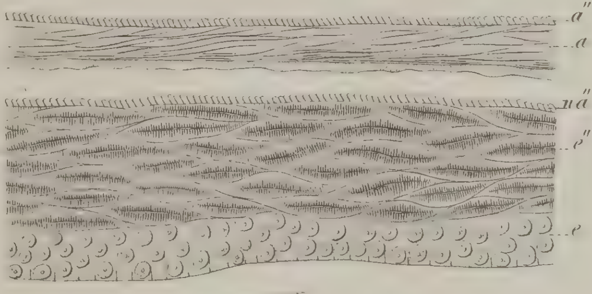


Fig. 38.

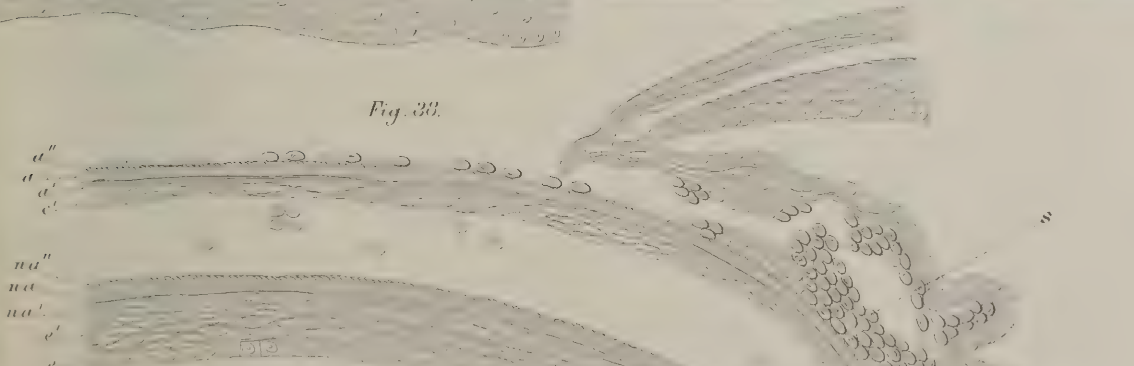
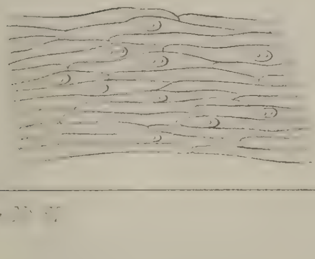
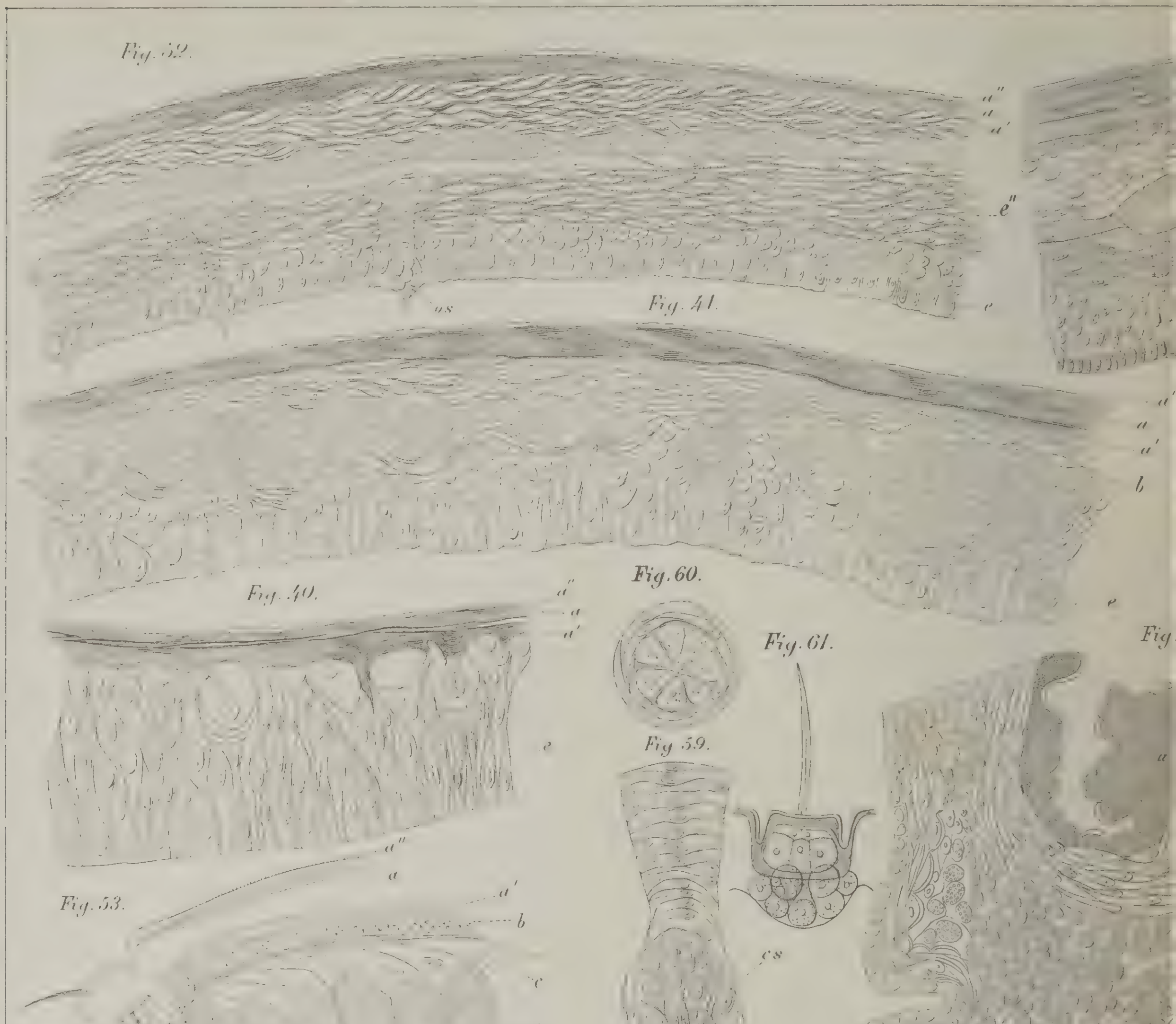


Fig. 35a

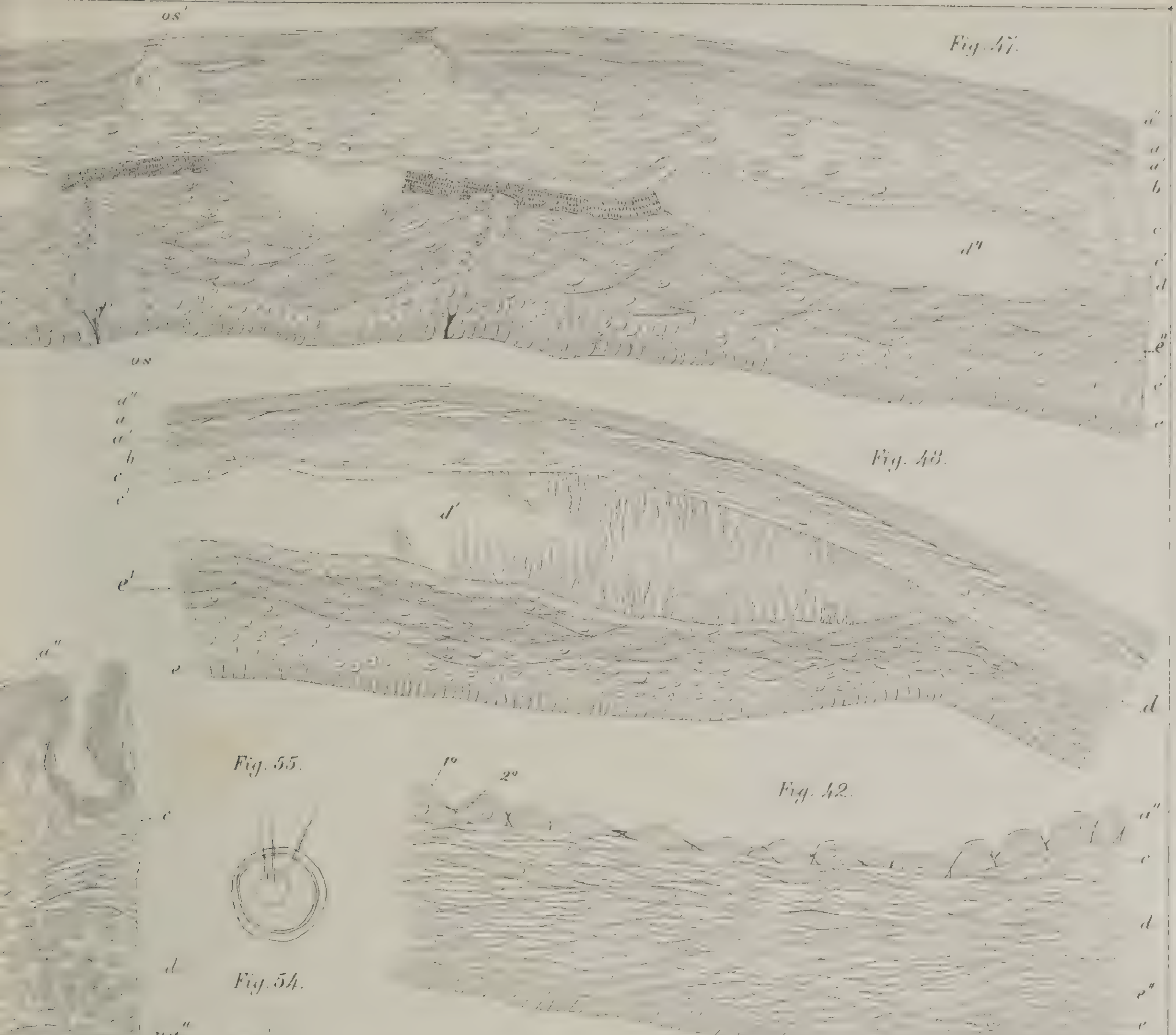


U. Colonna inc.



F. Todaro dis.

Lit. G. Clenan Roma



U. Colonna inc.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Sulla struttura del midollo spinale e sulla riproduzione della coda della Lacerta Viridis.

Memoria del dott. M. GIULIANI presentata dal Socio F. TODARO
nella seduta del 17 giugno 1877.
(Ricerche fatte nel Labor. di Anatomia normale della R. Univ. di Roma. IV)

Comunico in questa Memoria i risultati delle mie ricerche sulla struttura del midollo spinale, e sulla riproduzione della coda della *Lacerta viridis.*

Queste ricerche sono state fatte sotto la direzione del mio maestro prof. Todaro, a cui tributo i più caldi e sentiti ringraziamenti per i consigli di cui mi è stato largo nell'investigazione di tanto difficile argomento.

Sulla struttura del midollo spinale delle lucertole non esistono lavori speciali, forse come dice Kupffer ([1]), per le difficoltà che s'incontrano nell'estrarre il midollo spinale di questi animali senza produrre lacerazioni. Per conseguenza dirò innanzi tutto il metodo da me tenuto, nel porre a nudo il midollo spinale della *Lacerta viridis.*

Per isolare integro il midollo spinale della *Lacerta viridis* dallo speco vertebrale, offronsi invero delle difficoltà, che dopo alquanta pratica però si giunge a superare.

Ucciso l' animale coll' inalazione del cloroformio, si apre la cavità toracica e l'addominale, e si asportano tutti i visceri entro contenuti. Indi stendendo il tronco e la coda, si adagia dal lato ventrale sopra un tavolo, e si fissa mediante un grosso spillo conficcato nella testa.

Situato in tal modo l'animale, si comincia dal dissecare la pelle, che copre le apofisi spinose, quindi si fa altrettanto colla massa muscolare attaccata sopra gli archi delle vertebre. Ciò fatto, giovandosi di due forme diverse di piccole forbici, cioè rette e curve, si passa ad incidere da un lato e dall'altro gli archi vertebrali, e si asportano. Nel fare questa operazione si richiede tutta l' attenzione per non infilare colla punta delle stesse forbici il midollo, che occupa quasi completamente la circonferenza del canale vertebrale, specialmente nel tronco.

Tolti gli archi vertebrali, si deposita il midollo spinale, insieme ai corpi delle vertebre cui resta connesso, in una soluzione di acido cromico (2 %), e vi si lascia da 15 a 20 giorni rinnovandola ogni due o tre giorni. Questo liquido da un canto scalcifica i corpi delle vertebre, e dall'altro indurisce il midollo spinale. In tal modo riesce più facile isolarlo dopo del tutto e porlo nell'alcool assoluto, prima di praticare le sezioni.

Si può anche metterlo nell'alcool assoluto, senza rimuoverlo dai corpi vertebrali; avvegnachè si possono eseguire egualmente tagli sottilissimi tanto del midollo come

([1]) *De medullae spinalis textura in ranis.* Dorpati, 1854.

del corpo della vertebra corrispondente insieme, essendo questa scalcificata dall'acido cromico. Possonsi anche ottenere tagli sottilissimi del midollo spinale e della vertebra intera dopo di aver tenuto per 30 giorni nella soluzione di acido cromico tutta la colonna vertebrale, spogliata dalle parti molli.

Ho qui da aggiungere che avendo voluto sperimentare varî metodi di colorazione, così i liquidi da indurire adoperati sono stati diversi. Infatti previa preparazione del midollo spinale nell'anzidetto modo, cioè, aprendo prima lo speco vertebrale e rimovendone gli archi, quando ho voluto colorire i tagli con il cloruro d'oro ho fatto uso del liquido di Müller per indurire il midollo, che dopo ho tolto per fare le sezioni che ho lavato nell'acqua distillata prima di metterle nella soluzione di cloruro d'oro (1 : 1000). Ho indurito il midollo spinale nell'alcool assoluto quando ho voluto servirmi della soluzione alcolica di nitrato d'argento. Per la colorazione poi con la tintura neutra di carminio, e col liquido del Beale mi è stato indifferente l'indurire il pezzo nell'uno o negli altri liquidi su nominati. I migliori risultati li ho ottenuti con la colorazione del liquido del Beale.

Per colorire le sezioni ho messo in pratica scrupolosamente le regole dettate dagli autori, a cui appartiene ciascun metodo, e perciò tralascio di descriverle. Le dette sezioni dopo averle private dell'acqua con l'alcool assoluto e rischiarate con l'olio essenziale di garofano, le ho chiuse ora nel balsamo del Canadà ed ora nella damerlacca.

Descrizione generale del midollo spinale. — Il midollo spinale della *Lacerta viridis* è un corpo cilindroide, che dalla parte cervicale si estende fino all'estremità caudale. Rivestito dalla pia meninge è contenuto nel canale vertebrale e dura meninge, che riempie nella porzione del tronco quasi completamente venendo a contatto le due meningi; mentre nella coda resta fra queste due membrane uno spazio maggiore.

Lungo il suo decorso presenta, come negli altri vertebrati superiori, tanto il rigonfiamento cervicale, quanto quello lombare. Però quest'ultimo non è molto notevole, a motivo che il midollo, in questa specie come negli altri rettili, non si termina bruscamente a questo livello con un cono midollare, ma invece assottigliandosi insensibilmente si prolunga nel canale vertebrale della coda fino a circa due centimetri innanzi della sua punta, ove presenta un piccolo cono midollare, che fa continuazione con il così detto filo terminale.

Nei tagli trasversali del midollo spinale di questo animale si vede che il diametro trasverso è maggiore del diametro superiore-inferiore. Questa differenza è più visibile nella porzione del midollo che percorre il canale vertebrale della coda.

Sopra la superficie del midollo si veggono, anche ad occhio nudo, due solchi longitudinali, l'uno superiore appena accennato, e l'altro inferiore più sensibile, che dividono nella parte periferica il midollo in due porzioni eguali e simmetriche.

Dalla superficie libera di ciascuna metà, nella quale resta divisa la sostanza esterna o bianca, emergono lungo due linee longitudinali chiamate solchi collaterali, l'uno superiore e l'altro inferiore, le radici superiori o sensitive, e le radici inferiori o motrici dei nervi spinali. I due solchi collaterali segnano all'esterno la divisione in tre cordoni midollari, superiore, medio ed inferiore, della sostanza bianca di ciascuna metà del midollo spinale. Il cordone superiore è più piccolo perchè la serie delle radici

superiori emerge molto prossima al solco longitudinale superiore; mentre le radici inferiori invece escono dal midollo dalla parte esterna della faccia inferiore, e quindi più distante dal solco longitudinale inferiore. Perciò il cordone inferiore è più grosso del superiore, ed il medio più grande di tutti.

Per la medesima ragione le radici inferiori sono più corte e vanno direttamente infuori nel forame di congiunzione; le radici superiori sono più lunghe e decorrono per gran tratto sulla faccia superiore e laterale del midollo prima di raggiungere il forame di congiunzione, nel quale appena penetrate, dopo traversato il foro proprio della dura madre, presentano il ganglio intervertebrale, e quindi vanno a riunirsi alla rispettiva radice anteriore per formare il brevissimo tronco misto dei nervi spinali. Innanzi e sotto l'ultima porzione della radice inferiore e del tronco misto, si vede un altro ganglio più grosso, che appartiene al cordone limitrofo del gran simpatico.

Guardando sotto il campo del microscopio un taglio trasverso del midollo indurito nell'acido cromico e colorito nella tintura di carminio, si osserva il midollo circondato dalla pia meninge, la quale manda dei setti o prolungamenti fibrosi, che penetrano nella sostanza nervosa.

All'orlo inferiore si vede il solco longitudinale inferiore pronunziato, nel quale s'insinua un prolungamento fibroso della parte corrispondente della pia meninge, che arriva fino alla commessura inferiore. Questo prolungamento manda dai suoi lati un gran numero di tratti fibrosi, che penetrano nella sostanza nervosa, e contiene dei vasi sanguigni, dei quali il tronco principale è posto nel punto d'origine del prolungamento (arteria spinale anteriore).

All'orlo superiore apparisce il solco superiore come un intaglio stretto e profondo che arriva fino alla commessura superiore. Un prolungamento fibroso corrispondente alla membrana vascolare scende anche qui fino alla commessura superiore. Quindi il solco longitudinale superiore è più profondo e più stretto del solco longitudinale inferiore, ed il setto della pia madre è più lungo e più sottile di quello che entra in quest'ultimo.

La sostanza nervosa, come nel midollo spinale degli altri vertebrati, si vede anche qui nettamente distinta in parte centrale o grigia, ed in parte periferica o bianca.

La sostanza grigia presenta nei tagli trasversi la nota forma di un H latino più o meno modificata secondo le regioni; per conseguenza vi si distingue un nucleo centrale o commessura, e quattro prolungamenti o corna, due superiori e due inferiori.

Il corno superiore ed inferiore dello stesso lato sono uniti alle loro basi e presentano un margine esterno ed uno interno; quest'ultimo è interrotto nel mezzo dalla presenza del nucleo centrale o commessura, che riunisce le due metà della sostanza grigia tra loro.

Il corno superiore è più corto e più stretto dell'inferiore, ed è rivolto in alto ed all'esterno; l'inferiore poi più lungo e più largo guarda in basso ed esternamente.

Le corna inferiori mostransi più colorite delle superiori, e ciò è dovuto alla maggiore abbondanza e grandezza degli elementi cellulari.

La commessura o nucleo centrale è traversata in tutta la sua lunghezza da un canale (canale centrale). Si può per conseguenza distinguere una parte superiore al canale centrale ed un'altra inferiore, che alcuni han chiamato: commessura grigia superiore e commessura grigia inferiore. La parte superiore della commessura grigia è

molto più considerevole della parte inferiore, essendochè il canale è più ravvicinato al piano inferiore in tutta la lunghezza del midollo spinale. Sotto la commessura grigia si trova la commessura accessoria detta anche impropriamente commessura bianca. La commessura accessoria si trova in tutta la parte del midollo spinale che percorre il tronco; manca nel midollo spinale della coda. È fatta da fasci trasversi di sostanza grigia che dal lato interno delle due corna inferiori si vengono a riunire nella linea mediana al settò mediano inferiore della commessura grigia.

La sostanza bianca o periferica rivestita della pia madre circonda la sostanza grigia, ad eccezione dei solchi inferiore e superiore, ove è interrotta in due metà eguali e simmetriche, ed ove questi due solchi arrivano fino al nucleo centrale.

In ciascuna metà della sostanza bianca si vedono avanzarsi intanto dal lato interno le due corna inferiore e superiore della sostanza grigia o colonne grigie come le ha chiamate Henle [1], dalle quali si veggono uscire ed entrare le radici inferiori e superiori dei nervi spinali, che traversano la sostanza bianca tutta fin ai solchi collaterali donde emergono. In tal modo la sostanza bianca resta divisa nei tre cordoni superiore, medio ed inferiore innanzi menzionati.

Nella sostanza bianca si trovano solamente fibre nervose, e nella sostanza grigia fibre e cellule nervose in diversa proporzione. Questi elementi sono tenuti insieme da uno scheletro comune formato da tessuto congiuntivo, nella cui trama trovasi una ricca rete di vasi sanguigni.

Dato questo sguardo rapido sull'insieme delle parti, che compongono il midollo spinale, entro ora a descrivere l'intima struttura.

Canale centrale e sostanza grigia. — Il canale centrale traversa la commessura grigia (*nucleus cinereus* s. *centrum cinereum*), cominciando come negli altri vertebrati dal *calamus scriptorius* del quarto ventricolo fino alla punta della coda, ove continua nel filo terminale. Questo canale sta nel mezzo del piano mediano ed innanzi all'asse sagittale della commessura grigia, avvicinandosi così molto al solco inferiore ed allontanandosi dal solco superiore come negli altri vertebrati.

Presenta forma e larghezza variabile secondo le regioni. Nei due rigonfiamenti cervicale e lombare esso è più largo, e nel taglio trasverso presenta la forma ovale; nelle altre parti esso è più piccolo e circolare. Nel filo terminale conserva la forma circolare, ma acquista nuovamente l'ampiezza del rigonfiamento cervicale e lombare.

La sua parete è composta di cellule cilindriche, che non presentano mai ciglia vibratili. Queste cellule contengono due, tre, fino a quattro grossi nuclei rotondi, granulosi e disposti in serie uno accanto all'altro.

Dall'estremità esterna queste cellule mandano sottili e fitte ramificazioni nel tessuto che le circonda; mentre nel midollo spinale dell'Axolot, secondo lo Stieda, mandano da questo lato lunghi prolungamenti.

Nel vivente il canale centrale, come si sa dagli altri vertebrati, contiene un liquido (cefalo-rachidiano), il quale qualche volta si coagula in alcuni punti con la morte. Io ho veduto in un taglio longitudinale della regione lombare, e conservo il preparato, un trombo cilindrico fatto di una sostanza granulosa, che non riempiva

(1) Henle, *Handbuch der systematischen Anatomie der Menschen.* 1871.

completamente il lume del canale, ma restava sempre uno spazio fra esso e la parete del canale. Questo trombo è meramente accidentale ed è avvenuto per me dopo la morte. Ora fatti analoghi a questo osservati nel midollo spinale dell'uomo e degli altri vertebrati, hanno fatto asserire a Kölliker che non di rado il canale centrale e più sovente nella parte cervicale si trova obliterato. Però sull'assoluta costanza del canale centrale in tutti gli animali di qualunque età ed in tutte le parti del midollo spinale si sono pronunziati favorevolmente Bidder Owsianikow (1), R. Wagner (2), Schröder v. d. Kolk (3) e Stilling (4).

Il canale centrale nei tagli trasversi vedesi circondato da una zona chiara e trasparente, che si rende più visibile trattando le fine sezioni con la potassa (35%). Questa zona presenta quindi il carattere della sostanza gelatinosa centrale, precisamente come è stato osservato negli altri vertebrati da Stilling e Wallach (5) e che Kölliker (6) ha chiamato nucleo grigio o sostanza centrale grigia, e Virchow (7) filo centrale dell'epandima. Questa sostanza gelatinosa centrale del midollo spinale della *Lacerta viridis*, benchè chiara, non è omogenea; ma è fatta da una finissima rete di fibrille, nelle quali si trova sparsa una quantità di nuclei.

All'intorno della sostanza gelatinosa centrale si vede nel taglio trasverso un anello circolare fatto da fasci fibrillari di tessuto congiuntivo. Da questo anello si partono quattro fasci dello stesso tessuto. Uno di questi fasci a base triangolare si porta in sopra traversando lungo la linea mediana tutta la commessura grigia superiore fino al fondo del solco superiore, ove continua con il setto che manda la pia madre; uno inferiore più corto e più grosso viene nel fondo del solco inferiore, ove intreccia le sue fibre con quella del setto che manda la pia madre in questo solco. Io chiamo setto superiore della sostanza grigia il primo, e setto inferiore il secondo. Dai lati dell'anello fibroso si partono due fasci laterali, che ricurvandosi in basso si vengono a riunire al setto inferiore della sostanza grigia. In tutti questi fasci non si trovano cellule di nessuna specie.

Tutto il resto dello scheletro della sostanza grigia è fatto da una stretta rete di tessuto congiuntivo, nella quale si trovano sparsi nuclei o cellule congiuntive ramificate, e che costituisce la cosidetta sostanza porosa. Al margine esterno delle corna superiori io non ho potuto vedere la sostanza gelatinosa del Rolando.

Il tessuto congiuntivo della commessura accessoria si viene a riunire al fascio fibrillare inferiore nella parte prossima al fondo del solco longitudinale inferiore

Cellule e fibre nervose della sostanza grigia. — Gli elementi nervosi della sostanza grigia sono le cellule nervose e le loro ramificazioni. Tuttavia nella sostanza grigia del midollo spinale della *Lacerta viridis*, ho trovato quattro fasci longitudinali

(1) Owsianikow, *Disquis. microscop. de medullae spin. textura*. Dorpat, 1854 pag. 33.

(2) R. Wagner, *Neurolog. Unters.* Göttingen, 1854 pag. 166.

(3) Schröder v. d. Kolk, *Anatomisch-physiolog. onderzoek over het fijnere zamenstel en de werking van het ruggemerg*. Amst., 1854 p. 51.

(4) Stilling, *Neuere Untersuchungen über dem Bau des Rückenmarks* pag. 14.

(5) Stilling e Wallach, *Untersuchung über die Textur des Rüchenmarks*. Leipzig, 1842 pag. 33.

(6) Kölliker, *Mikroskop. Anat.* Abth. I pag. 411.

(7) Virchow Archiv. VI pag. 137.

di fibre nervose midollari, simili a quelle dei cordoni midollari della sostanza bianca. Questi fasci midollari traversano la sostanza grigia parallelamente al canale centrale.

Due di questi fasci nervosi traversano la parte superiore o commessura grigia superiore, e due traversano la parte inferiore o commessura grigia inferiore. Chiamerò perciò i primi fasci midollari superiori ed i secondi fasci midollari inferiori del nucleo centrale.

I fasci midollari superiori (tav. I, fig. 1, 3, 4, *fs*) sono piccoli, e nei tagli trasversi coloriti con la tintura di carminio si presentano, ad un mediocre ingrandimento, come due piccole macchie ellittiche di color giallognolo con punteggiatura nera, poste ai lati della origine del fascio congiuntivo fibrillare superiore, a ridosso dell'anello congiuntivo fibrillare, che circonda la sostanza gelatinosa centrale. Ad un forte ingrandimento si scorgono le fibre nervose tagliate in trasverso nettamente delineate, nelle quali si distinguono il cilindro dell'asse ch'è sottile e la guaina midollare. In ognuno di questi fasci superiori si possono contare 15-20 sottili fibre nervose simili alle sottili fibre nervose dei cordoni superiori.

Questi fasci midollari superiori decorrono al di sopra e parallelamente al canale centrale, separati fra loro dal setto mediano superiore alla sostanza grigia, e si trovano solamente in tutta la parte superiore ed inferiore del midollo spinale, cioè, nella porzione cervicale, ed in tutta la porzione del midollo spinale, che decorre nella regione sacrale, ed in tutta la coda, ove sono più sviluppati; mancano nel rigonfiamento cervicale, nella porzione dorsale, e nel rigonfiamento lombare.

I due fasci midollari inferiori (tav. I, fig. 1, 2, 3, 4, *fi*) sono molto più considerevoli dei fasci superiori.

Nella superficie del taglio trasverso presentano anche la forma ellittica, e son fatti da un numero maggiore di fibre nervose midollari più grosse, specialmente nella porzione della coda, ove sono anche più grosse delle fibre midollari dei cordoni midollari inferiori.

Le fibre nervose, che compongono i fasci inferiori sono non solo più grosse; ma posseggono altresì un cilindro dell'asse considerevole. Queste fibre nervose sono anche più grosse di quelle dei cordoni inferiori.

I fasci midollari inferiori decorrono sotto il canale centrale, dal quale sono separati dalla sostanza gelatinosa centrale e dal tessuto congiuntivo fibrillare, che circonda questa sostanza. Decorrono anche parallelamente a questo canale; e sono divisi tra loro dal setto mediano inferiore della commessura grigia, e circondati all'esterno dai fasci laterali di tessuto congiuntivo fibrillare, che partendosi dai lati dell'anello, vengono a riunirsi, come ho detto innanzi, al setto mediano inferiore, formandosi così una specie di guaina congiuntiva fibrillare all'intorno di ciascuno di questi fasci.

I fasci midollari inferiori della sostanza grigia a differenza dei fasci superiori si trovano in tutto il midollo spinale.

Al di sotto di questi fasci se ne trovano altri che io chiamo fasci midollari accessorî, il cui numero varia secondo le regioni del midollo spinale.

Questi fasci midollari accessorî possono appartenere alla parte interna dei cordoni midollari inferiori. Però si distinguono dagli altri fasci appartenenti a questi

cordoni, per il fatto che traversano la commessura accessoria, ed i due fasci accessorî più alti decorrono fra la commessura accessoria e la commessura grigia. Questi fasci midollari inferiori sono stati notati nel midollo spinale dei mammiferi da altri osservatori; ed ultimamente A. Zincone ne diede una descrizione più particolareggiata nel midollo spinale del Bue (¹), mentre che dei due fasci midollari superiori, per quanto io sappia, non sono stati trovati ancora in nessun altro vertebrato.

Cellule nervose. — Le cellule nervose per la posizione che occupano, si possono distinguere in cellule nervose della commessura, in cellule nervose delle corna superiori, ed in cellule nervose delle corna inferiori.

Le cellule della commessura, o cellule commessurali, sono per lo più bipolari e si trovano tanto nella commissura grigia superiore, quanto nella commissura accessoria.

Le cellule bipolari della commessura grigia superiore sono piccole ed abbondanti; occupano ora la linea mediana, ed ora i lati di questa linea. Uno dei prolungamenti di queste ultime traversa il setto mediano superiore e va a ramificarsi nel lato opposto. Quelle che occupano la linea mediana sono disposte trasversalmente. Fra queste ultime, nella commessura grigia superiore della porzione sacrale del midollo spinale ho trovato inoltre le cellule multipolari (tav. I, fig. 4, *cnc*).

Le cellule multipolari traversano il setto mediano superiore e si estendono da un corno superiore all'altro. Sono molto grosse, ed i loro numerosi prolungamenti protoplasmatici ramificandosi si dirigono in varî sensi. Alcuni si ripiegano in basso verso le corna inferiori, altri indietro, altri trasversalmente in fuori, si distribuiscono nelle corna superiori. Questi ultimi prolungamenti protoplasmatici, che si portano trasversalmente in fuori, si possono accompagnare fino alla loro penetrazione nei cordoni midollari laterali. Fra quelli che si portano nelle corna superiori, si vede un lungo prolungamento, che si può accompagnare fino nella radice superiore corrispondente ai nervi spinali. Questo lungo prolungamento non presenta ramificazione, e sembra essere il prolungamento del cilindrasse del Deiters.

Nella commessura accessoria le cellule nervose sono così scarse che mi è riuscito una sola volta di vederle nei tagli trasversi. Però nei tagli longitudinali si veggono facilmente (tav. I, fig. 5, *cnc*) poste trasversalmente ed obliquamente innanzi ai fasci midollari inferiori.

Invece nella commessura accessoria si trovano numerose fibre nervose commessurali, relativamente più grosse delle fibre nervose commessurali della commessura grigia superiore.

Le fibre nervose commessurali della commessura accessoria sono lunghi e grossi prolungamenti protoplasmatici delle cellule nervose delle corna inferiori, che ramificandosi in lunghi rami camminano trasversalmente decussandosi nella commessura accessoria per portarsi nel cordone midollare inferiore del lato opposto.

Cellule e fibre nervose delle corna della sostanza grigia. — Nelle corna della sostanza grigia, gli elementi nervosi sono rappresentati dalle cellule nervose multipolari,

(¹) A. Zincone, *Nota sopra alcune particolarità di struttura del midollo spinale del Bue.* Estratto dalla Gazzetta Veterinaria. 1876, f. 2.

dai loro prolungamenti, e da una finissima rete nervosa, che si confonde con quella della stessa sostanza spongiosa.

Le cellule nervose multipolari sono più grosse e più abbondanti nelle corna inferiori; mentre che nelle corna superiori, ad eccezione delle grosse cellule multipolari commessurali, innanzi descritte, sono piccole, bipolari e scarse.

Le grosse cellule multipolari delle corna inferiori sono disposte con una certa simmetria, le une sovrapposte alle altre, e spesso formano una serie come è rappresentato nella fig. 4. Quelle che occupano il lato esterno ed inferiore sono più grosse e poste le une accanto alle altre. Quelle che occupano la parte interna e superiore di questo corno sono più piccole, ed un po' più distanti fra loro. Avvi una certa gradazione di grandezza e di numero venendo dalla parte inferiore ed esterna verso la parte superiore interna.

Le grosse cellule che occupano la parte inferiore esterna mandano lunghi prolungamenti protoplasmatici in tutti i sensi. I lunghi prolungamenti che mandano in alto decorrono sul margine o superficie esterna della sostanza grigia, e si possono accompagnare fino nella parte corrispondente del corno superiore ove si vanno mano mano disperdendo ramificandosi. Lungo il loro cammino dal lato esterno si partono successivamente varie ramificazioni, che penetrano nei cordoni midollari laterali.

I lunghi prolungamenti che mandano internamente, camminano trasversalmente sopra il margine o superficie inferiore della sostanza grigia del corno inferiore, e mandano successivamente alcuni lunghi rami, che penetrano nel cordone midollare inferiore dello stesso lato. Quindi, continuando il loro cammino trasversale, si portano nella commessura accessoria, ove come ho detto innanzi formano le fibre commessurali, che si decussano con quelle dell' altro lato e vanno a penetrare nel cordone midollare inferiore del lato opposto.

Da questi prolungamenti protoplasmatici partono finissime fibrille, che formano una rete, che si confonde con la rete fibrillare del tessuto congiuntivo.

Dalla parte esterna del corpo delle cellule, e rare volte dalla base di uno dei grossi prolungamenti protoplasmatici si parte il prolungamento del cilindrasse del Deiters, il quale si porta direttamente infuori nelle radici inferiori dei nervi spinali.

Io non ho potuto assicurarmi se quest'altro prolungamento presenti o no ramificazioni. Per quanto abbia potuto osservare con i mezzi da me adoperati, non ho potuto vedere alcuna divisione di questo prolungamento; ma per assicurarsi di tale fatto è mestieri moltiplicare le ricerche con altri mezzi. Dirò anche, che con i mezzi da me adoperati non si vedeva punto la guaina midollare che secondo Laura (1) accompagnerebbe questo prolungamento.

Quanto alla fitta rete fibrillare descritta dal Gerlach, io sono riuscito a vederla col mezzo adoperato da questo autore (2) ed ho veduto tale rete non solo annessa ai rami protoplasmatici, ma ben anche al corpo cellulare. Se questa rete finissima sia di natura nervosa o congiuntiva io non saprei dirlo.

Le cellule della parte interna e superiore di questo corno sono più piccole di

(1) Laura, *Sull'origine reale dei nervi spinali, e di qualche nervo cerebrale* (ipoglosso, accessorio del Willis, pneumogastrico). Memoria della Reale Accademia delle Scienze di Torino serie 2ª tom. XXXI. 1878.

(2) Gerlach, *Stricker's Handbuch.*

quelle che occupano il lato esterno e inferiore. I loro prolungamenti protoplasmatici si dirigono in varî sensi; alcuni di questi prolungamenti vanno obliquamente in alto nella commessura grigia superiore, formando fibre nervose commessurali che passano nel corno superiore del lato opposto; altri nella commessura grigia inferiore ove penetrano subito nel fascio midollare inferiore dello stesso lato.

Le cellule nervose delle corna superiori sono piccole e scarse e si confondono con le cellule nervose laterali della commessura grigia superiore. I prolungamenti di queste cellule, quantunque esilissimi, si veggono tuttavia portarsi alcuni nei cordoni midollari laterali, altri nei cordoni midollari superiori, altri nelle radici superiori dei nervi spinali, ed altri infine formare le fibre nervose commessurali della parte superiore della commessura grigia.

È degno di nota che le cosidette colonne vescicolari di Clarke della porzione dorsale del midollo spinale dei mammiferi, non si trovano nel midollo spinale della *Lacerta viridis*.

Sostanza bianca. — Il tessuto congiuntivo della sostanza bianca, come in tutti gli altri vertebrati, è fibrillare ed è più consistente di quello della sostanza grigia.

Dalla superficie interna della pia madre si partono dei prolungamenti di tessuto congiuntivo, che si riuniscono per formare dei setti in mezzo alle fibre nervose midollari longitudinali, setti che circondano queste fibre e suppliscono, in tutta la sostanza bianca delle altre pareti centrali, alla mancanza della guaina di Schwan. Così questi setti fanno lo scheletro della sostanza bianca, che nell'interno si continua con quello della sostanza grigia.

Le fibre nervose della sostanza bianca per il loro decorso si distinguono in longitudinali, trasverse ed oblique.

Le fibre longitudinali sono non solo le più abbondanti, ma costituiscono la massima parte della sostanza bianca; esse decorrono parallele fra loro quantunque sovente se ne vedano nei tagli longitudinali alcune che decorrono anche a zig-zag. Queste fibre non sono di eguale grossezza; ve ne ha delle più grosse e delle più fine. In generale il maggior numero di fibre grosse si trova nei cordoni inferiori, poi vengono i cordoni laterali, ed in terzo luogo i cordoni superiori, ove si trovano le fibre nervose le più sottili.

Le fibre longitudinali sono midollari, cioè formate dal cilindro dell'asse e dalla guaina midollare; manca, come ho detto, la guaina fibrosa come tutte le fibre midollari centrali.

Le fibre nervose trasverse ed oblique, generalmente non hanno guaina midollare.

Oltre le fibre trasverse ed oblique che in grande numero provengono dalla ramificazione dei prolungamenti protoplasmatici delle cellule nervose della sostanza grigia già descritte, si annoverano fra le fibre trasverse ed oblique quelle che in larghi fasci dai solchi collaterali penetrano ed escono dalle corna della sostanza grigia e formano le radici dei nervi spinali. Questi fasci, che costituiscono le radici dei nervi spinali, dividono tutta la sostanza bianca in tre cordoni midollari, come innanzi è stato detto.

Filo terminale. — Il filo terminale dei rettili è molto corto, dappoichè il midollo spinale in questi animali percorre la massima parte del canale vertebrale della coda.

Nella *Lacerta viridis*, come sopra ho detto, il midollo spinale termina circa due centimetri innanzi la punta caudale. Per conseguenza in questa specie, il filo terminale, che fa seguito al midollo spinale, non è più lungo di due centimetri.

Nel punto di passaggio del midollo spinale nel filo terminale, il midollo termina con un piccolo cono, nel quale è difficile di vedere se esista o no la fessura notata nei mammiferi.

Il canale centrale conserva la forma circolare; ma diviene più largo e termina alla punta a fondo cieco sotto il derma della pelle.

Le cellule cilindriche che circondano questo canale sono simili a quelle della parte dello stesso canale, che percorre il midollo spinale, innanzi descritte.

La sostanza gelatinosa centrale è più abbondante e più ricca di nuclei. A questa sostanza succede esternamente il tessuto congiuntivo fibrillare, che appartiene alla pia meninge. Questi fatti si veggono chiaramente tanto nei tagli trasversali, quanto in quelli longitudinali: nei tagli longitudinali si vede chiaramente la continuazione del canale centrale e del tessuto che lo circonda non che della pia madre, con il canale centrale e la pia madre del midollo spinale; nei tagli trasversali e longitudinali non si scorge nessuna traccia nè di fibre nervose, nè molto meno di cellule nervose.

Questi fatti per conseguenza darebbero ragione all'opinione del Bidder, il quale contrariamente all' opinione dello Stilling ammette che il filo terminale non possiede che elementi congiuntivi.

In ultimo gli archi ossei delle ultime vertebre caudali che circondano il filo terminale restano fibrosi (tav. II, fig. 6).

Coda riprodotta. — È cosa nota fin dai tempi di Plinio, che se per una accidentalità qualunque le lucertole perdono la coda, questa si riproduce. Si riproduce il midollo spinale sotto forma di filo terminale e lo speco vertebrale sotto forma di un tubo cartilagineo. Le altre parti, i muscoli, i nervi periferici, i vasi sanguigni, lo scheletro connettivo avvolgente, il derma, e l'epidermide, si riproducono istologicamente e perfettamente simili a quelle della coda normale. Non è mia intenzione di studiare ora, nè la riproduzione della pelle, nè quella dei muscoli e dei nervi periferici. Noterò solamente di passaggio che non si riproduce sorta alcuna di gangli, e che le fibre nervose dei nervi periferici della parte riprodotta, comunicano da ciascun lato con l'ultima porzione del midollo spinale della primitiva coda rimasta mercè due radici, la superiore delle quali porta il ganglio intervertebrale.

Io mi sono occupato solamente a studiare la riproduzione dello speco vertebrale sul quale Cuvier (1) pel primo ha richiamato l'attenzione, e del filo terminale in esso contenuto. Gli ultimi lavori che possediamo, nei quali sono studiate a preferenza queste due parti, sono del Müller H. (2), del Calori (3), del Gluckselig (4) ed una Nota del Gegenbaur (5).

(1) Cuvier, *Recherches sur les Oss. foss.* Tom. V.

(2) H. Müller, *Eine Eidechse* « Lacerta viridis » ecc. Verh. Würzburger phys.-med. Gesellschaft. Bd. II pag. 66, 1851. — *Ueber Regeneration der Wirbelsäule und der Ruckenmarks bei Tritonen und Eidechsen.* Frankfurt, 1864.

(3) Calori, *Sullo scheletro della* Lacerta viridis ecc. Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna. Tom. IX pag. 345. 1858.

(4) Gluckselig, *Ueber das Leben der Eidechsen.* Verh. d. Zool.-botanischen Vereins in Wien, 1863. Conosco questo lavoro solamente per la citazione del Leydig nella sua Memoria: *Die in Deutschland lebenden Arten der Saurier.*

(5) Gegenbaur, *Untersuchungen zur Vergleichenden Anatomie der Wirbelsäule bei Amphibien und Reptilien* pag. 48. Leipzig, 1862.

Per fare queste indagini ho guardato prima con una lente d'ingrandimento il tubo cartilagineo messo a nudo e lasciato macerare nell'acqua per meglio spogliarlo dalle parti molli involgenti. Quindi per lo studio della struttura intima mi sono servito del metodo dei tagli trasversi e longitudinali, che ho coloriti indifferentemente col picro-carminio o col liquido di Beale.

Lungo tutta la parte riprodotta della coda delle lucertole in sostituzione dello scheletro osseo decorre il tubo cartilagineo, il quale spogliato dalle parti molli che lo ricoprono, si presenta di un colore bianco-giallo rivestito da un pericondrio spesso, dal quale si lascia difficilmente spogliare anche colla macerazione.

In tutta la sua estensione questo tubo non presenta una serie di forellini a distanza regolare da potersi indicare come fori di coniugazione, secondo asserisce il Calori. Io ho visto solamente qualche raro forellino, per il quale penetrava un vaso sanguigno nella parte interna del tubo. Così anche ho veduto che le strie descritte come anelli di separazione da Dumeril e Bibron, e che H. Müller ha anche ritenuto come indizio della formazione delle vertebre, sono irregolari e meramente accidentali, e non appariscono ordinariamente che allorquando si è lasciato disseccare il tubo. Quindi non si possono ritenere in conto di segni divisori del tubo cartilagineo, ma invece questo è formato da un solo pezzo cavo che si termina alla punta della coda a fondo cieco.

Questo canale contiene il filo riprodotto di color bianco e consistenza molle, il quale si continua dal primitivo midollo spinale fino alla punta della coda lungo tutto il tubo cartilagineo.

Il tubo cartilagineo come più si vede in un taglio longitudinale (tav. II, fig. 7) si unisce immediatamente al pezzo rimasto di una vertebra; cioè, nella parte inferiore al corpo, e nella parte superiore all'arco vertebrale, come ha notato con esattezza H. Müller; corpo ed arco vertebrale, che nelle ultime vertebre caudali sono divisi dalla presenza di una fessura, notata già dal Cuvier, e vista dopo dagli altri. Forse questa fessura formando un punto di minor resistenza contribuisce, come si crede, alla nota facilità di rompersi la coda di questi animali.

La base del tubo cartilagineo aderente all'ultima vertebra mostra delle sporgenze (tav. II, fig. 10), che corrispondono all'arco ed al corpo della vertebra colla quale aderisce.

Oltre del pericondrio, il tubo cartilagineo, come si mette in chiaro coi tagli trasversali (tav. II, fig. 8, 9, 10), presenta: nella base quattro zone cartilaginee; nella porzione media tre, mentrechè nella punta non esiste che una sola zona cartilaginea.

La zona cartilaginea nella punta è composta di giovani cellule cartilaginee nucleate e protoplasmatiche che col picro-carminio si coloriscono in un bel roseo. Nella porzione media del tubo le cellule cartilaginee protoplasmatiche formano solamente la zona media, mentre che le cellule della zona esterna e della zona interna si sono essiccate e divenute trasparenti come il vetro. Con il picro-carminio le cellule della zona media si colorano in roseo come le cellule cartilaginee della punta, e quelle delle due zone esterna ed interna, rimangono colorite in giallo-canario.

Nella base le cellule cartilaginee giovani e protoplasmatiche formano la zona intima; a questa succede una seconda zona nella quale è avvenuta la infiltrazione calcare, poi una terza zona fatta da cellule cartilaginee essiccate e trasparenti come

il vetro e finalmente viene una quarta zona o zona esterna che si presenta nuovamente carica di sali calcari. Vi sono adunque due zone calcari (tav. II, fig. 8, 9, 10).

La spessezza della zona calcarea interna ed esterna non è eguale da per tutto. In alcuni punti le due zone periferiche sono più grosse, e la zona media è relativamente più stretta. Ciò però non esclude, anzi a scanso d'equivoco, è ben ricordare, che sempre anche nelle vecchie code riprodotte, nel punto della zona media della parete di questo tubo si trova tessuto cartilagineo senza sali calcarei.

Riproduzione del filo terminale. — Nella coda riprodotta non si riproduce il midollo spinale, ma il filo terminale. In un taglio longitudinale (tav. II, fig. 7) che comprende l'ultima porzione della coda rimasta insieme a quella rigenerata, si vede da ambo i lati nella parte anteriore in corrispondenza delle ultime due vertebre, il forame di congiunzione, e l'ultima porzione del midollo spinale, che presenta la forma conica, e si continua con il nuovo filo terminale riprodotto.

Il punto di continuazione fra il cono del midollo spinale ed il filo terminale riprodotto corrisponde esattamente al punto di congiunzione fra il tubo cartilagineo della coda riprodotta e la porzione dell'ultima vertebra rimasta.

L'ultima porzione conica del midollo spinale presenta le due sostanze del midollo, cioè la sostanza grigia o centrale traversata dal canale centrale e ricca delle cellule nervose come precisamente si trova in tutto il resto del midollo spinale. Medesimamente la sostanza periferica o bianca è formata dalle fibre nervose, che compongono i tre cordoni midollari ed è rivestita all'esterno dalla pia madre.

Fra la pia madre che in questa porzione avvolge il midollo, e la dura meninge, che tappezza lo speco vertebrale resta uno spazio piuttosto considerevole contenente il liquido cefalo-rachidiano. Dall' ultima porzione del midollo spinale rimasta avente la forma di cono non si spiccano radici dei nervi spinali. Le ultime radici dei nervi spinali si partono un po' più in alto, e queste radici s'impegnano da ciascun lato negli ultimi due forami di congiunzione, rimasti tra le due penultime vertebre, ove la radice di senso porta un grosso ganglio intervertebrale per formare il tronco nervoso misto dei nervi periferici, che si distribuiscono nella porzione della coda riprodotta.

Il filo terminale della coda riprodotta percorre tutto il canale cartilagineo fino alla punta, come dianzi dissi.

Fra la superficie esterna di questo filo e la superficie interna del canale cartilagineo esiste anche un largo spazio, il quale però è riempito da un tessuto congiuntivo, che riunisce la superficie esterna del filo terminale alla superficie interna del canale cartilagineo. Questo tessuto presenta i caratteri del tessuto congiuntivo giovine. È fatto da una sostanza fibrillare ricca di corpuscoli di connettivo, la quale è traversata da una rete di grossi vasi sanguigni e contiene inoltre qua e là molte cellule ramificate cariche di pigmento nero.

Il filo terminale è traversato dal canale centrale, che si termina nell'estremità della coda a fondo cieco e non aperto come lo ha figurato H. Müller. Questo canale centrale è più largo in alto e meno in basso, e ordinariamente ha la forma ovale nell'estremità inferiore, ove è anche stretto; ed ha la forma rotonda in alto ov'è più largo.

Nel punto di continuazione tra il filo della parte riprodotta e il cono del midollo spinale della parte rimasta, il canale centrale presenta una forte dilatazione,

che si continua in alto colla porzione del canale centrale del midollo rimasto stretto, e in basso con quella del filo terminale più largo.

Il canale centrale è circondato anche qui dalle cellule cilindriche, le quali però si presentano molto allungate ed i loro nuclei granulosi e moltiplicati. All'intorno delle cellule cilindriche del canale si vede nei tagli trasversi (tav. II, fig. 8, 9, 10) l'anello della sostanza gelatinosa centrale, la quale è fatta, come nel midollo spinale, da un tessuto più ricco ancora di nuclei o corpuscoli di congiuntivo. Questa sostanza, come si vede nel taglio longitudinale, forma una prima guaina congiuntiva al canale centrale. A questa guaina congiuntiva interna fatta dalla sostanza gelatinosa centrale (filo dell'epandima di Wirchow) succede un'altra guaina congiuntiva esterna, fatta dalla pia madre che dal midollo spinale primitivo si continua nel filo terminale riprodotto.

Io non ho potuto vedere nelle parti che compongono il filo terminale della porzione riprodotta, come nemmeno nel tessuto congiuntivo che riunisce questo filo alla faccia interna del canale cartilagineo, nè fibre nervose di sorta, nè cellule nervose come le ha ammesse prima Calori e poi H. Müller. Per conseguenza i risultati delle mie ricerche confermano quel che Gegenbaur aveva sospettato; e questi risultati vanno d'accordo con quanto ho trovato nel filo terminale della coda normale e quindi con la teoria sostenuta dal Bidder. Adunque nel filo terminale della coda delle lucertole, sia riprodotta o no, non si trovano mai elementi nervosi.

A conferma del fatto anatomico ora stabilito nella coda riprodotta, viene l'esperimento fisiologico.

È ovvio il fatto che staccando la coda ad una lucertola, questa presenta in modo esagerato i movimenti riflessi. Ora staccando varie code riprodotte, alcune delle quali avevano la lunghezza di dieci centimetri, io non mi sono potuto accorgere mai di alcun movimento anche dopo forte irritazione con un ago; però quando insieme alla parte riprodotta ho portato via una porzione anche piccolissima della coda primitiva, i movimenti riflessi erano sensibili come nelle code normali, e ciò perchè allora trovavasi ancora in questa porzione staccata l'ultima parte del midollo spinale, nel quale si trova il centro dei movimenti riflessi della coda riprodotta.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tavola I.

Fig. 1. Taglio trasversale della porzione cervicale superiore del midollo spinale; *cs.* commissura grigia superiore; *cc.* canale centrale; *cni.* cellule nervose delle corna inferiori; *v.* vertebra; *ca.* commissura accessoria; *ci.* commissura grigia inferiore; *fi.* fasci midollari inferiori; *cns.* cellule nervose delle corna superiori; *fs.* fasci midollari superiori.

Fig. 2. Taglio trasversale del rigonfiamento cervicale del midollo spinale; *cc.* canale centrale; *pm.* pia madre; *cv.* canale vertebrale; *vv.* vaso venoso; *gl.* ganglio del simpatico; *v.* corpo della vertebra; *ci.* commissura inferiore; *ri.* radice inferiore; *rs.* radice superiore; *cs.* commissura superiore.

Fig. 3. Taglio trasversale del midollo spinale, che percorre il canale vertebrale della coda; *cns.* cellule nervose delle corna superiori; *cv.* canale vertebrale; *cc.* canale centrale; *cm.* cordoni midollari; *cni.* cellule nervose delle corna inferiori; *v.* vertebra; *ao.* aorta; *ea.* emapofisi; *vc.* vena centrale; *se.* spina emale; *ci.* commissura inferiore; *gl.* ganglio intervertebrale; *fi.* fasci midollari inferiori; *fs.* fasci midollari superiori; *cs.* commissura superiore.

Fig. 4. Taglio trasversale del midollo spinale a livello della regione sacrale; *cs.* commissura superiore; *cc.* canale centrale; *pm.* pia madre; *ci.* commissura inferiore; *ca.* commissura accessoria; *ri.* radice inferiore dei nervi spinali; *cni.* cellule nervose delle corna inferiori; *fi.* fasci midollari inferiori; *fs.* fasci midollari superiori; *rs.* radice superiore dei nervi spinali; *cnc.* cellula nervosa commensurale.

Fig. 5. Taglio longitudinale del rigonfiamento lombare del midollo spinale; *cnc.* cellule nervose commensurali; *cc.* canale centrale; *fi.* fasci midollari inferiori; *cg.* colonna grigia; *cm.* cordone midollare.

Tavola II.

Fig. 6. Taglio trasversale della punta della coda normale; *cv.* canale vertebrale; *cc.* canale centrale; *np.* nervo periferico; *vs.* vaso sanguigno; *ep.* epidermide; *d.* derma; *cv'.* corpo vertebrale.

Fig. 7. Taglio longitudinale, in cui è compresa l'ultima porzione della coda primitiva col principio della parte riprodotta; *v.* vertebra; *r.* radice superiore dei nervi spinali; *gl.* ganglio intervertebrale; *cm.* cordoni midollari; *pm.* pia madre; *nc.* nucleo cartilagineo; *cv.* canale vertebrale; *ccc.* cellule congiuntive centrali; *cc.* canale centrale; *pm.* pia madre; *tc.* tubo cartilagineo; *vs.* vaso sanguigno.

Fig. 8. Taglio trasversale della punta della coda riprodotta; *ep.* epidermide; *tc.* tubo cartilagineo; *cc.* canale centrale; *vs.* vaso sanguigno; *ccc.* cellule congiuntive centrali; *pc.* piccoli corpuscoli; *np.* nervo periferico; *ar.* arteria.

Fig. 9. Taglio trasversale della coda riprodotta a livello di due centimetri e mezzo dall'estremità caudale; *pm.* pia madre; *ccc.* cellule congiuntive centrali; *tc.* tubo cartilagineo; *cc.* canale centrale; *d.* derma; *ep* epidermide; *np.* nervo periferico; *m.* muscoli; *ar.* aorta.

Fig. 10. Taglio trasversale del tubo cartilagineo a livello della sua base; *pc.* pericondrio; *cce.* cellule cartilaginee esterne; *cj.* cartilagine jalina; *cci.* cellule cartilaginee interne; *vs.* vaso sanguigno; *cc.* canale centrale; *ccc.* cellule congiuntive centrali; *pm.* pia madre.

Fig. 11. Canale centrale visto con forte ingrandimento.

INDICE DEL VOLUME II.° SERIE 3.ª

Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Fambri. *Intorno alle condizioni idrauliche del Danubio a Buda-Pest dopo i lavori di rettificazione del* 1872 (con due tavole) . . . . pag. 5
De Stefani. *Sulle tracce attribuite all'uomo pliocenico nel Senese. Nota approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 2 dicembre* 1877 . . . . » 17
Bertè. *Contribuzione all'anatomia ed alla fisiologia delle antenne degli Afanitteri. Nota approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 6 gennaio* 1878 (con una tavola) . . . . » 24
De Paolis. *La trasformazione piana doppia di secondo ordine, e la sua applicazione alla geometria non euclidea. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 2 dicembre* 1877 . . . » 31
Issel. *Nuove ricerche sulle caverne ossifere della Liguria. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nelle sedute del 2 dicembre* 1877 *e 3 febbraio* 1878 (con cinque tavole) . . . . » 51
Cossa. *Ricerche chimiche su minerali e roccie dell'Isola di Vulcano* . . » 117
Roiti. *La viscosità e l'elasticità susseguente nei liquidi. Ricerche sperimentali. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 6 gennaio* 1878 . . . . » 126
Colasanti. *Sulla degenerazione dei nervi recisi. Nota presentata dal Socio* Tommasi-Crudeli *nella seduta del 4 febbraio* 1877 (con una tavola) . . » 156
Panebianco. *Note cristallografiche e chimiche. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia nella seduta del 3 marzo* 1878 (con una tavola) . . . . » 165
Rossetti. *Indagini sperimentali sulla temperatura del Sole. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia nella seduta del 6 gennaio* 1878 (con una tavola) . . . . » 169
Favero. *La determinazione grafica delle forze interne nelle travi reticolari. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 3 marzo* 1878 (con sei tavole) . . . . » 201
Capellini. *Il calcare di Leitha, il Sarmatiano e gli Strati a Congerie nei monti di Livorno, di Castellina marittima, di Miemo e di Monte Catini. Considerazioni geologiche e paleontologiche.* . . . . » 275
Struever. *Sopra alcuni notevoli geminati polisintetici di spinello orientale* (con una tavola) . . . . » 292
Keller. *Sulla variazione secolare della declinazione magnetica di Roma. Nota approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia nella seduta del 7 aprile* 1878 . . . . » 305
Schiaparelli. *Osservazioni astronomiche e fisiche sull'asse di rotazione e sulla*

topografia del pianeta Marte: fatte nella Reale Specola di Brera in Milano coll'equatoriale di Merz durante l'opposizione del 1877 (con cinque tavole) pag. 508
Guareschi. *Sulla Carbotialdina ed altri composti solforati. Nota approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del* 7 *aprile* 1878 . » 441
Lucas. *Sur un principe fondamental de géométrie et de trigonométrie. Mémoire approuvé pour l'insertion dans les Actes de l'Académie dans la séance du* 7 *avril* 1878 . . . . » 449
Ruggero. *Oggetti preistorici calabresi del Catanzarese e del Cosentino. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia nella seduta del* 3 *marzo* 1878 (con quattro tavole) . . . . » 457
Bianchi. *Sull'applicabilità delle superficie degli spazi a curvatura costante. Nota approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia nella seduta del* 5 *maggio* 1878 . . . . » 479
Briosi. *Intorno al mal di gomma degli agrumi* (Fusisporium Limoni, *Briosi*). *Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del* 5 *maggio* 1878 (con una tavola) . . . . » 485
Cossa. *Sulla diabase peridotifera di Mosso nel Biellese* . . . . » 497
di S[t] Robert Paolo. *Cannocchiale pensile per la misura degli angoli verticali ed orizzontali* (con tre tavole) . . . . » 502
Giordano. *Sul sistema usato pel rilevamento della Carta geologica d'Italia. Nota approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del* 5 *maggio* 1878. . . . . » 507
Bechi. *Teorica dei Soffioni boraciferi della Toscana. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del* 5 *maggio* 1878 » 514
Saviotti. *Le travature reticolari a membri caricati. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accad. nella seduta del* 5 *maggio* 1878 (con tre tavole) » 525
Moriggia. *Sperienze fisiotossicologiche sulla delfina* . . . . » 535
Paternò. *Sulla identità degli acidi usnico e carbonusnico. Nota approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del* 16 *giugno* 1878 » 541
Cannizzaro e Valente. *Sopra alcuni derivati della santonina* . . . . » 547
Cannizzaro e Carnelutti. *Sopra due altri isomeri della santonina*. . . . » 554
Struever. *Sulla forma cristallina di alcuni derivati della santonina. Seconda serie* (con due tavole) . . . . » 556
Keller. *Misure della componente orizzontale del magnetismo terrestre, eseguite in alcune località dei dintorni di Roma. Nota approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del* 2 *giugno* 1878 . . . . . » 577
Ascoli. *Nuove ricerche sulla Serie di Fourier. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del* 7 *aprile* 1878 . . » 584
Taramelli. *Sulla formazione serpentinosa dell' Apennino pavese. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del* 5 *maggio* 1878 (con due tavole) . . . . » 652
Ponzi. *Le ossa fossili subapennine dei contorni di Roma*. . . . . . . » 709
Bellucci. *Sulla pretesa esistenza dell' acqua ossigenata nell' organismo delle piante. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia nella seduta del* 16 *giugno* 1878 . . . . » 737
Caporali. *Sui Complessi e sulle Congruenze di* 2° *grado. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del* 2 *giugno* 1878. . » 749
Lovisato. *Strumenti litici e brevi cenni geologici sulle provincie di Catanzaro*

e di Cosenza. *Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 16 giugno 1878* (con una tavola) . . . . pag. 770
Caporali. *Sopra i piani ed i punti singolari della superficie di Kummer. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 2 giugno 1878* . . . . » 791
Volpicelli. *Rettificazione delle formule dalle quali viene rappresentata la teorica fisico-matematica del condensatore voltaico* . . . . » 811
De Paolis. *La trasformazione piana doppia di terzo ordine, primo genere, e la sua applicazione alle curve del quarto ordine. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 5 maggio 1878.* . » 851
Angelucci. *Osservazioni sulle alterazioni dei gangli intervertebrali in alcune malattie della midolla. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 2 giugno 1878* (con una tavola) . . . » 879
Selmi. *Di alcune sostanze non metalliche che accelerano la reazione tra lo zinco e l'acido solforico* . . . . » 895
Betocchi. *Effemeride e statistica del fiume Tevere prima e dopo la confluenza dell'Aniene e dello stesso fiume Aniene durante l'anno 1877* (con una tavola) » 922
Cossa. *Sul serpentino di Verrayes in Valle d'Aosta* (con quattro tavole) . . » 935
De Zigno. *Sopra un nuovo Sirenio fossile scoperto nelle colline di Brà in Piemonte. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 2 giugno 1878* (con sei tavole) . . . . » 939
Gastaldi. *Sui rilevamenti geologici fatti nelle Alpi piemontesi durante la campagna del 1877. Lettera al Presidente* (con due tavole) . . . . . » 951
Baretti. *Sui rilevamenti geologici fatti nelle Alpi piemontesi durante la campagna del 1877. Nota approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 2 giugno 1878* (con una tavola) . . . . » 965
Respighi. *Declinazioni medie pel 1875,0 di 285 stelle dalla 1ª alla 6ª grandezza, comprese fra i paralleli di declinazione nord 20° e 64°* . . » 975
Id. *Osservazioni del diametro orizzontale del sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio nel 1877* . . . . » 1005
Incoronato. *Scheletri umani della caverna delle Arene candide presso Finalmarina in Savona. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 2 giugno 1878* (con due tavole) . . . . » 1019
Angelucci. *Ricerche istologiche sull'epitelio retinico dei vertebrati. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del Cons. d'Amm. del 27 giugno 1878* (con due tavole) . . . . » 1031
Bagnis. *Micologia Romana. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 2 giugno 1878* (con due tavole) . . . . » 1057
Todaro. *Sulla struttura intima della pelle de'rettili* (con cinque tavole) . . » 1075
Giuliani. *Sulla struttura del midollo spinale e sulla riproduzione della coda della* Lacerta viridis. *Memoria presentata dal Socio* Todaro *nella seduta del 17 giugno 1877.* (con due tavole) . . . . » 1129

ERRATA	CORRIGE
Pag. 562 lin. 30 parallelo a b	parallelo a c
» 567 » 12 ad HO	ad H

INDICE DEL VOLUME II° SERIE 3ª.

DISPENSA PRIMA

Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Fambri. *Intorno alle condizioni idrauliche del Danubio a Buda-Pest dopo i lavori di rettificazione del* 1872 (con due tavole) . . . . pag. 3

De Stefani. *Sulle tracce attribuite all'uomo pliocenico nel Senese. Nota approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 2 dicembre* 1877 . . . . » 17

Bertè. *Contribuzione all'anatomia ed alla fisiologia delle antenne degli Afaniteri. Nota approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 6 gennaio* 1878 (con una tavola) . . . . » 24

De Paolis. *La trasformazione piana doppia di secondo ordine, e la sua applicazione alla geometria non euclidea. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 2 dicembre* 1877. . . . . » 31

Issel. *Nuove ricerche sulle caverne ossifere della Liguria. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nelle sedute del 2 dicembre 1877 e 3 febbraio* 1878 (con cinque tavole) . . . . » 51

Cossa. *Ricerche chimiche su minerali e roccie dell'Isola di Vulcano* . . » 117

Roiti. *La viscosità e l'elasticità susseguente nei liquidi. Ricerche sperimentali. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 6 gennaio* 1878 . . . . » 126

Colasanti. *Sulla degenerazione dei nervi recisi. Nota presentata dal Socio* Tommasi Crudeli *nella seduta del 4 febbraio* 1877 (con una tavola) . . . » 156

Panebianco. *Note cristallografiche e chimiche. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 3 marzo* 1878 (con una tavola) . . . . » 165

Rossetti. *Indagini sperimentali sulla temperatura del Sole. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 6 gennaio* 1878 (con una tavola) . . . . » 169

Favero. *La determinazione grafica delle forze interne nelle travi reticolari. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 3 marzo* 1878 (con sei tavole) . . . . » 201

Capellini. *Il calcare di Leitha, il Sarmatiano e gli Strati a Congerie nei monti di Livorno, di Castellina marittima, di Miemo e di Monte Catini. Considerazioni geologiche e paleontologiche* . . . . » 275

Struever. *Sopra alcuni notevoli geminati polisintetici di spinello orientale* (con una tavola) . . . . » 292

Keller. *Sulla variazione secolare della declinazione magnetica di Roma. Nota approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia nella seduta del 7 aprile* 1878 . . . . pag. 505
Schiaparelli. *Osservazioni astronomiche e fisiche sull'asse di rotazione e sulla topografia del pianeta Marte: fatte nella Reale Specola di Brera in Milano coll'equatoriale di Merz durante l'opposizione del* 1877 (con cinque tavole) » 508
Guareschi. *Sulla Carbotialdina ed altri composti solforati. Nota approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 7 aprile* 1878 » 441
Lucas. *Sur un principe fondamental de géométrie et de trigonométrie. Mémoire approuvé pour l'insertion dans les Actes de l'Académie dans la séance du 7 avril* 1878 . . . . » 449
Ruggero. *Oggetti preistorici calabresi del Catanzarese e del Cosentino. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 3 marzo* 1878 (con quattro tavole). . . . . » 457
Bianchi. *Sull' applicabilità delle superficie degli spazi a curvatura costante. Nota approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 5 maggio* 1878. . . . . » 479
Briosi. *Intorno al mal di gomma degli agrumi* (Fusisporium Limoni, *Briosi*). *Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 5 maggio* 1878 (con una tavola) . . . . » 485
Cossa. *Sulla diabase peridotifera di Mosso nel Biellese* . . . . » 497
di S^t Robert Paolo. *Cannocchiale pensile per la misura degli angoli verticali ed orizzontali* (con tre tavole) . . . . » 502
Giordano. *Sul sistema usato pel rilevamento della Carta geologica d'Italia. Nota approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 5 maggio* 1878 . . . . » 507
Bechi. *Teorica dei Soffioni boraciferi della Toscana. Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 5 maggio* 1878 . . » 514

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 105615006